

Relatório final do PIBIC

Ciclos limite de equações diferenciais lineares por partes em dimensão $n \geq 3$

Samuel Krüger - RA 205697
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

1 Introdução

Muitos fenômenos da natureza e aplicações da ciência podem ser modeladas por equações diferenciais. Contudo, nem todas as funções modeladoras dessas aplicações são contínuas, por exemplo, a análise de oscilações eletrônicas [2]. Assim, emerge o campo das equações diferenciais suaves por partes (EDSP).

Uma questão clássica da teoria de equações diferenciais é a existência de órbitas periódicas e de cotas para o número de ciclos limites que os sistemas investigados possuem. Por exemplo, para sistemas tridimensionais com dois planos de descontinuidade, existem pelo menos dois ciclos limites [5].

Em trabalhos anteriores investigamos a existência de ciclos limites de equações diferenciais lineares por partes em \mathbb{R}^3 usando métodos numéricos. Contudo, tais métodos dependem da capacidade de se obter o fluxo das equações diferenciais e então resolver sistemas extremamente não-lineares, o que é muito propenso ao erro.

Nesse trabalho, inspirando-se no artigo [4], investigamos EDSP a partir de suas integrais primeiras. As integrais primeiras são uma ferramenta oriunda da teoria dos campos suaves e são funções que têm a propriedade de serem constantes nas órbitas do sistema. Essas funções podem ser bem complexas e, para um campo genérico, pode ser muito complicado encontrá-las. Para campos lineares, por outro lado, é possível encontrar integrais primeiras funcionalmente independentes a partir dos autovalores e autovetores das matrizes [1, 3].

Na seção 2, apresentamos a definição de integral primeira e alguns resultados. Na seção 3, usamos a técnica do artigo [4] para mostrar a existência de infinitas órbitas periódicas para uma classe de EDSP com 2 zonas.

Na seção 4, adaptamos a técnica de [4] para encontrar órbitas periódicas de sistemas com 3 zonas do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X_1(\mathbf{x}), & \text{se } x < -1 \\ X_2(\mathbf{x}), & \text{se } -1 < x < 1 \\ X_3(\mathbf{x}), & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

onde X_i são campos lineares.

2 Integrais primeiras

Dada função $f \in C^k$, considere a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Definição 1. *Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ conjunto de medida de Lebesgue cheia. Uma função contínua $H : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma integral primeira de (1) se*

- a) H não é constante em nenhum subconjunto de medida positiva de Ω_1 ;
- b) H é constante ao longo de cada órbita do sistema (1) em Ω_1 .

Lema 1. *Seja H função de classe C^1 e $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Então H é integral primeira de (1) se, e somente se, $\frac{\partial H}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial x_n} f_n = 0$*

Definição 2. *O sistema (1) é C^r completamente integrável em Ω se existem $n - 1$ integrais primeiras de (1) de classe C^r e que sejam funcionalmente independentes, i.e., se posto $(\nabla H_1 \dots \nabla H_k) = k$*

Um resultado importante é que equações lineares $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b$ são completamente integráveis [1, 3].

3 EDSP com 2 zonas

Proposição 1. *Seja um sistema suave por partes*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^+ \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^- \end{cases} \quad (2)$$

onde X e Y são campos lineares. Assim, sejam H_1, H_2 as integrais primeiras de $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$ e F_1, F_2 as integrais primeiras de $\dot{\mathbf{x}} = Y(\mathbf{x})$. Então, para $i \in \{1, 2\}$,

$$P_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_i(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^+ \\ F_i(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^- \end{cases}$$

são integrais primeiras de (2).

Teorema 1. *Considere o sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} cz \\ -\frac{a}{b}cz \\ -dx \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0 \\ \begin{pmatrix} \gamma z \\ \frac{\alpha}{\beta}\gamma z \\ \delta x \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \quad (3)$$

Assuma que $b, \beta \neq 0$, $cd > 0$, $\gamma\delta > 0$ e $c\gamma > 0$. Então por todo ponto $(0, y_0, z_0)$ passa uma órbita periódica costurante.

Demonstração. Podemos reescrever (3) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } x > 0 \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } x < 0 \end{cases} ,$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $X(x, y, z) = (cz, -\frac{a}{b}cz, -dx)$ e $Y(x, y, z) = (\gamma z, \frac{\alpha}{\beta}\gamma z, \delta x)$.

Defina $H_1(x, y, z) := ax + by$ e $H_2(x, y, z) := dx^2 + cz^2$. Então H_1 e H_2 são integrais primeiras de X . De fato, denotando $X = (X_1, X_2, X_3)$,

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}X_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y}X_2 + \frac{\partial H_1}{\partial z}X_3 = aX_1 + bX_2 = acz + b\left(-\frac{a}{b}cz\right) = 0$$

e

$$\frac{\partial H_2}{\partial x}X_1 + \frac{\partial H_2}{\partial y}X_2 + \frac{\partial H_2}{\partial z}X_3 = 2dx(cz) + 2cz(-dx) = 0.$$

