

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

STEPHANIE GABRIELE NIETTO

RELATÓRIO FINAL

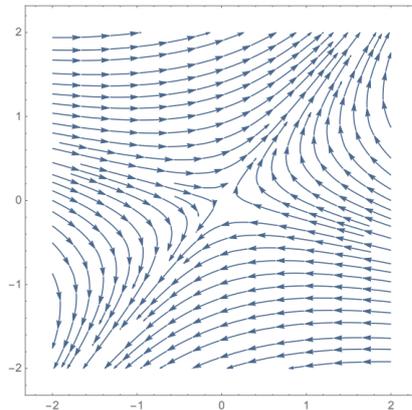
ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE SISTEMAS LINEARES E LINEARES POR
PARTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas
2020 - 2021

1 Introdução e motivação

Em um sistema de equações diferenciais, o “esboço” do retrato de fase é o que chamamos de **comportamento qualitativo**, ou seja, ignorando os números e “ângulos” envolvidos, o retrato de fase será este. Isto é o que acontece por exemplo com qualquer sistema linear 2×2 cuja matriz dos coeficientes tenha um autovalor positivo e outro negativo: serão sempre como a figura abaixo, a menos de rotações, escalas e mudanças de direção dos vetores.



Uma vez que o retrato de fase de um sistema é caracterizado pelos *autovalores* e *autovetores* da matriz dos coeficientes, faremos uma classificação completa baseada nisto.

2 Objetivos

Numa tentativa de se introduzir ao estudo de sistemas dinâmicos busca-se neste projeto de iniciação científica estudar a estabilidade estrutural de sistemas lineares e lineares por partes de equações diferenciais.

Levando em conta algumas considerações sobre a bagagem matemática da aluna acerca de equações diferenciais no Cálculo 3 (cursado no 1^o sem. 2020) e alguns tópicos relacionados de Álgebra Linear Avançada (cursada no 2^o sem. 2020), o objetivo nesse primeiro momento foi fazer um pequeno, mas necessário, desvio de rota para que essa introdução ao assunto se desse de maneira clara e detalhada. Para finalmente relacionar e aplicar a forma de Jordan no estudo de sistemas de equações diferenciais, um estudo atento sobre o assunto serviu como base para o início dos futuros estudos, seguido da classificação dos sistemas bidimensionais quanto à forma do seu retrato de fase e com base nas referências de [1] a [5].

3 Resultados

3.1 Forma de Jordan

Como mencionado, a fim de se estabelecer uma relação entre o que foi aprendido acerca de soluções de equações diferenciais no curso de Cálculo 3, a forma de Jordan e o estudo de estabilidade estrutural de sistemas lineares e lineares por partes, objetivo do projeto de iniciação científica, foram estudados alguns conceitos e resultados relacionados à Forma de Jordan de um operador linear, cujas demonstrações e comentários, por serem extensos, podem ser vistos acessando as notas de aula da aluna, disponíveis em <https://www.overleaf.com/read/dtgbwnnjnmxmj>.

Estabelecidas estas conexões, podemos determinar as soluções gerais de sistemas bidimensionais simples. Para esse estudo, também foram desenvolvidos os retratos de fase de cada caso particular no software Mathematica.

3.2 Sistemas bidimensionais simples

Depois de enunciar o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, bem como da exponencial matricial como solução de sistemas lineares com coeficientes constantes, nos limitamos ao caso de sistema 2×2 para estudar o comportamento dos retratos de fase.

Dois resultados importantes para este estudo relacionam os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes A e as soluções do sistema, ou seja, eles permitem escrever as soluções gerais em termos de autovalores e autovetores.

