

Relatório final do PIBIC

Um estudo da existência de ciclos limite para equações diferenciais suaves por partes utilizando o método de Newton-Kantorovich

Samuel Krüger - RA 205697
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

1 Introdução

O estudo das soluções periódicas de equações diferenciais remonta a Poincaré e, desde então, vários fenômenos com comportamento periódico foram descobertos, desde reações químicas até o movimento das galáxias [8]. A teoria foi extensamente desenvolvida, mas problemas como a existência de cotas superiores para o número de ciclos limites (i.e., órbitas periódicas isoladas no espaço das órbitas) permanecem abertos [4].

No século XX, a partir de Andronov e Filippov, começou a se estudar sistemas não suaves ou suaves por partes. Esses sistemas têm grande aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento, pois, além de replicar a dinâmica dos sistemas suaves, apresentam bifurcações que não acontecem nesses (por exemplo, dois sistemas estáveis podem originar um sistema por partes não estável).

Sistemas por partes planares modelam, por exemplo, algumas redes neurais, o funcionamento de vários dispositivos eletrônicos e são usados também em teoria de controle [2]. Sistemas definidos em três dimensões por sua vez originam fenômenos de histerese e bistabilidade [3].

Nessa iniciação científica investigou-se sistemas suaves por partes lineares definidos em 2 e 3 dimensões. Em particular, estudou-se sob quais condições sobre os parâmetros do sistema surgem órbitas periódicas e, em particular, ciclos limite. Uma vez que a forma explícita dos fluxos (quando existe) é muito

complicada, foi desenvolvido um procedimento numérico para encontrar sistemas que possuam comportamento periódico. Posteriormente foi usado o Teorema de Nashed-Chen (o qual é uma generalização do famoso Teorema de Newton-Kantorovich) para demonstrar rigorosamente que o ciclo encontrado é limite.

Na primeira seção desse relatório apresentamos o Teorema de Nashed-Chen. Nas seções seguintes, apresentaremos o procedimento numérico que foi desenvolvido para construir sistemas por partes em duas e três dimensões que possuam órbitas periódicas.

2 O Teorema de Nashed-Chen

Sejam X e Y espaços de Banach e $L(X, Y)$ o conjunto de operadores lineares limitados de X em Y . Então, dado $A \in L(X, Y)$, dizemos que

- $B : Y \rightarrow X$ é inversa interna de A se $ABA = A$
- $B : Y \rightarrow X$ é inversa externa de A se $BAB = B$

Note que se A tem inversa interna e externa, ela tem uma inversa generalizada, a qual é dada pela pseudoinversa de Moore-Penrose A^+ . Se X e Y são espaços de Hilbert e se A tem posto-linha completo, então A^+ existe e é dada por $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ [1]. Ainda, no caso em que a matriz A é uma matriz quadrada não singular, essa pseudoinversa é a própria inversa da matriz.

Teorema 1. (Nashed-Chen [5]) *Seja $F : D \subset X \rightarrow Y$ Fréchet diferenciável, onde X e Y são espaços de Banach. Suponha que existe subconjunto aberto convexo $D_0 \subset D$, com $x_0 \in D_0$. Seja $F'(x_0)^\S$ a inversa exterior de $F'(x_0)$. Suponha ainda que existem constantes $\eta, \kappa > 0$ tais que*

- $\|F'(x_0)^\S F(x_0)\| \leq \eta;$
- $\|F'(x_0)^\S (F'(x) - F'(y))\| \leq \kappa \|x - y\| \quad \forall x, y \in D_0;$
- $h := \kappa\eta \leq \frac{1}{2};$
- $S(x_0, t^*) \subset D_0$, onde $t^* = (1 - \sqrt{1 - 2h})/\kappa.$

Então

1. a sequência

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{\S} F(x_k) \quad (1)$$

com

$$F'(x_k)^{\S} = [I + F'(x_0)^{\S}(F'(x_k) - F'(x_0))]^{-1} F'(x_0)^{\S}$$

está contida em $S(x_0, t^*)$ e converge para $x^* \in \overline{S(x_0, t^*)}$ solução de $F'(x_0)^{\S} F(x_0) = 0$;

2. $F'(x_0)^{\S} F(x_0) = 0$ tem solução única em $\tilde{S} \cap \{R(F'(x_0)^{\S}) + x_0\}$, onde

$$\tilde{S} = \begin{cases} \overline{S(x_0, t^*)} \cap D_0, & \text{se } h = 1/2 \\ \overline{S(x_0, t^{**})} \cap D_0, & \text{se } h < 1/2 \end{cases},$$

$$R(F'(x_0)^{\S}) + x_0 = \{x + x_0 : x \in R(F'(x_0)^{\S})\},$$

$$t^{**} = (1 + \sqrt{1 - 2h})/\kappa;$$

3. A convergência é quadrática.

Observe que no caso onde X e Y são espaços de mesma dimensão, o teorema acima é o Teorema de Newton-Kantorovich clássico [7]. Nesse caso, (1) é a sequência dada pelo método de Newton.

Apresentamos a seguir um lema que simplifica a determinação da constante κ .

