

Relatório final do PIBIC
Projeto: Equações Diferenciais Lineares por Partes
com Região de Descontinuidade Singular

Samuel Krüger - RA 205697
Orientador: Dr. Ricardo Miranda Martins

1 Introdução

A teoria de Equações Diferenciais Não Suaves (ou Suaves por Partes) tem sido desenvolvida amplamente nos últimos anos, tendo em vista suas aplicações não só na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento, como engenharia, biologia e eletrônica, pois, ao mesmo tempo que as EDNS possuem um comportamento igual ou similar ao de sistemas suaves não lineares, a resolução numérica delas é mais simples.

Um dos problemas principais em EDNS é a existência de ciclos limites. Mesmo nos casos considerados nesse projeto, que usam EDNS lineares e planares (EDNSP), a existência desses ciclos não é imediata. Ademais, não existe um resultado na literatura que põe uma cota máxima para o número de ciclos.

Quando se trata de encontrar ciclos limites em EDNSP, o principal problema se encontra no fato de que o tempo do fluxo em cada zona depende inteiramente do sistema considerado e dos pontos iniciais. A análise generalizada é desse modo deveras complicada. Por isso, nesse projeto analisamos num primeiro momento o sistema numericamente. Então usamos ferramentas teóricas para julgar se o ciclo obtido é realmente um ciclo limite.

Na primeira parte desse relatório, apresentamos alguns resultados teóricos obtidos para EDNSP com duas zonas. Eles versam sobre as condições de existência de ciclos limites no plano, bifurcações, a forma normal de Liénard e sistemas de Filippov.

Depois, considerando um sistema de 4 zonas (os quadrantes canônicos do plano), esse trabalho se ocupa em mostrar o algoritmo feito implementado no *Mathematica* para construir numericamente ciclos em sistemas de EDNSP

com 1 ou 2 focos. Damos três exemplos de como construir esses ciclos. Mostramos ainda os problemas encontrados na construção desses ciclos.

Por fim, apresentamos o Teorema de Newton-Kantorovich para, baseado em [4], mostrar que existem três ciclos limites em EDNSP com duas zonas.

2 Resultados para EDNSP com duas zonas

Seja o sistema $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$ onde $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Então a interface $\Sigma = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ divide o plano em duas regiões $\Sigma^- = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e $\Sigma^+ = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Assim podemos reescrever o sistema como

$$\dot{\underline{x}} = \begin{cases} A^+ \underline{x} + b^+, & \text{se } \underline{x} \in \Sigma^+ \\ A^- \underline{x} + b^-, & \text{se } \underline{x} \in \Sigma^- \end{cases} \quad (1)$$

Para facilitar os cálculos, considere sistemas homogêneos

$$\dot{\underline{x}} = \begin{cases} A^+ \underline{x}, & \text{se } \underline{x} \in \Sigma^+ \\ A^- \underline{x}, & \text{se } \underline{x} \in \Sigma^- \end{cases} \quad (2)$$

Definição 1. *Seja o sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ e considere os autovalores λ_1 e λ_2 de A . Suponha que $\lambda_1 < \lambda_2$. Então:*

1. *Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, o sistema tem um ponto de sela;*
2. *Se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, o sistema tem um nó estável e, se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, o sistema tem um nó instável;*
3. *Se λ_1 e λ_2 são complexos conjugados de parte real não nula, o sistema tem um foco. Se $\text{Re } \lambda_1 < 0$, o foco é estável; senão ele é instável;*
4. *Se os autovalores são números imaginários puros conjugados, então o sistema tem um centro.*

Proposição 1. *Considere o sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$. Seja $\delta = \det A$ e $\tau = \text{tr} A$. Então:*

- a) *Se $\delta < 0$, a origem é um ponto de sela.*
- b) *Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, tem-se um nó na origem. O nó é estável se $\tau < 0$ e é instável se $\tau > 0$.*
- c) *Se $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ e $\tau \neq 0$, tem-se um foco na origem. Ele é estável se $\tau < 0$ e é instável se $\tau > 0$.*
- d) *Se $\delta > 0$ e $\tau = 0$, tem-se um centro na origem.*

O raciocínio aplicado aos sistemas acima pode ser generalizado. De fato, todo sistema homogêneo pode ser escrito como $\dot{\underline{x}} = J^\pm \underline{x}$, onde J^\pm é a forma de Jordan da matriz A^\pm . Através da análise da matriz J^\pm , pode-se saber o retrato de fase do sistema. Contudo, tal análise nem sempre é fácil. Assim, é necessário simplificá-la de alguma forma. Isso é feito a partir da forma normal, que usa o determinante e o traço da matriz A^\pm para deixar o sistema na sua forma mais simples possível.