Lema 3.1. *Seja A uma matriz complexa (respectivamente, real). Se λ é um autovalor complexo (respectivamente, autovalor real) de A e v é um autovetor associado a λ , então $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução da equação complexa (respectivamente, real) $x' = Ax$.*

Proposição 3.1. *Se a matriz complexa (respectivamente, real) A de ordem n tem autovalores complexos (respectivamente, autovalores reais) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e autovetores associados v_1, v_2, \dots, v_n , então a matriz $V(t)$, cuja i -ésima coluna, $i = 1, \dots, n$, é $\varphi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ é uma matriz fundamental de $x' = Ax$. Em particular, têm-se que*

$$e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$$

Finalmente, podemos considerar sistemas da forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

em que A é uma matriz real ou complexa, Vamos considerar também que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, ou seja, temos equações lineares homogêneas da forma

$$x' = Ax \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det A \neq 0$$

então podemos associá-las a campos vetoriais lineares em \mathbb{R}^2 .

Para conhecermos a forma das trajetórias, devemos estudar o polinômio característico de A que obtemos fazendo $\det(\lambda I - A)$:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

portanto, os autovalores são

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$$

e vamos distinguir aqui os três casos:

1. Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **reais e distintos**. Necessariamente $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.
2. Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **complexos conjugados**: $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ com $\beta \neq 0$.
3. Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **reais e iguais**: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Caso 1: Uma vez que v_1, v_2 são autovetores associados a λ_1, λ_2 , podemos aplicar a proposição 3.1 que garante também que toda solução de $x' = Ax$ pode ser escrita como

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Aqui podemos distinguir ainda 4 casos:

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ - **nó atrator** (ou ralo, sink)

Toda trajetória tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$; exceto a origem que permanece fixa e, similarmente, toda trajetória tende a ∞ quando $t \rightarrow -\infty$.

Veja que se tivermos $c_2 \neq 0$ e $c_1 = 0$, as trajetórias são as semirretas de E_2 , pois apenas v_2 será parte da solução, e tendem à origem quando $t \rightarrow \infty$.

Agora supondo que $c_1 \neq 0$ e considerando a curva $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$ temos

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{e} \quad \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}$$

de onde vem pela regra da cadeia

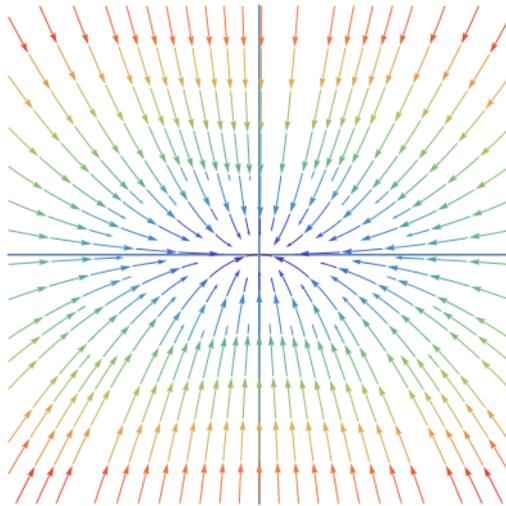
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

e temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{c_2}{c_1} > 0 \\ -\infty & \text{se } \frac{c_2}{c_1} < 0 \end{cases}$$

uma vez que $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Isto significa que a reta tangente à trajetória tende à reta E_1 quando $t \rightarrow +\infty$. Para este caso, temos um retrato de fase da forma

Nó atrator



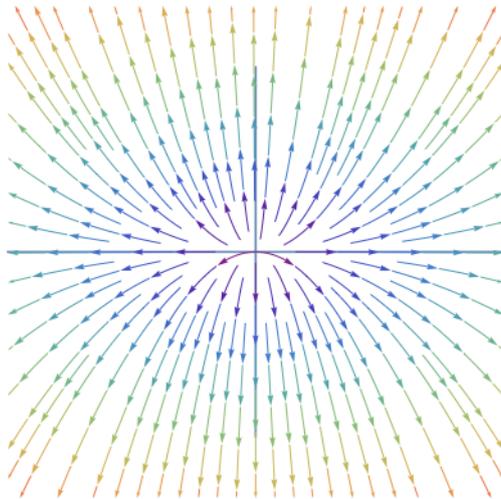
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$
 Autovetores : $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$

- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ - **nó repulsor (ou instável, fonte, source)**

