ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 — MA327C

Profa. Sandra Augusta Santos — sala IM111

Lista 2: Espaços Vetoriais[1]

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$.
   (a) Ache w na reta $x + y = 0$ e u no eixo y tais que $v = (-1, 4)$ seja escrito como soma $w + u$.
   (b) Dê a representação de um elemento arbitrário v de V como soma $w + u$, como em (a).

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Represente um elemento arbitrário v de V como soma:
   (a) de um vetor do plano xz com outro do plano yz;
   (b) de um vetor do plano $z = x + y$ com outro do eixo y;
   (c) de um vetor do plano $y = z$ com outro do eixo z.

3. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Represente um elemento arbitrário p de V como soma:
   (a) de dois polinômios q e f pertencentes a V, tais que q possui todos os coeficientes iguais, e a soma dos coeficientes de f é zero;
   (b) de dois polinômios g e h de V sendo que g possui termo constante nulo e h não possui o termo do primeiro grau.

4. Seja V o conjunto das matrizes reais 2×2. Represente uma matriz arbitrária A de V como soma:
   (a) de uma matriz diagonal D com outra matriz B tal que $b_{11} + b_{12} + b_{22} = 0$;
   (b) de uma matriz C que é múltipla da identidade com outra B tal que $b_{11} + b_{12} + b_{22} = 0$.

5. Dado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ com as operações usuais, defina novas operações em $\mathbb{R}$ por: $u \oplus v = u + v + 2$ e $r \odot v = r \cdot v + 2(r - 1)$ e verifique se $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial real.

6. Dado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ com as operações usuais, defina novas operações em $\mathbb{R}$ por: $u \oplus v = 2u - v$ e $r \odot v = r \cdot v$ e verifique se $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial real.

7. Em cada caso abaixo determine se o conjunto $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ é ou não um espaço vetorial com as operações definidas:
   (i) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, 0)$ e $r \odot (a, b) = (ra, rb)$;
   (ii) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $r \odot (a, b) = (ra, 0)$.

8. O conjunto $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } b > 0\}$ é um espaço vetorial real com as operações definidas por $(a, b) \oplus (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ e $r \odot (a, b) = (a^r, b^r)$? No caso afirmativo identifique o vetor nulo $\mathbf{0}$, o oposto de cada (a, b) e ainda os elementos $0 \odot (a, b)$ e $r \odot \mathbf{0}$.

9. Para um espaço vetorial arbitrário $(V, \oplus, \odot)$, prove as seguintes propriedades:
   (1) Se $r \odot u = r \odot v$ e se $r \neq 0$ então $u = v$.
   (2) Se $r \odot u = s \odot u$ e se $u \neq \mathbf{0}$ então $r = s$.

10. Verifique, em cada caso, se os conjuntos dados são subespaços vetoriais:
    (a) $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e
    $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$; $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \mid x+y+z = 0\}$; $\mathcal{S}_3 = \{(x, y, z) \mid x = y \text{ e } z = 2x\}$;
    $\mathcal{S}_4 = \{(x, y, z) \mid x \notin \mathbb{Q}\}$; $\mathcal{S}_5 = \{(x, y, z) \mid x \leq z\}$.
    (b) $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ com as operações usuais e
    $\mathcal{S}_1 = \{A \in V \mid A \text{ é simétrica}\}$; $\mathcal{S}_2 = \{A \in V \mid A \text{ é idempotente}\}$;
    $\mathcal{S}_3 = \{A \in V \mid \det A = 0\}\}$; $\mathcal{S}_4 = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 0\}$;
    $\mathcal{S}_5 = \{A \in V \mid A \cdot T = 0\}$, sendo T não nula e fixa em V.
    $\mathcal{S}_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, b = a + c, d = c \right\}$.

[1] Exercícios compilados pelo professor Ary O. Chiacchio

(c) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, espaço de todos os polinômios reais de grau ≤ 2, com as operações usuais e
$\mathcal{S}_1 = \{p \in V \mid \text{ grau}(p) = 1\}$; $\quad \mathcal{S}_2 = \{p \in V \mid \text{ a soma dos coeficientes de } p \text{ é zero}\}$;
$\mathcal{S}_3 = \{p \in V \mid p \text{ tem todos os coeficientes iguais}\}$.

