MS211 - Cálculo Numérico

Equações Diferenciais Vetoriais e de Ordem Superior (Slides Modificados de M. E. Valle)

Na aula anterior, apresentamos os métodos de Runge-Kutta para resolução de um PVI da forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Em termos gerais, um método de Runge-Kutta define

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k), \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que ϕ é uma função de x e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h.

Na aula de hoje, veremos como os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados também para a resolução numérica de sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior, ambos com valores iniciais.

Sistemas de Equações Diferenciais

Um sistema de equações diferenciais com valor inicial

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad & y_1(x_0) &= y_{1,0}, \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), & y_2(x_0) &= y_{2,0}, \\ & \vdots & & \vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), & y_n(x_0) &= y_{n,0}, \end{cases}$$

pode ser escrito de forma mais compacta como

$$Y' = F(x, Y), \qquad Y(x_0) = Y_0,$$

em que $x \in \mathbb{R}$ e $Y(x)$, $F(x, Y)$ e Y_0 são vetores em $\mathbb{R}^n$ escritos

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad Y' = F(x, Y) = \begin{bmatrix} f_1(x, Y) \\ f_2(x, Y) \\ \vdots \\ f_n(x, Y) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{bmatrix}.$$

Métodos de Euler

O método de Euler para sistemas de equações diferenciais é

$$Y_{k+1} = Y_k + hF(x_k, Y_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que $Y_1, Y_2, \ldots$ são aproximações para $Y(x_1), Y(x_2), \ldots$.

Exemplo 1

Use o método de Euler para obter uma aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y' &= z, \\ z' &= y + e^x \end{cases} \qquad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

para $x \in [0, 0.2]$ usando $h = 0.1$.

Resolução: A fórmula do método de Euler fornece

$$Y_{k+1} = Y_k + Y_k' h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_k \\ y_k + e^{x_k} \end{bmatrix} h.$$

Para $k = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 + e^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 + e^{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 + e^{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 0.4105 \end{bmatrix}.$$

Portanto, encontramos as aproximações

$$y(0.2) \approx 1.02 \quad \text{e} \quad z(0.2) \approx 0.4105.$$

Método de Heun

De um modo similar, o método de Heun para sistemas de equações diferenciais com valor inicial é

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que

$$\mathbf{k}_1 = F(x_k, Y_k) \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_2 = F(x_k + h, Y_k + h\mathbf{k}_1).$$

Exemplo 2

Use o método de Heun para obter uma aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y' &= z, & y(0) &= 1 \\ z' &= y + e^x & z(0) &= 0 \end{cases}$$

para $x \in [0, 0.2]$ usando $h = 0.1$.

Resolução: Para $k = 0$, o método de Heun fornece:

$$\mathbf{k}_1 = F\left(x_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 + e^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{k}_2 = F\left(x_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1\right) = F\left(0 + h, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= F\left(0.1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 + e^{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.1052 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.1052 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix}$$

Para $k = 1$, o método de Heun fornece:

$$\mathbf{k}_1 = F\left(x_1, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 + e^{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 1.01 + e^{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_2 &= F\left(x_1 + h, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1\right) \\
&= F\left(0.1 + h, \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix}\right) \\
&= F\left(0.2, \begin{bmatrix} 1.03053 \\ 0.41678 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 1.03053 + e^{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 2.2519 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{h}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \\
&= \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 2.2519 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.04110 \\ 0.42362 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Equações Vetoriais Resolvidas em Forma Tabelar

Considere o PVI

$$\begin{cases} u' &= u+v, \\ v' &= -u+v, \\ u(0) &= 1 \\ v(0) &= 2 \end{cases}$$

Seja $Y = (u, v)^T$ e $Y' = (u', v')^T$.
Determine aproximações para $u(0.2)$ e $v(0.2)$ usando o método de Euler com $h = 0.1$.

x	$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	$Y' = \begin{pmatrix} u+v \\ -u+v \end{pmatrix}$	$\Delta Y = Y' \cdot h$
0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix}$
0.1	$\begin{pmatrix} 1.3 \\ 2.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.4 \\ 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.08 \end{pmatrix}$
0.2	$\begin{pmatrix} 1.64 \\ 2.18 \end{pmatrix}$		

Obtemos $u(0.2) \approx 1.64$ e $v(0.2) \approx 2.18$.