Como antes, toda trajetória tende ao infinito quando $t \rightarrow +\infty$; exceto a origem que permanece fixa e, toda trajetória tende a 0 quando $t \rightarrow -\infty$. Além disso, se $c_1 = 0$ (respectivamente $c_2 = 0$), então as soluções serão semirretas de E_2 (respectivamente E_1). E supondo que seja $c_1 \neq 0$ teremos que conforme t varia, todas as órbitas se afastam do ponto de equilíbrio e dizemos que a origem é um nó instável, tendo um retrato de fase da forma

Nó repulsor



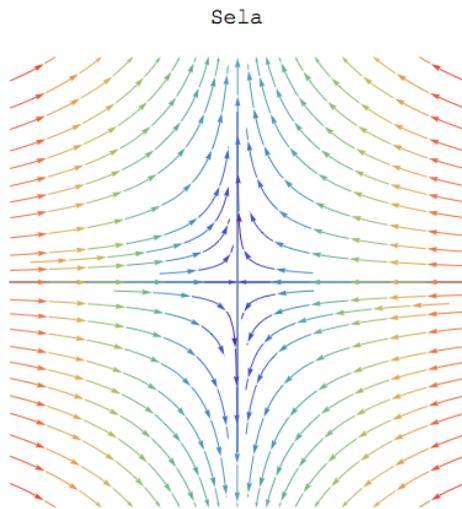
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
 Autovetores : $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$

- $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ - **sela**

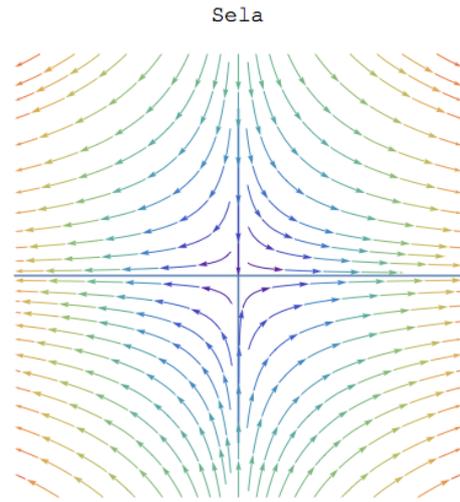
Neste caso, as trajetórias que passam por pontos de E_1 ($c_2 = 0$) (ou $E_2, c_1 = 0$) permanecem nesta linha e tendem a 0 quando $t \rightarrow +\infty$, pois $\lambda_1 < 0$ (ou $t \rightarrow -\infty$ pois $\lambda_2 > 0$).

Se $c_1, c_2 \neq 0$, as soluções tendem para $\pm\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. A componente segundo E_1 (respec. E_2) tende a $+\infty$ (respec. a $\pm\infty$), quando $t \rightarrow +\infty$; (segunda figura) a componente segundo E_2 (respec. E_1) tende a 0 (respec. a $\pm\infty$) quando $t \rightarrow -\infty$. (veja que os eixos são determinados pelos vetores v_1 e v_2).



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4 x_1 \\ \dot{x}_2 = 2 x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$
 Autovetores : $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4 x_1 \\ \dot{x}_2 = -2 x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$
 Autovetores : $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$

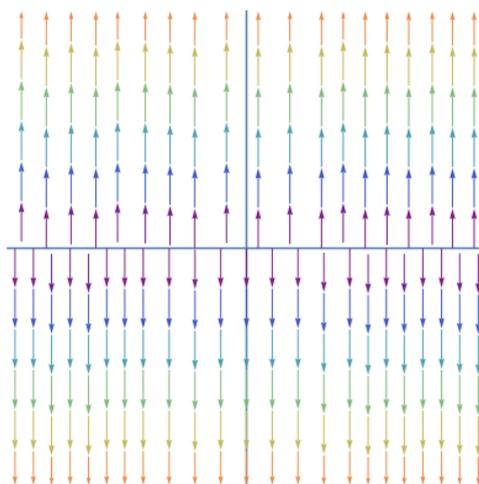
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ Se um dos autovalores é nulo, a solução é da forma

$$\varphi(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Para o primeiro caso, temos que quando $t \rightarrow +\infty$, a solução $\varphi(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \rightarrow \pm\infty$ conforme $c_2 > 0$ ou $c_2 < 0$. Quando $t \rightarrow -\infty$, então a solução tende a $c_1 v_1$.

