ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327C

Profa. Sandra Augusta Santos sala IM111

Lista 7: Produto Interno e Ortogonalidade[1]

1. Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. A afirmação – *dado o número real* $k = 5$, *existem e são únicos os vetores* u *e* w *do* $\mathbb{R}^n$ *tais que* $\langle u, w\rangle = 5$ – é verdadeira ou falsa? Justifique.

2. A expressão $\langle A, B\rangle = \text{tr}(A + B)$ define um produto interno em $M_{2\times2}$? Por que?

3. A expressão $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ define um produto interno em $\mathcal{P}_2$? Justifique.

4. No espaço $M_{2\times3}$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^T A)$, calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$ e $\|B\|$ para
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. No espaço $M_{2\times2}$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^T A)$, calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$ e $\|B\|$ para
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. No espaço de todos os polinômios reais com o produto interno da integral, dados $f(t) = t + 2$, $g(t) = 3t - 2$ e $h(t) = t^2$, determine $\langle f, g\rangle$, $\langle f, h\rangle$, $\|g\|$ e $\|h\|$, lembrando que
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

7. No espaço $V = \mathcal{P}_2$ com o produto interno usual[2], ache $\langle f, g\rangle$, $\langle f, h\rangle$, $\|g\|$ e $\|h\|$ para os polinômios definidos no Exercício 6.

8. Em cada espaço dos Exercícios 4, 5 e 6, dê exemplos de vetores u e v não nulos tais que $\langle u, v\rangle = 0$.

9. Dados $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$ no $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, ache w em $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$ e $\|w\| = 1$.

10. Sejam $u = 1 + t$ e $v = t + 2t^2$ no espaço $\mathcal{P}_2$. Ache q em $\mathcal{P}_2$ tal que $\langle u, q\rangle = \langle v, q\rangle = 0$ e ainda $\|q\| = 1$ em relação produto interno usual.

11. Em um espaço vetorial real V munido de produto interno, provar que:
    (a) $u \neq 0, v \neq 0, \langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow u$ e v LI's;
    (b) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v\rangle = 0$;
    (c) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$;
    (d) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2|v\|^2$.

[1] Exercícios compilados pelo professor Ary O. Chiacchio

[2] O produto interno usual em $\mathcal{P}_n$ é o análogo ao usual do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i$, em que $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ e $q(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i$.

12. Enuncie a *desigualdade de Cauchy-Schwartz* para o produto interno da integral definido no Exercício 6 para os polinômios. Use tal desigualdade para mostrar que

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 (f(t))^2 \, dt.$$

13. A base canônica de $\mathcal{P}_2$ é ortogonal com respeito ao produto interno da integral? Justifique.

14. No espaço $\mathcal{P}_2$, determine m para que $p(t) = mt^2 - 1$ seja ortogonal a $q(t) = t$ em relação a cada um dos seguintes produtos internos:

    (a) da integral (Exercício 6); (b) definido no Exercício 3.

15. Achar o complemento ortogonal de $W = [1, t]$ no espaço $\mathcal{P}_2$ em relação a cada produto interno (a) e (b) do Exercício 14.

16. Achar uma base ortogonal G do complemento ortogonal de $W = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 0)]$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$. Completar G para formar uma base do espaço $\mathbb{R}^4$.

17. Achar uma base ortogonal do complemento ortogonal de $W = [A, B]$ no espaço $M_{2\times 2}$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$. Completar esta base para formar uma base de $M_{2\times 2}$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. Sejam V um espaço vetorial munido de produto interno e $u, v \in V$ não nulos.

    (a) Se $k = \langle u, v\rangle / \|v\|^2$ mostre que $u - kv$ é ortogonal a v.

    (b) Se u e v são ortogonais, prove que $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ para todo λ real.

    (c) Se $\|u + v\| = \|u - v\|$ então u e v são ortogonais? Justifique.

19. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$. Determine uma base do complemento ortogonal do núcleo $\mathrm{Nu}(T)$.

20. Achar a projeção ortogonal da matriz A sobre o subespaço $W = [B]$ de $M_{2\times 2}$, com A e B dadas no Exercício 17.

21. Ache a projeção ortogonal em $\mathbb{R}^4$ de $(1, 1, 1, 0)$ sobre o subespaço $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$.

22. (a) Achar a projeção ortogonal de $u(t) = 1 + t$ sobre o subespaço $W = [1 + 3t]$ do $\mathcal{P}_1$ em relação ao produto interno da integral (Exercício 6).

    (b) Achar a projeção ortogonal de $q(t) = 2t - 1$ sobre o subespaço $W = [t]$ do $\mathcal{P}_2$ em relação ao produto interno da integral (Exercício 6). Qual seria a projeção se o produto interno fosse o usual?

23. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (3, 2, 1)$.

    (a) Determine w_1 e w_2 tais que se cumpram simultaneamente: (i) $v = w_1 + w_2$, (ii) w_1 é ortogonal a u e (iii) w_2 e u são LD.

    (b) Se $w = (0, 1, -1)$ e $S = [u, w]$, decompor v numa soma de v_1 e v_2, sendo v_1 pertencente ao subespaço S e v_2 pertencente ao complemento ortogonal $S^\perp$.

    (c) Determine uma base ortonormal para S.

24. Determine uma base ortonormal para os seguintes subespaços:

    (a) $W = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 0)]$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$;

(b) $W = [1, t]$ no espaço $\mathcal{P}_2$ em relação ao produto interno da integral (Exercício 6).

(c) $W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$;

(d) $W = [A, B]$ em $M_{2\times 2}$ com o produto interno usual $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$, com A e B do Exercício 17;

(e) $W = [(1, 1, 1), (1, 2, 3)]$ no espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle u, v\rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$ em que $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$.

25. A partir do vetor $(1, -2, 1)$ construir uma base *ortogonal* do $\mathbb{R}^3$, relativamente ao produto interno usual e obter, a partir desta, uma base *ortonormal*.

26. Achar e interpretar geometricamente os seguintes complementos ortogonais:

    (a) da reta $x = z = 0$ no espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual;

    (b) do subespaço gerado por t no espaço $\mathcal{P}_2$ com o produto interno usual;

    (c) do subespaço gerado por t no espaço $\mathcal{P}_2$ com o produto interno da integral (Exercício 6);

    (d) do subespaço das matrizes $M_{2\times 2}$ cujos elementos da diagonal são nulos com o produto interno usual;

    (e) do subespaço das matrizes $M_{2\times 2}$ simétricas com o produto interno usual.

27. No espaço $\mathcal{P}_2$ com o produto interno usual, se $W = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) - p'(0) = 0\}$, determine uma base para W e o complemento ortogonal $W^\perp$.

28. Partindo da base $\{1, 1 + x, -1 + x^2\}$ e usando Gram-Schmidt, obtenha uma base ortogonal para $\mathcal{P}_2$ com o produto interno $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$.

29. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(p) = (p(0), p(1))$.

    (a) Dê a matriz $[T]_D^B$ para as respectivas bases canônicas ordenadas dos espaços.

    (b) Considere o espaço $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e o espaço $\mathcal{P}_2$ com o produto interno da integral:
    $$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$
    Dado $p(t) = t$, determine um polinômio $q(t) = a + bt$ tal que $\langle p, q\rangle = \langle T(p), T(q)\rangle$.