Ainda, essas integrais primeiras são funcionalmente independentes por definição. Desse modo, as órbitas de

$$\begin{cases} \dot{x} = cz \\ \dot{y} = -\frac{a}{b}cz \\ \dot{z} = -dx \end{cases} \quad (4)$$

são conjuntos da forma

$$\gamma_{h_1 h_2} = \{H_1 = h_1\} \cap \{H_2 = h_2\} \cap \{x \geq 0\} \quad , \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Agora defina $F_1(x, y, z) := \alpha x - \beta y$ e $F_2(x, y, z) := \delta x^2 - \gamma z^2$. Então F_1 e F_2 são integrais primeiras de Y . De fato,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}X_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y}X_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z}X_3 = \alpha X_1 - \beta X_2 = \alpha\gamma z - \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\gamma z\right) = 0$$

e

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} X_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y} X_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z} X_3 = 2\delta x(\gamma z) - 2\gamma z(\delta x) = 0.$$

Ainda, essas integrais primeiras são funcionalmente independentes por definição. Desse modo, as órbitas de

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma z \\ \dot{y} = \frac{\alpha}{\beta} \gamma z \\ \dot{z} = \delta x \end{cases} \quad (6)$$

são conjuntos da forma

$$\gamma_{f_1 f_2} = \{F_1 = f_1\} \cap \{F_2 = f_2\} \cap \{x < 0\} \quad , \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Como $\Sigma := \{x = 0\}$ é zona de descontinuidade do tipo costura, queremos encontrar órbitas de (4) e (6) que cruzam Σ cada uma em dois pontos. Nesse caso, podemos concatenar as órbitas e obter uma órbita periódica de (3).

Seja um ponto $(0, y_0, z_0) \in \Sigma$ e defina as constantes

$$\begin{aligned} h_1 &= H_1(0, y_0, z_0) = by_0 \\ h_2 &= H_2(0, y_0, z_0) = cz_0^2 \\ f_1 &= F_1(0, y_0, z_0) = -\beta y_0 \\ f_2 &= F_2(0, y_0, z_0) = -\gamma z_0^2 \end{aligned}$$

Primeiramente note que

$$\begin{cases} H_1(x, y, z) = h_1 \\ H_2(x, y, z) = h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = by_0 \\ dx^2 + cz^2 = cz_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 - \frac{a}{b}x \\ z = \pm \sqrt{z_0^2 - \frac{d}{c}x^2} \end{cases}$$

Assim, a órbita que passa por $(0, y_0, z_0)$ e entra na zona $\Sigma^+ := \{x \geq 0\}$ é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{h_1 h_2} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H_1(x, y, z) = h_1; H_2(x, y, z) = h_2; x \geq 0\} \\ &= \left\{ \left(x, y_0 - \frac{a}{b}x, \sqrt{z_0^2 - \frac{d}{c}x^2} \right), \left(x, y_0 - \frac{a}{b}x, -\sqrt{z_0^2 - \frac{d}{c}x^2} \right) : 0 \leq x \leq \frac{c}{d}|z_0| \right\} \end{aligned}$$

Então, fazendo $x = 0$, obtemos os pontos onde $\gamma_{h_1 h_2}$ cruza Σ :

$$\gamma_{h_1 h_2} \Big|_{x=0} = \{(0, y_0, z_0), (0, y_0, -z_0)\}$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = f_1 \\ F_2(x, y, z) = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta y = -\beta y_0 \\ \delta x^2 - \gamma z^2 = \gamma z_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + \frac{\alpha}{\beta} x \\ z = \pm \sqrt{z_0^2 - \frac{\delta}{\gamma} x^2} \end{cases}$$

Logo, a órbita que passa por $(0, y_0, z_0)$ e entra em Σ^- é parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma_{f_1 f_2} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F_1(x, y, z) = f_1; F_2(x, y, z) = f_2; x < 0\} \\ &= \left\{ \left(x, y_0 + \frac{\alpha}{\beta} x, \sqrt{z_0^2 - \frac{\delta}{\gamma} x^2} \right), \left(x, y_0 + \frac{\alpha}{\beta} x, -\sqrt{z_0^2 - \frac{\delta}{\gamma} x^2} \right) : -\frac{\gamma}{\delta} |z_0| \leq x \leq 0 \right\} \end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma_{f_1 f_2} \Big|_{x=0} = \{(0, y_0, z_0), (0, y_0, -z_0)\}$$

Em síntese, temos que tanto órbitas em Σ^+ como órbitas em Σ^- conectam os pontos $(0, y_0, z_0)$ e $(0, y_0, -z_0)$. Dessa forma, como o plano de descontinuidade é do tipo de costura, existe órbita periódica passando por $(0, y_0, z_0)$. Como esse ponto foi escolhido arbitrariamente, concluímos que existe órbita periódica passando por todo ponto da zona de descontinuidade Σ . \square

Fixando valores para os parâmetros no teorema, conseguimos visualizar algumas das órbitas do sistema:

Corolário 1. *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{cases} (z, -\frac{1}{3}z, -x), & \text{se } x > 0 \\ (4z, -2z, -x), & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

possui infinitas órbitas periódicas.

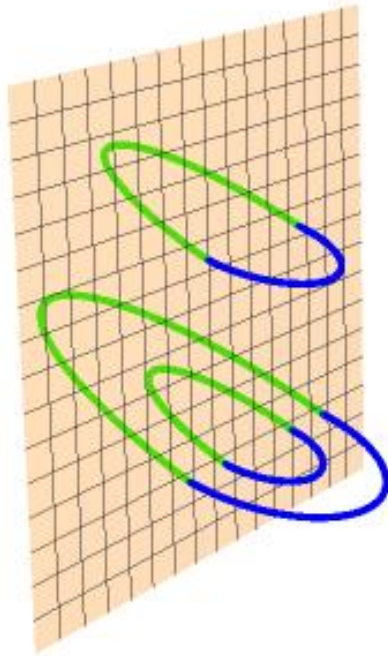


Figura 1: Representação gráfica de algumas órbitas periódicas de (8) e da zona de descontinuidade. Gráfico obtido com o *Mathematica*.