Considere o sistema (1) e sejam $A^+ = (a_{ij}^+)$ e $A^- = (a_{ij}^-)$, $1 \leq i, j \leq 2$. Assuma $a_{12}^-, a_{12}^+ \neq 0$ e faça a troca de variáveis

$$f(\underline{x}) = u = \begin{cases} -a_{12}^+ \begin{pmatrix} x \\ a_{22}^- x - a_{12}^- y \end{pmatrix} + a_{12}^+ \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0 \\ -a_{12}^- \begin{pmatrix} x \\ a_{22}^+ x - a_{12}^+ y \end{pmatrix} + a_{12}^- \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Renomeie u como x.

Teorema 1. (*Forma canônica de Liénard*) *Nas condições acima, suponha que $a_{12}^+ a_{12}^- > 0$. Então podemos reescrever o sistema como*

$$\dot{\underline{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{bmatrix} \underline{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, & \text{se } \underline{x} \in \Sigma^- \\ \begin{bmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{bmatrix} \underline{x} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix}, & \text{se } \underline{x} \in \Sigma^+ \end{cases} \quad (3)$$

onde T e D são, respectivamente, traço e determinante e

$$\begin{aligned} a^- &= a_{12}^+ (a_{12}^- b_2^- - a_{22}^- b_1^-), \\ a^+ &= a_{12}^- (a_{22}^+ b_1^+ - a_{12}^+ b_2^+), \\ b &= a_{12}^+ b_1^- - a_{12}^- b_1^+. \end{aligned}$$

2.1 Sistemas de Filippov

A análise feita até agora foi limitada à uma análise do comportamento do sistema em uma das zonas. Mas, em um sistema diferencial por partes, é interessante também entender o que acontece com o sistema na interface entre as duas zonas, nesse caso, em $\Sigma = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Para isso usamos a convenção de Filippov.

Sejam X e Y campos de vetores definidos em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$, com $\bar{0} \in U$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^k com 0 como ponto

regular. Assim a subvariedade $\Sigma = f^{-1}(0)$ divide o campo U em duas regiões $\Sigma^+ = \{x \in U : f(x) > 0\}$ e $\Sigma^- = \{x \in U : f(x) < 0\}$. Então definimos um sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$ da seguinte maneira:

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & \text{se } x \in \Sigma^+ \\ Y(x), & \text{se } x \in \Sigma^- \end{cases} \quad (4)$$

Seja p ponto de U . Se $p \in \Sigma^\pm$, a trajetória é dada de forma usual pelos campos X e Y ; caso $p \in \Sigma$, precisamos dividir em casos, dependendo da direção dos campos vetoriais.

Definição 2. *Seja $p \in \Sigma$. A derivada de Lie de f com respeito ao campo X no ponto p , denotada por $Xf(p)$, é dada por $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$. Assim podemos classificar Σ a partir da direção em que os campos apontam:*

- Região de Costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$
- Região de Deslize: $\Sigma^d = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) > 0\}$
- Região de Escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0\}$

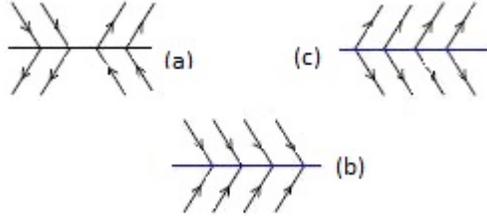


Figura 1: Esquema de campos (a) de costura, (b) de deslize e (c) de escape. Obtido de [1].

Se $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$, diz-se que o ponto p é um ponto de tangência (os pontos de tangência nas fronteiras de Σ^c , Σ^s e Σ^e são denotados, respectivamente, por $\partial\Sigma^c$, $\partial\Sigma^s$ e $\partial\Sigma^e$). Assuma que os pontos de tangência estão isolados.

A trajetória que passa por p é dada pela convenção de Filippov, com o campo vetorial deslizante

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p) \cdot X(p) - Xf(p) \cdot Y(p)) \quad (5)$$

Definição 3. *As singularidades do sistema de Filippov são as seguintes:*

1. Os pontos de equilíbrio de X ou Y em Σ^\pm (ou seja, os pontos $p \in \Sigma^\pm$ que satisfazem $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$)
2. Os pontos de pseudo-equilíbrio em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ (ou seja, os $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tais que $Z^s(p) = 0$)
3. Os pontos de tangência de Z (ou seja, os pontos p tais que $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$)

Essas singularidades ainda podem ser classificadas entre singularidades distinguidas (pontos p tais que $\gamma(p) = \{p\}$) e não distinguidas (pontos $p \in \Sigma$ que são pontos de tangência regular e cujas órbitas são homeomorfas a \mathbb{R}).

