GABARITO

MS211 - Turma Y - Prova 1 - 03/10/2024

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) **Justifique as suas respostas** exceto aquela da Questão 1 b). Boa prova!

1. Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & -1 \\ -0.75 & -0.4 & -2.85 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Além disso, suponha que a fatoração LU de uma matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ resultou nas seguintes matrizes M, V e Q :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.3 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a fatoração LU com pivoteamento parcial da matriz A. Para tanto, utilize um vetor $\mathbf{p}$ para lembrar das posições das linhas, matrizes $R^{(i)}$ e - se for necessário - $R^{(i)'}$, para $i = 1, 2$. Denote os resultados desta fatoração LU usando os símbolos L, U e P. [1.5 pts]

(b) Qual é a relação entre B e as matrizes M, V e Q? Responde a este pergunta numa linha e sem fazer cálculos. [0.25 pt]

(c) Utilize somente as matrizes M, V e Q acima para resolver $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4.6 \\ -5.1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para tanto, escreve um sistema equivalente a $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e resolve dois sistemas triangulares. Isso deve ser feito sem calcular a matriz B. [1.25 pts]

(a) $A = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & -1 \\ -0.75 & -0.4 & -2.85 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -0.75 & -0.4 & -2.85 \\ -1.5 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$

$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -0.25 & -0.4 & -1.6 \\ -0.5 & -1 & 1.5 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$, $R^{(1)'} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -0.5 & -1 & 1.5 \\ -0.25 & -0.4 & -1.6 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$ $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -0.5 & -1 & 1.5 \\ -0.25 & 0.4 & -2.2 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$ $\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & -2.2 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $QB = MV$ $\frac{1}{4}$

(c) $Bx = b \Leftrightarrow \underbrace{QB}_{MV}x = Qb \Leftrightarrow M(\underbrace{Vx}_{y}) = Qb$ $\frac{1}{4}$

1. Resolve $My = Qb$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0.2 & 1 & 0 & 4.6 \\ 0.3 & -0.5 & 1 & -5.1 \end{array}\right)$$

$y_1 = -2$

$-0.4 + y_2 = 4.6 \Rightarrow y_2 = 5$

$-0.6 - 2.5 + y_3 = -5.1$

$\Rightarrow -3.1 + y_3 = -5.1$

$\Rightarrow y_3 = -2$

$\frac{1}{2}$

2. Resolve $Vx = y$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$4x_1 - 2 = -2 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 + 4 = 5 \Rightarrow x_2 = 1$

$x_3 = 2$

$\frac{1}{2}$

$\therefore x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. (a) Qual é a relação entre o método de (Gauss-)Jacobi para resolução de sistemas lineares da forma $Ax = b$ e a classe dos métodos de ponto fixo? [0.5]

(b) Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que existe uma matriz de permutação P tal que a matriz $\tilde{A} = PA$ satisfaz o critério de Sassenfeld. [1 pt]

(c) Considerando a sua resposta do item (c), como você sugere resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{b}$ qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$, usando um método iterativo? Não deve fazer nenhuma conta. Somente precisa indicar qual método você sugere usar, porque este método é indicado e como ele pode ser aplicado neste caso. [0.5pt]

(a) Podemos expressar $Ax=b$ na forma $x = Cx + g$, sendo C a matriz e g o vetor usados nas iterações de (Gauss-)Jacobi dadas por $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$. Seja $\varphi(x) = Cx + g$. Temos $Ax = b \iff x = \varphi(x)$. Portanto, o método de (Gauss-)Jacobi é um método de ponto fixo.