4 EDSP de 3 zonas

Agora queremos investigar sistemas suaves por partes lineares com três zonas, ou seja, sistemas do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma_E \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma_C \\ Z(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma_D \end{cases} \quad (9)$$

onde X, Y, Z são campos lineares e $\Sigma_C, \Sigma_D, \Sigma_E \subset \mathbb{R}^3$.

Proposição 2. *Seja o sistema suave por partes (9). Pela linearidade dos campos, sabemos que existem*

- F_1, F_2 as integrais primeiras de $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$;

- G_1, G_2 as integrais primeiras de $\dot{\mathbf{x}} = Y(\mathbf{x})$; e,
- H_1, H_2 as integrais primeiras de $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$.

Então, para $i \in \{1, 2\}$,

$$P_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_i(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma_E \\ G_i(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma_C \\ H_i(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma_D \end{cases}$$

são integrais primeiras de (2).

4.1 O método

Lembre que, como integrais primeiras são constantes nas órbitas de um campo $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, então a órbita passando por um ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ pode ser parametrizada por

$$O(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : k_1(\mathbf{x}) = k_1(\mathbf{a}); k_2(\mathbf{x}) = k_2(\mathbf{a})\},$$

onde $k_1, k_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são integrais primeiras funcionalmente independentes de K .

Vamos usar este raciocínio de parametrizar órbitas com base nas integrais primeiras para construir uma órbita de 3 zonas do sistema (9).

Sejam

$$\Sigma_+ = \{x = 1\}, \Sigma_- = \{x = -1\}, \Sigma_C = \{-1 < x < 1\}, \Sigma_E = \{x < -1\} \text{ e } \Sigma_D = \{x > 1\}.$$

Tome um ponto $(1, y_0, z_0) \in \Sigma_+$.

Passo 1

A órbita saindo de $(1, y_0, z_0)$ e entrando na região $\Sigma_C = \{-1 < x < 1\}$ é dada por

$$\gamma_1(y_0, z_0) := \{(x, y, z) \in \Sigma_C : G_1(x, y, z) = G_1(1, y_0, z_0); G_2(x, y, z) = G_2(1, y_0, z_0)\}$$

Então o ponto em que essa órbita cruza a plano Σ_- é dado por

$$(-1, y_1, z_1) := \gamma_1(y_0, z_0) \Big|_{x=-1}$$

Passo 2

Agora, a órbita passando por $(-1, y_1, z_1)$ e entrando na zona $\Sigma_E = \{x < -1\}$ é dada por

$$\gamma_2(y_1, z_1) := \{(x, y, z) \in \Sigma_E : F_1(x, y, z) = F_1(-1, y_1, z_1); F_2(x, y, z) = F_2(-1, y_1, z_1)\}$$

Então, assumindo que a órbita γ_2 retorna para Σ_- , temos um segundo ponto sobre esse plano:

$$(-1, y_2, z_2) := \gamma_2(y_1, z_1) \Big|_{x=-1}$$

Passo 3

Assim, a órbita passando por $(-1, y_2, z_2)$ e entrando na zona Σ_C é dada por

$$\gamma_3(y_2, z_2) := \{(x, y, z) \in \Sigma_C : G_1(x, y, z) = G_1(-1, y_2, z_2); G_2(x, y, z) = G_2(-1, y_2, z_2)\}$$

Então, assumindo que a órbita γ_3 cruza Σ_+ , temos um ponto sobre esse plano:

$$(1, y_3, z_3) := \gamma_3(y_2, z_2) \Big|_{x=1}$$

Passo 4

Finalmente, considere a órbita passando por $(1, y_3, z_3)$ e que entra em Σ_D :

$$\gamma_4(y_3, z_3) := \{(x, y, z) \in \Sigma_D : H_1(x, y, z) = H_1(1, y_3, z_3); H_2(x, y, z) = H_2(1, y_3, z_3)\}$$

Assumindo que a órbita γ_4 retorna para Σ_+ , temos um outro ponto sobre esse plano:

$$(1, y_4, z_4) := \gamma_4(y_3, z_3) \Big|_{x=1}$$

Note que, se

$$\gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(y_0, z_0) = (1, y_0, z_0),$$

então temos uma órbita periódica.

Aplicaremos agora esse método para encontrar órbitas periódicas em dois tipos de sistemas suaves por partes com três zonas: no primeiro caso, a única diferença dos três campos é a singularidade; no segundo caso, o sistema simétrico estudado, por exemplo, em [2].

4.2 Sistemas onde só se muda a singularidade

Queremos estudar sistemas suaves por partes do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A\mathbf{x} + k_1, & \text{se } x < -1; \\ A\mathbf{x} + k_2, & \text{se } -1 < x < 1; \\ A\mathbf{x} + k_3, & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (10)$$

onde $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é matriz, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ é vetor e $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}^3$ são constantes.