(d) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, espaço de todos os polinômios reais de grau ≤ 1, com as operações usuais e
$\mathcal{S}_1 = \{p \in V \mid \text{ tem zero como raiz}\}$; $\quad \mathcal{S}_2 = \{p \in V \mid p \text{ é divisível por } (t-1)\}$;
$\mathcal{S}_3 = \{p \in V \mid p \text{ tem coeficientes racionais}\}$.

(e) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espaço das funções reais de uma variável, com as operações usuais e
$\mathcal{S}_1 = \{f \in V \mid f \text{ é par}\}$; $\quad \mathcal{S}_2 = \{f \in V \mid f(0) = 1\}$;
$\mathcal{S}_3 = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$; $\quad \mathcal{S}_4 = \{f \in V \mid f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(f) $V = (\mathbb{R}_{++}, \oplus, \odot)$, em que $u \oplus v = u \cdot v$ e $r \odot v = v^r$ e $\mathcal{S} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}_*\}$.
(Notação: $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.)

(g) $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}_{++}\}$ com as operações $(a, b) \oplus (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ e $r \odot (a, b) = (a^r, b^r)$ e $\mathcal{S} = \{(1, y) \mid y > 0\}$.

11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais e os conjuntos $G = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $H = \{y(0, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Descreva qual subconjunto do plano representa a reunião $G \cup H$ e qual representa a interseção $G \cap H$. G e H são subespaços? $G \cup H$ é subespaço?

12. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais, se $G = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ e $H = \{(x, x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, descreva qual subconjunto de $\mathbb{R}^3$ representa a reunião $G \cup H$ e qual representa a interseção $G \cap H$. G e H são subespaços? $G \cup H$ é subespaço?

13. Definindo $G + H = \{u + v \mid u \in G \text{ e } v \in H\}$ determine tal conjunto nos Exercícios 11 e 12 acima. Compare e relacione com $G \cup H$. Analise se as inclusões $G \subset G + H$ e $H \subset G + H$ são verdadeiras.

14. Determine, em cada caso, a interseção $G \cap H$ e a soma $G + H$ dos subespaços nos respectivos espaços considerados com suas operações usuais:
(a) $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t, y = 2z\}$ e $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 2z + t = 0\}$;
(b) $G = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(t) = at^2 + bt + c, a - c = 0\}$ e $H = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(t) = at^2 + bt + c, c = 0\}$;
(c) $G = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p \text{ tem todos os coeficientes iguais}\}$ e
$H = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid \text{a soma dos coeficientes de } p \text{ é zero}\}$;
(d) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \middle| \, b = 0 \right\}$ e $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \middle| \, c = 0 \right\}$;
(e) $G = \{A \in M_{2\times 2} \mid A \text{ é um múltiplo da Identidade}\}$ e $H = \{B \in M_{2\times 2} \mid b_{11} + b_{12} + b_{22} = 0\}$.

15. Sejam G e H subespaços próprios e distintos de um espaço vetorial arbitrário V.
(a) Mostre que a reunião $G \cup H$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, um deles é subconjunto do outro (ou seja, se $G \subset H$ ou $H \subset G$).
(b) Mostre que a interseção $G \cap H$ e a soma $G + H$ são sempre subespaçoes de V.

16. Dê exemplos de subespaços próprios G e H em V tais que $G + H = V$ e $G \cap H \neq \emptyset$ quando
(a) $V = \mathbb{R}^3$; $\quad$ (b) $V = M_{2\times 2}$; $\quad$ (c) $V = \mathcal{P}_3$.

17. Determine um conjunto de geradores para cada um dos subespaços vetoriais definidos nos Exercícios 10a, 10b, 10c e 14.

18. Determine se cada soma $G + H$ do Exercício 14 é direta, justificando.

19. Dados os subespaços vetoriais $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \mid x = z\}$, $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ e $\mathcal{S}_3 = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$, verifique que $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_3 = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta? Qual?