De modo similar, para o segundo caso temos que $\varphi(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \rightarrow c_1 v_1$ para $t \rightarrow \infty$ e $\varphi(t) \rightarrow \pm\infty$ para $t \rightarrow -\infty$, conforme $c_2 > 0$ ou $c_2 < 0$, resultando em retratos de fase da forma:

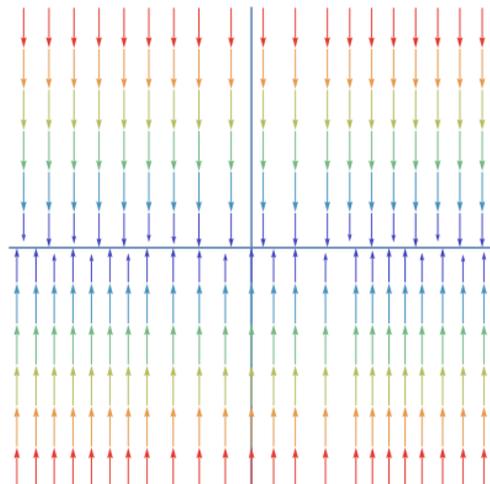
$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 2 x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$
 Autovetores : $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$

$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -2 x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$
 Autovetores : $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$

Caso 2: Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **complexos conjugados**

Considerando $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ temos que toda solução do sistema pode ser escrita na forma:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

onde

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2] \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v_1 + \sin(\beta t)v_2]\end{aligned}$$

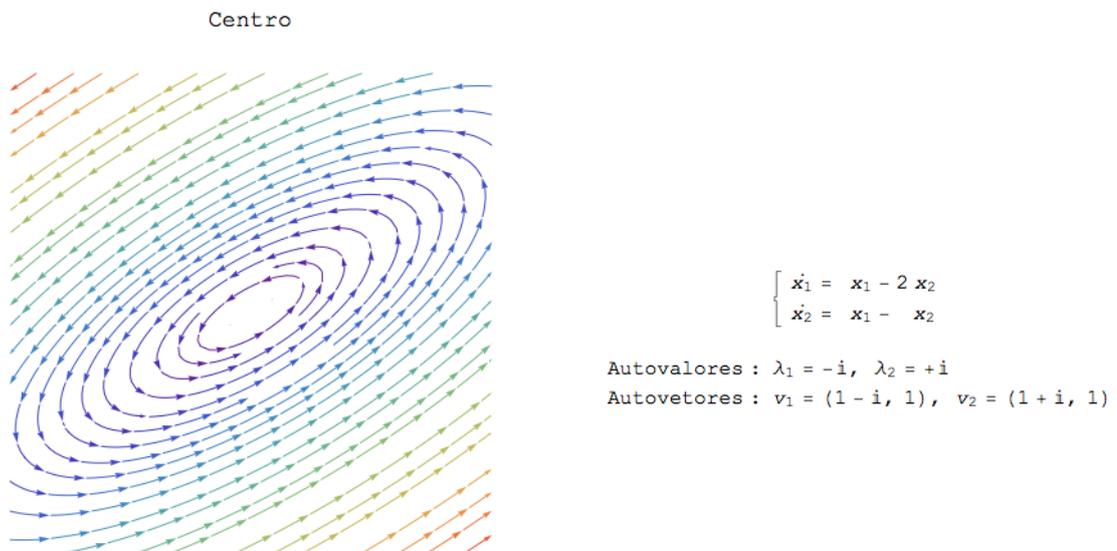
e temos alguns casos:

- $\alpha = \text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ - imaginários puros **centro**

Neste caso, teremos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \cos(\beta t)(c_1v_1 + c_2v_2) + \sin(\beta t)(-c_1v_2 + c_2v_1) \\ &= \cos(\beta t)(u_1) + \sin(\beta t)(u_2)\end{aligned}$$

e observamos que todas as soluções, exceto a solução nula, são elipses.



