

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

STEPHANIE GABRIELE NIETTO

RELATÓRIO FINAL

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS AO ESTUDO DE MODELOS PARA
FENÔMENOS BIOLÓGICOS

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas

2021 - 2022

1 Introdução e motivação

Com a pandemia da Covid-19, o uso de equações diferenciais para modelar fenômenos biológicos se tornou muito mais recorrente que em tempos anteriores. Com alguns modelos de equações diferenciais, cientistas puderam prever o avanço e os desdobramentos da pandemia, que persiste ainda nos dias atuais.

Tendo essa como uma de nossas motivações, foi realizado um estudo de equações diferenciais autônomas da forma

$$X' = F(X)$$

num aberto de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) no caso especial de modelos matemáticos e suas aplicações.

2 Objetivos

Nosso estudo levou em conta casos particulares em que as soluções destes sistemas são periódicas, e casos onde é interessante estudar uma singularidade no sentido de Liapunov.

Estabelecidas as bases matemáticas e teóricas para o estudo destas aplicações, focamos em duas classes de equações diferenciais: As equações de Lotka Volterra e os modelos SIR de evolução de uma pandemia.

As equações de Lotka Volterra são sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} x' &= x(\alpha - \beta y) \\ y' &= y(\delta x - \gamma) \end{cases}$$

em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ variam de modelo para modelo. Um caso particular de sistemas como esse é o caso em que x representa o número de indivíduos de uma população de predadores e y representa o número de indivíduos de uma população de presas. Para os coeficientes, temos α sendo a taxa de crescimento da população de presas, β sendo a taxa de diminuição da população de presas, δ a taxa de crescimento da população de predadores e γ a taxa de diminuição da população de predadores. Nesse tipo de modelo, nosso objetivo é estudar como a quantidade de indivíduos em cada uma das populações varia para certas populações iniciais (x_0, y_0) .

Já o modelo SIR é descrito pelas equações

$$\begin{cases} S' &= -\lambda SI \\ I' &= \lambda SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{cases}$$

em que S representa o percentual da população que pode se infectar, I representa o percentual da população que já está infectado e R o percentual que está imune à doença. Para os parâmetros λ e γ , podemos estimá-los de acordo com as características da pandemia.

Nos dois casos estamos tratando de sistemas não lineares, caso em que o estudo de soluções e estabilidade se torna um pouco mais complexo.

3 Desenvolvimento

Considerando a aluna estudou a estabilidade de sistemas lineares bidimensionais na iniciação científica anterior (2020-2021), o objetivo foi ampliar estes conhecimentos e conceitos no caso de sistemas dinâmicos e no caso de equações não lineares.

Antes de cumprir os objetivos propostos no projeto inicial, que foram descritos como segue a aluna deu uma leve pincelada nos conceitos mais importantes de equações diferenciais não lineares, pois o Teorema de estabilidade de Liapunov trata da estabilidade dos pontos de equilíbrio nesses tipos de sistema.

Cronograma

Set - Out 2021: Estudar estabilidade de Lyapunov, usando [1];

Nov - Dez 2021: Estudar o Teorema de Poincaré-Bendixson e suas consequências na existência de órbitas periódicas para sistemas planares;

Jan 2022: Estudar modelos matemáticos que usam equações diferenciais de primeira ordem lineares

Fev 2021: Elaboração do relatório parcial.

Mar - Abr 2022: Estudar sistemas do tipo Lotka-Volterra e suas aplicações em biologia; Produzir material de divulgação sobre o assunto;

Mai - Jul 2022: Estudar o modelo SIR para epidemias, usando parâmetros reais obtidos na evolução da pandemia de Covid-19 ao longo do ano de 2020; Produzir material de divulgação sobre o tema.

Ago 2022: Relatório Final

Seguindo a referência [1], além de estudar conceitos e definições, alguns conhecimentos foram fixados através de exemplos e comentários, como é o caso da discussão acerca do que são de fato sistemas dinâmicos.