Como esses sistemas são lineares, eles são completamente integráveis. Ou seja, se $X(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + k_1, Y(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + k_2$ e $Z(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + k_3$, então existem

- F_1, F_2 integrais primeiras funcionalmente independentes de X ;
- G_1, G_2 integrais primeiras funcionalmente independentes de Y ;
- H_1, H_2 integrais primeiras funcionalmente independentes de Z .

4.2.1 Exemplos

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} p \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{se } x < -1; \\ Y(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} q \\ -q \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{se } -1 < x < 1; \\ Z(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (11)$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $p, q, r \in \mathbb{R}$ são distintos.

Então

- a) $F_1(x, y, z) = x + y + z; F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + pz$ são as integrais primeiras de X ;
- b) $G_1(x, y, z) = x + y + z; G_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + qz$ são as integrais primeiras de Y ;
- c) $H_1(x, y, z) = x + y + z; H_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + rz$ são as integrais primeiras de Z .

Logo temos que a órbita saindo de $(1, y_0, z_0) \in \Sigma_1$ e chegando em Σ_{-1} é dada por

$$\begin{aligned}
\gamma_1(y_0, z_0) &= \{\mathbf{x} \in \Sigma_C : G_1(x, y, z) = G_1(1, y_0, z_0); G_2(x, y, z) = G_2(1, y_0, z_0)\} \\
&= \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \left(q \mp \sqrt{q^2 + 4q(x - y_0 - 1) - 4x^2 + 4y_0^2 + 4} \right), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + 4q(x - y_0 - 1) - 4x^2 + 4y_0^2 + 4} - \frac{q}{2} - x + y_0 + z_0 + 1 \right), -1 < x < 1 \right\}
\end{aligned}$$

1

Note que

$$\begin{aligned}
\gamma_1(y_0, z_0) \Big|_{x=1} &= \left\{ \left(1, \frac{1}{2} (q - |q - 2y_0|), \frac{1}{2} |q - 2y_0| - \frac{q}{2} + y_0 + z_0 \right); \right. \\
&\quad \left. \left(1, \frac{1}{2} (|q - 2y_0| + q), -\frac{1}{2} |q - 2y_0| - \frac{q}{2} + y_0 + z_0 \right) \right\} \\
&= \left\{ (1, y_0, z_0); (1, q - y_0, -q + 2y_0 + z_0) \right\}
\end{aligned}$$

Ou seja, dependendo do sinal de $q - 2y_0$, temos que desconsiderar um dos ramos da órbita (senão o ponto de início não é $(1, y_0, z_0)$). Assuma que a órbita descartada é a primeira. Então temos que

$$\begin{aligned}
(-1, y_1, z_1) &= \gamma_1(y_0, z_0) \Big|_{x=-1} \\
&= \left\{ \left(-1, \frac{1}{2} \left(\sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2 + q} \right), -\frac{1}{2} \sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2} - \frac{q}{2} + y_0 + z_0 + 2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\gamma_2(y_1, z_1) &= \left\{ \left(x, p \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{A + 4px - 4x^2} \right), 1 - \frac{p}{2} - x + y_0 + z_0 \mp \frac{1}{2} \sqrt{A + 4px - 4x^2} \right) : \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (p - \sqrt{A + p^2}) \leq x \leq \frac{1}{2} (\sqrt{A + p^2} + p) \right\}
\end{aligned}$$

onde

$$A = p^2 + (2q - 2p) \sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2} - 2pq + 4p + 2q^2 - 4qy_0 - 8q + 4y_0^2 + 4.$$

¹Ao parametrizar a órbita γ como $\{(x, \mp f(x), \pm g(x)) : x \in I\}$ para funções f, g , entenda-se que $\gamma(x) = \{(x, -f(x), g(x)) \cup (x, f(x), -g(x)) : x \in I\}$.

Dessa forma, escolhendo um dos ramos da solução, temos que

$$(-1, y_2, z_2) = \left(-1, \frac{p - \sqrt{A - 4(p+1)}}{2}, \frac{-p + \sqrt{A - 4(p+1)}}{2} + y_0 + z_0 + 2 \right)$$

Agora, parametrizamos a órbita entrando em Σ_C :

$$\begin{aligned} \gamma_3(y_2, z_2) = & \\ & \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \left(q \pm \sqrt{-2p(B+C+2q) + 2q(B+C+2x-2y_0-2) + 2p^2 + 3q^2 - 4x^2 + 4y_0^2 + 4} \right), \right. \right. \\ & \left. \left. 1 - \frac{q}{2} - x + y_0 + z_0 \mp \frac{1}{2} \sqrt{-2p(B+C+2q) + 2q(B+C+2x-2y_0-2) + 2p^2 + 3q^2 - 4x^2 + 4y_0^2 + 4} \right) : \right. \\ & \left. -1 \leq x \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

onde

$$B = \sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2} \quad \text{e} \quad C = \sqrt{-2p(B+q) + 2(Bq + q^2 - 2q(y_0 + 2) + 2y_0^2) + p^2}.$$

