MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$31 – dezembro 2001 – pp. 143–161

"Professor, qual a primitiva de $\frac{e^x}{x}$?!" (O problema de integração em termos finitos)

Daniel Cordeiro de Morais Filho

1 Introdução

Em todo curso introdutório de Cálculo, os alunos vêem o Teorema Fundamental, que assegura que se uma função f for contínua no intervalo $[a,b]$, então a função

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in(a,b)$$

é uma primitiva[1] de f.

Usando a notação de Leibniz, iremos representar uma primitiva de f por $\int f(x)dx$. Portanto, naquele estágio, os alunos aprendem que

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt, \tag{1}$$

e também que duas primitivas de uma mesma função diferem por uma constante.

Em muitos casos, dada uma função f, é imediato encontrar uma expressão para (1), como por exemplo, $\int x^6dx=\frac{1}{7}x^7+C$. Já em outros entretanto, precisa-se utilizar técnicas mais elaboradas para se encontrar uma expressão para a primitiva em termos de funções conhecidas, como

[1] A *primitiva* (integral indefinida ou antiderivada) de uma função f é um função y solução da equação diferencial ordinária $y'=f$.

$$\int \frac{dx}{p\,\text{sen}\,ax + q\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{p^2+q^2}} \operatorname{arctan}h\left(\frac{q\tan(\frac{1}{2}ax)-p}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) + C.$$

Essas técnicas são as Técnicas de Integração, cujo objetivo principal é achar, até o quanto for possível, uma maneira de se escrever a expressão (1) sem que apareça o símbolo de integração $\int$. Deseja-se que essa expressão seja dada em termos de outras funções, a princípio, aquelas que constituem o universo das funções conhecidas por um aluno de Cálculo, que se compõe de polinômios, exponenciais, logaritmos, funções racionais, trigonométricas etc. Hoje, vários programas de informática espalhados no mercado gastam apenas segundos encontrando expressões de primitivas, o que traz à tona nas universidades a discussão do tempo gasto com as técnicas de integração em sala-de-aula, e quais delas devem ser ensinadas. Parece que a computação fadou às antigas tabelas de integrais o mesmo destino das tábuas de logaritmo.

No entanto, a maioria da literatura destinada aos alunos, não se detém numa questão básica: quais os tipos de funções para as quais se pode achar uma expressão para sua primitiva em termos de funções conhecidas[2]? Ou equivalentemente, quais as funções cujas únicas expressões para suas primitivas são aquelas dadas apenas por (1), ou por expressões nas quais inevitavelmente apareça o sinal de integração, não tendo como escrevê-las de uma outra maneira?

Os alunos devem ser alertados e se convencerem, que mesmo com o esforço das técnicas de integração que aprendeu, não existe um método sistemático para se responder as perguntas acima!

Claro, essa questão carece ser melhor formulada, e a detalharemos mais acuradamente no decorrer do texto. No entanto, adiantamos que sua delicadeza e dificuldade explicam o porquê de vários livros de cálculo sequer tocarem nesse assunto.

Isso me faz recordar uma brincadeira que os os alunos veteranos do Curso de Matemática faziam (ou ainda fazem?) com os alunos calouros de cálculo, desafiando os mais afoitos a encontrar certas primitivas[3]

[2]Os programas computacionais podem dar a um aluno desavisado o falso sentimento dessa resposta ser sempre afirmativa.

[3]A primitiva era entendida como uma expressão envolvendo apenas funções conhecidas.

como

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \tag{2}$$

$$\int \frac{senx}{x} dx \tag{3}$$

$$\int e^{-x^2}, etc. \tag{4}$$

Depois de exaustivas e frustantes tentativas, alguns alunos entregavam os pontos e reconheciam que, ou eles ainda não haviam aprendido o "velado truque mirabolante" para encontrar essas primitivas, ou que essas funções "não tinham primitiva"! Acabada a gozação, sempre chegava-se ao consenso de que era impossível encontrar essas primitivas em termos de funções conhecidas, mas naquela fase ninguém sabia como e nem onde encontrar a demonstração desse fato.

Nosso objetivo neste pequeno artigo é na medida do possível, discutir o problema acima, complementando a parte final da teoria de integração que deveria constar em vários livros de cálculo. Iremos usar argumentos que os professores podem muito bem torná-los inteligíveis para seus alunos de uma turma de Cálculo Elementar. Além disso, nosso objetivo com esse texto é também desenvolver o espírito matemático crítico nos alunos, que deve ser despertado logo cedo, fazendo com que fujam das rotineiras e frias manipulações das técnicas de integração.

O tema não é simples, e demonstrações mais aprofundadas fugiriam dos nossos objetivos. Faremos uso de teoremas que encerram longas demonstrações e na bibliografia o leitor saberá onde encontrar mais detalhes e terá um indício de como se aprofundar no assunto. Ele encontrará algumas referências de obras originais, como também de trabalhos posteriores publicados sobre o tema.

