ÁLGEBRA LINEAR I

2º Semestre de 2012 MA327C

Nome: GABARITO RA: ____________

Primeira Prova (06/Setembro)

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Total
Valores	2	3	2	2	2	11

Seja cuidadoso em sua argumentação, pois a clareza do seu raciocínio também será avaliada.

1. Verdadeiro ou falso? Justifique.

(a) (0.5) Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é tal que $A^T = A^{-1}$, então $B = A - A^{-1}$ é anti-simétrica.

(b) (0.5) Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é inversível então tr A $\neq 0$.

(c) (0.5) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 = x + y\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(d) (0.5) Se A e B são matrizes reais tais que $A \cdot B = I$, então A é inversível.

a) $A^T = A^{-1}$ ①

$B = A - A^{-1} \overset{①}{=} A - A^T$ (V)

$B^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -B$ ∴ B é antisimetrica

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$ e $tr(A) = 0$ (F)

(c) $(y^2 - y, y, z) \in W$

Fazendo $y = 2 \Rightarrow (2, 2, z) \in W$ (F)

e $y = 3 \Rightarrow (6, 3, z) \in W$

$(2, 2, z) + (6, 3, z) = (8, 5, 2z) \notin W$ (p/ $y = 5 \Rightarrow (20, 5, z) \in W$)

A soma não é preservada

∴ W não é subespaço

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (F).

$AB = I$ e A não é inversível, não é sequer quadrada!

2. Considere $V = P_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais e sejam:

$$G = \{p \in V : \; p(t) = at^2 + bt + c, \; a - c = 0\},$$

$$H = \{p \in V : \; p(t) = at^2 + bt + c, \; c = 0\}.$$

(a) (1.0) Mostre que G e H são subespaços vetoriais de V.
(b) (1.0) Determine uma base para $G + H$.
(c)(1.0) Exiba um subespaço S de V tal que $V = G \oplus S$.

$G = \{p \in V \mid p(t) = at^2 + bt + a\} = [t^2+1, t]$
$H = \{p \in V \mid p(t) = at^2 + bt\} = [t^2, t]$

(a) o polinômio nulo $0t^2 + 0t + 0 \in G$
sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(t) = a_1t^2 + b_1t + a_1 \in G$ e $q(t) = a_2t^2 + b_2t + a_2 \in G$
$p(t) + \alpha q(t) = (a_1 + \alpha a_2)t^2 + (b_1 + \alpha b_2)t + (a_1 + \alpha a_2) \in G$
logo G é subespaço de V
Analogamente para H: $0t^2 + 0t + 0 \in H$
sejam $\beta \in \mathbb{R}$, $s(t) = a_1t^2 + b_1t \in H$, $r(t) = a_2t^2 + b_2t \in H$
$s(t) + \beta r(t) = (a_1 + \beta a_2)t^2 + (b_1 + \beta b_2)t \in H$
logo H é subespaço de V.

(b) $G + H = \{p(t) \in V \mid p(t) = w(t) + v(t),\ w(t) \in G$ e $v(t) \in H\}$
$p(t) = at^2 + bt + a + ct^2 + dt = (a+c)t^2 + (b+d)t + a$
$= \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ em que $\gamma = a$, $\beta = b + d$ e $\alpha = a + c$
Portanto, qualquer vetor de $P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como soma de $w(t) \in G$ e $v(t) \in H$, ou seja, $G + H = P_2(t)$. Uma possível base é a canônica:
$\{1, t, t^2\}$

(c) G tem dimensão 2 pois é gerado pelos vetores t^2+1 e t, que são LI's. Queremos escrever $S \subset V$ tal que $S \cap G = \{0\}$ e $S + G = V$. Note que $t^2 - 1 \notin G$ pois $\nexists a, b \in \mathbb{R}$ tq $a(t^2+1) + bt = t^2 - 1$. Portanto, $\{t^2+1, t, t^2-1\}$ é um conj. LI com 3 elementos que geram V, formando uma base para V. Com isso, $G + S = V$ e $G \cap S = \{0\}$, ou seja, $G \oplus S = V$ para $S = [t^2 - 1]$.

3. Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com as operaçõees usuais e seja

$$W = \left\{ B \in V : \ B \text{ comuta com } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) (1.0) Mostre que se $B \in W$, então existem constantes reais α e β tais que $B = \alpha A + \beta I$, onde I é a matriz identidade.
(b) (1.0) Por que W é um subespaço vetorial de V? Exiba uma base para W. Justifique.

a) B comuta com $A \iff AB = BA$.

Seja $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Então $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2c = a & (1) \\ b+2d = 2a+3b & (2) \\ 3c = c & (3) \\ 3d = 2c+3d & (4) \end{cases}$$

De (3), $\boxed{c=0}$, que subst em (1) e em (4) não produzem qualquer informação adicional.