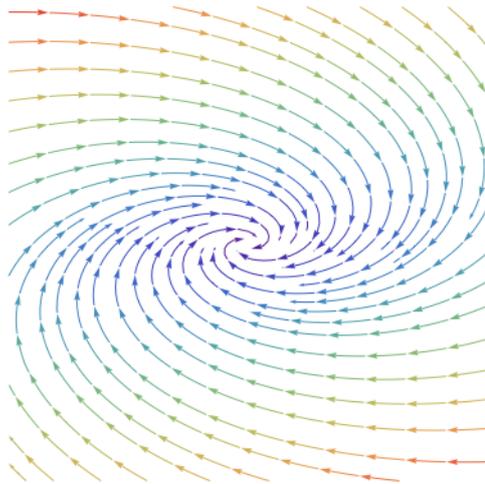
- $\alpha = \text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ **foco atrator (estável)**

Neste caso, teremos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{\alpha t}[\cos(\beta t)(c_1v_1 + c_2v_2) + \sin(\beta t)(-c_1v_2 + c_2v_1)] \\ &= e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u_1 + \sin(\beta t)u_2]\end{aligned}$$

e solução tende a 0, espiralando em torno da origem quando $t \rightarrow +\infty$. Isto é, $|\varphi(t)| \rightarrow 0$ e o ângulo entre $\varphi(t)$ e E_1 tende a $\pm\infty$ conforme β é negativo ou positivo.

Foco estável



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

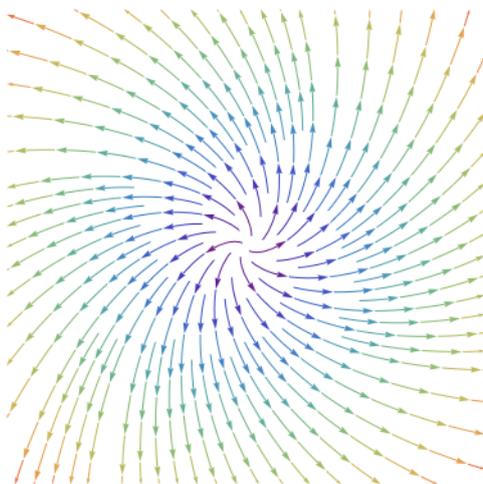
Autovalores : $\lambda_1 = -1 - i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}$

Autovetores : $v_1 = (i\sqrt{3}, 1)$, $v_2 = (-i\sqrt{3}, 1)$

- $\alpha = \text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ **foco repulsor (instável)**

Similar ao caso anterior, temos que toda solução tende para $\pm\infty$ espiralando em torno da origem quando $t \rightarrow \infty$, ou seja e tende a 0 quando $t \rightarrow -\infty$

Foco instável



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = 2 - i$, $\lambda_2 = 2 + i$

Autovetores : $v_1 = (-i, 1)$, $v_2 = (1, i)$

Caso 3: Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **reais e iguais**

Se isso acontece, dizemos que temos um **nó impróprio** e diferenciamos duas possibilidades:

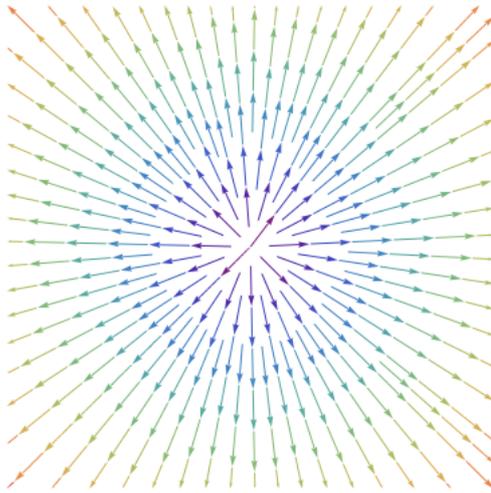
- O núcleo de $A - \lambda Id$ é *bidimensional*

Isto significa que λ tem autovetores v_1, v_2 que são LI. Neste caso, toda solução do sistema pode ser escrita na forma (pela proposição 3.1):

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1v_1 + c_2v_2)$$

e todas as trajetórias, exceto a solução nula, serão semirretas.