2 Definições básicas

Para muitos alunos, uma expressão como (1) parece ser deselegante demais para ser aceita como uma primitiva de uma função[4]. Esta expressão

[4] Lembremos que na maioria dos casos, eles ainda não foram apresentados ao logaritmo como primitiva de $\frac{1}{x}$, e é natural também que esperem da integração o mesmo que ocorre com a operação de derivação: a derivada de uma função conhecida é sempre uma função que eles conhecem.

envolve conceitos bem elaborados, como o de limite e, propriamente, o de integral definida. É natural portanto, procurar a todo custo uma melhor representação para (1) dada em termos de funções mais familiares. Não obstante que os neófitos devem ser alertados que isso pode não ser possível, e que expressões dessa natureza definem funções que estão muito presentes em várias partes da matemática (gama, beta, fresnel, etc.). Por exemplo, a expressão (4) é a função erro, já (2), após uma mudança de variável, toma a forma (8), que quando integrada no intervalo $[2, x]$, é chamada *integral logarítmica* e é uma aproximação para o número de primos menores ou iguais a x (para uma referência mais acessível para os alunos, vide [14], pg. 614), etc. Nessa mesma classe, entram também as *integrais elípticas*, que os alunos se deparam ao tentar calcular o comprimento de arco da elípse[5] com os métodos aprendidos nos cursos introdutórios de cálculo. Num primeiro curso de Equações Diferenciais os alunos naturalmente também encontram soluções dadas usando-se expressões do tipo (1). Por exemplo, $y = e^{-x} \int \frac{e^x}{x} dx + Ce^{-x}$ é solução da equação $xy' + xy = 1$.

Uma idéia inicial para atacar nosso problema é construir uma classe de funções $\mathbb{E}$ que contenha todas as funções que constituam o universo das funções conhecidas por um aluno de Cálculo e que seja possível se determinar quando $\int f dx \in \mathbb{E}$.

Nessa tentativa, definiremos $\mathbb{E}$, como a classe de *funções elementares*. Essa classe é formada pelas funções complexas que definiremos a seguir:

- *funções racionais* (quociente de polinômios);
- *funções algébricas*, isto é, funções y que são soluções de equações algébricas da forma

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + ... + P_n(x) = 0,$$

  onde $P_i(x)$ são polinômios. As funções algébricas podem ser explícitas, como $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{1+x}}$; ou implícitas, como $xy^5 - y - x^2 = 0$;
- *função exponencial* e^x;

[5]De onde vem o nome dessas funções.

- *função logarítmica lnx*;
- todas as funções que, por um número *finito* de etapas, possam ser construídas através das funções anteriores, usando-se as operações de soma, produto e composição de funções.

Observe que as funções trigonométricas elementares, as trigonométricas hiper- bólicas e suas respectivas inversas pertencem a $I\!E$, já que $senx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$,$\arctan x = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$,etc. A função $y = x^x \in I\!E$, pois $y = e^{x\ln x}$.

Observe também que a função $arcsen\sqrt[4]{\frac{y^2}{1+x^3}}$, onde y é solução da equação $xy^5 - y - x^2 = 0$ está em $I\!E$.

Uma função é dita *transcendente* se ela não é algébrica. Uma observação pertinente, é que o logaritmo e a exponencial são funções transcendentes. Falaremos disso mais adiante.

Nosso problema portanto, é saber quando, dada uma função f, sua primitiva $\int f(x)dx \in I\!E$ [6]. Quando isso ocorre, dizemos que f é *integrável em termos finitos.*

OBSERVAÇÕES:

(O_1) : A primitiva de uma função pode ter uma natureza bem distinta da mesma. Por exemplo, $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln(x-a)$. Diferentemente do logaritmo, a função $\frac{1}{x-a}$ é racional.

(O_2) : Em vários livros de Cálculo prova-se que se R é uma função racional, então $\int Rdx \in I\!E$, já que tem-se para R uma expressão do tipo

$$R(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \frac{b_j}{(x-c_j)^{k_j}}. \qquad (5)$$

Portanto a primitiva de R é composta de duas partes, uma envolvendo uma função racional e outra envolvendo uma parte transcendente. Mais adiante, veremos que não há outra maneira de escrever essa primitiva em termos de funções elementares.

[6]Deixamos claro que quando essa resposta for afirmativa, não nos interessa discutir nesse texto como se proceder para encontrar a expressão dessa primitiva.