Equações Vetoriais Resolvidas em Forma Tabelar

Considere o PVI seguinte:

$$\begin{cases} u' &= u+v, \\ v' &= -u+v, \\ u(0) &= 1 \\ v(0) &= 2 \end{cases}$$

Determine aproximações para $u(0.2)$ e $v(0.2)$ usando o método de Heun com $h = 0.1$.

x_k	$Y_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} u_k + v_k \\ -u_k + v_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y'_k h = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k+1} \\ \bar{v}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k+1} + \bar{v}_{k+1} \\ -\bar{u}_{k+1} + \bar{v}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = (Y'_k + \bar{Y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.3 \\ 2.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.4 \\ 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.09 \end{pmatrix}$
0.1	$\begin{pmatrix} 1.32 \\ 2.09 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.41 \\ 0.77 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.661 \\ 2.167 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.828 \\ 0.506 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3619 \\ 0.0638 \end{pmatrix}$
0.2	$\begin{pmatrix} 1.6819 \\ 2.1538 \end{pmatrix}$				

Obtemos $u(0.2) \approx 1.6819$ e $v(0.2) \approx 2.1538$.

Equações Vetoriais Resolvidas em Forma Tabelar

Considere o PVI

$$\begin{cases} u' &= uv + w + x, \\ v' &= u - w, \\ w' &= u + x, \\ u(1) &= 0 \\ v(1) &= 2 \\ w(1) &= -1 \end{cases}$$

Seja $Y = (u, v, w)^T$ e $Y' = (u', v', w')^T$. Estime $u(1.2)$ usando o método de Euler com $h = 0.1$.

x	$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$	$Y' = \begin{pmatrix} uv + w + x \\ u - w \\ u + x \end{pmatrix}$	$\Delta Y = Y' \cdot h$
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$
1.1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.9 \\ 0.11 \end{pmatrix}$
1.2	$\begin{pmatrix} \mathbf{0.02} \\ 2.19 \\ -0.79 \end{pmatrix}$		

Obtemos $u(1.2) \approx 0.02$.

Equações Vetoriais Resolvidas em Forma Tabelar

Considere o PVI do exemplo anterior. Determine uma aproximação para $u(1.2)$ usando o método de Heun com $h = 0.1$.

x_k	$Y_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} u_k v_k + w_k + x_k \\ u_k - w_k \\ u_k + x_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y'_k h = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k+1} \\ \bar{v}_{k+1} \\ \bar{w}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k+1}\bar{v}_{k+1} + \bar{w}_{k+1} + x_{k+1} \\ \bar{u}_{k+1} - \bar{w}_{k+1} \\ \bar{u}_{k+1} + x_{k+1} \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = (Y'_k + \bar{Y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.095 \\ 0.105 \end{pmatrix}$
1.1	$\begin{pmatrix} 0.01 \\ 2.095 \\ -0.895 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2260 \\ 0.9050 \\ 1.1100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0326 \\ 2.1855 \\ -0.7840 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4872 \\ 0.8166 \\ 1.2326 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0357 \\ 0.0861 \\ 0.1171 \end{pmatrix}$
1.2	$\begin{pmatrix} \mathbf{0.0457} \\ 2.1811 \\ -0.7779 \end{pmatrix}$				

Obtemos $u(1.2) \approx 0.0457$.

Modelo Presa-Predador

Considere duas espécies que interagem como presa-predador. Por exemplo, lobos e coelhos.

Denote por $p(t)$ e $q(t)$ a quantidade (e.g. densidade populacional) de presas e predadores no instante t.

A dinâmica populacional das duas espécies pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais, chamado equações de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} p' = ap - bpq, \\ q' = -cq + dpq, \end{cases}$$

em que a, b, c e d são constantes positivas.