Interpretamos um sistema dinâmico como uma forma de descrever o comportamento dos

pontos num espaço no decorrer do tempo e vimos alguns exemplos de equações lineares em que o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções não é exatamente como no caso linear e exige certas hipóteses (em particular, que a função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $X' = F(X)$ seja C^1).

Um exemplo é a equação $x' = 3x^{2/3}$ com valor inicial $x(0) = 0$ que para todo $a > 0$ tem

$$\begin{cases} x_a(t) = 0 & \text{se } t \leq a \\ x_a(t) = (t - a)^3 & \text{se } t > a \end{cases}$$

como solução. Os problemas surgiram aqui pois a função apesar de ser contínua, não é diferenciável em $x = 0$.

O próximo teorema nos diz então que para garantir a existência e unicidade de soluções no caso **não linear**, precisamos de certas condições. Em resumo, basta exigir que a $F(X)$ seja continuamente diferenciável.

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade). *Considere o PVI*

$$X' = F(X) \quad X(t_0) = X_0$$

com $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^1 . Então antes de tudo, existe solução para esse problema de valor inicial e, em segundo, tal solução é única. Mais precisamente, $\exists a > 0$ e uma solução única

$$X : (t_0 - a, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $X(t_0) = X_0$

Relembrando as definições de ponto de equilíbrio e suas condições para a estabilidade e estabilidade assintótica, percebemos por diversos exemplos que no caso de sistemas não lineares, próximo do ponto de equilíbrio o sistema se comporta de maneira muito similar ao sistema da forma linearizada.

Dado um sistema não linear e autônomo $X' = F(X)$, obtemos a forma linearizada desse sistema através da equação variacional ao longo de uma solução particular do sistema.

Em resumo, obtemos um sistema não autônomo e linear a partir de um sistema autônomo e não linear. Seja $X(t)$ uma solução particular do sistema não linear anterior definida num intervalo $J = [\alpha, \beta]$. Fixando $t_0 \in J$ e colocando $X(t_0) = x_0$, para cada $t \in J$ vamos considerar

$$A(t) = DF_X(t)$$

onde $DF_X(t)$ denota a matriz Jacobiana de F no ponto $X(t) \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que F é C^1 , a equação anterior é uma família contínua de matrizes $n \times n$.

Com isso, chamamos de **equação variacional** ao longo da solução $X(t)$ a equação

$$U' = A(t)U$$

que sabemos ter solução definida em todo J , para todo valor inicial, pelo teorema anterior.

O significado desta equação é que se $U(t)$ é a solução da equação variacional que satisfaz $U(t_0) = U_0$, então a função

$$t \rightarrow X(t) + U(t)$$

é uma boa aproximação da solução $Y(t)$ da equação autônoma com valor inicial $Y(t_0) = X_0 + U_0$, com U_0 suficientemente pequeno.

Geralmente tomamos a solução particular considerando um ponto de equilíbrio X_0 do sistema inicial, e o sistema anterior é chamado **sistema linearizado em X_0** .

Com estas definições e alguns exemplos, pudemos perceber que próximo do ponto de equilíbrio, os retratos de fase de ambos os sistemas são muito semelhantes. Estas observações são então formalizadas no Teorema de Linearização:

Teorema 3.2. (*The Linearization Theorem*)

Supondo que o sistema n -dimensional $X' = F(X)$ tenha X_0 como ponto de equilíbrio hiperbólico, então os fluxos não linear e linear do sistema linearizado são conjugados numa vizinhança de X_0

Com mais alguns exemplos nos aprofundamos nos casos em que um equilíbrio do sistema linearizado possui um nó, sela, etc. mas gostaríamos de saber também como o sistema não linear se comporta quando o sistema linearizado não é hiperbólico e aqui surge uma das motivações para se estudar o Teorema de Estabilidade de Liapunov, que vem como uma alternativa para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema não linear, sem exigir que o equilíbrio seja hiperbólico (ou de outro modo, que o sistema linearizado o seja).