3 Um primeiro teorema

Na primeira metade do século passado, precisamente entre os anos de 1833 e 1841, o matemático francês Joseph Liouville[7] publicou uma série de resultados que deram significativas contribuições ao problema de saber-se quando $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$. Os primeiros e mais significativos teoremas nesta direção surgiram das suas pesquisas nessa área. Mais uma vez alertamos, que vai além de qualquer pretensão nossa apresentar aqui essas demonstrações. Acreditamos que isso em nada diminui nosso objetivo, que é utilizar esses resultados, extraindo deles várias informações que podem ser manuseadas pelos alunos. A bibliografia contém referências suficientes para aqueles alunos que desejarem ir mais adiante, e também para se convencerem de que precisam aprender mais Matemática, além do Cálculo, para entender essas demonstrações.

3.1 O primeiro teorema de Liouville

A seguir daremos uma versão para um caso particular de um teorema mais geral devido a Liouville, que apresentaremos na Subseção 4.1 (Teorema 2 de Liouville). A versão a seguir é fácil de ser memorizada e utilizada pelos alunos. Daremos uma prova dessa versão na Subseção 4.2.

TEOREMA 1 DE LIOUVILLE: *Se S e T são funções racionais,*
$T \neq const.$, tais que $\int S(x)e^{T(x)}dx \in \mathbb{E}$, então

$$\int S(x)e^{T(x)}dx = R(x)e^{T(x)},$$

onde $R(x)$ é uma função racional.

3.2 Aplicações do Teorema 1 de Liouville

Vamos agora a alguns exemplos de como aplicar o teorema anterior. Os argumentos que usamos são simples e não requerem nenhum conheci-

[7]Liouville (1809-1882) foi um excepcional matemático e contribuiu substancialmente na Análise e Teoria dos Números. Observe que seus trabalhos sobre integração começaram quando ele estava apenas com 24 anos!

mento extra, apenas o Teorema Fundamental da Álgebra e o Lema do Apêndice.

Na verdade, a aplicação deste e de outros teoremas a seguir, é um bom exercício para apresentar aos alunos equações diferenciais ordinárias e despertar neles o senso crítico para dimensionar as possibilidades e limitações das técnicas de integração que acabaram de aprender.

Exemplo 1:

Seja p um polinômio com grau $gr(p) > 1$. Então, $\int e^{p(x)}dx \notin I\!E$.

De fato, caso o fato acima não ocorresse, pelo Teorema de Liouville deveríamos ter que $\int e^{p(x)}dx = R(x)\ e^{p(x)}$, para alguma função racional R. Derivando essa expressão, encontramos que $1 = R' + p'R$. Se $R = P/Q$, onde os polinômios P e Q não têm fatores em comum, a expressão anterior implica que

$$Q(Q - P' - p'P) = -PQ'. \tag{6}$$

Suponha que $gr(Q) > 0$. Logo Q possui uma raíz $x = \alpha$ de multiplicidade $r > 0$. Ora, $P(\alpha) \neq 0$, já que P e Q são primos entre si. Portanto $x = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade $r - 1$ do polinônio do lado direito da equação (6)(vide o Lema do Apêndice) e simultaneamente uma raiz de, no mínimo, multiplicidade r do polinômio do lado esquerdo dessa mesma equação. Essa contradição garante que Q é uma constante. Dai, podemos assumir que a equação (6) toma a forma $p'P = -P'$. Mas isso é impossível já que $gr(\ p'P) \geq gr(P) > gr(\ P')$. Portanto, $\int e^{p(x)}dx \notin I\!E$. Em particular $\int e^{-x^2}dx \notin I\!E$.

Exemplo 2:

Se p é um polinômio com grau $gr(p) \geq 1$, então $\int \frac{e^x}{p(x)}dx \notin I\!E$.

Pelo Teorema de Liouville, caso $\int \frac{e^x}{p(x)}dx \in I\!E$, teríamos que $\int \frac{e^x}{p(x)}dx = R(x)e^x$, para alguma função racional R. Como antes, derivando essa expressão e usando que $R = \frac{P}{Q}$, P e Q polinômios primos entre si,encontramos

$$Q(Q - pP' - pP) = -pPQ'. \tag{7}$$

Suponha que $gr(Q) > 0$ e que $x = \alpha$ seja uma raiz de multiplicidade r de Q. Caso $p(\alpha) \neq 0$, um argumento igual ao do Exemplo 1 nos levaria a uma contradição. Por outro lado, se $p(\alpha) = 0$, e $x = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade k de p, da expressão (7), concluiríamos que essa raiz seria de multiplicidade $k+r-1$ do polinônio do lado direito de (7), e concomitantemente, uma raiz de multiplicidade $k+r$ do polinômio do lado esquerdo da mesma expressão, o que é uma contradição.

Exemplo 3:

$$\int \frac{1}{\ln x} dx \notin I\!\!E \tag{8}$$

De fato, do Exemplo 2, basta fazermos $p(x) = x$ e a mudança de variável $y = e^x$.