Primeiramente, dado $x \in \mathbb{R}^n$, lembre que a norma infinito é definida por

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Podemos estender esse conceito para matrizes: dada matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a norma infinito de A é dada por

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Lema 1. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ função de classe C^1 . Então, para todos $x, \bar{x} \in X$, vale que*

$$\|f'(x) - f'(\bar{x})\|_{\infty} \leq n^2 \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq n}} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right] \|x - \bar{x}\|_{\infty}.$$

Demonstração. Primeiramente considere uma função $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Então, dados $x = (x_1, \dots, x_n), \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$, temos que

$$\begin{aligned} |g(x) - g(\bar{x})| &= |g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)| \\ &\leq |g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - g(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)| \\ &\quad + |g(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_{n-1}, x_n)| \\ &\quad + \dots + |g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, x_n) - g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)| \\ &\leq \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \right] |x_1 - \bar{x}_1| + \dots + \left[\frac{\partial g}{\partial x_n} \right] |x_n - \bar{x}_n| \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right] \|x - \bar{x}\|_\infty \end{aligned}$$

onde $\left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right] := \max_{x \in X} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right| \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Agora considere $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Denotemos por $f'(x)$ o jacobiano de f avaliado no ponto x . Então

$$\begin{aligned} \|f'(x) - f'(\bar{x})\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| \\ &\leq n \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| \\ &\leq n \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \left(n \max_{1 \leq k \leq n} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right] \|x - \bar{x}\|_\infty \right) \\ &= n^2 \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq n}} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right] \|x - \bar{x}\|_\infty. \end{aligned}$$

□

3 O caso bidimensional

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + by_1(t) \\ \dot{y}_1(t) = -bx_1(t) + ay_1(t) \end{cases} \quad \text{se } x_1 > 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(s) = -cy_2(s) + A \\ \dot{y}_2(s) = 4cx_2(s) + B \end{cases} \quad \text{se } x_2 < 0. \quad (3)$$

Queremos encontrar parâmetros tais que o sistema admita solução periódica.

Assumindo um ponto inicial $(0, p)$, as soluções dos sistemas (2) e (3) são respectivamente

$$\begin{cases} x_1(t) = pe^{at} \sin(bt), \\ y_1(t) = pe^{at} \cos(bt), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_2(s) = \frac{1}{2c} \sin(cs) [2(A - cp) \cos(cs) - B \sin(cs)], \\ y_2(s) = \frac{1}{2c} (2A - 2(A - cp) \cos(2cs) + B \sin(2cs)). \end{cases} \quad (5)$$

Defina as equações de fechamento

$$\begin{aligned} f_1(t, s, p) &= x_2(t, -s, p), \\ f_2(t, s, p) &= x_1(t, s, p), \\ f_3(t, s, p) &= y_2(t, -s, p) - y_1(t, s, p). \end{aligned}$$

Usando (4) e (5) obtemos que

$$\begin{aligned} f_1(t, s, p) &= \frac{1}{2c} \sin(cs) [-2(A - cp) \cos(cs) + B \sin(cs)], \\ f_2(t, s, p) &= pe^{at} \sin(bt), \\ f_3(t, s, p) &= -pe^{at} \cos(bt) + \frac{1}{2c} (2A - 2(A - cp) \cos(2cs) - B \sin(2cs)). \end{aligned} \quad (6)$$

Como estamos preocupados com o mapa de primeiro retorno, temos que o menor $t > 0$ tal que $f_2(t, s, p) = 0$ é $t^* = \frac{\pi}{b}$. Então só precisamos encontrar um zero do sistema

$$\begin{cases} f_1(t^*, s, p) = \frac{1}{2c} \sin(cs) [-2(A - cp) \cos(cs) + B \sin(cs)], \\ f_3(t^*, s, p) = \frac{1}{c} [A + pc \exp\left(\frac{a\pi}{b}\right) + (-A + cp) \cos(2cs) - \frac{1}{2}B \sin(2cs)]. \end{cases} \quad (7)$$

Usando o *software Mathematica* obtemos que o sistema acima tem 4 soluções:

$$\begin{cases} s = \pm \frac{1}{c} \arccos\left(\pm \frac{B(-1 + \cosh\left(\frac{a\pi}{b}\right) + \sinh\left(\frac{a\pi}{b}\right))}{2 \exp\left(\frac{a\pi}{b}\right)(4A^2 - B^2 + (4A^2 + B^2) \cosh\left(\frac{a\pi}{b}\right))}\right), \\ p = \frac{A}{c} \left(1 - \coth\left(\frac{a\pi}{2b}\right)\right). \end{cases} \quad (8)$$

Agora podemos escolher parâmetros que se adequem ao nosso problema. Sabemos de (6) que $s = \pi$ é solução da equação $f_1(t, s, p) = 0$. Tomando o ponto inicial $p = 2$, temos que a 5-upla (a, b, c, A, B) de parâmetros que escolhermos deve satisfazer

$$\begin{cases} \pi = \pm \frac{1}{c} \arccos \left(\pm \frac{B(-1 + \cosh(\frac{a\pi}{b}) + \sinh(\frac{a\pi}{b}))}{2 \exp(\frac{a\pi}{b})(4A^2 - B^2 + (4A^2 + B^2) \cosh(\frac{a\pi}{b}))} \right) \\ 2 = \frac{A}{c} \left(1 - \coth\left(\frac{a\pi}{2b}\right) \right) \end{cases}$$

Suponha que a, b, c são parâmetros quaisquer. Vamos escrever A e B em função deles:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2c}{1 - \coth\left(\frac{a\pi}{2b}\right)} \\ B &= -\frac{2ic \cos(c\pi) \left(1 + \cosh\left(\frac{a\pi}{b}\right) + \sinh\left(\frac{a\pi}{b}\right)\right)}{\sqrt{-\sin(c\pi)^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Note que c deve ser escolhido de forma que $B \in \mathbb{R}$.