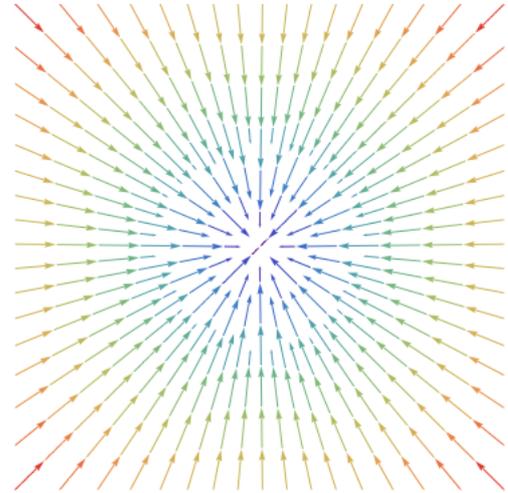
Nó impróprio $\lambda > 0$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = 3 = \lambda_2$
Autovetores : $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$

Nó impróprio $\lambda < 0$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = -3 = \lambda_2$
Autovetores : $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$

- Se o núcleo de $A - \lambda I = E_1$ é *unidimensional*, seja v_1 um vetor gerador de E_1 (é um autovetor não nulo associado a λ). Neste caso, considerando a base $\{v_2, v_1\}$ (só para termos o 1 embaixo na matriz e fazer como no estudo das formas de Jordan), onde

$$(A - \lambda Id)v_2 = v_1 \Rightarrow Av_2 = \lambda v_2 + v_1$$

pois, como temos apenas um autovetor não nulo associado ao autovalor λ , podemos formar uma base de Jordan utilizando um segundo vetor v_2 que é um autovetor generalizado v_2 tal que

$$A_J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

e podemos verificar a partir disto e por substituição direta que a solução geral da equação $x' = Ax$ pode ser escrita como

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)v_1 + c_2v_2]$$

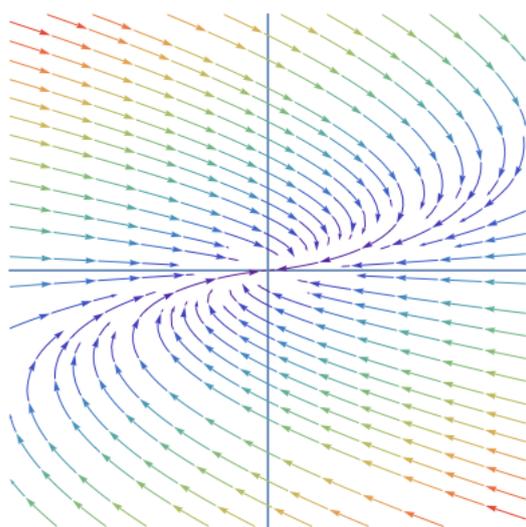
com $\varphi(0) = c_1v_1 + c_2v_2$.

As trajetórias que passam por E_1 , que é gerado por v_1 (quando $c_2 = 0$), com exceção da origem que é um ponto fixo, são semirretas. Teremos este caso quando a matriz não for diagonal, e aqui existe uma única reta passando pela origem. Se a matriz é diagonal voltamos ao caso anterior.

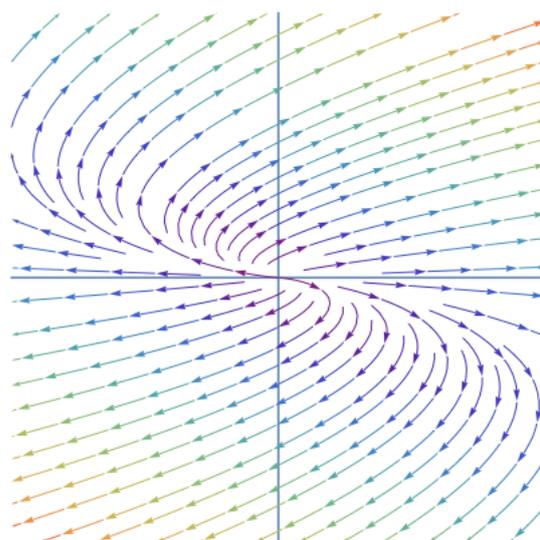
Para qualquer outra órbita ($c_2 \neq 0$), sua reta tangente tende a E_1 quando $t \rightarrow \pm\infty$, uma vez que