Assim, escolhendo um dos ramos da órbita, temos que

$$\begin{aligned} (1, y_3, z_3) = & \left(1, \frac{1}{2} \left(q - \sqrt{-2p(B+C+2q) + 2q(B+C-2y_0) + 2p^2 + 3q^2 + 4y_0^2} \right), \right. \\ & \left. -\frac{q}{2} + y_0 + z_0 \frac{1}{2} \sqrt{-2p(B+C+2q) + 2q(B+C-2y_0) + 2p^2 + 3q^2 + 4y_0^2} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, calculos que a órbita passando por $(1, y_3, z_3)$ é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_4(y_3, z_3) = & \\ & \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \left(1 + r \pm \left(2[F(1+r-q) + (D+E)(q-p) + 2(r+1)x - 2(x^2 - q^2 - y_0^2) + p^2 \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - q(2p+r+2y_0+1) - r] + r^2 + 1 \right)^{1/2}, \frac{1-r}{2} - x + y_0 + z_0 \mp \frac{1}{2} 2[F(1+r-q) \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (D+E)(q-p) + 2(r+1)x - 2(x^2 - q^2 - y_0^2) + p^2 - q(2p+r+2y_0+1) - r] + r^2 + 1 \right)^{1/2} \right) : x \in I \right\} \end{aligned}$$

onde

$$D = \sqrt{p^2 - 2p \left(\sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2} + q \right) + 2 \left(q \sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2} + q^2 - 2q(y_0 + 2) + 2y_0^2 \right)}$$

$$E = \sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2}, F = \sqrt{-2p(D + E + 2q) + 2q(D + E - 2y_0) + 2p^2 + 3q^2 + 4y_0^2}$$

e I é o intervalo em que as raízes estão bem definidas.

Assim, escolhendo o ramo da órbita adequado, temos que

$$(1, y_4, z_4) = \left(1, \frac{1}{2} \left(1 + r + \left(-2Dp + 2Dq + 2p^2 - 2pE - 2q(2p + r + 2y_0 + 1) + 2Eq + 4q^2 - 2qF + 2Fr + 2F + r^2 + 2r + 4y_0^2 + 1 \right)^{1/2}, \frac{-1-r}{2} + y_0 + z_0 - \frac{1}{2} \left(-2Dp + 2Dq + 2p^2 - 2pE - 2q(2p + r + 2y_0 + 1) + 2Eq + 4q^2 - 2qF + 2Fr + 2F + r^2 + 2r + 4y_0^2 + 1 \right)^{1/2} \right)$$

Logo, para encontrar órbitas periódicas, basta encontrar valores de y_0, z_0, p, q, r tais que

$$\|(1, y_0, z_0) - (1, y_4, z_4)\| = 0.$$

Teorema 2. *Defina*

$$K = \sqrt{p^2 + 2q^2 + 4y_0^2 - 2q(p + 2y_0 + 4) + 2(q - p)\sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2}}$$

$$L = \sqrt{2p^2 + 3q^2 + 4y_0^2 - 4q(p + y_0) + 2(q - p)\left[K + \sqrt{q^2 - 4q(y_0 + 2) + 4y_0^2}\right]}$$

Assuma que as raízes sejam bem-definidas em \mathbb{R} e que a seguinte relação entre os parâmetros e as coordenadas seja satisfeita:

$$0 = 1 + r - 2y_0 + \left[2p^2 - 2Kp + 2(q - 1)\sqrt{q^2 - 4(y_0 + 2)q + 4y_0^2}p + 4q^2 + r^2 + 4y_0^2 + 2Kq + 2r - 2q(2p + r + 2y_0 + 1) + 2(r - q + 1)L \right]^{1/2} \quad (12)$$

Então o sistema (11) possui órbita periódica passando por $(1, y_0, z_0)$. Em particular, como a expressão acima não depende de z_0 , se os parâmetros p, q, r, y_0 satisfazem (12), então a reta $\{(1, y_0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ é uma reta de órbitas periódicas do sistema.

Observação 1. *Defina*

$$N_i(p, q, r, y_0, z_0) = \|(x, y_i, z_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\|, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Nas hipóteses do teorema acima, se $N_2(p, q, r, y_0, z_0) = 0$ (resp. $N_4(p, q, r, y_0, z_0) = 0$), então a órbita periódica não entra em Σ_E (resp. em Σ_D). Em particular, a órbita periódica é de três zonas se, e somente se, $N_i(p, q, r, y_0, z_0) \neq 0$ para todo $i \in \{2, 4\}$.

Corolário 2. *Considere o sistema (11) com*

$$p = -1, q = 1, r = -0,68.$$

Então

$$\{(1; 2, 4517, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

é uma reta de órbitas periódicas de três zonas.

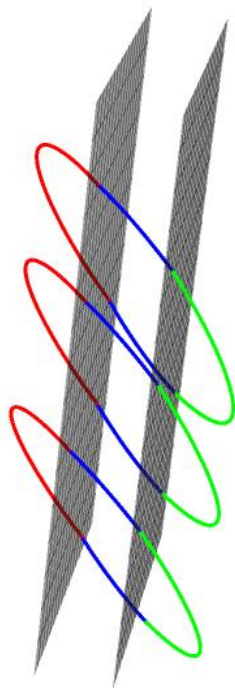


Figura 2: Algumas órbitas periódicas do Corolário 2. Gráfico obtido com o *Mathematica*.

