ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327A, B e C

Nome: ______________________________ RA: __________

Segunda Prova (18/Outubro)

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Total

1. (1.5) Determine a expressão de uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tenha como imagem o subespaço $\mathrm{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e, como núcleo, o subespaço $\mathrm{N}(T) = [1+x]$ de $\mathcal{P}_2$.

Seja $\alpha = \{1+x, x, x^2\}$ base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Definimos $T(1+x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$T(x^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

as coordenadas de $p(x) = a + bx + cx^2$ em rel. à base α saõ obtidas da seguinte maneira:

$$a + bx + cx^2 = A(1+x) + Bx + Cx^2$$
$$= A + (A+B)x + Cx^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = a \\ A + B = b \Rightarrow B = b - a \\ C = c \end{cases}$$

Logo $T(a+bx+cx^2) = T\left(a(1+x) + (b-a)x + cx^2\right)$

$$= aT(1+x) + (b-a)T(x) + cT(x^2)$$

$$= a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a+b-c & -a+b \\ c & -a+b+2c \end{pmatrix}$$

2. (1.5) Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear, $\alpha = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha que $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a expressão de $T(x,y,z)$.

Vamos inicialmente determinar as coordenadas de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base α:

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$$
$$= (a+b+c,\ b+c,\ c)$$

$$\begin{cases} a+b+c = x \longrightarrow a = x-y+z-z \Rightarrow \boxed{a = x-y} \\ b+c = y \longrightarrow \boxed{b = y-z} \\ \boxed{c = z} \end{cases}$$

$$\therefore \left[(x,y,z)\right]_\alpha = \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{bmatrix}$$

Então

$$\left[T(x,y,z)\right]_\alpha = \left[T\right]_\alpha^\alpha \left[(x,y,z)\right]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x-y+z \\ -y+2z \\ x-y+2z \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$T(x,y,z) = (x-y+z)(1,0,0) + (-y+2z)(1,1,0) + $$
$$+ (x-y+2z)(1,1,1)$$
$$= (2x-3y+5z,\ x-2y+4z,\ x-y+2z)$$

3. Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(a+bx+cx^2) = (2b-2c) + (2a+2c)x + 2cx^2.$$

(a) (1.5) Encontre os autovalores e autovetores de T.

(b) (0.5) T é diagonalizável? (Justifique). No caso afirmativo, exiba uma base β em relação à qual a matriz de T é diagonal. Exiba também $[T]_\beta^\beta$.

a) Partindo da base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ temos: $\alpha = \{1, x, x^2\}$, $T(1) = 2x$, $T(x) = 2$ e $T(x^2) = -2+2x+2x^2$. Assim, a matriz do operador T em relação à base α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} [T(1)]_\alpha & [T(x)]_\alpha & [T(x^2)]_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Para encontrar os autovalores e autovetores de T resolvemos a eq. característica: $\det(A-\lambda I)=0$, obtendo os autovalores e depois substituimos em $(A-\lambda I)[v]_\alpha = 0$, obtendo as coordenadas dos autovetores.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = (\lambda^2-4)(2-\lambda)$$
$$= -(\lambda+2)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=2} \text{ ou } \underline{\lambda=-2}$$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a-b+c=0 \Rightarrow \boxed{c = b-a}$$

$\therefore\ p(x) = a+bx+cx^2 = a+bx+(b-a)x^2$ (com a ou $b \neq 0$)

$= a(1-x^2) + b(x+x^2)$

$\therefore\ \boxed{p_1(x) = 1-x^2}$ e $\boxed{p_2(x) = x+x^2}$, são autovetores associados a $\lambda_1 = 2 \Rightarrow S_2 = [1-x^2, x+x^2]$ é o subespaço invariante associado a $\lambda_1 = 2$

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c=0 \\ b=-a \end{matrix}} \quad \therefore\ p(x) = a-ax = a(1-x)$$

$\Rightarrow S_{-2} = [1-x]$ e $\boxed{p_3(x) = 1-x.}$

b) $\beta = \{1-x^2, x+x^2, 1-x\}$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ formada por autovetores de T, logo T é diagonalizável e

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $L : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5) Mostre que L é um isomorfismo.

(b) (1.0) Encontre a expressão de $L^{-1} : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$.

a) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$

$\therefore x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

ou seja, $Nu(L) = \{(0,0,0,0)\}$ e portanto L é injetora.

