Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Relatório Final

Introdução aos sistemas dinâmicos discretos unidimensionais

APOIO: PIBIC CNPq/Unicamp

Bolsista: Yudi Bombarda Kawamura, RA: 148257

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas
2015

Resumo

Neste trabalho consideramos sistemas dinâmicos unidimensionais, ou seja, sistemas gerados ao iterarmos uma função real. Os principais resultados que nós estudamos foram o Teorema de Sarkovskii, que afirma que se existe um ponto 3-periódico para uma função contínua então existem pontos de qualquer outro período, e sua generalização mais direta, que introduz uma nova ordem $\leq$ no conjunto dos números naturais e garante que se existe um ponto n periódico e $m \geq n$, então existe um ponto m-periódico.

MATERIAIS E MÉTODOS

Neste projeto de pesquisa, o estudo dos temas foi feito em livros e artigos indicados pelo orientador e ocorreram seminários periódicos, em que eu apresentava os resultados estudados ao orientador, de maneira expositiva, com a utilização de lousa e giz.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer ao PIBIC/Unicamp/CNPq pelo suporte financeiro.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Primeiros exemplos

Como um primeiro exemplo de sistema dinâmico, considere a seguinte situação. R$1000 são depositados num banco com juros de 10% ao ano. Faz-se então a seguinte pergunta: se o dinheiro é mantido intacto por n anos, quanto dinheiro haverá na conta ao fim desse período? Por simplicidade, assumimos que os juros de 10% são adicionados à conta uma vez a cada ano no final do ano.

Este é um dos exemplos mais simples de um *processo iterativo* ou *sistema dinâmico*. Denotaremos o montante que temos no banco ao final do n-ésimo ano por A_n. Sabemos que A_0, nosso capital inicial, é R$1000. Depois de 1 ano, adicionamos 10% a este montante para obter nosso novo saldo. Isto é,

$$A_1 = A_0 + 0.1A_0 = 1.1A_0$$

No nosso caso específico, $A_1 =$ R$1100. Ao final do segundo ano, executamos a mesma operação

$$A_2 = A_1 + 0.1A_1 = 1.1A_1,$$

de modo que $A_2 =$ R$1210. Continuando,

$$\begin{aligned} A_3 &= 1.1A_2 \\ A_4 &= 1.1A_3 \\ &\vdots \\ A_n &= 1.1A_{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos determinar recursivamente o montante A_n uma vez que soubermos o saldo do ano anterior. Resolvemos a equação $A_n = 1.1A_{n-1}$ pelo processo de iteração. O processo iterativo envolvido é a multiplicação por 1.1. Isto é, se definirmos a função $F(x) = 1.1x$, então podemos determinar nossos saldos de poupança aplicando repetidamente esta função:

$$\begin{aligned} A_1 &= F(A_0) \\ A_2 &= F(A_1) \\ A_3 &= F(A_2) \end{aligned}$$

e assim por diante. Note que podemos escrever também

$$\begin{aligned} A_2 &= F(F(A_0)) = F \circ F(A_0) \\ A_3 &= F(F(F(A_0))) = F \circ F \circ F(A_0) \end{aligned}$$

para claramente indicar que compomos a função F com ela mesma repetidamente para obter os saldos sucessivos.

Já que $F(x) = 1.1x$, temos

$$F(F(x)) = (1.1)^2 x$$
$$F(F(F(x))) = (1.1)^3 x,$$

e, em geral,a n-ésima iteração da função produz

$$F \circ \cdots \circ F(x) = (1.1)^n x.$$

Assim, para encontrar A_n, nós meramente computamos $(1.1)^n$ e multiplicamos por A_0.

1.2 Iteração

Há muitos tipos de problemas na ciência e na Matemática que envolvem *iteração.* Iteração significa repetir um processo cada vez mais. Em dinâmica, o processo que é repetido é a aplicação de uma função. Iterar uma função significa aplicar a função cada vez mais, utilizando o resultado da aplicação anterior como a entrada para a próxima aplicação da função. Matematicamente, este é o processo de compor repetidamente a função com ela mesma.