Exemplo 4: Com o uso do Teorema 1 de Liouville, usando integração por partes ou alguma mudança de variável, se necessário, e repetindo o raciocínio dos exemplos anteriores, os alunos de Cálculo terão o previlégio de descobrir e responder se a primitiva de várias funções podem ser dadas ou não em termos de funções elementares.

Por exemplo: $\int \frac{x^2+ax+b}{(x-1)^2} e^x dx \in I\!\!E$ se, e somente se, $b = -2a - 3$; $\int e^{e^x} dx \notin I\!\!E$, $\int \ln\ln x dx \notin I\!\!E$, $\int e^x \ln x dx \notin I\!\!E$, etc.

4 Outros teoremas

A teoria de integração de funções algébricas é bem mais extensa e complicada do que das funções racionais e sequer é completa. Uma primitiva de uma função algébrica, seja essa função implicita ou explícita, pode ser dada, ou não, em termos de funções elementares.

Com a ajuda de alguns exemplos básicos e um pouco de reflexão é fácil se convencer que uma primitiva, por exemplo, como

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

não pode conter em sua expressão a função exponencial, ou funções logarítmicas não-lineares e sequer uma expressão como $\sqrt{1+x}$ [8]. Em relação a essa última função, nosso raciocínio é corroborado pelo princípio

[8]Demonstrar esses fatos já é uma outra história...

formulado por Laplace

"a primitiva de uma função algébrica diferenciável
não pode conter outros radicais além daqueles presentes
em sua expressão " (Vide [1]).

Em (O_2) vimos que a primitiva de uma função racional está sempre em $I\!E$. Não há como aparecer funções exponenciais na expressão daquela integral, já que a derivação não pode fazer com que exponenciais desapareçam. O lema abaixo assegura que aquela é a única maneira de escrever a integral

Lema: *Uma expressão do tipo $\sum b_j \ln(x - c_j)$ não pode ser uma função racional.*

Demonstração: Suponha que $\sum b_j \ln(x - c_j) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p e q polinômios primos entre si. Um argumento semelhante ao que usamos na Subseção 3.2 , garante que $q = const.$ Daí, podemos considerar que $\sum b_j \ln(x - c_j) = p(x)$, donde $\sum \frac{b_j}{(x-c_j)} = p'(x)$. Logo $b_i + \sum\limits_{j \neq i} \frac{b_j(x-c_i)}{(x-c_j)} = p'(x)(x - c_i)$, e fazendo $x \to c_i$ encontramos que $b_i = 0, \forall i$, o que é impossível.

$\diamondsuit$

Em [1] e [10], prova-se que se y for uma função algébrica e se $\int ydx$ for algébrica, então necessariamente esta primitiva é uma funcão racional de x e y. Usando esse resultado torna-se fácil provar a transcedentalidade de lnx e e^x em relação à variável x. Mais geralmente, provaremos que uma expressão do tipo $\sum b_j \ln(x - c_j)$ é transcendente. De fato, essa soma é uma primitiva de uma função algébrica, e caso fosse uma expressão algébrica, do resultado acima, concluiríamos que ela seria uma função racional. Mas do lema acima, isso não pode ocorrer. A transcedentalidade de e^x decorre do fato dessa função ser a inversa do logaritmo.

O que acabamos de expor dá-nos um indício da demonstração de que na expressão da primitiva uma função algébrica não pode conter qualquer exponencial. Liouville deu essa demonstração em [3]. Restringindo-se a um caso mais simples, é fácil ver que essa primitiva não pode ser um polinômio $P(x, e^x)$. Certamente, se isso ocorresse, derivando a expressão $\int ydx = P(x, e^x)$ teríamos uma expressão algébrica para e^x, o que vimos não ser possível. Esse caso mais simples contém as idéias de Liouville.

O mesmo raciocínio permite ver que se logaritmos ocorrem na expressão de $\int ydx$, então eles só podem aparecer linearmente.

Em [1], de uma forma mais algébrica, e em [10], de uma maneira mais analítica, prova-se o seguinte teorema, que consubstancia os comentários que acabamos de fazer

TEOREMA (integração de funções algébricas): *Se y é uma função algébrica e se $\int ydx \in \mathbb{E}$, então*

$$\int ydx = R_1(x,y) + \sum_{i=2}^{k} a_i \ln R_i(x,y)$$

para algum k¿0 inteiro, onde a_i são constantes e $R_i(x,y)$ são funções racionais.

4.1 Segundo teorema de Liouville

O Teorema que apresentaremos a seguir também é devido a Liouville. O Teorema 1 de Liouville apresentado na Subseção 3.1 é um caso particular deste. Conforme G.H.Hardy (vide [1]), o teorema adiante era o resultado mais geral conhecido na época[9] o qual tratava do assunto de saber se uma primitiva era dada em termos de funções elementares.