Considere

$$a = 0.25, \quad b = 0.01, \quad c = 1.00 \quad \text{e} \quad d = 0.01,$$

e a condição inicial

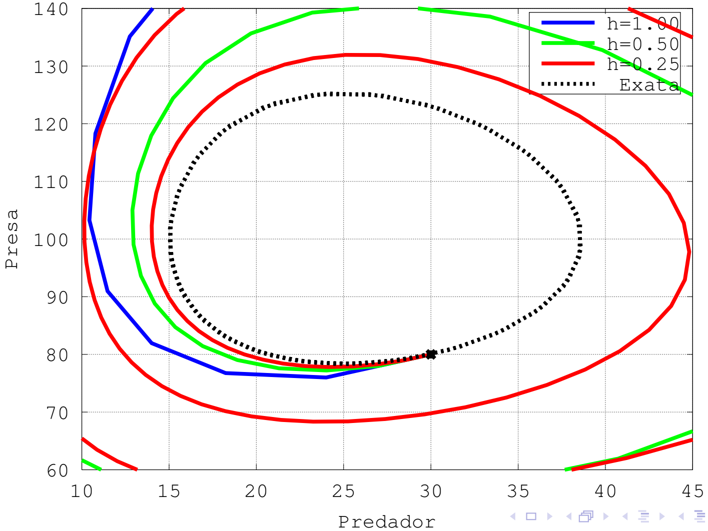
$$p_0 = 80 \quad \text{e} \quad q_0 = 30.$$

Equivalentemente, temos

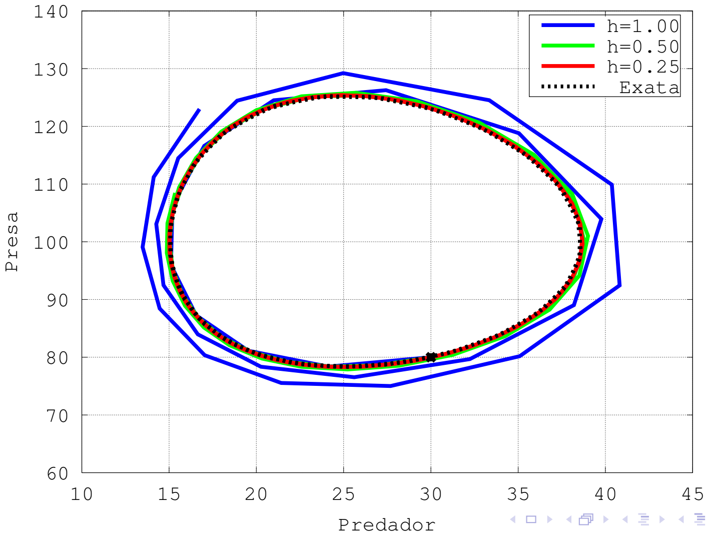
$$\begin{cases} p' = 0.25p - 0.01pq, \\ q' = -1.00q + 0.01pq, \end{cases} \qquad \begin{aligned} p(t_0) &= 80, \\ q(t_0) &= 30. \end{aligned}$$

Nesse caso, encontramos as seguintes aproximações usando os métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de ordem 4.

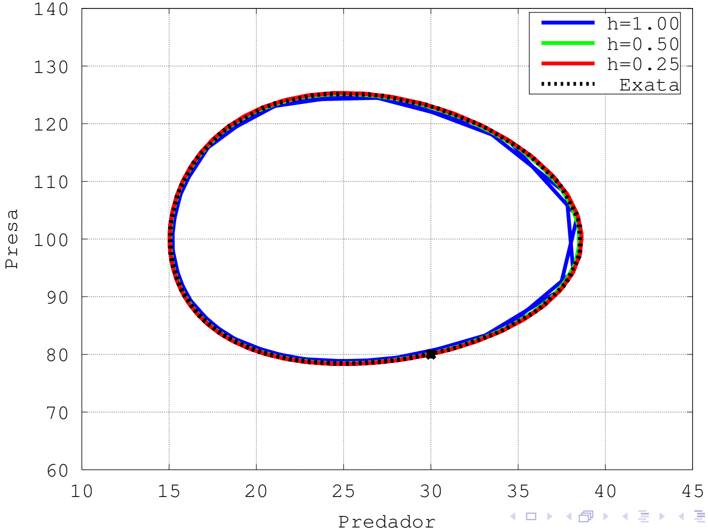
Método de Euler



Método de Heun



Método de Runge-Kutta ordem 4



Equações Diferenciais de Ordem Superior

Caso Especial

Equações de Ordem Superior

Considere o problema

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_0'$$
$$y''(x_0) = y_0''$$
$$\vdots$$
$$y^{(p)}(x_0) = y_0^{(p)}$$