Lembremos que no caso linear, dizemos o sistema é hiperbólico quando nenhum autovalor possui parte real nula e, de modo similar, dizemos que um equilíbrio X_0 de um sistema **não linear** é hiperbólico se os autovalores de DF_{X_0} possuem parte real não nula.

Com isso, o teorema de estabilidade de Liapunov pode ser enunciado como

Teorema 3.3. *Seja X_0 um ponto de equilíbrio do sistema $X' = F(X)$. Seja $L : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida num aberto \mathcal{O} contendo X_0 . Supondo ainda que*

1. $L(X_0) = 0$ e $L(X) > 0$ se $X \neq X_0$

2. $\dot{L} \leq 0$ em $\mathcal{O} - X_0$

Então o ponto de equilíbrio é **estável**. Se além disso, L satisfaz

3. $\dot{L} < 0$ em $\mathcal{O} - X_0$

então X_0 é **assintoticamente** estável.

e chamamos de Função de Liapunov para x_0 a função que satisfaz 1. e 2.

Percebemos com alguns exemplos que o teorema de Liapunov pode ser aplicado sem que precisemos resolver a equação diferencial, e na verdade tudo que precisamos é computar $DL_X(F(X))$. Por outro lado, não temos um método simples e prático de encontrar funções de Liapunov, e na maioria das vezes usamos tentativa e erro. No caso de sistemas elétricos e mecânicos, geralmente a energia é uma função de Liapunov.

Cronograma

Considere o sistema

$$\begin{aligned}x' &= -x^3 \\y' &= -y(x^2 + z^2 + 1) \\z' &= -\sin(z)\end{aligned}$$

Neste caso, apesar de termos a origem como um ponto de equilíbrio, este não é o único ponto de equilíbrio do sistema. Na verdade, $(0, 0, n\pi)$ com $n \in \mathbb{Z}$ também são pontos de equilíbrio do sistema e, com isso, a origem não pode ser assintoticamente estável globalmente.

Mais ainda, os planos $z = n\pi$ são **invariantes** no sentido de que toda solução começando em um desses planos permanece nele no tempo futuro.

Isso ocorre pois $z' = 0$ quando $z = n\pi$. Em particular, toda solução que começa na região $|z| < \pi$ permanece 'presa' nessa região para todo $t > 0$.

A linearização do sistema na **origem** é dada por

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y$$

que não nos diz nada sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio. No entanto, para encontrar uma função de Liapunov podemos considerar $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (claramente L é diferenciável e positiva, exceto na origem). Neste caso, temos

$$\dot{L} = 2xx' + 2yy' + 2zz' = -2x^4 - 2y^2(x^2 + z^2 + 1) - 2z \sin(z)$$

e então $\dot{L} < 0$ para todo ponto do conjunto $|z| < \pi$ ($-\pi < z < \pi$), uma vez que $z \sin(z) > 0$ quando $z \neq 0$. Disto segue pelo teorema de Liapunov que a origem é assintoticamente estável.

Mais ainda, podemos concluir que a **bacia de atração** da origem, isto é, o conjunto de todas as condições iniciais cujas soluções tendem ao ponto de equilíbrio, é toda região $|z| < \pi$. Isto pois, da demonstração do teorema de Liapunov segue imediatamente que qualquer solução que começa dentro da esfera de raio $r < \pi$ deve tender à origem. Para os pontos fora da esfera de raio π e entre os planos $z = \pm\pi$, a função L ainda é estritamente decrescente, e como as soluções estão presas entre esses dois planos, segue que elas também tendem à origem.

Com isso, percebendo que as funções de Liapunov podem fazer mais que apenas determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio, mas também podem nos dar informações sobre a “bacia de atração” de ponto de equilíbrio assintoticamente estável, como no exemplo anterior.

Nos deparamos então **Teorema da Invariância de Lasalle**, que além de nos fornecer um critério para a estabilidade assintótica, nos dá uma estimativa sobre a bacia de atração mesmo no caso em que a Função de Liapunov não é estrita (não satisfaz a condição 3 do Teorema de Liapunov).

