MS211 - Turma Y - Prova 1 - 03/10/2024

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) **Justifique as suas respostas** exceto aquela da Questão 1 b). Boa prova!

1. Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & -1 \\ -0.75 & -0.4 & -2.85 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Além disso, suponha que a fatoração LU de uma matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ resultou nas seguintes matrizes M, V e Q :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.3 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a fatoração LU com pivoteamento parcial da matriz A. Para tanto, utilize um vetor $\mathbf{p}$ para lembrar das posições das linhas, matrizes $R^{(i)}$ e - se for necessário - $R^{(i)'}$, para $i = 1, 2$. Denote os resultados desta fatoração LU usando os símbolos L, U e P. [1.5 pts]

(b) Qual é a relação entre B e as matrizes M, V e Q? Responde a este pergunta numa linha e sem fazer cálculos. [0.25 pt]

(c) Utilize somente as matrizes M, V e Q acima para resolver $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4.6 \\ -5.1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para tanto, escreve um sistema equivalente a $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e resolve dois sistemas triangulares. Isso deve ser feito sem calcular a matriz B. [1.25 pts]

2. (a) Qual é a relação entre o método de (Gauss-)Jacobi para resolução de sistemas lineares da forma $Ax = b$ e a classe dos métodos de ponto fixo? [0.5]

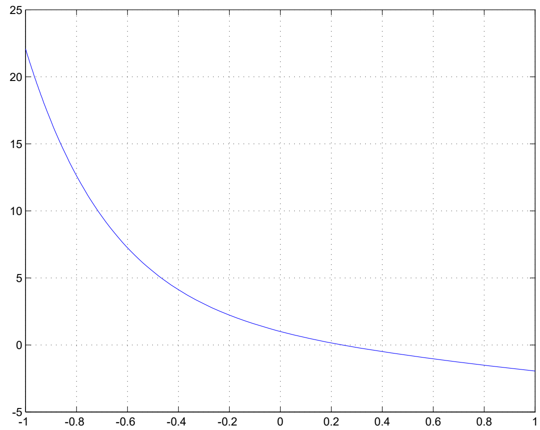
   (b) Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Verifique que existe uma matriz de permutação P tal que a matriz $\tilde{A} = PA$ satisfaz o critério de Sassenfeld. [1 pt]

   (c) Considerando a sua resposta do item (c), como você sugere resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{b}$ qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$, usando um método iterativo? Não deve fazer nenhuma conta. Somente precisa indicar qual método você sugere usar, porque este método é indicado e como ele pode ser aplicado neste caso. [0.5pt]

3. (a) A figura em baixo mostra o gráfico de $f(x) = e^{-3x} - 2x$ no intervalo $[-1, 1]$.



Faça uma interpretação gráfica de três iterações do método de Newton-Raphson com chute inicial $x_0 = -1$ e obtenha x_1, x_2 e x_3 gráficamente. Porque podemos afirmar que a sequência gerada converge para uma raiz de f? [0.75 pts]

(b) Quantas raizes *reais* possui a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = e^{-3x} - 2x \ \forall x \in \mathbb{R}$? Justifique a sua resposta. [0.25 pt]

(c) Considerando o chute inicial $x_0 = 0$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. Qual é a aproximação obtida de uma raíz de f? [1.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0		–
1			
2			

4. Funções Gaussianas tem uma grande importância em diversas áreas científicas. Considere uma função Gaussiana bidimensional $G_{\sigma,\tau}$ da forma

$$G_{\sigma,\tau}(x,y) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{y^2}{\tau^2}\right)}$$

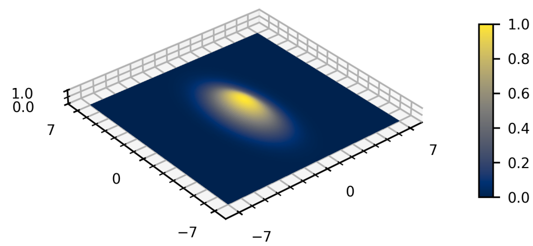


Figura 1: Uma função Gaussiana bidimensional

O volume em baixo de $G_{\sigma,\tau}$ é dado por $2\pi\sigma\tau$. Considere o problema de determinar σ^* e τ^* tal que

- O volume em baixo de G_{σ^*,τ^*} é 2π;
- $G_{\sigma^*,\tau^*}(1,1) = 0.3$.

(a) Escreve um sistema de 2 equações não-lineares em σ e τ para representar o problema descrito acima. [0.25 pt]

(b) Escreve o sistema linear do item (a) na forma $\mathbf{F}(\sigma,\tau) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. [0.25 pt]

(c) Determine a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\sigma,\tau)$ de $\mathbf{F}$. [0.5 pt]

(d) Utilizando o item anterior, execute 1 passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{z}^{(0)} = (\sigma_0,\tau_0)^T = (1.2, 0.8)^T$ e preenche os ... na tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular como foram obtidos $\mathbf{s}^{(0)}$ e $\mathbf{z}^{(1)} = (\sigma_1,\tau_1)$. Quais são as aproximações de σ^* e τ^* obtidas após 1 iteração? [1.25 pts]

k	$\mathbf{z}^{(k)}$	$\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})$	$\|\|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|\mathbf{s}^{(k-1)}\|\|_\infty$	$\mathbf{s}^{(k)}$
0	...	...	...	−	...
1	...	...	...	...	

(e) Qual é o problema que surge quando se toma – ao invés de $\mathbf{z}^{(0)} = (1.2, 0.8)^T$ – o vetor $\mathbf{z}^{(0)} = (\sigma_0,\tau_0)^T = (1,1)^T$ como chute inicial no item anterior? [0.25 pt]