Suponha $a = -1, b = 1$ e $c = \frac{1}{4}$. Então

$$A = \frac{e^{-\pi} - 1}{4} \text{ e } B = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}.$$

Finalmente, para esses parâmetros, temos

$$\{f_1(\pi, \pi, 2), f_2(\pi, \pi, 2), f_3(\pi, \pi, 2)\} = \{-7.85046 \cdot 10^{-17}, 0, -8.32667 \cdot 10^{-17}\}.$$

Portanto, temos o resultado principal dessa seção:

Teorema 2. *O sistema suave por partes definido por*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{se } x > 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \frac{1}{4}y(s) + \frac{e^{-\pi} - 1}{4} \\ \dot{y}(s) = -x(s) + \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \end{cases} \quad \text{se } x < 0 \quad (11)$$

possui ciclo limite.

Note que, por resultado provado em [6], esse é o único ciclo limite do sistema.

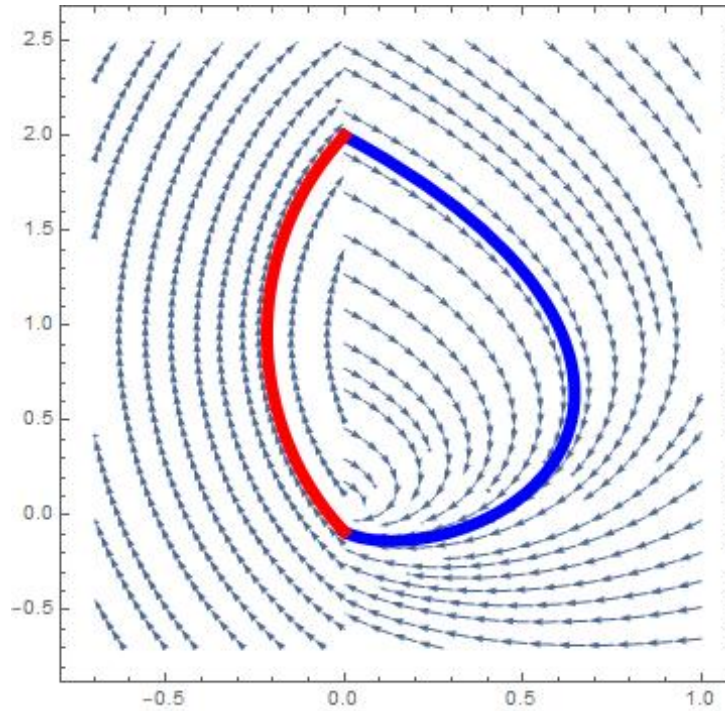


Figura 1: Ciclo limite dado pelo Teorema 2

3.1 Demonstração do Teorema 2

Para provar que o sistema possui ciclo limite em um ponto p^* com tempos de voo t^* e s^* , basta provar que (t^*, s^*, p^*) é o único zero de $(f_1(t, s, p), f_2(t, s, p), f_3(t, s, p))$ em uma vizinhança. Pelo Teorema de Nashed-Chen, basta provar que existem constantes $\kappa, \beta, \eta > 0$ tais que

a) $\|Df(\mathbf{z}) - Df(\bar{\mathbf{z}})\| \leq \kappa \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| \quad \forall \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}} \in C;$

b) $\|Df(\mathbf{z}^*)^{-1}\| \leq \beta;$

c) $\|Df(\mathbf{z}^*)^{-1}f(\mathbf{z}^*)\| \leq \eta;$

d) $h := \kappa\beta\eta \leq 1/2$

onde $\mathbf{z}^* = (t^*, s^*, p^*) = (\pi, \pi, 2)$ e C é um aberto convexo.

Demonstração. Seja o compacto $K = [3, 13; 3, 15] \times [3, 13; 3, 15] \times [1, 99; 2, 01]$

Para computar a constante κ , precisamos pelo Lema computar o valor máximo que as derivadas segundas assumem no compacto K . Usando o *Mathematica* obtemos que

$$\begin{aligned} M(s, t, p) &= \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial^2 z_j \partial^2 z_k}(s, t, p) \right] \\ &= \max \left\{ 0, \frac{e^{-\pi}}{8} \left| (1 + e^\pi) \cos\left(\frac{s}{2}\right) + (1 + e^\pi(p-1)) \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right|, \right. \\ &\quad \frac{1}{4} \left| \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right|, |-2e^{-t}p \cos t|, |e^{-t}(\cos t - \sin t)|, \\ &\quad |2e^{-t}p \sin t|, |e^{-t}(\cos t + \sin t)|, \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right|, \\ &\quad \left. \frac{e^{-\pi}}{4} \left| (1 + e^\pi) \sin\left(\frac{s}{2}\right) - (1 + e^\pi(p-1)) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Logo $M(\pi, \pi, 2) = 0,5$. Portanto podemos escolher $\underline{\kappa} = 4.5 \geq 9 * 0.5$.

Sejam $f = (f_1, f_2, f_3)$ e $z^* = (t^*, s^*, p^*)$. Então

$$Df(z^*) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}e^{-\pi}(1 + e^\pi) & -\frac{1}{2} \\ -2e^{-\pi} & 0 & 0 \\ -2e^{-\pi} & \frac{1}{2}e^{-\pi}(-1 - e^\pi) & e^{-\pi} \end{bmatrix}$$

e

$$Df(z^*)^{-1} = \frac{2e^{3\pi}}{1 - e^{2\pi}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}(1 - e^{-2\pi}) & 0 \\ 2e^{-2\pi} & -e^{-\pi} & e^{-\pi} \\ e^{-2\pi} + e^{-\pi} & -\frac{1}{2}(e^{-2\pi} + e^{-\pi}) & \frac{1}{2}(e^{-2\pi} + e^{-\pi}) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $\|Df(z^*)^{-1}\|_\infty = \frac{e^\pi}{2} \simeq 11,5703$. Assim tome $\underline{\beta} = 12$.