(b) Seja $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\tilde{A} = P \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{C}| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0\cdot\frac{2}{3} & 2\cdot\frac{5}{12} & 0 \end{pmatrix}$

$\beta_1 = \frac{2}{3} < 1$ ✓

$\beta_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} < 1$ ✓

$\beta_3 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} < 1$ ✓

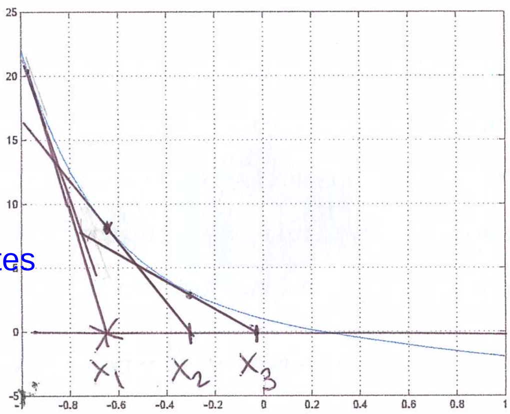
$\therefore \tilde{A} = PA$ satisfaz o critério de Sassenfeld

(c) Sugiro aplicar o método de Gauss-Seidel para resolver $PAx = Pb \iff Ax = b$ porque sabemos que $PA = \tilde{A}$ satisfaz o critério de Sassenfeld. Portanto, o método de Gauss-Seidel produz uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para a solução de $PAx = Pb$ que é igual àquela de $Ax = b$

3. (a) A figura em baixo mostra o gráfico de $f(x) = e^{-3x} - 2x$ no intervalo $[-1, 1]$.

Note que f(0) > 0.
Além disso, f é concava, quer dizer para qualquer ponto a temos que a tangente t de f em a satisfaz t(x) <= f(x) para todo x.
Considerando que f é estritamente decrescente, temos que a sequência é crescente.
Todo x_k <= a raiz porque as tangentes ficam em baixo de f

Portanto, a sequência gerada converge.



Note também que f'(x) > -1 para todo x > 0.

Se tivesse um limite L < a raiz da sequência, teria para cada epsilon > 0 um x_k tal que x_k - L < epsilon e f(L)-f(x_k) < epsilon, mas x_k > 0 porque x_4 > 0 e portanto f'(x_k) > -1. Isto implica que x_{k+1} > L.

Faça uma interpretação gráfica de três iterações do método de Newton-Raphson com chute inicial $x_0 = -1$ e obtenha x_1, x_2 e x_3 gráficamente. Porque podemos afirmar que a sequência gerada converge para uma raiz de f? [0.75 pts]

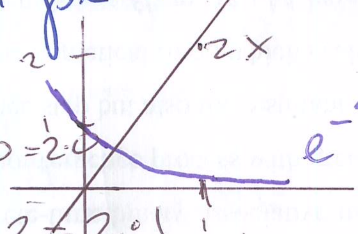
(b) Quantas raizes *reais* possui a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = e^{-3x} - 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$? Justifique a sua resposta. [0.25 pt]

(c) Considerando o chute inicial $x_0 = 0$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. Qual é a aproximação obtida de uma raíz de f? [1.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	0	1	–
1	0.2	0.1488	0.2
2	0.2408	0.004 $< \varepsilon = 10^{-2}$ PARE!	0.0408

(b) $\exists!$ 1 raiz dada pela intersecção de e^{-3x} e $2x$

Sabemos que $2x$ é estritamente crescente e e^{-3x} é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$. Portanto, pode ter no maximo 1 raiz.



Estas funções se intersectam porque $e^{-3 \cdot 0} = e^0 = 1 > 0 = 2 \cdot 0$ e $e^{-3} < 2 = 2 \cdot 1$

(c) $f(x) = e^{-3x} - 2x$

$f'(x) = -3e^{-3x} - 2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k + \frac{e^{-3x} - 2x}{3e^{-3x} + 2}$$

Aproximação obtida da raiz de f:

$x_2 = 0.2408$

4. Funções Gaussianas tem uma grande importância em diversas áreas científicas. Considere uma função Gaussiana bidimensional $G_{\sigma,\tau}$ da forma

$$G_{\sigma,\tau}(x,y) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{y^2}{\tau^2}\right)}$$

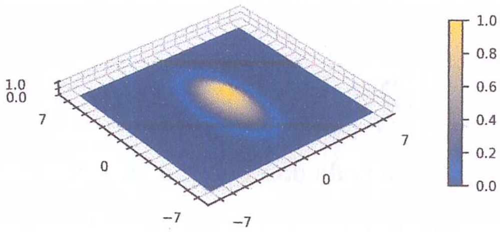


Figura 1: Uma função Gaussiana bidimensional

O volume em baixo de $G_{\sigma,\tau}$ é dado por $2\pi\sigma\tau$. Considere o problema de determinar σ^* e τ^* tal que

- O volume em baixo de G_{σ^*,τ^*} é 2π;
- $G_{\sigma^*,\tau^*}(1,1) = 0.3$.