TEOREMA 2 DE LIOUVILLE: *Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$ funções da variável x, cujas derivadas $\frac{dy_i}{dx}$ são funções algébricas de $x, y_1, y_2, ..., y_k$. Se F é uma função algébrica e $\int F(x, y_1, y_2, ..., y_k)dx \in \mathbb{E}$, então*

$$\int F(x, y_1, y_2, ..., y_k)dx = z_1(x, y_1, y_2, ..., y_k) + \sum_{i=2}^{r} a_i \ln z_i(x, y_1, y_2, ..., y_k),$$

onde z_i são funções algébricas e a_i são constantes. Caso $\frac{dy_i}{dx}$ e F sejam

[9]Mais tarde, Ostrowski deu uma generalização desse teorema para uma classe mais abrangente de funções (vide [6]), usando o conceito de extensão de corpos diferenciáveis. Na décadas de 60 e 70, outros artigos seguindo essa linha foram publicados, vide [11], [12] e [13].

racionais, então z_i são funções racionais.

4.2 Aplicações do Teorema 2 de Liouville

Um caso mais geral e bastante típico no qual se insere o Teorema 2 de Liouville é por exemplo, quando

$$F(x, e^x, e^{e^x}, \ln x, \ln\ln x, \cos x, senx).$$

Nesse caso, verifica-se que $\frac{dy_1}{dx} = y_1$, $\frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2$, $\frac{dy_3}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{dy_4}{dx} = \frac{1}{xy_3}$, $\frac{dy_5}{dx} = \sqrt{1-(y_5)^2}$ e $\frac{dy_6}{dx} = \sqrt{1-(y_6)^2}$, correspondendo ao que exige o teorema.

A seguir daremos três aplicações desse teorema nas quais os alunos poderão ter idéia de como usá-lo em diversos casos. Para os mais detalhistas, aconselhamos começar com a terceira aplicação.

APLICAÇÃO 1:

Demonstração do Teorema 1 de Liouville da Subseção 3.1:

Para demonstrarmos esse teorema, basta aplicarmos o Teorema 2 de Liouville com $y_1 = S(x)$, $y_2 = e^{T(x)}$e $F(x, y_1, y_2) = y_1 y_2$. Nesse caso, se $\int S(x)e^{T(x)}dx \in I\!E$, usando as propriedades da função logaritmo, o teorema garante que essa primitiva deve ser da forma

$$\begin{aligned} R_1(x, S(x), e^{T(x)}) &+ a_2 \ln P_2(x, S(x), e^{T(x)}) \\ &+ ... + a_r \ln P_r(x, S(x), e^{T(x)}), \end{aligned} \qquad (9)$$

onde R_i é uma função racional e os $P_i's$ são polinômios.

Nesse ponto convidamos o leitor a gastar um pouco de seu tempo e ver que o termo $e^{T(x)}$ deve necessariamente aparecer linearmente na expressão (9) e não pode aparecer no denominador de R_1 e nem nos $P's$, caso contrário, após derivarmos (9), não poderíamos encontrar $S(x)e^{T(x)}$. Mais ainda, para gerarmos $S(x)e^{T(x)}$ ao derivarmos (9), devemos ter $R_1(x, S(x), e^{T(x)}) = R(x)e^{T(x)}$ e $a_i = 0$.

APLICAÇÃO 2:

Vamos agora usar o Teorema 2 de Liouville para sabermos quando $\int R(x)\ln x dx \in I\!E$, onde $R(x)$ é uma função racional. Caso $\int R(x) \ln$

$xdx \in I\!\!E$, então essa primitiva deve ter a seguinte forma

$$R_1(x, \ln x) + a_2 \ln R_2(x, \ln x) + ... + a_r \ln R_r(x, \ln x). \qquad (10)$$

Diante do integrando, um pouco de reflexão nos leva a concluir os seguintes fatos:

i) $R_1(x, \ln x) = \frac{C}{2}(\ln x)^2 + T(x)\ln x + U(x)$, com T e U funções racionais e $\frac{C}{2}$ constante;

ii) o restante das funções racionais R_i que aparecem em (10) devem ser funções apenas de x, as quais podem ser escritas como $\sum \frac{a_i}{(x-\alpha_i)}$, com eventuais repetições.

Portanto, a expressão (10) deve ter a forma

$$\frac{C}{2}(\ln x)^2 + T(x)\ln x + U(x) + \sum a_i \ln(x - \alpha_i).$$

Derivando essa expressão e a comparando com $R(x)\ln x$ encontramos

$$\frac{C}{x} + T' = R \text{ e } \frac{T}{x} + U' + \sum \frac{a_i}{(x - \alpha_i)} = 0.$$

Observa-se portanto que a parte transcendente de $\int \frac{T}{x}dx$ deve se anular com $\sum a_i \ln(x - \alpha_i)$.