Dizemos que um conjunto \mathcal{P} é **invariante** se para cada $X \in \mathcal{P}$, $\phi_t(X)$ (fluxo do sistema) é definida e está em \mathcal{P} para todo $t \in \mathbb{R}$, como é o caso da região $|z| < \pi$ no exemplo anterior.

Dizemos ainda que \mathcal{P} é **positivamente invariante** se para cada $X \in \mathcal{P}$, $\phi_t(X)$ é definida e está em \mathcal{P} para todo $t \geq 0$.

Por fim, chamamos de **solução inteira** de um sistema o conjunto da forma $\{\phi_t(X), t \in \mathbb{R}\}$

Teorema 3.4 (Princípio de invariância de Lasalle). *Seja X_0 um ponto de equilíbrio do sistema $X' = F(X)$ e seja $L : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para X_0 , onde A é um aberto contendo X_0 .*

Seja ainda, $\mathcal{P} \subset A$ uma vizinhança de X_0 que é fechada e limitada. Suponha que \mathcal{P} é positivamente invariante e que não existe solução inteira em $\mathcal{P} - X_0$ em que L é constante.

*Então X_0 é **assintoticamente estável** e \mathcal{P} está contido na bacia de atração de X_0 .*

É na demonstração deste teorema que os conceitos de “conjunto α limite” e “conjunto ω limite” são introduzidos, e são eles que servem como ponte para o estudo de “Conjuntos-limite” e “Órbitas fechadas”, conceitos fundamentais no estudo do Teorema de Poincaré-

Bendixon nos seguintes tópicos do projeto.

Enunciemos, portanto, alguns destes conceitos:

Definimos o conjunto ω -**limite** da solução $X(t)$ como conjunto dos pontos de são **pontos limite** de uma solução

De modo similar, definimos o conjunto α -**limite** da solução $X(t)$ como conjunto dos Z tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = Z$$

para alguma sequência $t_n \rightarrow -\infty$

Proposição 3.1. *O conjunto ω -limite e o conjunto α -limite de uma solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$ são **fechados** e invariantes*

Além do estudo de soluções de equilíbrio de equações diferenciais, estudamos também as soluções periódicas (ou órbitas fechadas), que são exploradas no teorema de Poincaré-Bendixon.

Lembremos que temos uma solução periódica para a equação $X' = F(X)$ se tivermos um ponto X que não seja ponto de equilíbrio e um tempo $T > 0$ para o qual $\phi_t(X) = X$. Daí segue que $\phi_{(T+t)}(X) = \phi_t(X)$ para todo t e ϕ_t é uma função periódica. O menor T para o qual isto ocorre é chamado de **período** da solução. Assim como os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, soluções periódicas também podem atrair outras soluções, isto é, soluções podem limitar-se a soluções periódicas da mesma forma que podem aproximar-se do ponto de equilíbrio.

Vimos que $Y \in \mathbb{R}^n$ é um ponto ω -limite para a solução passando por X se existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n) = Y$, ou seja, se a solução passando por X tende ao ponto Y na medida que t cresce. O conjunto de todos os pontos ω -limite de X é o conjunto ω -limite de X , denotado por $\omega(X)$.

De modo similar, os pontos α -limite e o conjunto α -limite denotado $\alpha(X)$ são definidos trocando $t_n \rightarrow \infty$ por $t_n \rightarrow -\infty$ na definição anterior. Além disso, por **conjunto-limite** queremos dizer um conjunto da forma $\omega(X)$ ou $\alpha(X)$.

Veja que se X^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então ele é o conjunto ω -limite de cada ponto da sua bacia de atração. Em geral, qualquer ponto de equilíbrio é seu próprio conjunto limite (α ou ω). Além disso, uma solução periódica é o conjunto α -limite e ω -limite de cada ponto dela. Tal solução também pode ser conjunto ω -limite de muitos outros pontos.