Para uma função F, $F^2(x)$ é a segunda iteração de F, isto é, $F(F(x))$, $F^3(x)$ é a terceira iteração $F(F(F(x)))$, e, em geral, $F^n(x)$ é a n-ésima composição de F com ela mesma. Por exemplo, se $F(x) = x^3 + 7$, então

$$F^2(x) = (x^3 + 7)^3 + 7$$

$$F^3(x) = ((x^3 + 7)^3 + 7)^3 + 7.$$

Analogamente, se $F(x) = x^2$, então

$$F^2(x) = (x^2)^2 = x^4$$
$$F^3(x) = (x^4)^2 = x^8.$$

1.3 Órbitas

Definição: Dado $x_0 \in \mathbf{R}$, definimos a *órbita de x_0 sob a função F* como sendo a sequência de pontos $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \ldots, x_n = F^n(x_0), \ldots$. O ponto x_0 é chamado de ponto inicial.

Por exemplo, se $F(x) = 3x$ e $x_0 = 3$, os primeiros pontos na órbita de x_0 são

$$x_0 = 3$$
$$x_1 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$x_2 = 3 \cdot 9 = 27$$
$$x_3 = 3 \cdot 27 = 81$$
$$x_4 = 3 \cdot 81 = 243$$

1.4 Tipos de órbitas

·**Ponto fixo:** Um ponto fixo é um ponto que satisfaz $F(x_0) = x_0$. Assim, $F^2(x_0) = F(F(x_0)) = F(x_0) = x_0$ e, em geral, $F^n(x_0) = x_0$. A órbita de um ponto fixo é a sequência constante $x_0, x_0, x_0, \ldots$. Um ponto fixo nunca se move. Exemplos: 0, 1 e -1 são pontos fixos para $F(x) = x^3$, enquanto que apenas 0 e 1 são pontos fixos para $F(x) = x^2$. Para encontrar pontos fixos, resolvemos a equação $F(x) = x$. Assim, considerando a função $F(x) = 3x + 2$, resolvemos a equação $3x + 2 = x$, cuja solução é $x = -1$, o que significa que $x = -1$ é o ponto fixo para a função $F(x) = 3x + 2$. Também podemos encontrar pontos fixos geometricamente, examinando a intersecção do gráfico da função com a reta de equação $y = x$. Por exemplo, o único ponto fixo

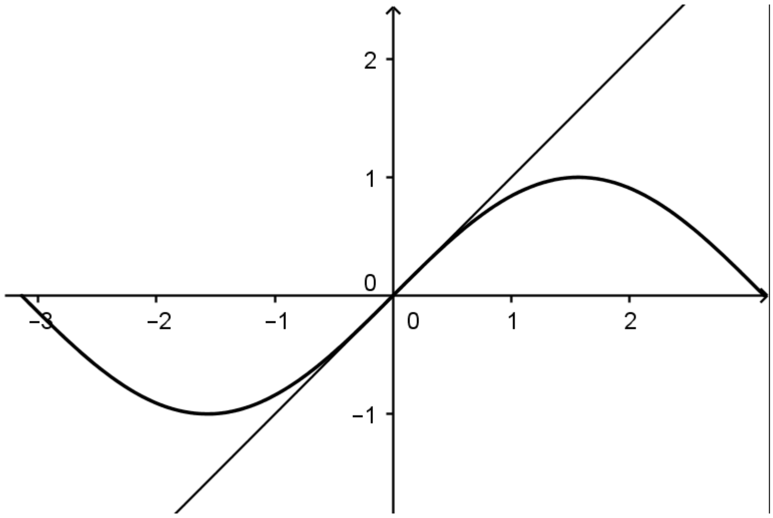

Figura 1.1: O ponto fixo de $S(x) = \sin x$ é 0

de $S(x) = \sin x$ é $x_0 = 0$, já que este é o único ponto de intersecção do gráfico de S com a reta $y = x$, como mostra a figura 1.1.

·**Órbita periódica ou cíclica:** x_0 é um ponto periódico se $F^n(x_0) = x_0$, para algum $n > 0$. O menor de tais n é chamado primeiro período da órbita. Se x_0 é periódico de primeiro período n, então a órbita de x_0 é: $x_0, F(x_0), \ldots, F^{n-1}(x_0), x_0, F(x_0), \ldots, F^{n-1}(x_0), \ldots$. Exemplos: 0 tem uma órbita periódica de período 2 para $F(x) = x^2 - 1$, já que $F(0) = -1$ e $F(-1) = 0$. A órbita de 0 é: $0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots$. Dizemos que 0 e -1 formam um 2-ciclo ou ainda que 0 e -1 são pontos 2-periódicos. Além disso, 0 também tem uma órbita 2-periódica para $F(x) = 1 - x^2$, uma vez que $F(0) = 1$ e $F(1) = 0$. Assim, a órbita de 0 é $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ e 0 e 1 formam um 2-ciclo.

