ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327C

Profa. Sandra Augusta Santos sala IM111

Lista 5: Autovalores e autovetores[1]

1. Se $T : V \to V$ é um operador linear, relacione $\mathcal{N}u(T) \neq \{\mathbf{0}\}$ com a existência de autovalores reais de T.
2. Dê a expressão de um operador linear diagonalizável T do $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1, 0, -1)$.
3. Dê a expressão de um operador linear diagonalizável do $\mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.
4. Dê a expressão de um operador linear diagonalizável L do $\mathcal{P}_2$ cujo núcleo é gerado por $1 - t^2$.
5. Dê a expressão de um operador linear diagonalizável L do $\mathcal{P}_2$ cuja imagem é gerada por $1 + t$ e $-t$.
6. Dê a expressão do operador linear L do $\mathbb{R}^2$ tal que L tem autovalores 1 e 3 associados aos autovetores $(y, -y)$ e $(0, y)$, $y \neq 0$, respectivamente.
7. Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T \circ T = 0$ (nilpotente).
   (a) Encontre os autovalores de T.
   (b) Se $T \neq 0$ mostre que T não é diagonalizável.
8. Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T \circ T = T$ (idempotente).
   (a) Encontre os autovalores de T.
   (b) Dê exemplos em que T é diagonalizável.
9. Decida se cada afirmação abaixo é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
   (a) Se $Tv = kv$ para algum escalar não nulo k então v é autovetor de T.
   (b) Se $k = 0$ é um autovalor de T então $\dim \mathcal{N}u(T) > 0$.
   (c) Se V tem dimensão finita e T é um operador linear de V com $T^2 = T$ então $\mathcal{N}u(T) \oplus \mathcal{I}m(T) = V$.
   (d) Se k é um autovalor de T então o operador $L = T - kI$ não é injetor.
10. Seja L um operador do $\mathbb{R}^2$ tal que $L \neq cI$. Mostre que existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que w e $(L(w) - w)$ são LI's.
11. Se k_1 e k_2 são autovalores reais distintos e não nulos de um operador linear T do $\mathbb{R}^2$, mostre que os vetores $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI's, em que v_1 e v_2 são os autovetores associados a k_1 e k_2, respectivamente.
12. Ache os autovalores e os autovetores de cada operador T do $\mathbb{R}^2$ definido abaixo:
   (a) $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$; (b) $T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$;
   (c) $T(1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.
13. Ache os autovalores e os autovetores de cada operador T do $\mathbb{R}^3$ definido abaixo:
   (a) $T(x, y, z) = (x + y, y, z)$;
   (b) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;
   (c) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.
14. Ache os autovalores e os autovetores de cada operador L do $\mathcal{P}_2$ definido abaixo:
   (a) $L(p)(t) = t^2 p''(t)$; (b) $L(p)(t) = p(t) + (t + 1)p'(t)$.

[1]Exercícios compilados pelo professor Ary O. Chiacchio

15. Ache os autovalores e os autovetores do operador linear L de $\mathcal{P}_3$ definido por $L(p) = p' + p''$.

16. Ache os autovalores e os autovetores do operador linear L de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definido por $L(f) = f'$.

17. Determine se cada um dos operadores definidos nos exercícios 12 a 15 é diagonalizável ou não. Nos casos afirmativos, dê uma base na qual a matriz do operador é diagonal, dê a matriz do operador nesta base e a matriz que diagonaliza o operador.

18. Seja L o operador do $\mathbb{R}^2$ definido por $L(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$. Mostre que L possui autovalores reais se, e somente se, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Analise o caso em que $\theta = \pi/2$.

19. Sejam T e S operadores lineares de V tais que $T \circ S = S \circ T$. Se k é um autovalor de T com autoespaço associado W, mostre que $S(W) \subset W$, isto é, W é invariante sob S.

20. Mostre que o polinômio característico de $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é dado pela equação $k^2 - \operatorname{tr}(A)k + \det A = 0$. Conclua que, se A é simétrica e $A \neq rI$ então A sempre possui dois autovalores reais e distintos.