Com alguns exemplos e munidos destas definições, temos a

- Proposição 3.2.** 1. Se X e Z estão numa mesma curva solução, então $w(X) = x(Z)$ e $\alpha(X) = \alpha(Z)$;
2. Se D é um conjunto **fechado, positivamente invariante** e $Z \in D$, então $\omega(Z) \subset D$ e similarmente para conjuntos negativamente invariantes e α -limites;
3. Um conjunto invariante fechado, em particular, um conjunto-limite, contém os conjuntos ω -limite e α -limite de quaisquer um de seus pontos.

que também dá origem a muitos outros resultados (corolários) acerca de órbitas fechadas e pontos de equilíbrio.

Como no caso dos pontos de equilíbrio, órbitas fechadas (ou soluções periódicas) também podem ser estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis.

As definições destes conceitos no caso de órbitas fechadas é inteiramente análogo aos vistos anteriormente. Entretanto, determinar a estabilidade destas é um um problema um pouco mais complicado. Também temos uma ferramenta para determinar a estabilidade de órbitas fechadas, que é um pouco mais complicada e difícil de ser aplicada na prática e usa o mapa de Poincaré como ferramenta, e pode ser formalizada pela

Proposição 3.3. *Seja $X' = F(X)$ um sistema planar e suponha que X_0 pertença à uma órbita fechada γ (solução periódica).*

Seja P um mapa de Poincaré definido em uma vizinhança de X_0 em alguma seção local. Se tivermos $|P'(X_0)| < 1$, então y é assintoticamente estável.

Por fim, antes de irmos para aplicações dos estudos anteriores, temos um último importante resultado, que é o

Teorema 3.5 (Poincaré-Bendixson). *Suponha que Ω é um conjunto não vazio, fechado e limitado (compacto) de um sistema planar de equações diferenciais que não possui pontos de equilíbrio. Então Ω é uma órbita fechada.*

3.1 Aplicações na biologia

Com os conceitos anteriores um pouco mais claros e servindo de ferramenta para os próximos conceitos, foram estudados alguns exemplos de aplicações dos sistemas não lineares na biologia, focando em dois casos mais populares que são o estudo de doenças infecciosas e crescimento populacional, para então chegarmos no caso particular de sistemas do tipo Lotka-Volterra e o modelos usados na pandemia da Covid-19.

Doenças infecciosas - modelo SIR

O modelo mais simples, e talvez mais usado, para modelar doenças infecciosas como a malária e o sarampo é conhecido como o modelo SIR. Neste modelos, os parâmetros são:

- S - a população de indivíduos suscetíveis a adquirirem a doença;
- I - a população infectada;
- R - a população recuperada

todas representando uma função com relação ao tempo. Começamos assumindo o caso mais simples em que a população total é constante, de onde

$$(S + I + R)' = 0$$

Também assumimos de início que se o indivíduo é infectado uma vez, não volta a adquirir a doença depois de recuperado (o que sabemos ser diferente do caso da Covid-19, mas que é o caso de outras doenças como sarampo, catapora, etc.)

Assumimos também que a taxa de transmissão da doença é proporcional ao número de encontros entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados. Uma maneira simples de caracterizar isso é colocarmos $S' = -\lambda SI$ para alguma constante $\lambda > 0$. A última suposição é a de que a taxa de recuperação de indivíduos infectados é proporcional ao número de infectados. Com estas suposições iniciais, nosso modelo SIR fica

$$S' = -\lambda SI$$

$$I' = \lambda SI - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

com λ, γ parâmetros positivos.

Como estimamos, $(S + I + R)' = 0$, de onde segue que $S + I + R$ é constante. Essa suposição simplifica o sistema, pois se conseguirmos determinar $S(t)$ e $I(t)$, teremos automaticamente

$R(t)$. Portanto, podemos considerar agora o sistema bidimensional

$$\begin{aligned} S' &= -\lambda SI \\ I' &= \lambda SI - \gamma I \end{aligned}$$

e o equilíbrio deste sistema é dado pelo eixo S (ou seja, $I = 0$). A linearização em $(S, 0)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda S \\ 0 & \lambda S - \gamma \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são 0 e $\lambda S - \gamma$, com $\lambda S - \gamma < 0$ quando $S > \gamma/\lambda$.

