ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327C

Profa. Sandra Augusta Santos sala IM111

Lista 1: Fatos básicos sobre matrizes[1]

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule A^2, A^3, A^4 e deduza uma regra para A^n.
   (b) Calcule B^2, C^2, $B \cdot C$ e $C \cdot B$.

2. Se A, B e C são matrizes $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, e A^T denota a *transposta* de A, prove que valem as seguintes relações:
   (a) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
   (b) $(kA)^T = kA^T$, $\forall k \in \mathbb{R}$;
   (c) $(A^T)^T = A$;
   (d) $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$;
   (e) Se A é quadrada e inversível então $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3. Mostre, usando indução finita, que $(A^T)^n = (A^n)^T$ para todo $n \in \mathbb{N}_*$.

4. Determine se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando:
   (a) $\det(A+B) = \det A + \det B$;
   (b) $\det A = \det B \Leftrightarrow A = B$;
   (c) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$;
   (d) $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$;
   (e) A e B diagonais de ordem 2 $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$.

5. Dada uma matriz real quadrada A dizemos que:
   - A é *simétrica* se $A^T = A$;
   - A é *anti-simétrica* se $A^T = -A$;
   - A é *idempotente* se $A^2 = A$;
   - A é *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}_*$ tal que $A^k = 0$;
   - $A = [a_{ij}]$ é *triangular superior* se seus elementos a_{ij} são nulos para $i > j$;
   - $A = [a_{ij}]$ é *triangular inferior* se seus elementos a_{ij} são nulos para $i < j$.

   Com base nas definições dadas, faça os seguintes itens:
   (a) Dadas A e B simétricas, prove a seguinte equivalência: $A \cdot B$ é simétrica se, e somente se, A e B comutam (i.e., $A \cdot B = B \cdot A$).
   (b) Prove que se $A \cdot B = A$ e $B \cdot A = B$ então A e B são idempotentes.
   (c) Prove que se A é idempotente então $C = I - A$ é idempotente e ainda $A \cdot C = C \cdot A = 0$.
   (d) Prove que se A é idempotente então ou $A = I$ ou A não é inversível.
   (e) Prove que se A é nilpotente então A não é inversível.
   (f) Prove que se A é nilpotente com $k = 2$ então $A(I+A)^3 = A$.
   (g) Prove que se A é simétrica então B^TAB é simétrica (B quadrada, da mesma ordem de A).
   (h) Prove que se A é anti-simétrica então B^TAB é anti-simétrica.
   (i) Mostre que qualquer matriz real quadrada A pode ser decomposta, de maneira única, como uma soma $A = B + C$, em que B é simétrica e C é anti-simétrica.
   (j) Prove que se A e B são triangulares superiores então $A + B$ é triagular superior.
   (k) Prove que se A é triangular superior então A^T é triangular inferior.
   (l) Prove que se A triangular superior e inferior então A é diagonal.

[1] Exercícios compilados pelo professor Ary O. Chiacchio.

(m) Mostre que qualquer matriz real quadrada A pode ser decomposta em uma soma $A = B + C$, em que B é triangular superior e C é triangular inferior. Tal decomposição é única?

6. Sejam A e B matrizes simétricas e sejam C e D matrizes anti-simétricas. Determine se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando:

   (a) $A + B$ é simétrica; (b) $C + D$ é anti-simétrica;

   (c) $A \cdot B$ é simétrica; (d) $C \cdot D$ é anti-simétrica.

7. Mostre que não existe matriz inversível A tal que $A^2 = 0$.

8. Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que o produto $A \cdot B$ é inversível. Mostre que A e B são inversíveis.

9. Dadas duas matrizes reais A e B tais que $A \cdot B = I$, pode-se afirmar que A é inversível?

10. Seja $A_{2\times 2}$ uma matriz real tal que $A \cdot B = B \cdot A$ *para qualquer* matriz real $B_{2\times 2}$. Mostre que A é um múltiplo da identidade, isto é, $A = kI$ para algum $k \in \mathbb{R}$.

11. O *traço* de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é definido como a *soma dos elementos da diagonal* de A e denotado por $\operatorname{tr} A$, ou seja, $\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}$. Prove que:

    (a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$; (b) $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr} A$;

    (c) $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$; (d) Se B é inversível então $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr} A$.

12. Mostre que não existem matrizes $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ com $A \cdot B - B \cdot A = I$ (use o exercício anterior).

13. Seja $A_{2\times 2}$ qualquer. Prove que $\det(I + A) = 1 + \det A$ se, e somente se, $\operatorname{tr} A = 0$.

14. (i) Considere A e B matrizes reais $n \times n$ e desenvolva as seguintes expressões matriciais:

    (a) $(A - B)^2$ (b) $(A - B)(A + B)$ (c) $(A - B)(A^2 + A \cdot B + B^2)$.

    (ii) Repita o item (i) usando agora a hipótese de que A e B comutam (i.e. $A \cdot B = B \cdot A$). Compare os resultados. Exemplifique para $n = 2$.

15. Sejam $A_{n\times n}$ e $k \in \mathbb{N}_*$.

    (a) Mostre que $I - A^{k+1} = (I - A)(I + A + \ldots + A^k) = (I + A + \ldots + A^k)(I - A)$.

    (b) Se A é nilpotente então $I - A$ é inversível, embora A não o seja.

16. Mostre, usando indução finita, que

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_*.$$

17. Ache a forma genérica de uma matriz simétrica de ordem 2 e de uma simétrica de ordem 3.

18. Ache a forma genérica de uma matriz anti-simétrica A de ordem 2 e de uma anti-simétrica de ordem 3. Relacione com o traço da matriz A.

19. Dada uma matriz real anti-simétrica $A_{n\times n}$, usando a definição e as propriedades do determinante, prove que

    (a) os elementos da diagonal são todos nulos: $a_{ii} = 0$ (portanto $\operatorname{tr} A = 0$).

    (b) $\det A = 0$ quando n é impar.

    Verifique (a) e (b) diretamente nos casos $n = 2$ e $n = 3$.

20. Sem desenvolver, mostre que 0 é uma raiz da equação: $\det \begin{bmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{bmatrix} = 0.$