Teorema 3. *Considere o sistema*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} - \mathbf{b}, & \text{se } x < -1; \\ Y(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} & , \text{ se } -1 < x < 1; \\ Z(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (13)$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} r - q \\ p - r \\ q - p \end{bmatrix}$, e $p, q, r \in \mathbb{R}$. Seja um ponto $\mathbf{p}_0 = (1, y_0, z_0)$ sobre a zona de descontinuidade, com $y_0 > 0$. Então

- a) Se $y_0 = 0$ e $q \geq r$, a órbita passando por \mathbf{p}_0 é periódica e contida em Σ_C ;
- b) Se $y_0 = 0$ e $q < r$, não existe órbita periódica passando por \mathbf{p}_0 ;
- c) Se $y_0 > 0$ e $q = r$, a órbita passando por \mathbf{p}_0 é periódica e de três zonas;
- d) Se $y_0 > 0$ e $q \neq r$, não existe órbita periódica passando por \mathbf{p}_0 ;

Demonstração. Note primeiramente que

- $F_1(x, y, z) = x + y + z$ e $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - px - qy - rz$ são integrais primeiras de X ;
- $G_1(x, y, z) = x + y + z$ e $G_2(x, y, z) = x^2 + y^2$ são integrais primeiras de Y ;
- $H_1(x, y, z) = x + y + z$ e $H_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + px + qy + rz$ são integrais primeiras de Z ;

Considere um ponto $\mathbf{p}_0 = (1, y_0, z_0) \in \Sigma$.

A órbita passando por esse ponto e entrando em Σ_C é parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma_1(y_0, z_0) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : G_1(\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{p}_0); G_2(\mathbf{x}) = G_2(\mathbf{p}_0); -1 < x < 1\} \\ &= \left\{ \left(x, -\sqrt{-x^2 + y_0^2 + 1}, \sqrt{-x^2 + y_0^2 + 1} - x + y_0 + z_0 + 1 \right), \right. \\ &\quad \left. \left(x, \sqrt{-x^2 + y_0^2 + 1}, -\sqrt{-x^2 + y_0^2 + 1} - x + y_0 + z_0 + 1 \right) : -1 < x < 1 \right\} \end{aligned}$$

Escolhendo um dos ramos da órbita e fazendo $x = -1$, temos que

$$\mathbf{p}_1 = (-1, y_1, z_1) = \gamma_1(y_0, z_0) \Big|_{x=-1} = (-1, y_0, 2 + z_0)$$

Parametrizemos agora a órbita entrando em Σ_E :

$$\begin{aligned} \gamma_2(y_1, z_1) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F_1(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{p}_1); F_2(\mathbf{x}) = F_2(\mathbf{p}_1); x < -1\} \\ &= \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \left(q - r \mp \sqrt{4x(p - r) + 4(p - r + 1) + (-q + r + 2y_0)^2 - 4x^2} \right), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \left(-q + r - 2x + 2(y_0 + z_0 + 1) \pm \sqrt{4x(p - r) + 4(p - r + 1) + (-q + r + 2y_0)^2 - 4x^2} \right) \right) : x < -1 \right\} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{p}_2 = (-1, y_2, z_2) = \left(-1, \frac{1}{2}(q - r + |-q + r + 2y_0|), \frac{1}{2}(-q + r + 2(y_0 + z_0 + 2) - |-q + r + 2y_0|) \right)$$

Calculamos a próxima órbita:

$$\begin{aligned} \gamma_3(y_2, z_2) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : G_1(\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{p}_2); G_2(\mathbf{x}) = G_2(\mathbf{p}_2); -1 < x < 1\} \\ &= \left\{ \left(x, \pm \sqrt{\frac{q-r}{2}|-q+r+2y_0| + \frac{q^2+r^2}{2} - q(r+y_0) + ry_0 - x^2 + y_0^2 + 1}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -x + y_0 + z_0 + 1 \mp \sqrt{\frac{q-r}{2}|-q+r+2y_0| + \frac{q^2+r^2}{2} - q(r+y_0) + ry_0 - x^2 + y_0^2 + 1} \right) : -1 < x < 1 \right\} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 = (1, y_3, z_3) &= \left(1, -\sqrt{\frac{q-r}{2}|-q+r+2y_0| + \frac{q^2+r^2}{2} - q(r+y_0) + ry_0 + y_0^2}, \right. \\ &\quad \left. y_0 + z_0 + \sqrt{\frac{q-r}{2}|-q+r+2y_0| + \frac{q^2+r^2}{2} - q(r+y_0) + ry_0 + y_0^2} \right) \end{aligned}$$

Defina agora

$$A = \sqrt{q^2 - 2q(r+y_0) + (q-r)|-q+r+2y_0| + r^2 + 2ry_0 + 2y_0^2}$$

$$\begin{aligned} B &= -6qr - 4x^2 + 4(r-p)x + 2\sqrt{2}A(r-q) + 4(p-r+1) + 3(q^2+r^2) \\ &\quad - 4y_0(q+r+y_0) + 2(q-r)|-q+r+2y_0| \end{aligned}$$

Então, a órbita passando por $(1, y_3, z_3)$ e entrando em Σ_D é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_4(y_3, z_3) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : H_1(\mathbf{x}) = H_1(\mathbf{p}_3); H_2(\mathbf{x}) = H_2(\mathbf{p}_3); x > 1\} \\ &= \left\{ \left(x, \frac{1}{2}(\pm B - q + r), \frac{1}{2}(\mp B + q - r - 2x + 2(y_0 + z_0 + 1)) \right) : x > 1 \right\} \end{aligned}$$

Assim, temos um último ponto

$$\mathbf{p}_4 = (1, y_4, z_4) = \left(1, \frac{1}{2}(\hat{B} - q + r), \frac{1}{2}(q - r + 2y_0 + 2z_0 - \hat{B}) \right)$$

onde $\hat{B} = \sqrt{2\sqrt{2}A(r-q) + 2(q-r)|-q+r+2y_0| + 3(q^2+r^2) - 4y_0(q-r-y_0) - 6qr}$.