As S -nullclines (curvas ao longo das quais alguma $S = 0$; as interseções de todas as nullclines são equilíbrios, uma vez que todas as S , I e R seriam todas nulas.) são dadas pelos eixos S e I . No eixo I temos que $I' = -\gamma I$, e então as soluções simplesmente tendem à origem ao longo desta linha.

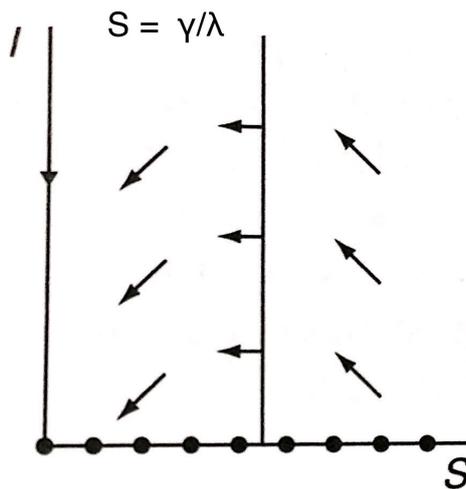


Figura 1: Nullclines e campo de direções do modelo SIR, de [1]

Já as I -nullclines são dadas por $I = 0$ e a linha vertical $S = \gamma/\lambda$. Ao analisar estas nullclines e o campo de direções do modelo SIR, veremos que dada qualquer população inicial (S_0, I_0) com $S_0 > \gamma/\lambda$ e $I_0 > 0$, a população suscetível diminui monotonicamente, enquanto que a população infectada inicialmente aumenta, mas eventualmente atinge um máximo, para então voltar a zero.

Conseguimos provar estas observações analiticamente usando a inclinação do campo vetorial.

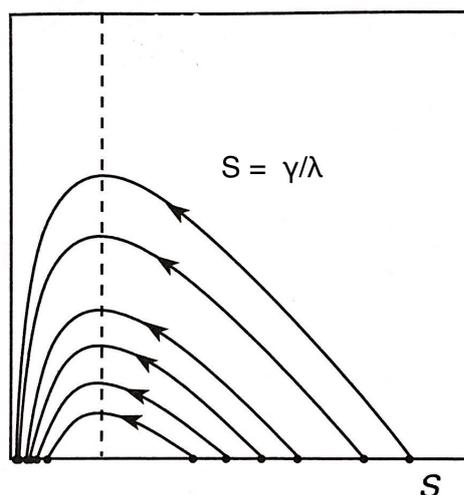


Figura 2: Retrato de fase do modelo SIR, de [1]

Mas o modelo pode ficar consideravelmente mais complicado quando assumimos que indivíduos recuperados podem perder a imunidade e adquirir outra vez a doença, um cenário bastante conhecido atualmente. Nesse caso, assumimos que o número de indivíduos que retornam para a classe S é proporcional ao número de recuperados, e neste caso obtemos um sistema do tipo $SIRS$, onde o S adicional diz que os indivíduos recuperados podem reentrar no grupo de suscetíveis. O sistema agora se torna

$$\begin{aligned} S' &= -\lambda SI + \mu R \\ I' &= \lambda SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I - \mu R \end{aligned}$$

com λ, γ e μ todos parâmetros positivos.

Sistemas Presa/Predador - equações de Lotka-Volterra

Uma outra aplicação das equações diferenciais na biologia é no estudo de modelos que descrevem o crescimento de uma certa população de indivíduos.

Consideramos inicialmente uma população composta por um par de espécies que podem ser classificadas em presas (x) e predadores (y).

Vamos assumir que a população de presas é o único alimento para a população de predadores, e assumir que no caso de ausência de predadores, a população de presas cresça numa taxa proporcional à atual. Ou seja, quando $y = 0$, temos $x' = ax$ com $a > 0$. Neste caso, $x(t) = x_0 \exp(at)$.