$$\frac{d_y}{d_x} = \frac{\lambda c_2 e^{\lambda t}}{\lambda(c_1 + tc_2)e^{\lambda t} + e^{\lambda t}c_2} = \frac{\lambda c_2}{\lambda(c_1 + tc_2) + c_2} \rightarrow 0$$

Se tivermos $\lambda < 0$ (respectivamente $\lambda > 0$), então toda trajetória vai tender a 0 quando $t \rightarrow \infty$ (respectivamente, $t \rightarrow -\infty$).

Nó impróprio $\lambda < 0$ 

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$ Autovetores : $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 0)$ Nó impróprio $\lambda > 0$ 

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Autovalores : $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ Autovetores : $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 0)$

3.3 Estabilidade Local

Dentre os resultados que se seguem sobre estabilidade que foram estudados, um dos mais importantes (de [4]) relaciona um operador e seus autovalores, e pode ser enunciado como

Proposição 3.2. *Os autovalores de um operador $T \in L(\mathbb{R}^n)$ dependem continuamente de T .*

e um dos objetivos foi entender os componentes de sua demonstração.

Com este resultado central e outros que se seguem, a conclusão geral é de que um campo linear é estruturalmente estável no espaço dos campos lineares se, e só se, é hiperbólico, isto é, se os autovalores de T não tem parte real nula.

4 Conclusões

Estabelecida uma base sólida para estudos futuros, o estudo de teoremas importantes de estabilidade em sistemas lineares, com base em [5] e [4] tornou-se possível, sempre registrando todos os resultados e avanços nas notas de aula online que serão aproveitadas pela aluna em sua vida acadêmica.

Do trabalho já realizado foi possível estabelecer relações multidisciplinares interessantes e ter uma boa perspectiva dos resultados necessários para o estudo de estabilidade. Além da proximidade com os conteúdos, todos os retratos de fase utilizados foram realizados no software de álgebra computacional Mathematica, contribuindo para o domínio e integração de tecnologias aos estudos.

5 Perspectivas

Contando com um novo projeto de iniciação científica pelo PIBIC, a aluna dará continuidade aos estudos de sistemas dinâmicos novamente com a supervisão de seu orientador.

Com este primeiro contato foi possível reconhecer os elementos principais deste estudo e formar uma base adequada para o aprofundamento teórico. Além do estudo em si, as notas de aula da aluna podem (e de fato estão) ser aproveitadas por outros alunos que estão se iniciando na pesquisa e que necessitam de um material introdutório e detalhado.

Junto à isso, os materiais desenvolvidos nas notas de aula e no Wolfram Mathematica podem, e devem, servir futuramente de material de divulgação científica, provavelmente fazendo parte do site Derivando a matemática, primeiro projeto de iniciação científica desenvolvido pela aluna.

Referências

- [1] A. G. F. Almeida. *A Forma de Jordan e algumas aplicações*. <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/427/1/PDF\%20-\%20Arthur\%20Gilzeph\%20Farias\%20Almeida.pdf>. Acesso em 11 fev. 2021.
- [2] A. Freira. *Forma de Jordan e Equações Diferenciais Lineares*. <http://www.ime.unicamp.br/~aloisio/documentos/jordan.pdf>. Acesso em 11 fev. 2021.
- [3] D. A. S. Oliveira. *Estabilidade Espectral no Problema Carregado de N-Corpos*. Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT, 2018. Acesso em 26 fev. 2021.
- [4] J. Palis and W. Melo. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1975.
- [5] J. M. T. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.