Assim, por exemplo, as primitivas
$\int \frac{\ln x}{x-a}dx \notin I\!\!E$ se $a \neq 0$ e $\int \frac{\ln x}{(x-a)(x-b)}dx \notin I\!\!E$ se $a \neq b$.

APLICAÇÃO 3: O seno e cosseno integral

Mostremos a seguir, que $\int \frac{sen x}{x}dx$ e $\int \frac{\cos x}{x}dx \notin I\!\!E$. Focalizaremos a primeira integral, o tratamento para segunda é o mesmo. Propositadamente seremos mais detalhistas nessa aplicação, de modo que possamos fornecer um método que possa ajudar a entender eventuais dúvidas em alguma passagem das aplicações anteriores.

Usando a fórmula de Euler, podemos escrever $\frac{sen x}{x} = \frac{1}{2i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Usando a mudança de variável $z = e^{ix}$, nosso problema se resume a mostrar que $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x x}dx \notin I\!\!E$.

Caso $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x x}dx \in \mathbb{E}$, o Teorema 2 de Liouville assegura que essa primitiva deve ser da forma

$$R(x, e^x) + a_2 \ln P_2(x, e^x) + ... + a_r \ln P_r(x, e^x), \tag{11}$$

onde R é uma função racional e os $P_i's$ são polinômios.

A seguir listaremos alguns fatos que nos ajudarão no decorrer da demonstração. Mais uma vez o leitor está convidado a gastar algum tempo se convencendo deles:

(F_I) Todo polinômio $P(x, y)$ pode ser escrito como um produto de polinômios da forma $w(y)z(x)p_1(x, y)...p_n(x, y)$, onde os polinômios $p_i's$ não são necessariamente distintos, mas são polinômios irredutíveis e necessariamente são funções das variáveis x e y.

(F_{II}) Se $P(x, y)$ é um polinômio de grau r, e $P(x, y) \neq cy^r$ então $P(x, e^x)$ não divide $P'(x, e^x)$. Observe que $\partial P(x, e^x) = \partial P'(x, e^x)$ ou $\partial P(x, e^x) < \partial P'(x, e^x)$. ($P' \equiv \frac{dP}{dx}$)

(F_{III}) Usando (F_I), se $R(x, y)$ é uma função racional, então podemos escrever $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ como

$$R(x, y) = \frac{z_1(x)w_1(y)p_1(x, y)...p_n(x, y)}{z_2(x)w_2(y)q_1(x, y)...q_m(x, y)}, \tag{12}$$

onde os z_1, w_1 e $q's$ são distintos dos z_2, w_2 e $p's$.

(F_{IV}) Suponha que algum q_j apareça no denominador de R'. Afirmamos que se isso ocorrer, q_j deve necessariamente aparecer com potência ao quadrado. De fato, se q_j aparecesse no denominador de R' com potência unitária, então como

$$R' = \left\{P'(z_2w_2q_1...q_m) - P(z_2w_2q_1...q_m)'\right\} / (z_2w_2q_1...q_m)^2$$

e q_j não divide P, deveríamos ter que q_j divide $(z_2w_2q_1...q_m)'$, e dai que q_j divide q_j'. O que é um absurdo por (F_{II}). O mesmo raciocínio vale para z_2. Já w_2 pode aparecer com potência unitária no denominador de R', donde nesse caso, concluiríamos que w_2 dividiria w_2', e portanto, por (F_{II}), teríamos que $w_2(e^x) = ce^{rx}$, para algum inteiro positivo r.

Podemos dessa forma, assumir que $R'(x,e^x) = \frac{u(x,e^x)}{e^{bx}(z_2q_1...q_m)^2}$, onde u é um polinômio.

De (F_I), usando o teorema fundamental da Álgebra e as propriedades da função logaritmo podemos assumir que (11) tem a seguinte forma

$$R(x,y) + \sum b_j \ln t_j(e^x) + \sum c_k \ln v_k(x) + \sum a_i \ln p_i(x,e^x), \qquad (13)$$

onde os t_j, v_k e p_i são polinômios irredutíveis e distintos, sendo que t_j e v_k são de primeiro grau e os p_i são necessariamente funções de x e de y.

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}-1}{e^x x} &= \frac{u(x,e^x)}{e^{bx}(z_2q_1...q_m)^2} + \sum b_j \frac{t_j'(e^x)e^x}{t_j(e^x)} \\ &+ \sum c_k \frac{v_k'(x)}{v_k(x)} + \sum a_i \frac{p_i'(x,e^x)}{p_i(x,e^x)} \qquad (14) \end{aligned}$$

e assumir que todas essas frações estão em suas formas irredutíveis.