·**Ponto eventualmente fixo ou eventualmente periódico:** x_0 é eventualmente fixo ou eventualmente periódico se ele em si não é fixo ou periódico, mas algum ponto na órbita de x_0 é fixo ou periódico. Exemplos: -1 é eventualmente fixo para $F(x) = x^2$, pois $F(-1) = 1$, o qual é fixo. Analogamente, 3 é eventualmente fixo para $F(x) = |x - 2|$, pois $F(3) = 1$ e 1 é fixo. Além disso, 1 é eventualmente periódico para $F(x) = x^2 - 1$, pois $F(1) = 0$, que tem órbita 2-periódica. O ponto $x = 4$ é eventualmente periódico para $F(x) = |x - 2|$, já que sua órbita é

$$4, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots.$$

1.5 Análise gráfica

Suponha que temos o gráfico de uma função F e queremos exibir a órbita de um dado ponto x_0. Nós começamos sobrepondo a diagonal $y = x$ ao gráfico de F. Os pontos de intersecção da diagonal com o gráfico nos dão os pontos fixos de F. Para encontrar a órbita de x_0, nós começamos no ponto (x_0, x_0) na diagonal diretamente acima de x_0 no eixo-x. Primeiramente desenhamos uma linha vertical até o gráfico de F partindo do ponto (x_0, x_0). Quando esta linha encontrar o gráfico, atingimos o ponto $(x_0, F(x_0))$. Desenhamos então uma linha horizontal deste ponto até a diagonal. Atingimos a diagonal no ponto cuja ordenada é $F(x_0)$, e assim a abscissa é também $F(x_0)$. Portanto, atingimos a diagonal diretamente no ponto cuja abscissa é $F(x_0)$, o próximo ponto na órbita de x_0.

Agora nós continuamos este procedimento. Desenhamos uma linha vertical partindo do ponto $(F(x_0), F(x_0))$ na diagonal até o gráfico: isto resulta no ponto $(F(x_0), F^2(x_0))$. Então uma linha

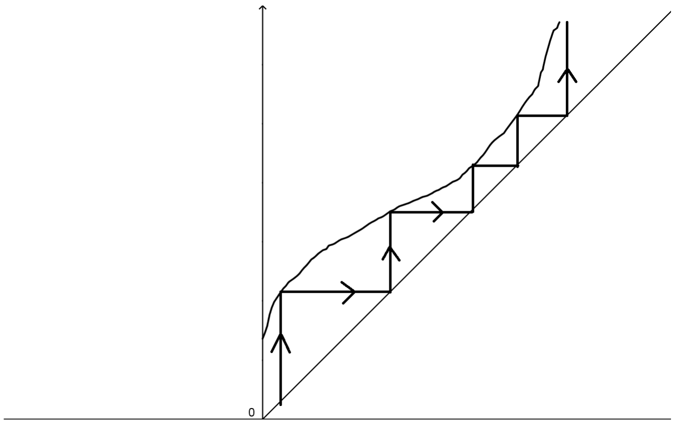

Figura 1.2: Análise gráfica

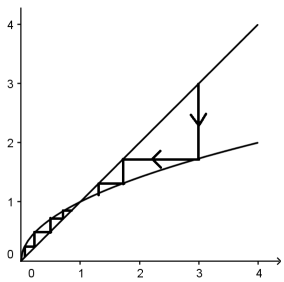

Figura 1.3: Análise gráfica de $F(x) = \sqrt{x}$

horizontal até a diagonal atinge esta em $(F^2(x_0), F^2(x_0))$, diretamente acima do próximo ponto na órbita.

Para exibir a órbita de x_0 geometricamente, nós então continuamos este procedimento: primeiramente desenhamos uma linha vertical da diagonal até o gráfico, e em seguida uma linha horizontal do gráfico de volta para a diagonal. O desenho de uma "escada", que chamaremos de *caso escada*, que resulta deste procedimento fornece uma figura ilustrativa da órbita de x_0.

A figura 1.2 mostra uma típica aplicação de análise gráfica. Na figura 1.3 esboçamos a análise gráfica de $F(x) = \sqrt{x}$. Note que qualquer positivo x_0 fornece um *caso escada* que leva ao ponto de intersecção do gráfico de F com a diagonal. Este é, obviamente, o ponto fixo em $x = 1$.