Como

$$\begin{pmatrix} f_1(t^*, s^*, p^*) \\ f_2(t^*, s^*, p^*) \\ f_3(t^*, s^*, p^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,34184 \cdot 10^{-11} \\ 7,76063 \cdot 10^{-12} \\ 5,45973 \cdot 10^{-11} \end{pmatrix},$$

temos que $\|f(\mathbf{z}^*)\|_\infty = 5,45973 \cdot 10^{-11}$. Logo $\|Df(\mathbf{z}^*)^{-1}f(\mathbf{z}^*)\|_\infty = 6,3171 \cdot 10^{-10}$.

Tomamos então a última constante como sendo $\underline{\eta} = 7 \cdot 10^{-10}$

Como $\kappa\beta\eta = 3,78 \cdot 10^{-8} < 1/2$, temos que as condições do Teorema 1 são satisfeitas. Portanto, o ciclo encontrado é limite. □

4 O caso tridimensional

4.1 Definindo o sistema

Considere o sistema por partes

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_1\mathbf{x}, & \text{se } x < 0, \\ A_2\mathbf{x}, & \text{se } 0 < x < 1, \\ A_3\mathbf{x}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (12)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $A_i \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Para facilitar a notação, sejam Σ_0 e Σ_1 respectivamente os planos $y = 0$ e $y = 1$.

Sejam ψ_1, ϕ, ψ_2 respectivamente os fluxos dados por $\dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = A_3\mathbf{x}$. Denotamos, por exemplo, $\phi = \phi(t, \mathbf{p})$ como sendo a solução de $\dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x}$ com ponto inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p}$

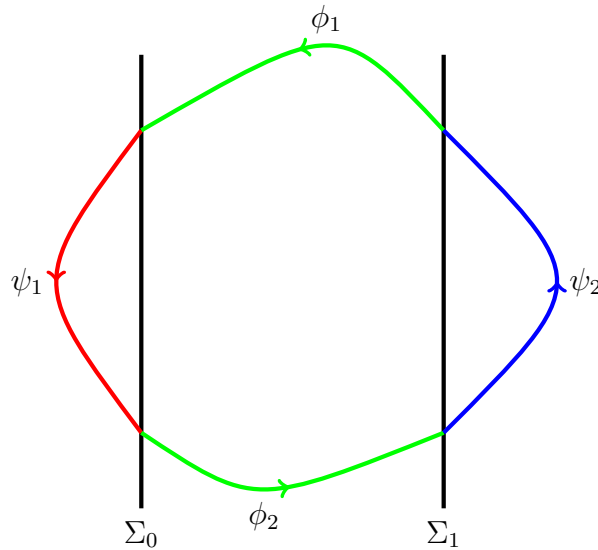


Figura 2: Esquema de órbita periódica tridimensional

Construímos o ciclo como na figura. Dados pontos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma_1$ e $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \Sigma_0$, considere tempos de voo t_1, t_2, s_1 e s_2 tais que

$$\phi_1(t_1, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{p}}$$

$$\psi_1(s_1, \tilde{\mathbf{p}}) = \tilde{\mathbf{q}}$$

$$\phi_2(t_2, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{q}$$

$$\psi_2(s_2, \mathbf{q}) = \mathbf{p}$$

Observação: Como a solução de $\dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x}$ com ponto inicial \mathbf{p} e com ponto inicial $\tilde{\mathbf{q}}$ não são necessariamente iguais, as denotamos respectivamente por ϕ_1 e ϕ_2 .

Agora, consideremos duas aplicações (dadas por concatenações de órbitas, como veremos abaixo): a primeira leva o ponto \mathbf{p} ao ponto $\tilde{\mathbf{q}}$ no sentido anti-horário (ou por tempos positivos) e a segunda faz o mesmo, mas no sentido horário (tempo negativo). Ou seja, vamos considerar as aplicações:

$$\begin{aligned} g(t, s, \mathbf{p}) &= \psi_1(s, \phi_1(t, \mathbf{p})), \\ h(t, s, \mathbf{p}) &= \phi_2(-t, \psi_2(-s, \mathbf{p})). \end{aligned}$$

Então a órbita dada por $\psi_2 \circ \phi_2 \circ \psi_1 \circ \phi_1$ é periódica se, e somente se, $g(t_1, s_1, \mathbf{p}) - h(t_2, s_2, \mathbf{p}) \equiv 0$. Portanto, temos as equações de fechamento

$$\begin{cases} f_1(t_1, t_2, s_1, s_2, \mathbf{p}) = g_1(t_1, s_1, \mathbf{p}) - h_1(t_2, s_2, \mathbf{p}) \\ f_2(t_1, t_2, s_1, s_2, \mathbf{p}) = g_2(t_1, s_1, \mathbf{p}) - h_2(t_2, s_2, \mathbf{p}) \\ f_3(t_1, t_2, s_1, s_2, \mathbf{p}) = g_3(t_1, s_1, \mathbf{p}) - h_3(t_2, s_2, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (13)$$

onde g_i, h_i correspondem às i -ésimas coordenadas de g e h respectivamente.

4.2 Procedimento numérico

Não é possível, como no caso bidimensional, apresentar uma expressão explícita geral para um fluxo em três dimensões. Dessa forma, considere o caso particular onde as matrizes A_i são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{33} & -a_{23} \\ a_{33} & 1 & a_{23} \\ 1 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{11} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & -c_{23} \\ c_{12} & c_{11} & c_{23} \\ 1 & 1 & c_{12} \end{bmatrix}$$

Como pode se ver no apêndice, a solução dos sistemas $\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x}$ com as matrizes acima é explícita. Por outro lado, a solução explícita é longa e altamente não linear, fazendo com que uma análise analítica do sistema seja muito difícil. Dessa forma, acharemos numericamente parâmetros do sistema tais que esse possua órbita periódica e, usando o Teorema de Nashed-Chen, mostraremos que a órbita encontrada é ciclo limite.