e $y^{(p+1)} = f(y, y', \dots, y^{(p)}, x)$

Definimos $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(p)} \end{pmatrix} \Rightarrow Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ y_0'' \\ \vdots \\ y_0^{(p)} \end{pmatrix}$

e $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(p)} \\ f(y, y', \dots, y^{(p)}, x) \end{pmatrix}$

Exemplo 3

Escreva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' - u = e^x, \\ u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais com valor de inicial.

Exemplo 3

Escreva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' - u = e^x, \\ u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais com valor de inicial.

Resposta: Definindo

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix},$$

podemos escrever o problema de valor inicial como

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ e^x + u \end{pmatrix} \quad U(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é o mesmo sistema encontrado no Exemplo 1.

EDOs de Ordem Superior em Forma Tabelar

Eq's Dif's de Ordem Superior

Exemplo: Considere

$$y'' = -\frac{y'}{x}, \quad x \neq 0$$

$$y(1) = 0$$
$$y'(1) = \frac{2}{\ln(4)}$$

Aproxime $y(2)$ utilizando o mét. de Euler com $h=0.5$

Seja $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -\frac{y'}{x} \end{pmatrix}$

x	$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$	$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ -\frac{y'}{x} \end{pmatrix}$	$\Delta \underline{Y} \approx \underline{Y}' \cdot h$
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2/\ln 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/\ln 4 \\ -2/\ln 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\ln 4 \\ -1/\ln 4 \end{pmatrix}$
1.5	$\begin{pmatrix} 1/\ln 4 \\ 1/\ln 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\ln 4 \\ -2/(3\ln 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/(2\ln 4) \\ -1/(3\ln 4) \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3/(2\ln 4) \\ 2/(3\ln 4) \end{pmatrix}$	$y(2) \approx 3/(2\ln 4)$	

EDOs de Ordem Superior em Forma Tabelar

Considere o PVI vetorial do slide anterior. Utilize o método de Euler Aperfeiçoado com $h = 0.5$ para estimar $y(2)$.

x_k	$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} y'_k \\ -y'_k/x_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y'_k h = \begin{pmatrix} \bar{y}_{k+1} \\ \bar{y}'_{k+1} \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{y}'_{k+1} \\ -\bar{y}'_{k+1}/x_{k+1} \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = (Y'_k + \bar{Y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2/\ln 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/\ln 4 \\ -2/\ln 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\ln 4 \\ 1/\ln 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\ln 4 \\ -2/(3\ln 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3/(4\ln 4) \\ -2/(3\ln 4) \end{pmatrix}$
1.5	$\begin{pmatrix} 3/(4\ln 4) \\ 4/(3\ln 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4/(3\ln 4) \\ -8/(9\ln 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17/(12\ln 4) \\ 8/(9\ln 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8/(9\ln 4) \\ -4/(9\ln 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5/(9\ln 4) \\ -1/(3\ln 4) \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 47/(36\ln 4) \\ 1/\ln 4 \end{pmatrix}$				

Portanto, obtemos $y(2) \approx 47/(36\ln 4) \approx 0.9418$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos que os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados para aproximar a solução de um sistema de equações diferenciais.

Vimos também como escrever uma equação diferencial de ordem superior como um sistema de equações diferenciais.

Durante toda abordagem, consideramos h fixo. Porém, a maioria dos softwares de computação científica usam métodos de passo variado. Os métodos de passo variado fazem uma estimativa do erro local a cada iteração. O método de Runge-Kutta-Fehlberg é um exemplo de método de passo variado.

Muito grato pela atenção!