# ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327 A, B e C

Nome: GABARITO RA: ___________

Exame (11/Dezembro)

| | Questão 1 | Questão 2 | Questão 3 | Questão 4 | Questão 5 | Questão 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 10 |

**1.** (2.0) Considere os subespaços vetoriais $W = \{(x,y,z,t) : 2x - y + 3z + 4t = 0\}$ e $U = [(0,3,1,0), (1,0,1,0), (-4,6,2,2)]$ de $\mathbb{R}^4$. Exiba uma base para $W \cap U$ e uma base para $W + U$.

$$W: (x,y,z,t) = (x, 2x+3z+4t, z, t) = x(1,2,0,0) + z(0,3,1,0) + t(0,4,0,1)$$

$$\therefore W = [(1,2,0,0), (0,3,1,0), (0,4,0,1)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ * -4/3 \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \underline{\dim W = 3}$$

$$U = [(0,3,1,0), (1,0,1,0), (-4,6,2,2)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} * 4 \\ \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ * -2 \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore \underline{\dim U = 3}$$

$$W+U: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} * -1 \\ * -1 \\ \\ \oplus \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ * 2/3 \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} * 5/4, \; * 3 \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} * -4 \\ \oplus \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{\dim(W+U) = 4} \longrightarrow \text{base p/ } W+U = \underline{\text{base canônica de } \mathbb{R}^4}$$

Pelo teo das dimensões

$$\underline{\dim(U \cap W)} = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 3 + 3 - 4 = \underline{2}$$

(1. cont)

$U \cap W$:

$$\begin{array}{c} W \\ \\ \\ U \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad *-1 \quad *-4/3 \quad *4 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad *2/3 \quad *-1 \quad *\frac{-14}{3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 & 2 \end{array}\right] \text{ múltiplos}$$

$\therefore (-4,6,2,2) \in W$

Verificando

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{array}}$ solução obtida das eqs 1, 3 e 4, consistente c/ eq 2

$\therefore (0,3,1,0)$ e $(-4,6,2,2)$ são elementos de $U \cap W$

Logo $\{(0,3,1,0), (-4,6,2,2)\}$ é base p/ $U \cap W$

Obs: Note que $(-4,6,2,2) - 2(0,3,1,0) = (-4,0,0,2)$ também é elemento de $U \cap W$

$\therefore \{(0,3,1,0), (-4,0,0,2)\}$ também é base para $U \cap W$.

**2.** Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1) = x, \quad T(x) = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad T(x^2) = 2x.$$

(a) **(0.8)** Encontre uma expressão para $T(p)$.

(b) **(0.6)** Determine uma base para o núcleo $\mathrm{N}(T)$.

(c) **(0.6)** Determine uma base para a imagem $\mathrm{Im}(T)$.

a) $\left.\begin{array}{l} T(1) = x \\ T(x) = 1 - x^2 \\ T(x^2) = 2x \end{array}\right\}$ $\boxed{T(a+bx+cx^2)} = aT(1) + bT(x) + cT(x^2)$

$= a.x + b(1-x^2) + c.2x$

$= \boxed{b + (a+2c)x - bx^2}$ //

$p(x) = a + bx + cx^2$

b) $Nu(T)$ : $T(p) = 0$

$b + (a+2c)x - bx^2 = 0 + 0x + 0x^2$

$\therefore$ $b = 0$ e $a + 2c = 0 \Rightarrow a = -2c$

$\therefore$ $p(x) = -2c + cx^2 \in N(T)$

$\therefore$ $\beta = \{-2 + x^2\}$ é base p/ $N(T)$

c) $Im(T)$ : $b + (a+2c)x - bx^2 = b(1-x^2) + (a+2c)x$

$\therefore$ $Im(T) = [1-x^2, x]$

$\Rightarrow$ $\alpha = \{1-x^2, x\}$ é base p/ $Im(T)$.

**3.** Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $\dim \mathrm{N(T)} = 2$.

(a) **(0.5)** Qual é a dimensão de Im(T)? Justifique.

(b) **(0.7)** Se $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ é linear e $L = S \circ T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, justifique a afirmação: $\lambda = 0$ é um autovalor de $L$.