Procederemos da seguinte forma:

1. Escolha ponto inicial $\mathbf{p} = (p_1, 1, p_3)$;
2. Obtenha coeficientes b_{ij} tais que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_1^y(t_1, \mathbf{p}) = 0$ e calcule o ponto $\tilde{\mathbf{p}}$;
3. Obtenha coeficientes a_{ij} tais que existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_1^y(s_1, \tilde{\mathbf{p}}) = 0$ e calcule $\tilde{\mathbf{q}}$;
4. Uma vez que já temos os coeficientes b_{ij} , calcule o ponto \mathbf{q} ;
5. Use o Método de Newton para obter coeficientes c_{ij} tais que $\psi_2(s_2, \mathbf{q}) = \mathbf{p}$;

Usaremos o *Mathematica* para realizar essas contas. Em particular, usaremos repetidamente o comando *Manipulate* do Mathematica, o qual permite, por exemplo, variar parâmetros e plotar, concomitantemente, o gráfico da função que depende desses parâmetros.

Considere o ponto inicial $\mathbf{p} = (3, 1, -1)$

1º passo: Calcular coeficientes do campo A_2

Usando o comando *Manipulate* do Mathematica, podemos ver que se

$$b_{11} = \frac{39}{200}, b_{12} = -\frac{21}{50}, b_{13} = \frac{1}{2}, b_{23} = \frac{1}{5}$$

então (pelo Teorema do Valor Intermediário) existe $t \in (0, 1)$ tal que $\phi_1^y(t, 3, 1, -1) = 0$. De fato, podemos calcular que esse zero é

$$t_1 \cong 0,825175.$$

Logo

$$\tilde{\mathbf{p}} = \phi_1(t_1, 3, 1, -1) = \begin{pmatrix} 3, 322209 \\ 0 \\ -0, 139129 \end{pmatrix}.$$

2º passo: Calcular coeficientes do campo A_1

Usando o comando *Manipulate* do Mathematica, podemos ver que se

$$a_{23} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{33} = \frac{3}{20}$$

então existe $s \in (0, 0.6)$ tal que $\psi_1(s, \tilde{\mathbf{p}}) = 0$. De fato, podemos calcular que esse zero é

$$s_1 \cong 0, 531378.$$

Então

$$\tilde{\mathbf{q}} = \psi_1(s_1, \tilde{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 5, 21898 \\ 0 \\ -1, 30862 \end{pmatrix}$$

3º passo: Aplicar coeficientes do campo A_2

Agora, como já conhecemos o campo ϕ , vamos obter o ponto $\mathbf{q} = \phi(t_2, \tilde{\mathbf{q}})$. Resolvendo a equação $\phi_2(t_2, \tilde{\mathbf{q}}) = 1$, obtemos que

$$t_2 \cong -0, 499187.$$

Daí

$$\mathbf{q} = \phi_2(t_2, \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 4, 83934 \\ 1 \\ -1, 81914 \end{pmatrix}$$

4º passo: Calcular coeficientes do campo A_3

Agora obteremos os parâmetros c_{ij} de modo que tenhamos um ciclo, ou seja, tal que $\psi_2(s_2, \mathbf{q}) = \mathbf{p}$.

Se $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, defina as funções

$$\begin{cases} \Delta_1(s, \mathbf{q}) = \psi_2^x(s, \mathbf{q}) - p_1; \\ \Delta_2(s, \mathbf{q}) = \psi_2^y(s, \mathbf{q}) - p_2; \\ \Delta_3(s, \mathbf{q}) = \psi_2^z(s, \mathbf{q}) - p_3. \end{cases} \quad (14)$$

Para formar uma órbita periódica, o fluxo ψ_2 tem que levar o ponto \mathbf{q} no ponto \mathbf{p} . Ou seja, temos que garantir que

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \rightarrow 0. \quad (15)$$

Em particular, vamos encontrar parâmetros c_{ij} de modo que $\Delta \rightarrow 0$ e que o tempo de voo seja $s_2 = 1$.

Observação: Por que fixamos o valor do tempo de voo? Se não fixarmos o valor s , para cada escolha de parâmetros temos que calcular o valor de s , o que impossibilita o uso do Método de Newton. Ainda, apesar de ser possível fazer o processo normal (i.e., escolher parâmetros e daí calcular o tempo de voo) usando o comando *Manipulate*, os resultados numéricos não são bons, ou seja, o resíduo Δ não fica tão próximo de zero quanto se queira. Isso ocasionará problemas futuros quando aplicarmos o Teorema de Nashed-Chen. Logo fixamos s e obtemos parâmetros tais que o fluxo ψ_2 tenha tempo de voo $s_2 = 1$.

No Mathematica, o comando $FindRoot[\{f_1, \dots, f_n\}, \{\{x_1, a_1\}, \dots, \{x_n, a_n\}\}]$ calcula a raiz (simultânea) de f_1, \dots, f_n obtida aplicando o Método de Newton a partir do ponto (a_1, \dots, a_n) .

Logo, para calcular os parâmetros c_{ij} , usemos o comando

$FindRoot[\{\Delta_1(s, \mathbf{q}), \Delta_2(s, \mathbf{q}), \Delta_3(s, \mathbf{q})\}, \{\{c_{11}, 0, 1\}, \{c_{12}, 0, 1\}, \{c_{23}, 0, 1\}\}]$.

