ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327C

Profa. Sandra Augusta Santos sala IM111

Lista 8: Tipos Especiais de Transformações[1]

1. Sejam V um espaço vetorial real com produto interno e $u, w \in V$. Mostre que u e w são LD se, e somente se, $|\langle u, w\rangle| = \|u\|\|w\|$.

2. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, com produto interno, U e W subespaços de V. Prove que $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

3. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, $k \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in V^*$ encontre, se possível, um vetor $v \in V$ tal que $\varphi(v) = k$. Se $\varphi \neq 0$ conclua que φ é sobrejetor, justificando.

4. Sejam φ e ψ funcionais lineares não nulos em um espaço vetorial real V com $\dim V = n$.
   (a) Supondo $\mathrm{Nu}(\varphi) \neq \mathrm{Nu}(\psi)$, ache as dimensões de $\mathrm{Nu}(\varphi)$, $\mathrm{Nu}(\psi)$, $\mathrm{Nu}(\varphi) + \mathrm{Nu}(\psi)$, $\mathrm{Nu}(\varphi) \cap \mathrm{Nu}(\psi)$.
   (b) Prove que $\mathrm{Nu}(\varphi) = \mathrm{Nu}(\psi) \Leftrightarrow \varphi$ e ψ são LDs.

5. Considere o funcional linear $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(p) = p(1)$. Encontre h em $\mathcal{P}_1$ tal que $\varphi(p) = \langle p, h\rangle$, $\forall p \in \mathcal{P}_1$, nos seguintes casos:
   (a) o produto interno em $\mathcal{P}_1$ é o usual; (b) o produto interno em $\mathcal{P}_1$ é o da integral.

6. Considere o espaço $\mathcal{P}_2$ com o produto interno da integral.
   (a) Encontre uma base ortonormal de $\mathcal{P}_2$ a partir da base canônica $\{1, t, t^2\}$.
   (b) Dado $\varphi : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ com $\varphi(p) = p'(2)$, ache q em $\mathcal{P}_2$ tal que $\varphi(p) = \langle p, q\rangle$, para todo $p \in \mathcal{P}_2$.

7. Seja $V = \mathcal{P}_1$ e sejam $\varphi : V \to \mathbb{R}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}$ funcionais lineares definidos por
$$\varphi(p) = \int_0^1 p(t)dt \qquad \text{e} \qquad \psi(p) = \int_0^2 p(t)dt.$$
   Encontre a base $\{g, h\}$ de V que é dual à base $\{\varphi, \psi\}$.

8. Considere a base $B = \{1, 1+t, 1-t^2\}$ do espaço $\mathcal{P}_2$. Se $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ é a base dual de B, calcule o valor de $\varphi_1(-t) + \varphi_2(-5+3t-2t^2) + \varphi_3(t-4t^2)$.

9. Seja V um espaço vetorial real com um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear.
   (a) Se $\langle T(u), v\rangle = 0$ para todo u, v em V, mostre que T é o operador nulo.
   (b) $\langle T(u), u\rangle = 0$ para todo u em $V \not\Rightarrow T = 0$.

10. Seja V um espaço vetorial real com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Fixados dois vetores não nulos h e w em V, considere $T : V \to V$ definido por $T(v) = \langle v, h\rangle w$.
    (a) Mostre que T é linear. (b) Encontre a expressão de T^*.

11. Se T e S são operadores lineares em um espaço vetorial real V de dimensão finita, com produto interno, prove que:
    (a) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$; (b) $(kT)^* = kT^*$ $(k \in \mathbb{R})$; (c) $(T+S)^* = T^* + S^*$;
    (d) $(T^*)^* = T$; (e) $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ e $0^* = 0$; (f) T inversível $\Rightarrow (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

[1]Exercícios compilados pelo professor Ary O. Chiacchio

12. Dê exemplo mostrando que a hipótese de ortonormalidade da base é essencial no resultado sobre operadores auto-adjuntos, isto é, existem um operador T e uma base B não ortonormal tais que $[T]_B^B$ é simétrica mas T não é auto adjunto.

13. Seja $V = W \oplus W^\perp$ em que W é subespaço próprio de V. Defina o operador linear $T : V \to V$ tal que $T(v) = v_1 - v_2$ para cada $v \in V$ representado de modo único como $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$. Mostre que T é auto-adjunto.

14. Sejam W um subespaço de V e $T : V \to V$ um operador tais que $T(W) \subset W$. Mostre que se $W^\perp$ é o complemento ortogonal então $T^*(W^\perp) \subset W^\perp$.

15. Sejam V um espaço vetorial real com produto interno e $T : V \to V$ um operador normal. Demonstre cada afirmação abaixo:

    (a) $T(v) = 0 \Leftrightarrow T^*(v) = 0$;

    (b) $T - \lambda I$ é normal;

    (c) $T(v) = \lambda v \Rightarrow T^*(v) = \lambda v$ (Sugestão: use (b));

    (d) Se $T(v) = \lambda_1 v$ e $T(w) = \lambda_2 w$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\langle v, w \rangle = 0$;

    (e) T é unitário $\Leftrightarrow$ seus autovalores têm valor absoluto igual a 1.

16. Um operador linear $T : V \to V$ é dito *anti-adjunto* se $T^* = -T$. Se $S : V \to V$ é um operador qualquer, mostre que $(S - S^*)$ é anti-adjunto.