1.6 Análise orbital

A análise gráfica por vezes nos permite descrever o comportamento de *todas* as órbitas de um sistema dinâmico. Por exemplo, considere a função $F(x) = x^3$. O gráfico de F mostra que existem três pontos fixos: em $0, 1$, e -1. Estas são as soluções da equação $x^3 = x$, ou $x^3 - x = 0$. A análise gráfica nos permite deduzir o seguinte comportamento. Se $|x_0| < 1$, então a órbita de x_0 tende a zero, como mostrado na figura 1.4. Por outro lado, se $|x_0| > 1$, então a órbita de x_0 tende a $\pm\infty$, como na figura 1.5.

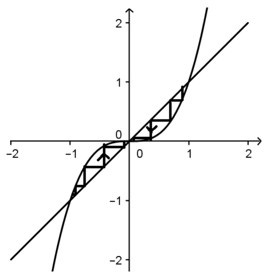

Figura 1.4: Análise orbital de $F(x) = x^3$ para $|x| < 1$.

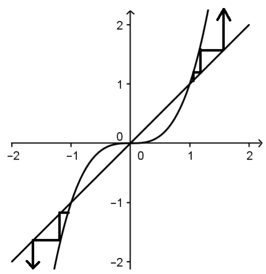

Figura 1.5: Análise orbital de $F(x) = x^3$ para $|x| > 1$.

1.7 Retrato de fase

Um método sucinto para retratar todas as órbitas de um sistema dinâmico é o *retrato de fase* do sistema. Trata-se de uma figura das órbitas na reta real. No caso unidimensional, o retrato de fase nos informa nada mais do que a análise gráfica. No retrato de fase, representamos os pontos fixos por círculos cheios e a dinâmica ao longo das órbitas por flechas. Por exemplo, como vimos acima, para $F(x) = x^3$, os pontos fixos ocorrem em $0, \pm 1$. Se $|x_0| < 1$, então $F^n(x_0) \to 0$, enquanto que se $|x_0| > 1$, $F^n(x_0) \to \pm\infty$. O retrato de fase para este caso está mostrado na figura 1.6.

1.8 Atração e repulsão

Há dois tipos notadamente diferentes de pontos fixos, pontos fixos *atratores* e *repulsores*. Antes de definir precisamente estes conceitos, vamos ilustrar a ideia que está por detrás deles por meio da função quadrática $F(x) = x^2$. Esta função tem dois pontos fixos, em 0 e 1. Se escolhermos qualquer x_0 com $|x_0| < 1$, então a órbita de x_0 rapidamente se aproxima do zero. Por exemplo, a órbita de 0.1 é

$$0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, \ldots.$$

De fato, qualquer x_0 com $0 \le x_0 < 1$, não importando o quão perto está de 1, leva a uma órbita que tende para "longe"do 1 e para perto do 0. Por exemplo, a órbita de 0.9 é

$$0.9, 0.81, 0.6561, 0.430467\ldots, 0.185302\ldots, 0.034336\ldots, 0.00117\ldots.$$

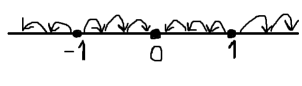

Figura 1.6: Retrato de fase de $F(x) = x^3$.

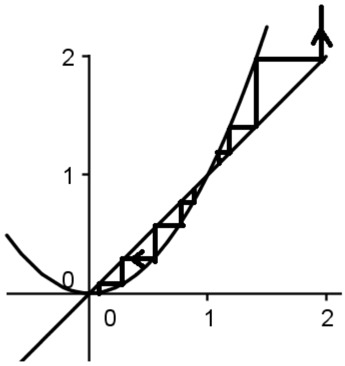

Figura 1.7: O ponto 0 é um ponto fixo atrator para $F(x) = x^2$, enquanto que o 1 é um ponto fixo repulsor.

Mais precisamente, se $0 \leq x_0 < 1$, então $F^n(x_0) \to 0$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, se $x_0 > 1$, então novamente a órbita se distancia do 1. Por exemplo, a órbita de 1.1 é

$$1.1, 1.21, 1.4641, 2.1436\ldots, 4.5950\ldots, 21.114\ldots, 445.79\ldots.$$

Assim, se $x_0 > 1$, temos $F^n(x_0) \to \infty$ quando $n \to \infty$ e consequentemente a órbita tende para longe do 1.

Pontos próximos do 0 possuem órbitas que são atraídas pelo 0, enquanto que pontos próximos do 1 possuem órbitas que são repelidas, que se distanciam do 1. A análise gráfica dessa função, como na figura 1.7, mostra claramente a diferença entre estes dois tipos de pontos fixos.