Obtemos que

$$c_{11} \cong -0,23396089; c_{12} \cong 0,4181932; c_{23} \cong -0,4925211.$$

Note que

$$\Delta(-0,2339608; 0,4181932; -0,4925211) = (6,06 \cdot 10^{-8}; -2,08 \cdot 10^{-7}; -1,53 \cdot 10^{-7})^T.$$

Logo essa escolha de parâmetros satisfaz a condição (15).

Ainda, observamos que o valor dos c_{ij} dada acima é uma aproximação de 7 casas decimais, enquanto o Mathematica dá esses valores com pelo menos 20 casas. Na seção seguinte será necessário utilizar os 20 dígitos para conseguir o resultado desejado.

Portanto, temos o resultado principal dessa seção:

Teorema 3. *O sistema (12) com*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.15 & -0.5 \\ 0.15 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.15 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.195 & -0.42 & 0.5 \\ -0.42 & 0.195 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.233961 & 0.418193 & 0.492521 \\ 0.418193 & -0.233961 & -0.492521 \\ 1 & 1 & 0.418193 \end{bmatrix}$$

possui ciclo limite.

Provaremos esse resultado rigorosamente na próxima seção.

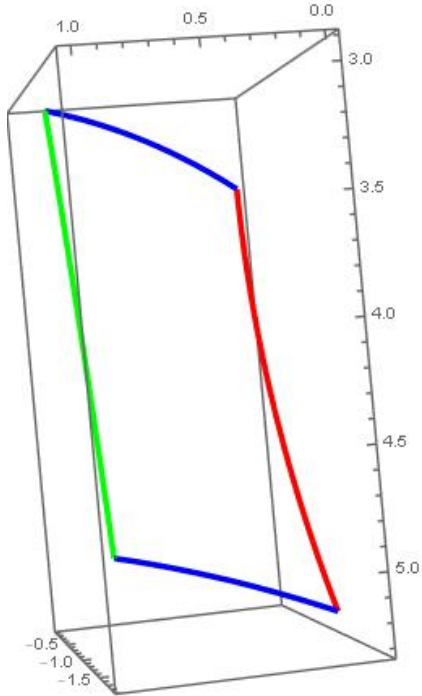


Figura 3: Ciclo do Teorema 3. As cores vermelha, azul e verde representam, respectivamente, os fluxos ψ_1 , ϕ e ψ_2

4.3 Demonstração do Teorema 3

Para facilitar a notação, denote $(t_1, s_1, t_2, s_2, p_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \mathbf{z}$.

Para mostrar que o sistema do Teorema 3 é ciclo limite temos que mostrar que $\bar{\mathbf{z}} = (0.825175, 0.531378, -0.499187, 1, 3)$ é o único ponto em uma vizinhança que satisfaz $f(\mathbf{z}) = 0$, onde $f = (f_1, f_2, f_3)$ é dada por (13) com $p_3 = -1$ fixo. Observe que as coordenadas de $\bar{\mathbf{z}}$ são os valores para os tempos de voo e o ponto inicial conseguidos anteriormente.

Para mostrar isso, é suficiente verificar que as hipóteses do Teorema 1 são satisfeitas. Ou seja, basta mostrar que existem constantes $\eta, \kappa > 0$ tais que, se f é definida em um convexo C , então

1. $\|f'(\bar{\mathbf{z}})^+ f(\bar{\mathbf{z}})\|_\infty \leq \eta$;
2. $\|f'(\bar{\mathbf{z}})^+\|_\infty \|f'(\mathbf{z}) - f'(\tilde{\mathbf{z}})\|_\infty \leq \kappa \|\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}\|_\infty \forall \mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}} \in C$;
3. $h := \kappa\eta \leq \frac{1}{2}$;
4. $S(x_0, t^*) \subset C_0$, onde $t^* = (1 - \sqrt{1 - 2h})/\kappa$ e C_0 é um aberto convexo contido em C .

Todas as normas consideradas são a norma infinito.

Tome

$$C = [0, 8; 0, 85] \times [0, 5; 0, 55] \times [-0, 52; -0, 47] \times [0, 97; 1, 02] \times [2, 97; 3, 02]$$

e $C_0 = \text{int}(C)$.

Usando o Mathematica, obtemos que

$$f'(\bar{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} 1,85974 & 3,91036 & 1,0177 & -2,84691 & 0,489625 \\ -1,34993 & -0,525773 & -2,19197 & 0,556667 & 0,489625 \\ 0,936115 & -2,80578 & 1,30087 & 1,02914 & 0,583219 \end{bmatrix}$$

$$f'(\bar{\mathbf{z}})^+ = \begin{bmatrix} 0,190325 & 0,0894571 & 0,262125 \\ 0,0227669 & -0,101101 & -0,231894 \\ -0,0948067 & -0,406218 & -0,035736 \\ -0,174058 & -0,136678 & -0,0887527 \\ 0,322646 & 0,517278 & 0,414604 \end{bmatrix}$$

Logo $\|f'(\bar{\mathbf{z}})\|_\infty = 1,15463 \cdot 10^{-14}$ e $\|f'(\bar{\mathbf{z}})^+\|_\infty = 1,25453$. Portanto, podemos pegar

$$\underline{\eta} = 1,5 \cdot 10^{-14} \geq 1,44852 \cdot 10^{-14} = 1,15463 \cdot 10^{-14} \times 1,25453.$$

Agora, pelo Lema temos que

$$\|f'(\bar{\mathbf{z}}) - f'(\mathbf{z})\| \leq 25 \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq n}} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k} \right] \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\|_\infty$$

onde

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq n}} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k} \right] \cong 2,745.$$

Logo

$$\kappa = 87 \geq 86,092 = 1,25453 \times 25 \times 2,745.$$

Finalmente, $h = \eta\kappa = 1,24706 \cdot 10^{-12} < \frac{1}{2}$. Dessa forma, $t^* = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{\kappa} \cong 1,45 \cdot 10^{-14}$. Logo $S(\bar{z}, t^*) \subset D_0$.