Para analisar tanto se as órbitas são periódicas como se a órbita entra ou não em uma determinada zona, defina

$$\begin{aligned} N(p, q, r, y_0, z_0) &= \|(1, y_4, z_4) - (1, y_0, z_0)\|; \\ N_i(p, q, r, y_0, z_0) &= \|(x_i, y_i, z_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\|, i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

onde $x_1 = -1 = x_2$ e $x_0 = x_3 = x_4 = 1$.

Note que a órbita $\gamma := \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(y_0, z_0)$ é periódica see $N(p, q, r, y_0, z_0) = 0$. Ainda, a órbita entra em Σ_E (resp. Σ_D) see $N_2(p, q, r, y_0, z_0) \neq 0$ (resp. $N_4(p, q, r, y_0, z_0) \neq 0$).

Caso $y_0 = 0$

Se $y_0 = 0$, então podemos calcular que

	$N(p, q, r, y_0, z_0)$	$N_1(p, q, r, y_0, z_0)$	$N_2(p, q, r, y_0, z_0)$	$N_3(p, q, r, y_0, z_0)$	$N_4(p, q, r, y_0, z_0)$
$q = r$	0	$2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	0
$q > r$	0	$2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	0
$q < r$	$2\sqrt{2}(-q + r)$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}(-q + r)$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}(-q + r)$

Logo, para $q \geq r$ e $q = r$, a órbita é periódica e não entra nas zonas laterais. Ainda, $N(p, q, r, y_0, z_0) > 0$ se $q < r$. Ou seja, a órbita não é periódica nesse caso.

Caso $y_0 > 0$

Se $y_0 > 0$ e $q = r$, então podemos calcular que $N(p, q, r, y_0, z_0) = 0$, mas $N_2(p, q, r, y_0, z_0) = 2\sqrt{2}y_0 > 0$ e $N_4(p, q, r, y_0, z_0) = 2\sqrt{2}y_0 > 0$. Ou seja, a órbita é periódica e de três zonas.

Se $y_0 > 0$ e $q < r$, então $N(p, q, r, y_0, z_0) = \sqrt{2}(r - q) > 0$. Logo não existe órbita periódica passando por $(1, y_0, z_0)$.

Se $y_0 > 0$ e $q > r$, então

$$N(p, q, r, y_0, z_0) = \begin{cases} \sqrt{2}(q - r), & \text{se } q - r - 2y_0 \leq 0 \\ 2\sqrt{2}y_0, & \text{se } q - r - 2y_0 > 0. \end{cases}$$

No primeiro caso, temos que $N(p, q, r, y_0, z_0) > 0$ pois $q - r > 0$ por hipótese. No segundo caso, a desigualdade também vale pois $y_0 > 0$. Ou seja: se $y_0 > 0$ e $q > r$, então não existe órbita periódica passando por $(1, y_0, z_0)$. \square

Corolário 3. *Se $p = -1, q = 2, r = 2$, o sistema (13) admite infinitas órbitas periódicas de 3 zonas.*

4.3 Sistemas simétricos

Consideremos o sistema suave por partes

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_E \mathbf{x} - \mathbf{b}, & \text{se } x < -1 \\ A_C \mathbf{x}, & \text{se } |x| < 1 \\ A_E \mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (14)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; $A_E, A_C \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$; e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

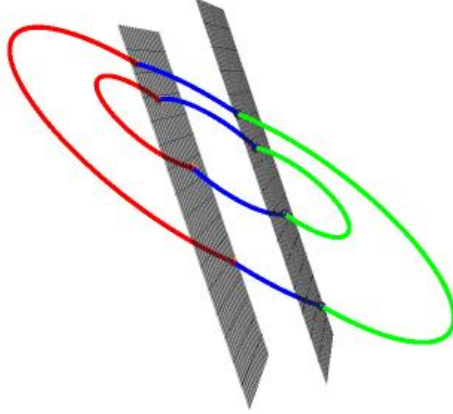


Figura 3: Representação de algumas órbitas periódicas do Corolário 3. Gráfico obtido com o *Mathematica*.

Sejam t, d, m (resp. T, D, M) o traço, determinante e soma dos menores principais de A_E (resp. A_C). Assim, Freire *et al* demonstraram o seguinte teorema:

Teorema 4. [2] *Defina $T_0 = D/M$ e $\gamma = DM - Dm + dM - tM^2$. Então*

- a) *Se $T = T_0$, (14) apresenta um centro na região central;*
- b) *(14) possui um ciclo limite simétrico de três regiões se $(T - T_0)\gamma > 0$, para $T - T_0$ pequeno o suficiente.*

Usando esse teorema podemos obter alguns sistemas sem ciclo limite de três zonas:

Corolário 4. *Considere o conjunto*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & k & l \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & k \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & k & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & k & a \\ 0 & b & 0 \\ c & m & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & k \\ b & 0 & l \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c, k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Se $A_C \in M$, então (14) não possui ciclo limite de três zonas.