Ora, os fatores irredutíveis que aparecem no denominador do lado esquerdo de (14), devem ser os mesmos que aparecem do lado direito dessa expressão. Diante desse fato, como os p_i são irredutíveis, vê-se que a possibilidade para eles, é que estejam no conjunto $\{x, e^x\}$. Note também que única possibilidade para os v_k é que sejam x, e para os t_j é que sejam e^x.

Portanto, esses fatos nos permitem assumir que

$$\sum b_j \frac{t_j'(e^x)e^x}{t_j(e^x)} + \sum c_k \frac{v_k'(x)}{v_k(x)} + \sum a_i \frac{p_i'(x,e^x)}{p_i(x,e^x)} = b_1 + \frac{b_2}{x},$$

com b_2 não nulo.

Por outro lado, podemos concluir de (F_{IV}) que nenhum polinômio irredutível q_j ou um polinômio da forma z_2 pode aparecer no denominador da expressão de R'. De fato, caso contrário, q_j^2 ou z_2^2 apareceria(m) no denominador de R', e consequentemente, no denominador lado esquerdo de (14). Mas isso não pode suceder pois nesse denominador, os termos irredutíveis x e e^x só aparecem elevados a potência unitária. Caso um polinômio do tipo w_2 apareça no denominador de R', resulta do que acabamos de falar e de (F_{IV}), que ele deve ser da forma $w_2(e^x) = ce^x$. Como conseqüência, temos que $R'(x, e^x) = u(x, e^x)/e^{bx}$, onde $u(x, y)$ é um polinômio, e $b = 0$ ou $b = 1$.

Os comentários que acabamos de fazer, nos levam a concluir que (14) é na verdade da forma

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x x} = \frac{u(x, e^x)}{e^{bx}} + b_1 + \frac{b_2}{x}, \tag{15}$$

onde $b = 0$ ou $b = 1$. Entretanto isso que não pode ocorrer, já que a expressão do lado direito de (15), a qual contém o quociente $\frac{b_2}{x}$, não pode gerar o termo e^{2x} que aparece no lado esquerdo daquela expressão. Consequentemente, $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x x} dx \notin \mathbb{E}$, e portanto $\int \frac{sen x}{x} dx \notin \mathbb{E}$.

4.3 Teorema de Chebyshev[10]

Consideremos a primitiva das seguintes funções algébricas

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \tag{16}$$

onde a e b são constantes não-nulas e m, n e p são números racionais.

Fazendo a mudança de variável, $x^n = t$, vê-se que a primitiva (16) reduz-se a

$$\int t^q (a + bt)^p dt, \tag{17}$$

onde p e $q = \frac{m+1}{n} - 1$ são números racionais. É fácil ver que

se pelo menos um dos números p, q, ou $p + q$ é inteiro (18)

a integral (17) e, consequentemente (16) pode ser transformada numa integral de uma função racional (vide [14]). O teorema de Chebyshev, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], assegura que esses são

[10]P.L. Chebyshev (1812-1894), matemático russo que deu grandes contribuições à Matemática e à Mecânica. Na metade do século XIX fundou a escola de Matemática da então São Petersburg. Bastante conhecido pelos polinômios que levam seu nome.

os únicos casos onde a integral (16) é dada em termos de funções elementares:

TEOREMA DE CHEBYSHEV: *Dados os números racionais p e q, caso a condição (18) não seja satisfeita, então $\int x^m(a+bx^n)^p dx \notin \mathbb{E}$.*

Os alunos poderão sentir o prazer de usar o Teorema de Chebyshev com os seguintes exercícios:

1) $\int \sqrt[3]{x-x^2}dx, \int \sqrt{x}\sqrt[3]{1-x}dx \notin \mathbb{E}$.

2) $\int \sqrt{1-x^n}dx$ e $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \notin \mathbb{E}$, para qualquer inteiro $n > 2$.

3) $\int \sqrt{senx}dx \notin \mathbb{E}$, e mais geralmente, $\int sen^p x dx \in \mathbb{E}$ (p racional) se, e somente se, p for um inteiro.

4) $\int sen^p x \cos^q x dx \in \mathbb{E}$ (p e q números racionais) se, e somente se, p ou q é inteiro ímpar ou $p+q$ é um inteiro par.

4.4 Integrais elípticas

Dentre as primitivas que **não** são dadas em termos de funções elementares e que têm uma vasta aplicação em toda matemática, seja na teoria dos números, na geometria, na física-matemática, etc. , as chamadas *integrais elípticas* têm um lugar de destaque. Essas integrais envolvem expressões que contêm raizes quadradas de polinômios de terceiro ou quarto graus e algumas são classificadas em primeira, segunda e terceira categoria. Listamos a seguir, respectivamente, essas categorias:

$$1^{\underline{a}}) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \tag{19}$$

$$2^{\underline{a}}) \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \tag{20}$$

$$3^{\underline{a}}) \int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{21}$$

h e k constantes.