De (2) $2d = 2a+2b \Rightarrow \boxed{d = a+b}$

Logo, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & 3\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ 2\alpha = b \\ 3\alpha+\beta = a+b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = b/2} \rightarrow \boxed{\beta = a - \frac{b}{2}}$$

Verificando a compatibilidade da 3ª eq:

$3 \cdot \frac{b}{2} + a - \frac{b}{2} = a+b$ ✓

Logo, dada $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \boxed{\alpha = b/2}$ e $\boxed{\beta = a - \frac{b}{2}}$ são os escalares procurados.

b) W é subespaço pois a matriz nula 2x2 é elemento de W e dadas $B_1, B_2 \in W$ temos $B_1 + \delta B_2 \in W$, $\forall \delta \in \mathbb{R}$.

No item anterior vimos que $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Como $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é conj. LI pois $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\iff a = b = 0$ então $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para o subespaço W.

Questão 3

Observações

1) No item (a), da relação ② também poderíamos escrever $a = d - b \Rightarrow B = \begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

e então $\alpha = b/2$ e $\beta = d - \frac{3b}{2}$

Outra opção: $b = d - a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & d-a \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow W = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

e então $\alpha = \frac{d-a}{2}$, $\beta = \frac{3a-d}{2}$

2) No item (b), bases possíveis para W também seriam:

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ ou $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

tendo em vista os geradores exibidos acima e o fato de serem vetores LI's.

Outra opção, decorrente do que foi provado em (a), como para toda $B \in W$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $B = \alpha A + \beta I$, os vetores A e I são elementos de W (qualquer matriz comuta com ela mesma: $A.A = A.A = A^2$ e a identidade comuta com A: $IA = AI = A$) que geram W e são LI's: $\alpha A + \beta I = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Portanto $\{A, I\}$ também é uma base para W.

4. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 0\}$ o espaço vetorial com as operações:

$$(x, y, z) \oplus (a, b, c) = (x + a + 2, y + b, zc), \ \ (x, y, z), \ (a, b, c) \in V;$$

$$\alpha \odot (x, y, z) = (\alpha x + 2(\alpha - 1), \alpha y, z^\alpha), \ \ (x, y, z) \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) (0.5) Calcule $3 \odot (-1, 0, 2) \oplus 2 \odot (2, -1, 3)$.
(b) (0.5) Determine o vetor nulo desse espaço vetorial.
(c) (0.5) Determine o simétrico ou oposto de (x, y, z).
(d) (0.5) Verifique se $W = \{(x, y, z) : \ x = -2\}$ é um subespaço vetorial de V.

(a) $3 \odot (-1,0,2) = (-3+2.2,\ 3.0,\ 2^3) = (1,0,8)$
$2 \odot (2,-1,3) = 4 + 2(1),\ 2(-1),\ 3^2) = (6,-2,9)$
$(1,0,8) \oplus (6,-2,9) = (1+6+2,\ 0-2,\ 8.9) = \boxed{(9,-2,72)}$

(b) $(x,y,z) \oplus (a,b,c) = (x,y,z)$
$(x+a+2,\ y+b,\ zc) = (x,y,z) \Rightarrow a=-2,\ b=0,\ c=1$
$\therefore \boxed{0 = (-2,0,1)}$

(c) $(x,y,z) \oplus (a,b,c) = (-2,0,1)$
$(x+a+2,\ y+b,\ zc) = (-2,0,1) \Rightarrow a=-x-4,\ b=-y,\ c=1/z$
$\therefore$ <u>oposto</u> de (x,y,z) é $\boxed{(-x-4,\ -y,\ 1/z)}$

(d) Note que em W não há restrição de sinal para a componente z.
Com isso, $(-2,0,-1) \in \mathbb{R}^3$, sendo portanto elemento de W. Tomando ~~k~~ $= \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$,

$\frac{1}{2} \odot (-2,0,-1) = \left(\frac{1}{2}(-2) + 2\left(\frac{1}{2}-1\right),\ \frac{1}{2}.0,\ (-1)^{1/2}\right)$

$= (-2,\ 0,\ \sqrt{-1}) \notin \mathbb{R}^3$

Logo W <u>não</u> é subespaço de V

<u>Obs</u>: outro contra-exemplo: $(-2,0,0) \in W$ mas seu oposto $(-1)\odot(-2,0,0)$ não está definido em W.

5. (2.0) Considere $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais e sejam

$$\alpha = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine a base $\beta = \{v^1, v^2, v^3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $A = [I]^\alpha_\beta$.

A matriz $A = [I]^\alpha_\beta$ contem, em suas colunas, as coordenadas dos vetores da base α escritos como combinação linear dos vetores da base β, ou seja

$$\left(u^1 \mid u^2 \mid u^3 \right) = \left(v^1 \mid v^2 \mid v^3 \right) A \quad \text{em que}$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como queremos os vetores v^1, v^2, v^3 da base β, o ideal é encontrarmos A^{-1} pois então $\left(v^1 \mid v^2 \mid v^3 \right) = \left(u^1 \mid u^2 \mid u^3 \right) A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} *1 \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ *(-1) \\ \oplus \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) *\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ *(-1) \; *(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(v^1 \quad v^2 \quad v^3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{matrix}}}_{v^1} \quad \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{matrix}}}_{v^2} \quad \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{matrix}}}_{v^3} \right)$$

Assim, $\beta = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \right\}$

é a base procurada.