Demonstração. Basta verificar que, para cada uma das matrizes, vale que $M > 0$ e $T = D/M$. \square

Ainda, podemos provar outra consequência importante do teorema (4):

Teorema 5. *Se o campo*

$$\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x} \quad (15)$$

admite dois polinômios quadráticos como integrais primeiras, então (14) não admite ciclo limite de 3 zonas.

Para provar esse teorema, usaremos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 2. *Sejam $G_1, G_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ integrais primeiras de $Y(\mathbf{x}) = A_C \mathbf{x}$ e assumamos que $\frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_2}{\partial y} \frac{\partial G_1}{\partial z} \neq 0$. Então*

$$Y(x, y, z) = \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_2}{\partial x}, \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) \quad (16)$$

Demonstração. Pelo lema (1), temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial x} X_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y} X_2 + \frac{\partial G_1}{\partial z} X_3 = 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} X_1 + \frac{\partial G_2}{\partial y} X_2 + \frac{\partial G_2}{\partial z} X_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, segue que

$$\begin{cases} X_2 = \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) X_1 \\ X_3 = - \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) X_1 \end{cases}$$

Tomando $X_1 = \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial z}$, segue (16). \square

Pela hipótese, podemos assumir que G_1 e G_2 são quadráticas, ou seja, existem coeficientes $\alpha_{ij}, i \in \{1, 2\}, j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tais que

$$G_i(x, y, z) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}x + \alpha_{i2}y + \alpha_{i3}z + \alpha_{i4}x^2 + \alpha_{i5}y^2 + \alpha_{i6}z^2 + \alpha_{i7}xy + \alpha_{i8}xz + \alpha_{i9}yz.$$

Para facilitar as contas, suponha que $\alpha_{i7} = \alpha_{i8} = \alpha_{i9} = 0$. (Obtém-se o mesmo resultado sem usar essa hipótese, mas as contas são bem maiores).

Como G_1 e G_2 são integrais primeiras do campo $Y(\mathbf{x}) = A_C \mathbf{x}$, então pelo Lema temos que

$$Y(x, y, z) =$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{23}) + 2(\alpha_{13}\alpha_{25} - \alpha_{15}\alpha_{23})y + 2(\alpha_{22}\alpha_{16} - \alpha_{12}\alpha_{26})z + 4(\alpha_{16}\alpha_{25} - \alpha_{15}\alpha_{26})yz \\ (\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21}) + 2(\alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24})x + 2(\alpha_{11}\alpha_{26} - \alpha_{16}\alpha_{21})z + 4(\alpha_{14}\alpha_{26} - \alpha_{16}\alpha_{24})xz \\ (\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22}) + 2(\alpha_{12}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{22})x + 2(\alpha_{15}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{25})y + 4(\alpha_{15}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{25})xy \end{pmatrix}$$

Como queremos que o campo acima seja linear, então os coeficientes devem satisfazer

$$\begin{cases} \alpha_{16}\alpha_{25} - \alpha_{15}\alpha_{26} = 0 \\ \alpha_{14}\alpha_{26} - \alpha_{16}\alpha_{24} = 0 \\ \alpha_{15}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{25} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Nesse caso, (15) $\Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2(\alpha_{13}\alpha_{25} - \alpha_{15}\alpha_{23}) & 2(\alpha_{22}\alpha_{16} - \alpha_{12}\alpha_{26}) \\ 2(\alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24}) & 0 & 2(\alpha_{11}\alpha_{26} - \alpha_{16}\alpha_{21}) \\ 2(\alpha_{12}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{22}) & 2(\alpha_{15}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{25}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{23} \\ \alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21} \\ \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22} \end{bmatrix}$$

Então, $T = \text{tr}(A) = 0$, $D = \det(A) = 0$ e a soma dos menores principais é

$$M = -4 \left[(\alpha_{11}\alpha_{26} - \alpha_{16}\alpha_{21})(\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{25}) + (\alpha_{22}\alpha_{16} - \alpha_{12}\alpha_{26})(\alpha_{12}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{22}) \right. \\ \left. + (\alpha_{13}\alpha_{25} - \alpha_{15}\alpha_{23})(\alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24}) \right]$$

Assim, $T = 0 = D/M$. Portanto, pelo teorema (4), o sistema (14) possui um centro na zona central. Logo, não existe ciclo limite de 3 zonas de (14).

Referências

- [1] FALCONI, M.; LLIBRE, J. *n – 1 Independent First Integrals for Linear Differential Systems in \mathbb{R}^n and \mathbb{C}^n* , Qualitative Theory of Dynamical Systems, vol. 4, pp. 233–254, 2004.
- [2] FREIRE, E.; PONCE, E.; ROS, J. *The focus-center limit cycle bifurcation in symmetric piecewise linear systems*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 65, issue 6, pp. 1933-1951, 2005.
- [3] GORBUZOV, V.N.; PRANEVICH, A.F. *First Integrals for ordinary linear differential systems*. Arxiv, 2012. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1201.4141.pdf>.
- [4] LLIBRE, J.; TEIXEIRA, M.A. *Periodic orbits of continuous and discontinuous piecewise linear differential systems via first integrals*, São Paulo J. Math. Sci. vol. 12, pp. 121–135, 2018.
- [5] SILVA, G. T. da. *Ciclos em Sistemas Lineares por Partes Contínuos Tridimensionais*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. 88 p. Campinas, 2017. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/322368>