Várias integrais podem ser tranformadas em integrais elípticas. Por exemplo, as integrais $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos\alpha-\cos x}}, \int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$ e $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 sen^2 x}}$ com as respectivas mudanças de variável $u = \cos\frac{x}{2}, v = senx$ e $z = senx$ são transformadas em integrais elípticas do primeiro tipo.

Há uma vasta teoria sobre as integrais elípticas e funções elípticas (que são as inversas de (19)) e a prova de que elas **não** podem ser dadas em termos de funções elementares requer conhecimentos da teoria de funções analíticas complexas (vide [10], pg. 35).

5 Apêndice

LEMA: *Seja p um polinômio com uma raiz $x = \alpha$ de multiplicidade $r > 0$, i.e., $p(x) = (x-\alpha)^r h(x)$, com h um polinômio tal que $h(\alpha) \neq 0$. Então $x = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade $r-1$ de sua derivada p', ou seja, $p'(x) = (x-\alpha)^{r-1} q(x)$,com q um polinômio tal que $q(\alpha) \neq 0$.*

6 Considerações finais

Observa-se que o processo de integração gera várias novas funções que são primitivas que não podem ser escritas por meio de funções elementares. Ao utilizar algum programa computacional que calcula primitivas, o aluno percebe que ele as reduz ao máximo para escrevê-la em termos de transcendentes mais conhecidas. Por exemplo, o Programa Maple ao integrar $\frac{e^x}{(x-1)(x-2)}$ encontra a expressão $e\mathrm{Ei}(1,-x+1) - e^2\mathrm{Ei}(1,-x+2)$, onde $\mathrm{Ei}(n,x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}dt$. Muitas vezes o programa fornece a expressão da primitiva em termos de outras funções como as elípticas, hipergeométricas, dilog, etc. É necessário portanto que o aluno entenda o porquê, o que significa essas expressões finais, e que ele não pode ir mais adiante ao tentar representar essas primitivas em termos de funções elementares.

Percebe-se pelo que expusemos nesse artigo que o processo de saber se uma determinada primitiva pode ser dada ou não em termos de funções elementares está longe de ser alcançado e sequer se isso seja possível. Grandes tentativas foram feitas por eminentes matemáticos do século passado nesse sentido, gerando os teoremas que expusemos nas seções anteriores. Esse é um tipo de problema que vez ou outra aparece na Matemática: simples de ser formulado, encantador, enfeitiçante, mas esconde muitas dificuldades em torno dele, e pode iludir até os mais experientes por essas características, principalmente por sua beleza, como um canto de sereia...

7 Bibliografia

1. Hardy, G.H.: *The integration of functions of a single variable, Cambridge University Press*, Second edition (1928).

2. Liouville, J.: *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique*, Journal de l'École Polytechnique, vol. XIV (1833), Section 23, pp.124-193.

3. ——— : *Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première espèce, considerées comme fonctions de leur amplitude*, Journal de l'École Polytechnique, vol. XIV (1833), Section 24, pp.57-83.

4. ——— : *Mémoire sur l 'integration d 'une classe de fonctions transcendantes*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol.XIII (1835), pp.93-118.

5. ——— : *Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients*, Journal de mathématiques, pures et appliquées, vol. II (1837) ,pp. 56-104; vol III, pp. 523-546.

6.——— : *Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première espèce, considerées comme fonctions de leur module*, Journal de Mathématiques, Pures et Appliquées, vol. V (1840) ,pp. 34-36; pp. 441-464.

7. Mead, D.G.: *Integration*, Amer. Math. Month., vol.68 (1961), pp. 152-156.

8 . Ostrowski, A.: *Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions*, Acta Mathematica, vol.LXXVII (1946), pp. 315-318.

9. Ritt, J.F.: *On the integral of elementary functions*, Transac. Amer. Math. Soc., vol. XXVII (1925), pp.68-90.

10. Ritt, J.F.: *Integration in finite terms, Liouville's theory of elementary methods*, Columbia University Press (1948).

11.Risch, R.:*The Problem of integration in finite terms*, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969), pp. 167-189.

12.Rosenlicht, M.: *Liouville's theorem on functions with elementary integrals*, Pacific J. Math., 24 (1968) 153-161.

13.Rosenlicht, M.: *Integration in finite terms*, Amer. Math. Month. (1972) 963-972.

14.Simmons, G. F. : *Cálculo com geometria analítica, vol I*, Editora McGraw Hill (1987).

Muito obrigado aos pacientes amigos, que leram o texto, me deram várias sugestões e contribuições, e suportaram por várias vezes me ouvir falar insistentemente sobre o tema!

Departamento de Matemática e Estatística
Universidade Federal da Paraíba- Campus II
Cx. Postal 10044-Campina Grande-PB
CEP 58109-970
daniel@dme.ufpb.br