(c) **(0.8)** Quais as possíveis dimensões para o subespaço dos autovetores de $L$ associados ao autovalor $\lambda = 0$? Justifique.

a) $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $\dim N(T) = 2$

$\dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 5$ (teo das dimensões)

$2 + \dim \mathrm{Im}(T) = 5 \Rightarrow \boxed{\dim \mathrm{Im}(T) = 3}$

b) $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, $L = S \circ T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$

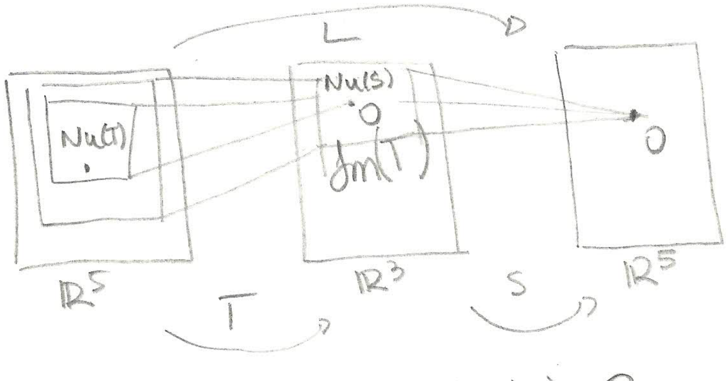
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^5 \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend right, "S\circ T"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S"'] & \mathbb{R}^5 \end{tikzcd}$$

$S(T) = L$

Como $\dim N(T) = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tq $v \in N(T)$ ou seja $Tv = 0 \Rightarrow S(Tv) = 0 \Rightarrow$

$S(Tv) + 0 \cdot v = 0 \quad \therefore \lambda = 0$ é autovalor de $S \circ T$ (associado a autovetores $v \in N(T)$).

c)




$\dim N(T) = 2 \Rightarrow \dim N(L) \geq 2$

$N(T) \subset \mathbb{R}^5 \Rightarrow \dim N(T) \leq 5$

domínio de L

$\boxed{\dim N(L) + \dim \mathrm{Im}(T) = 5 = \dim(\mathbb{R}^5)}$

$2 + 3 = 5$

$3 + 2 = 5$

$4 + 1 = 5$

$5 + 0 = 5$

Os autovetores de L associados ao autovalor $\lambda = 0$ são os vetores de $N(L)$, que pode ter dimensão 2, 3, 4 ou 5.

4. (a) (1.5) Encontre os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (-2y + z, -x + y - z, 3x + 3y + 2z)$.

(b) (0.5) $T$ é diagonalizável? Justifique.

$$\left[T(x,y,z)\right]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left[T\right]_{can}^{can} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{can}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 6 - 3 - 3(1-\lambda) - 2(2-\lambda) + \lambda(-3)$$

$$= -\lambda(2 - 3\lambda + \lambda^2) + \cancel{3} - \cancel{3} + \cancel{3\lambda} - 4 + 2\lambda - \cancel{3\lambda}$$

$$= -\cancel{2\lambda} + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + \cancel{2\lambda} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

$\boxed{\lambda = -1}$ é raiz

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0 \quad \boxed{\lambda=-1} \quad \boxed{\lambda = 2}$$

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -3 \\ \oplus \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ a = -c \end{matrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times -1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 2 \quad \times -3 \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -b \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

T não é diagonalizável pois o autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade geométrica 1 (um único autovetor associado), embora possua multiplicidade algébrica 2 (raiz dupla da eq. característica).

**5.** (1.0) Seja $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ uma base ortogonal de um espaço vetorial com produto interno $V$ e seja $W = [v_3, v_5]$. Exiba uma base ortonormal para $W^{\perp}$.

Como a base dada é ortogonal, os vetores $v_1$, $v_2$ e $v_4$ são ortogonais a $W$. $\therefore$ $W^{\perp} = [v_1, v_2, v_4]$

Como $W \oplus W^{\perp} = V$, $\dim V = 5$ e $\dim W = 2$ então $\beta = \{v_1, v_2, v_4\}$ é base ortogonal p/ $W^{\perp}$.

Normalizando temos a base desejada: $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_4}{\|v_4\|} \right\}$

**6.** Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual.

(a) (0.5) Mostre que $A$ ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.

(b) (0.5) Construa um contra-exemplo para a afirmação:

$$\det A = \pm 1 \Rightarrow A \text{ ortogonal}.$$

Obs.: Uma matriz é *ortogonal* se o conjunto formado por seus vetores coluna é ortonormal.

a) A ortogonal $\Rightarrow A^T A = I$

$\det(A^T A) = \det(I)$

$\det(A^T)\det(A) = 1$

$\det(A)^2 = 1$

$\boxed{\det A = \pm 1}$

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix}$ é tal que $\det(A) = 1$

mas A NÃO é ortogonal.