Agora, como $\dim \mathbb{R}^4 = \dim M_{2\times2}(\mathbb{R}) = 4$, pelo teo. das dimensões segue que $\dim Im(L) = 4$. Como $Im(L) \subset M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e $\dim Im(L) = \dim M_{2\times2}(\mathbb{R})$ segue que $Im(L) = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e portanto L é sobrejetora.

Assim, L é bijetora, ou seja, um ISOMORFISMO.

b) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \iff \boxed{x_1 = u_1}$

$\left.\begin{array}{l} x_2 + x_3 = u_2 \\ x_2 - x_3 = u_3 \end{array}\right\} (*)$

$-x_4 = u_4 \Rightarrow \boxed{x_4 = -u_4}$

$\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{x_2 = \dfrac{u_2 + u_3}{2}}$ e $\boxed{x_3 = \dfrac{u_2 - u_3}{2}}$

Logo

$$\boxed{L^{-1}\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(u_1, \frac{u_2+u_3}{2}, \frac{u_2-u_3}{2}, -u_4\right)}$$

5. Seja $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e suponhamos que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 2$ sejam os autovalores de A.

(a) (0.6) A é diagonalizável? Justifique.

(b) (0.7) Calcule $\det((A^{-1})^t)$.

(c) (0.7) Calcule o traço de A^2.
(Sugestão: Se $M, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ então $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$).

a) Como $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e possui 3 autovalores distintos entaõ A admite 3 autovetores LI's e portanto é diagonalizável.

b) Sendo A diagonalizável, existe $P \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ NÃO SINGULAR tal que $A = PDP^{-1}$, com

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1})$

$= \det(P)\det(D)[\det(P)]^{-1} = \det(D) = 8$

e ainda $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ e $\det(B^t) = \det(B)$

entaõ $\det((A^{-1})^t) = \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = \underline{\dfrac{1}{8}}$

c) $A^2 = (PD\underbrace{P^{-1})(P}DP^{-1}) = PD^2P^{-1}$

$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(PD^2P^{-1}) \underset{\uparrow \text{sugestaõ}}{=} \mathrm{tr}(\underbrace{P^{-1}P}D^2)$

$= \mathrm{tr}(D^2)$

$= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = 1 + 16 + 4 = \underline{21}$

6. (2.5) Utilizando autovalores e autovetores, identificar a cônica dada pela equação $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$. Apresentar a equação reduzida equivalente, esboçar o gráfico e exibir as coordenadas da origem do último referencial em relação aos eixos x e y originais.

A equação dada, na forma matricial fica:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12\sqrt{13} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

Vamos diagonalizar a matriz da forma quadrática para eliminar o termo misto:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(5-\lambda) - 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0 \quad \begin{cases} \text{soma} = 5 \\ \text{produto} = -35 \end{cases} \quad \therefore \quad \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = -4 \end{array}}$$

autovetores:

$\underline{\lambda_1 = 9}$: $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a = 3b \Rightarrow v^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

normalizando, $\bar{v}^1 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -4}$: $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3a + 2b \Rightarrow v^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

normalizando $\bar{v}^2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

Portanto $P = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$ é tal que $P^TP = PP^T = I$ e $\det(P) = 1$

Assim

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = PDP^T = P\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^T$$

e $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\bar{b} = P^Tb = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12\sqrt{13} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -36\sqrt{13} \\ 24\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Logo, no sistema $\bar{x}$-$\bar{y}$ temos

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = 36$$

$$9\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 - 36\bar{x} + 24\bar{y} = 36$$

$$9(\bar{x}^2 - 4\bar{x} + 4) - 4(\bar{y}^2 - 6\bar{y} + 9) = 36 + 36 - 36$$

$$9(\bar{x}-2)^2 - 4(\bar{y}-3)^2 = 36 \qquad (\div 36)$$

$$\frac{(\bar{x}-2)^2}{4} - \frac{(\bar{y}-3)^2}{9} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x} = \bar{x}-2 \\ \hat{y} = \bar{y}-3 \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{\hat{x}^2}{4} - \frac{\hat{y}^2}{9} = 1}$$

hipérbole com semi-eixos $a=2$, $b=3$, que intercepta eixo $\hat{x}$.

Centro da cônica no sistema original:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{x}_c\\ \hat{y}_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{x}_c-2\\ \bar{y}_c-3\end{pmatrix} = P^T\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\end{pmatrix}} = P\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\13\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{13}\end{pmatrix}}$$