No caso em que existem predadores, assumimos que a população de presas diminui numa taxa proporcional ao número de encontros entre predador/presa. Como no caso de doenças infecciosas, um modelo simples para que descreve isso é bxy , com $b > 0$. E neste caso, a equação diferencial para a população de presas é dada por $x' = ax - bxy$

Para a população de predadores, fazemos suposições opostas. Na ausência de presas, a população de predadores deve diminuir a uma taxa proporcional à atual, ou seja, quando $x = 0$, temos $y' = -cy$ com $c > 0$, de onde obtemos $y(y) = y_0 \exp(-ct)$. A espécie predadora se extingue neste caso.

Por fim, se existem presas no ambiente podemos assumir que a população de predadores aumenta numa taxa proporcional ao número de encontros entre predador/presa, que pode ser dada como dxy . Ainda não consideramos neste caso mais básicos os fenômenos de superlotação. Ficamos portanto com um sistema presa-predador simplificado, mais conhecido como Sistema do tipo **Lotka-Volterra**

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy = x(a - by) \\y' &= -cy + dxy = y(-c + dx)\end{aligned}$$

com $a, b, c, d > 0$ como parâmetros. Como x, y representam populações, apenas consideramos os casos em que $x, y \geq 0$. Como fizemos desde o começo dos estudos, encontramos inicialmente os pontos de equilíbrio do sistema, que ocorrem na origem e no ponto $(x, y) = (c/d, a/b)$. Aqui, o sistema linearizado é dado por

$$X' = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix} X$$

No caso em que $x = y = 0$, teremos uma **sela** com autovalores a e $-c$. Neste caso, sabemos que o eixo y é estável e o eixo x instável.

Considerando o ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$, temos autovalores imaginários puros $\pm i\sqrt{ac}$, de modo que não podemos concluir nada a respeito da estabilidade deste equilíbrio.

Novamente, estudamos as nullclines deste sistema (curvas ao longo das quais o eixo x' ou y' são nulos). As x -nullclines são dadas pelas retas $x = 0$ e $y = a/b$, enquanto que as y -nullclines são dadas por $y = 0$ e $x = c/d$.

As linhas nullclines não nulas separa a região $x, y > 0$ em quatro regiões básicas onde o campo vetorial é da forma

e, portanto, as soluções giram no sentido anti-horário ao redor do ponto de equilíbrio. A partir deste ponto, não conseguimos mais estimar o comportamento preciso das soluções, que podem tanto espiralar para o ponto de equilíbrio ou para um ciclo limite quanto espiralar ao infinito ou aos eixos coordenados, ou ainda permanecerem em órbitas fechadas.

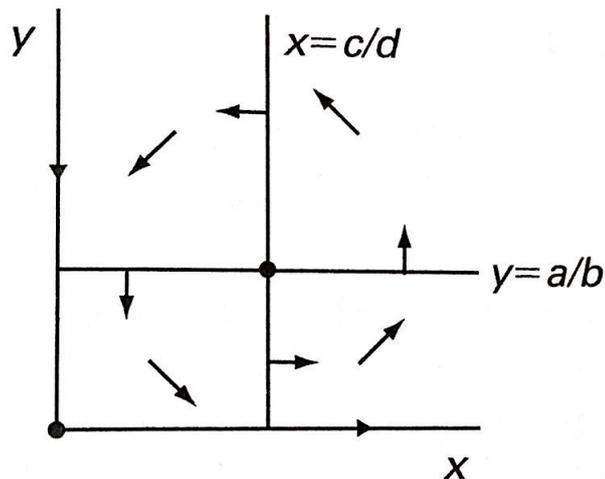


Figura 3: Nullclines e campo de direções do modelo presa/predador, de [1]