Definição: Suponha x_0 um ponto fixo para F. Então x_0 é um *ponto fixo atrator* se $|F'(x_0)| < 1$. O ponto x_0 é um *ponto fixo repulsor* se $|F'(x_0)| > 1$. Finalmente, se $|F'(x_0)| = 1$, o ponto fixo é chamado *neutro* ou *indiferente*.

Como exemplo, considere a função $F(x) = 2x(1-x) = 2x - 2x^2$. É fácil ver que 0 e $\dfrac{1}{2}$ são pontos fixos para F. Temos que $F'(x) = 2 - 4x$, então $F'(0) = 2$ e $F'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Assim, 0 é um ponto fixo repulsor, enquanto $\dfrac{1}{2}$ é atrator. A análise gráfica confirma este fato, como mostrado na figura 1.8.

Com a definição de *ponto fixo atrator* dada, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema de ponto fixo atrator: Suponha x_0 um ponto fixo atrator para F. Então existe um intervalo I que contém x_0 em seu interior e no qual a seguinte condição é satisfeita: se $x \in I$, então $F^n(x) \in I$ para todo n e, além disso, $F^n(x) \to x_0$ quando $n \to \infty$.

1.9 Pontos periódicos

Analogamente ao caso dos pontos fixos, os pontos periódicos também podem ser classificados em atratores, repulsores e neutros. Vamos começar com um exemplo. A função $F(x) = x^2 - 1$

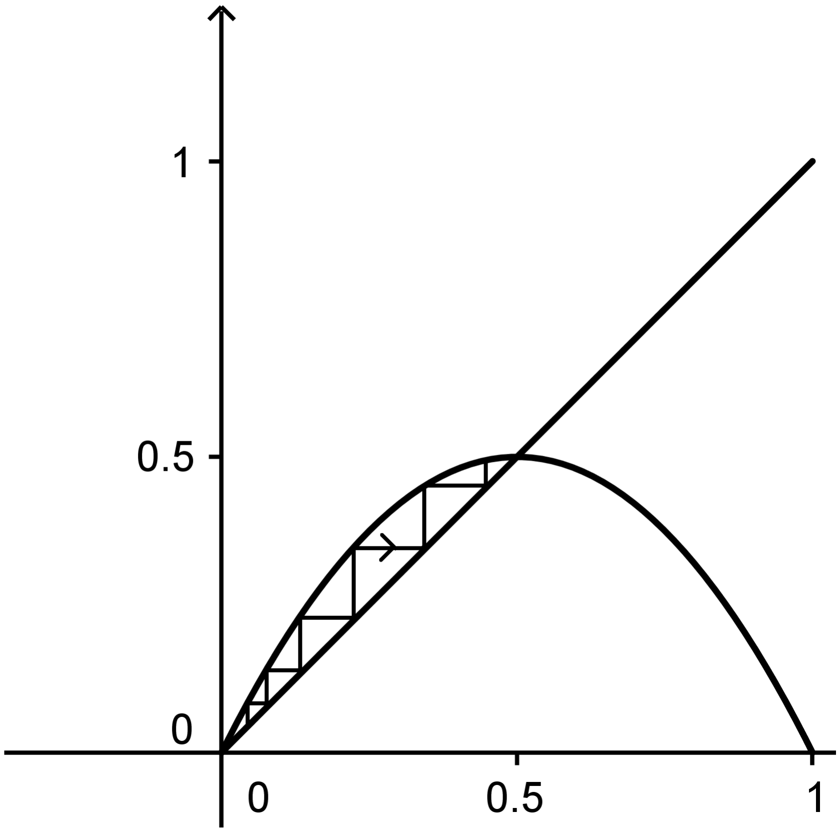

Figura 1.8: $F(x) = 2x(1-x)$ tem um ponto fixo atrator em $\dfrac{1}{2}$ e um ponto fixo repulsor em 0.

tem um ciclo atrator de período 2 com órbita $0, -1, 0, -1, \ldots$. Para entender este caso, vamos examinar o gráfico de $F^2(x) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$, como mostrado na figura 1.9. Note que F^2 tem quatro pontos fixos: nos dois pontos fixos da F assim como nos pontos 2-periódicos 0 e -1. Note ainda que $(F^2)'(x) = 4x^3 - 4x$ e $(F^2)'(0) = (F^2)'(-1) = 0$. Isto indica que estes dois pontos são pontos fixos atratores para a segunda iterada de F. Isto é, sob iteração de F^2, as órbitas de pontos próximos a 0 e -1 convergem para estes pontos. Sob a iteração de F, entretanto, estas órbitas "fazem um ciclo"de um lado a outro à medida que convergem para o 2-ciclo.