Portanto, as hipóteses do Teorema 1 são cumpridas. Dessa forma, tomando z em uma vizinhança de \bar{z} contida em D_0 , (1) tende para o único zero de f nessa vizinhança. Ou seja, o ciclo do Teorema 3 é ciclo limite.

Referências

- [1] ARGYROS, I.K. *Approximate Solution of Operator Equations with Applications*. 1 ed. Singapura: World Scientific, 2005
- [2] CARMONA, V.; FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. *Bifurcation of invariant cones in piecewise linear homogenous systems*. International Journal Of Bifurcation And Chaos, 15(08), 2469-2484, 2005.
- [3] FREIRE, E.; PONCE, E.; JAVIER, R. *Bistability and hysteresis in symmetric 3D piecewise linear oscillators with three zones*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 18(12), 3633–3645, 2008.
- [4] ILYASHENKO, Y. *Centennial history of Hilbert's 16th problem*. Bulletin of the American Mathematical Society, 39(3), 301-354, 2002.
- [5] GALÁNTAI, A. *The theory of Newton's method*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 124, 25-44, 2000.
- [6] LLIBRE, J.; NOVAES, D.D.; TEIXEIRA, M.A. *Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems*. Nonlinear Dynamics, 82(3), 1159-1175, 2015.
- [7] LLIBRE, J.; PONCE, E. *Three limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, Dynamics of Continuous, Discrete Impulsive Systems: Series B, vol. 19, pp. 325-335, 2012.
- [8] LLIBRE, J.; ZHANG, X. *Limit cycles created by piecewise linear centers*. Chaos: An Interdisciplinary Journal Of Nonlinear Science, 29(5), 2019.

5 Apêndice

5.1 Os fluxos do caso tridimensional

Sejam $\Sigma_L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < 0\}$, $\Sigma_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1\}$ e $\Sigma_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 1\}$.

Fluxo em Σ_L

$$\begin{aligned}\psi_1^x(s, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2a_{33}(-1 + 2a_{33})} \left(e^{a_{33}s} (2a_{33}(a_{23}(q_1 - q_2) + (1 - 2a_{33})q_3)) \right. \\ &\quad - e^{(1-a_{33})s} (a_{23} + (1 - 2a_{33})a_{33})(q_1 - q_2) \\ &\quad \left. + e^{(1+a_{33})s} ((-1 + 2a_{33})(a_{23}(-q_1 + q_2) + a_{33}(q_1 + q_2 + 2q_3))) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1^y(s, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2a_{33}(-1 + 2a_{33})} \left(e^{a_{33}s} (2a_{33}(a_{23}(q_1 - q_2) + (1 - 2a_{33})q_3)) \right. \\ &\quad - e^{(1-a_{33})s} (a_{23} + a_{33}(-1 + 2a_{33}))(q_1 - q_2) \\ &\quad \left. + e^{(1+a_{33})s} ((-1 + 2a_{33})(a_{23}(-q_1 + q_2) + a_{33}(q_1 + q_2 + 2q_3))) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1^z(s, \mathbf{q}) &= \frac{1}{-1 + 2a_{33}} \left(e^{a_{33}s} (a_{23}(-q_1 + q_2) + (-1 + 2a_{33})q_3) \right. \\ &\quad \left. + e^{(1-a_{33})s} a_{23}(q_1 - q_2) \right)\end{aligned}$$

Fluxo em Σ_C

$$\phi^x(t, \mathbf{p}) = e^{b_{11}t} (x \cosh(b_{12}t) + y \sinh(b_{12}t))$$

$$\phi^y(t, \mathbf{p}) = e^{b_{11}t} (y \cosh(b_{12}t) + x \sinh(b_{12}t))$$

$$\begin{aligned}\phi^z(t, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2((-1 + b_{11})^2 - b_{12}^2)} \left(e^{(b_{11}+b_{12})t} (-1 + b_{11} - b_{12})(b_{13} + b_{23})(p_1 + p_2) \right. \\ &\quad + e^{(b_{11}-b_{12})t} (-1 + b_{11} + b_{12})(b_{13} - b_{23})(p_1 - p_2) \\ &\quad \left. + 2e^t ((b_{12}b_{23} + (1 - b_{11})b_{13})p_1 + (b_{13}b_{12} - b_{11} + 1)p_2 + ((1 - b_{11})^2 - b_{12}^2)p_3) \right)\end{aligned}$$