Aqui podemos aproveitar novamente o teorema de Estabilidade de Liapunov e procurar uma função de Liapunov para resolver o problema. Usando a técnica de variáveis separáveis do cálculo, podemos procurar por uma função $L(x, y)$ da forma

$$L(x, y) = F(x) + G(y)$$

de onde

$$\begin{aligned} \dot{L}(x, y) &= \frac{d}{dt}(L(x(t), y(t))) \\ &= \frac{dF}{dx}x' + \frac{dG}{dy}y' \end{aligned}$$

e então

$$\dot{L}(x, y) = x \frac{dF}{dx}(a - by) + y \frac{dG}{dy}(-c + dx)$$

teremos $\dot{L} \equiv 0$ se

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} = \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a}$$

e como x e y são variáveis independentes, isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} = \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a} = cte$$

pondo essa constante como sendo 1, obtemos por fim

$$\frac{dF}{dx} = d - \frac{c}{x} \frac{dG}{dy} = b - \frac{a}{y}$$

integrando todos os termos, obtemos então que

$$\begin{aligned} F(x) &= dx - c \log x \\ G(y) &= by - a \log y \end{aligned}$$

de onde segue que a função

$$L(x, y) = dx - c \log x + by - a \log y$$

é constante nas curvas solução do sistema quando $x, y > 0$.

Considerando também os sinais de $\frac{\partial L}{\partial x}$ e $\frac{\partial L}{\partial y}$, podemos ver que o ponto $X^* = (c/d, a/b)$ é um mínimo absoluto para L . Disto segue que L é uma função de Liapunov para o sistema e, portanto, X^* é ponto de equilíbrio estável para o sistema.

Por fim, temos o seguinte teorema sobre o sistema presa-predador:

Teorema 3.6. *Toda solução de um sistema presa-predador é uma órbita fechada (exceto o ponto de equilíbrio e os eixos coordenados).*

Com isso, concluímos que neste sistema presa/predador mais básico, para quaisquer populações iniciais $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$ diferente do ponto de equilíbrio, as populações de presas e predadores oscilam ciclicamente. Não importa quais sejam estas populações, nenhuma espécie será extinta e nenhuma população cresce indefinidamente.

Por fim, temos o caso da superlotação na equação da presa, que na ausência de predadores pode ser descrita como

$$x' = ax - \lambda x^2$$

e podemos assumir também que a população de predadores tem equação semelhante

$$y' = -cy - \mu y^2$$

no caso em que $x = 0$. Com essas suposições, e com nossas observações iniciais, escrevemos nosso sistema presa-predador como

$$\begin{aligned}x' &= x(a - by - \lambda x) \\y' &= y(-c + dx - \mu y)\end{aligned}$$

A covid 19 no Brasil - divulgação científica

O último passo do projeto seria trazer um pouco desse conteúdo teórico para um público mais leigo e na forma de aplicações.

Para isso, o modelo SIR para pandemias foi estudado usando parâmetros estimados obtidos na evolução da pandemia da COVID-19 em 2020, usando principalmente os dados de [2].

O último passo é 'traduzir' um pouco desse estudo num material de divulgação científica que será hospedado no website desenvolvido pela estudante e seu orientador, Ricardo, em seu primeiro projeto juntos (2020), "Derivando a Matemática", que já conta com mais de 250.000 acessos desde sua criação, tarefa a ser a aluna pretende concluir entre o período de entrega do relatório final e o Congresso PIBIC 2023.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que de alguma forma contribuíram com meus estudos e desenvolvimento acadêmico e pessoal. Agradecer ao CNPq pela terceira oportunidade de realizar uma iniciação científica e, principalmente, ao meu professor e orientador Ricardo Miranda Martins, que sempre esteve disponível e sempre foi muito compreensivo nos períodos mais caóticos, além de me apoiar durante toda a graduação.

Referências

- [1] S. Smale M. W. Hirsh. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [2] J. F. Oliveira, D. C. P. Jorge , R. V. Veiga, et al. Mathematical modeling of covid-19 in 14.8 million individuals in bahia, brazil. *Nat Commun* 12, 333, 2021.
- [3] J. M. T. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.