Definição: Um ponto periódico de período n ou n-periódico é atrator (ou repulsor) se é ao mesmo tempo um ponto fixo atrator (ou repulsor) para F^n.

Para determinar se um ponto n-periódico x_0 é atrator ou repulsor, devemos analisar a derivada de F^n em x_0. Para isso, utilizamos a Regra da Cadeia:

$$(F^2)'(x_0) = F'(F(x_0)) \cdot F'(x_0) = F'(x_1) \cdot F'(x_0),$$

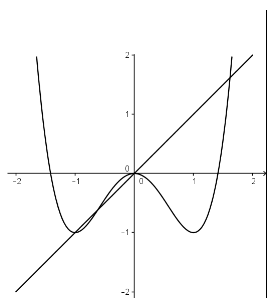

Figura 1.9: Gráfico da segunda iterada de $F(x) = x^2 - 1$.

e

$$(F^3)'(x_0) = F'(F^2(x_0)) \cdot (F^2)'(x_0) = F'(x_2) \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0).$$

Invocando a Regra da Cadeia $n-1$ vezes, encontramos:

Regra da cadeia ao longo de um ciclo: Suponha que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ formam um ciclo de período n para F com $x_i = F^i(x_0)$. Então:

$$(F^n)'(x_0) = F'(x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0).$$

Ou seja, a derivada de F^n em x_0 é o produto das derivadas de F em todos os pontos da órbita.

Corolário: Suponha que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ formem um n-ciclo para F. Então:

$$(F^n)'(x_0) = (F^n)'(x_1) = \ldots = (F^n)'(x_{n-1}).$$

Este corolário segue imediatamente da proposição anterior, já que os pontos no ciclo são exatamente os mesmos, não importando a escolha do ponto inicial.

Exemplo: Considere $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$. O ponto 0 faz parte de um ciclo de período 3, já que $F(0) = 1, F(1) = 2$, e $F(2) = 0$. Temos que $F'(x) = -3x + \frac{5}{2}$, assim $F'(0) = \frac{5}{2}, F'(1) = -\frac{1}{2}$ e $F'(2) = -\frac{7}{2}$. Portanto:

$$(F^3)'(0) = F'(2) \cdot F'(1) \cdot F'(0) = \left(\frac{-7}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{8} > 1.$$

Logo, este ciclo é repulsor.

Capítulo 2

RESULTADOS

2.1 Teorema de Sarkovskii

O principal resultado que provamos foi o Teorema de Sarkovskii, que está enunciado abaixo:

Teorema de Sarkovskii: Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Suponha que f tem uma órbita de período 3. Então f tem pontos periódicos de todos os outros períodos.

Prova: Note que se I, J são intervalos fechados com $I \subset J$ e $J \subset f(I)$, então f tem um ponto fixo em I. De fato, seja $J = [a, b]$ e $I = [c, d]$ com $a \leq c \leq d \leq b$. Seja $f(I) = [\alpha, \beta]$. Assim, $\alpha \leq a \leq c \leq d \leq b \leq \beta$. Seja $g(x) = f(x) - x$. Assim, existem $x_0 \in [c, d]$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - \alpha > 0$ e $x_1 \in [c, d]$ tal que $g(x_1) = f(x_1) - \beta < 0$. Logo, existe $x_2 \in [c, d]$ tal que $g(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_2) = x_2$.

Agora sejam $A_0, \ldots, A_n$ intervalos fechados com $A_{i+1} \subset f(A_i), i = 0, \ldots, n-1$. Então existe um subintervalo J_0 de A_0 que é levado em A_1. Analogamente, existe um subintervalo de A_1 que é levado em A_2, logo existe $J_1 \subset J_0$ tal que $f(J_1) \subset A_1$, $f(f(J_1)) = A_2$. Continuando, obtemos uma sequência de intervalos $J_{n-1} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0$ que são aplicados ordenadamente nos A_i's $(f(J_0) = A_1, f(J_1) = A_2, \ldots, f(J_{n-1}) = A_n)$.