Fluxo em Σ_R

$$\begin{aligned}
\psi_2^x(s, \mathbf{q}) &= \frac{((c_{11} - 2c_{12})c_{12} + c_{23})(q_1 - q_3)}{2(c_{11} - 2c_{12})c_{12}} e^{(c_{11} - c_{12})s} \\
&\quad + \frac{c_{23}(-q_1 + q_3) + c_{11}c_{12}(q_1 + q_3) + 2c_{12}q_3}{2c_{11}c_{12}} e^{(c_{11} + c_{12})s} \\
&\quad - \frac{c_{23}q_1 - (c_{23} - c_{11} + 2c_{12})q_3}{c_{11}(c_{11} - 2c_{12})} e^{c_{12}s} \\
\psi_2^y(s, \mathbf{q}) &= -\frac{((c_{11} - 2c_{12})c_{12} - c_{23})(q_1 - q_3)}{2(c_{11} - 2c_{12})c_{12}} e^{(c_{11} - c_{12})s} \\
&\quad + \frac{c_{23}(-q_1 + q_3) + c_{11}c_{12}(q_1 + q_3) + 2c_{12}q_3}{2c_{11}c_{12}} e^{(c_{11} + c_{12})s} \\
&\quad - \frac{c_{23}q_1 - c_{23}q_3 + c_{11}q_3 - 2c_{12}q_3}{c_{11}(c_{11} - 2c_{12})} e^{c_{12}s} \\
\psi_2^z(s, \mathbf{q}) &= \frac{1}{c_{11} - 2c_{12}} \left((c_{23}(-q_1 + q_3)) e^{(c_{11} - c_{12})s} \right. \\
&\quad \left. + (c_{23}(q_1 - q_3) + q_3(c_{11} - 2c_{12})) e^{c_{12}s} \right)
\end{aligned}$$

5.2 Códigos usados na demonstração do teorema 3

Sejam ax, ay, az as funções coordenadas do fluxo dado por A_1 , bx, by, bz por A_2 e cx, cy, cz por A_3 .

```

g[t1_, s1_, p1_, p2_, p3_] := {
ax[s1, bx[t1, p1, p2, p3], by[t1, p1, p2, p3], bz[t1, p1, p2, p3]],
ay[s1, bx[t1, p1, p2, p3], by[t1, p1, p2, p3], bz[t1, p1, p2, p3]],
az[s1, bx[t1, p1, p2, p3], by[t1, p1, p2, p3], bz[t1, p1, p2, p3]]}

```

```

h[s2_, t2_, p1_, p2_, p3_] := {
bx[-t2, cx[-s2, p1, p2, p3], cy[-s2, p1, p2, p3], cz[-s2, p1, p2, p3]],
by[-t2, cx[-s2, p1, p2, p3], cy[-s2, p1, p2, p3], cz[-s2, p1, p2, p3]],
bz[-t2, cx[-s2, p1, p2, p3], cy[-s2, p1, p2, p3], cz[-s2, p1, p2, p3]]}

```

```

f[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_, p2_, p3_] :=
g[t1, s1, p1, p2, p3] - h[s2, t2, p1, p2, p3]

```

```

f1[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] := f[t1, s1, t2, s2, p1, p2, p3][[1]]

```

```

f2[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] := f[t1,s1,t2,s2,p1,p2,p3][[2]]
f3[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] := f[t1,s1,t2,s2,p1,p2,p3][[3]]

%Jacobiano de f
J[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] := FullSimplify[{{D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z1],
D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z2], D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z3],
D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z4], D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z5]},
{D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z1], D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z2],
D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z3], D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z4],
D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z5]}, {D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z1],
D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z2], D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z3],
D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z4], D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5]}}
/. {z1 -> t1, z2 -> s1, z3 -> t2, z4 -> s2, z5 -> p1}]

%Norma da inversa externa do jacobiano
NormOuterInverse[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] :=
Norm[PseudoInverse[J[t1, s1, t2, s2, p1]], Infinity]

%Norma de f
Normf[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] := Norm[f[t1, s1, t2, s2, p1], Infinity]

%Valor máximo das derivadas segundas
MaxSecondDerivative[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] := Norm[{
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z1], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z2],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z3], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z4],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z5], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z1],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z2], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z3],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z4], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z5],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z1], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z2],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z3], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z4],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z5], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z1],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z2], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z3],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z4], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z5],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z1], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z2],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z3], D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z4],
D[D[f1[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z5], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z1],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z2], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z3],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z4], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z5],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z1], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z2],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z3], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z4],

```

```

D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z5], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z1],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z2], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z3],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z4], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z5],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z1], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z2],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z3], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z4],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z5], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z1],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z2], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z3],
D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z4], D[D[f2[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z5],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z1], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z2],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z3], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z4],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z1], z5], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z1],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z2], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z3],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z4], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z2], z5],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z1], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z2],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z3], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z4],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z3], z5], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z1],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z2], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z3],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z4], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z4], z5],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z1], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z2],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z3], D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z4],
D[D[f3[z1, z2, z3, z4, z5], z5], z5]}
/. {z1 -> t1, z2 -> s1, z3 -> t2, z4 -> s2, z5 -> p1}, Infinity]

%Cálculo das constantes do Teorema de Nashed-Chen
eta[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] :=
NormOuterInverse[t1, s1, t2, s2, p1]*Normf[t1, s1, t2, s2, p1]
kappa[t1_, s1_, t2_, s2_, p1_] :=
NormOuterInverse[t1, s1, t2, s2, p1]*(25*MaxSecondDerivative[t1, s1, t2, s2, p1])

%Dado ponto inicial, calcula os tempos de voo (se existem) e avalia o mapa de
primeiro retorno f para aquele ponto
Do[Do[t1 = t /. NSolve[by[t,p1,1,p3]==0, t, Reals][[1]];
s1 = s /. NSolve[g[t1,s,p1,1,p3][[2]]==0 && Abs[s]>0.01, s, Reals][[1]];
s2 = s /. NSolve[cy[s,p1,1,p3]==1 && Abs[s]>0.01, s, Reals][[1]];
t2 = t /. NSolve[by[t,cx[s2,p1,1,p3],cy[s2,p1,1,p3],cz[s2,p1,1,p3]]==0
&& Abs[t]>0.01, t, Reals][[1]];
Print[{p1, p3, Norm[f[t1, s1, -t2, -s2, p1, 1, p3], Infinity]}],
{p3, -1,-1}}, {p1, 3,3}]

```