(a) Escreve um sistema de 2 equações não-lineares em σ e τ para representar o problema descrito acima. [0.25 pt]

(b) Escreve o sistema linear do item (a) na forma $\mathbf{F}(\sigma,\tau) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. [0.25 pt]

(c) Determine a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\sigma,\tau)$ de $\mathbf{F}$. [0.5 pt]

(d) Utilizando o item anterior, execute 1 passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{z}^{(0)} = (\sigma_0,\tau_0)^T = (1.2, 0.8)^T$ e preenche os ... na tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular como foram obtidos $\mathbf{s}^{(0)}$ e $\mathbf{z}^{(1)} = (\sigma_1, \tau_1)$. Quais são as aproximações de σ^* e τ^* obtidas após 1 iteração? [1.25 pts]

k	$\mathbf{z}^{(k)}$	$\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})$	$\lVert\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})\rVert_\infty$	$\lVert\mathbf{s}^{(k-1)}\rVert_\infty$	$\mathbf{s}^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix}1.2\\0.8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.04\\0.0235\end{pmatrix}$	0.04	–	$\begin{pmatrix}0.1905\\-0.0937\end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix}1.3905\\0.7063\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.0178\\-0.166\end{pmatrix}$	0.0178	0.1905	

(e) Qual é o problema que surge quando se toma – ao invés de $\mathbf{z}^{(0)} = (1.2, 0.8)^T$ – o vetor $\mathbf{z}^{(0)} = (\sigma_0,\tau_0)^T = (1,1)^T$ como chute inicial no item anterior? [0.25 pt]

(a) $\begin{cases} \sigma\tau = 1 \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)} = 0.3 \end{cases}$

(b) $F(\sigma,\tau) = \begin{cases} \sigma\tau - 1 = 0 \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)} - 0.3 = \end{cases}$

(c) $J(\sigma,\tau) = \begin{pmatrix} \tau & \sigma \\ \sigma^{-3} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)} & \tau^{-3} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)} \end{pmatrix}$

(d) Resolve $J(z^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(z^{(0)})$

4.(d) Resolve

$$J(z^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(z^{(0)}):$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 1.2 & 0.04 \\ 0.1872 & 0.6319 & -0.0235 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.8 & 1.2 & 0.04 \\ 0 & 0.3511 & -0.0329 \end{pmatrix} \quad s^{(0)}_2 = -0.0937$$

$$0.8 \cdot s^{(0)}_1 - 1.2 \cdot 0.0937 = 0.04$$

$$\Rightarrow 0.8 \cdot s^{(0)}_1 - 0.1124 = 0.04$$

$$\Rightarrow 0.8 \cdot s^{(0)}_1 = \cancel{-0.0724}\ 0.1524$$

$$\Rightarrow s^{(0)}_1 = 0.1905$$

$$\therefore s^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1905 \\ -0.0937 \end{pmatrix}, \ z^{(1)} = z^{(0)} + s^{(0)}$$

$$\Rightarrow \rho^* \approx 0.1905 + 1.2 = 1.3905$$

$$\gamma^* \approx -0.0937 + 0.8 = 0.7063$$

(e) $J(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.3679 & 0.3679 \end{pmatrix}$ tem determinante 0

Se trata de uma matriz singular

$J(1,1) \cdot s^{(0)} = -F(1,1)$ resulta em $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0.3679 & 0.3679 & -0.0679 \end{array}\right)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0679 \end{array}\right)$$ não tem solução.

Portanto, não podemos usar o método de Newton para encontrar $z^{(1)}$ a partir de $z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$