Sejam $a, b, c \in \mathbf{R}$. Suponha $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ (ponto 3-periódico). Assuma $a < b < c$. Sejam $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [b, c]$. Note que $I_1 \subset f(I_0)$ e $I_0 \cup I_1 \subset f(I_1)$ (pelo Teorema do Valor Intermediário). O gráfico de f precisa encontrar a diagonal entre b e c, pois $b < c$ e $f(b) > b$ e $f(c) < c$ (logo, se $g(x) = f(x) - x$, segue que $g(b) = f(b) - b > 0$ e $g(c) = f(c) - c < 0$). Da mesma forma, f^2 precisa ter um ponto fixo entre a e b. De fato, seja $h(x) = f(f(x)) - x$. Assim, $h(a) = f(f(a)) - a = c - a > 0$ e $h(b) = f(f(b)) - b = a - b < 0$. Note que ao menos um dos pontos fixos de f^2 em $[a, b]$ precisa ser 2-periódico.

Assim, já encontramos um ponto fixo e um ponto 2-periódico. Resta-nos encontrar um ponto de período $n > 3$. Suponha n primo. Sejam $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2} \subset I_1$ definidos como:

$$A_0 = I_1$$

Como $f(I_1) \supset I_1$, existe um subintervalo $A_1 \subset A_0$ tal que $f(A_1) = A_0$, e daí $f(A_1) = A_0 = I_1$. Continuando, existe $A_2 \subset A_1$ tal que $f(A_2) = A_1$, logo $f^2(A_2) = A_0 = I_1$. Continuando, obtemos $A_{n-2} \subset A_{n-3}$ tal que $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$. Agora, vimos que se $x \in A_{n-2}$, então

$$f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x) \in A_0,$$

logo $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$.

Como $I_0 \subset f(I_1)$, existe um subintervalo $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tal que $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$. Finalmente, como $f(I_0) \supset I_1$, temos $I_1 \subset f^n(A_{n-1})$, logo $f^n(A_{n-1})$ cobre A_{n-1}. Assim, f^n tem um ponto fixo p em A_{n-1}. Note que as primeiras $n-2$ iterações de p estão em I_1, a $(n-1)$-ésima está em I_0 e a n-ésima é p. Se $f^{n-1}(p)$ está no interior de I_0, então p tem período n. Caso $f^{n-1}(p)$ esteja na fronteira, $n = 2$ ou $n = 3$ e temos o resultado.

2.2 Uma generalização

Nós também provamos uma generalização deste último teorema, que considera uma outra ordem $\succ$ no conjunto dos números naturais, na qual eles são reordenados da seguinte forma:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots \succ 2^k\cdot 3 \succ 2^k\cdot 5 \succ \cdots \succ 2^{k+1} \succ 2^k \succ \cdots \succ 2 \succ 1.$$

Isto é, primeiramente liste todos os números ímpares exceto o 1, seguidos por 2 vezes os ímpares, 2^2 vezes os ímpares, 2^3 vezes os ímpares, etc. Assim, todos os números naturais já foram perpassados com exceção das potências de dois, que são listadas no final em ordem decrescente. O número 1 é o último. Esta nova ordem $\succ$ dos números naturais é conhecida como *ordenação de Sarkovskii*. A generalização do último teorema, que utiliza a *ordenação de Sarkovskii*, está enunciada a seguir:

Teorema: Seja $f : I \to I$ uma função contínua. Se f possui um ponto de período n e $n \succ m$, então f possui um ponto de período m.

A prova deste teorema, assim como a do anterior, envolve apenas o Teorema do Valor Intermediário e várias considerações sobre imagens inversas de intervalos.

2.3 Exemplo de Aplicação: As maçãs dos macacos

Havia uma pilha de maçãs na praia que pertencia a cinco macacos e deveria ser distribuída igualmente entre eles. O primeiro macaco veio, esperou um pouco, mas nenhum dos outros o seguiu. Ele dividiu aquelas maçãs em cinco pilhas, cada uma das quais com o mesmo número de maçãs. Porém, uma maçã sobrou, ele a jogou no mar e foi embora com a sua própria pilha de maçãs. O segundo macaco veio e dividiu o restante das maçãs igualmente em cinco pilhas, também. Novamente, uma maçã foi deixada e jogada no mar. Então ele foi embora com suas próprias maçãs, também. Mais tarde, um por um, cada macaco fez o mesmo que os dois primeiros fizeram.

Qual o menor número de maçãs que há na praia inicialmente? Qual o menor número de maçãs que são deixadas depois de todos os macacos tomarem as suas?

O problema não é fácil de resolver se forem utilizadas as equações usuais. Assim, o famoso físico Dirac sugeriu resolver o problema da seguinte maneira: Seja N o número inicial de maçãs, e A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 os números de maçãs levadas pelos macacos. Então, nós teremos um sistema de equações lineares:

$$(1)\begin{cases} N - 5A_1 = 1 \\ 4A_1 - 5A_2 = 1 \\ 4A_2 - 5A_3 = 1 \\ 4A_3 - 5A_4 = 1 \\ 4A_4 - 5A_5 = 1 \end{cases}$$

o qual possui uma solução particular

$$(N, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = (-4, -1, -1, -1, -1, -1).\ (2)$$

As equações homogêneas correspondentes de (1) tem uma solução geral

$$\left(5\left(\frac{5}{4}\right)^4 k, \left(\frac{5}{4}\right)^4 k, \left(\frac{5}{4}\right)^3 k, \left(\frac{5}{4}\right)^2 k, \frac{5}{4}k, k\right)\ (3)$$

em que k é uma constante qualquer. Portanto, a solução geral de (1) é

$$\left(5\left(\frac{5}{4}\right)^4 k-4, \left(\frac{5}{4}\right)^4 k-1, \left(\frac{5}{4}\right)^3 k-1, \left(\frac{5}{4}\right)^2 k-1, \frac{5}{4}k-1, k-1\right). \ (4)$$

De (4), podemos determinar que o menor inteiro positivo para N é $5^5-4=3121$ quando $k=4^4=256$; e o número de maçãs deixadas é $4A_5=4(k-1)=1020$.

Como se pode ver, esta solução é baseada na estrutura de soluções de equações lineares. Se não tivermos um conhecimento da teoria, fica bem difícil encontrar a solução.

O método que utilizamos para este problema é fundamental e muito simples. Suponha que x seja o número de maçãs antes de um macaco chegar e y o número de maçãs depois que ele sair. Claramente, y é determinado por x, digamos $y=f(x)$, e

$$f(x)=\frac{4}{5}(x-1). \ (5)$$

Se havia N maçãs no começo e M maçãs no fim, então

$$M=f(f(f(f(f(N)))))=f^5(N). \ (6)$$

Agora, precisamos obter uma fórmula para $f^5(x)$. Reescrevemos $f(x)$ como

$$f(x)=\frac{4}{5}(x+4)-4 \ (7)$$

em que, como se pode ver, -4 é um ponto fixo de $f(x)$.

Obviamente,

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 (x+4)-4\\
f^3(x) &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 (x+4)-4\\
f^4(x) &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 (x+4)-4\\
f^5(x) &= \left(\frac{4}{5}\right)^5 (x+4)-4
\end{aligned}$$

e portanto

$$M=\left(\frac{4}{5}\right)^5 (N+4)-4$$

Para que M seja um inteiro positivo, $N+4$ deve ser um múltiplo de 5^5. Então o menor valor inteiro positivo de N é

$$N=5^5-4=3121,$$

e consequentemente

$$M=4^5-4=1020.$$

Capítulo 3

Conclusão

Os sistemas dinâmicos unidimensionais, como os que estudamos neste trabalho, tem muitas propriedades interessantes e importantes.

Seu estudo, no entanto, apresenta muitas dificuldades, mesmo nos exemplos mais simples.

O Teorema de Sarkovskii é um poderoso teorema em sistemas dinâmicos discretos e é muito útil em aplicações. Sua prova é muito construtiva, de forma que é possível encontrar pontos k-periódicos, para valores grandes de k, apenas sabendo que existe um ponto s-periódico, para valores pequenos de $s < k$, sem resolver equações não lineares.

Capítulo 4

Bibliografia

1. Devaney, R. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, 1989.

2. Devaney, R. A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. Westview Press, 1992.

3. Holmgreen, R.A. A First Course in Discrete Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1994.

4. Lima, E.L. Curso de Análise, vol 1, IMPA, 2013.

5. Brietzke, E.H.M.; Silva, P.R.da. Análise II. São José do Rio Preto, 2005.

6. Huang, X.C. From Intermediate Value Theorem to Chaos. Mathematics Magazine, New Jersey, vol. 65, n.2, 1992.

7. Lima, Y. Teorema de Sarkovsky. 2008.

8. Briend, J.Y. Le Théorème de Sarkovskii. Le journal de maths des élèves, volume 1, no.3, 1995.