3 A construção numérica de ciclos limites

Os resultados mostrados acima se referem a EDSP com duas zonas. Esses resultados são bem estabelecidos e existem vários artigos, como [4], sobre a dinâmica em tais sistemas e a existência de ciclos limites, por exemplo.

Contudo, casos mais complexos - com mais zonas (como o abordado nessa trabalho) ou com mais dimensões (o caso 3D, por exemplo, que não foi abordado nesse trabalho) - são de interesse maior, pois há uma aplicabilidade maior e há mais resultados ainda a serem provados.

Considere um sistema de equações suaves por partes com 4 zonas: em cada um dos quatro quadrantes canônicos do plano, o i -ésimo campo suave é definido pela solução $F_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x_i(t), y_i(t))$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_i = P(x_i, y_i), \\ \dot{y}_i = Q(x_i, y_i), \end{cases}$$

com $i = 1, 2, 3, 4$, onde P e Q são polinômios de grau 1.

Para facilitar a análise consideramos que $F_i(0) = (q_i, 0)$ ou $F_i(0) = (0, q_i)$, isto é, os pontos iniciais dos campos se encontram em um dos 4 semieixos reais. Se $F_i(0) = (q_i, 0)$, defina o tempo de voo t_i como o menor valor real positivo tal que $F_i(t_i) = (0, q_j)$, onde $j = i + 1$ se $1 \leq i \leq 3$ e $j = 1$ se $i = 4$. Reciprocamente, se $F_i(0) = (0, q_i(t))$, t_i é o menor valor real positivo tal que $F_i(t_i) = (q_j, 0)$.

Note que os tempos de voo dependem intensamente do sistema considerado e do ponto inicial tomado. Dessa forma, tratar o problema generalizado é uma tarefa complicada. Por isso, ao buscar ciclos limites, uma estratégia é fazer uma abordagem primeiramente numérica e, então, usar ferramentas teóricas para verificar se os ciclos encontrados são ciclos limites. Nessa

seção exploramos a abordagem numérica. Na próxima, introduzimos uma ferramenta teórica que é capaz de confirmar ou negar a existência de ciclos limites no sistema.

Para construir ciclos limites, precisamos primeiramente achar curvas periódicas $\Gamma = F_1([0, t_1]) \cup F_2([t_1, t_2]) \cup F_3([t_2, t_3]) \cup F_4([t_3, t_4])$ tais que:

1. Γ é contínua
2. $F_i(t_i) = F_{i+1}(0) \forall 1 \leq i \leq 3$ e $F_4(t_4) = F_1(0)$

Construímos a curva do seguinte modo, considerando que $q_1 \in \Sigma_{41} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ é o ponto inicial:

- Definimos os campos F_1, F_2 e F_3
- Partindo de q_1 , resolvemos F_1 , de modo a achar q_2
- Partindo de q_2 , resolvemos F_2 , de modo a achar q_3
- Partindo de q_3 , resolvemos F_3 , de modo a achar q_4
- Construímos o campo linear F_4 de modo que $F_4(0) = q_4$ e $F_4(t_4) = q_1$

Construímos a seguir ciclos em três situações: com 1 foco na origem, 2 focos na origem e 2 focos virtuais (fora da origem).

3.1 1 foco e 3 campos lineares

Seja $q_1 = 0.977$ e considere o campo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{4}{25}x_1(t) - 0.28876y_1(t) \\ \dot{y}_1 = 0.28876x_1(t) + \frac{4}{25}y_1(t) \end{cases}$$

A solução desse campo é dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = 0.977e^{\frac{4}{25}t} \cos(0.28876t) \\ y_1(t) = 0.977e^{\frac{4}{25}t} \sin(0.28876t) \end{cases}$$

Usando o *Mathematica*, obtemos que

$$x_1(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = 5.4398 \Rightarrow q_2 = y_1(t_1) = 2.33287$$

Definindo o segundo campo como $\dot{x}_2 = -0.79593, \dot{y}_2 = -1$ temos que $x_2(t) = -0.79593t, y_2(t) = 2.33287 - t$. Então $y_2(t_2) = 0 \Rightarrow t_2 = 2.33331 \Rightarrow q_3 = x_2(t_2) = -1.85715$

No terceiro quadrante temos que $\dot{x}_3 = 1, \dot{y}_3 = -1$. Usando o Mathematica, obtemos que $x_3(t) = -1.85715t, y_3(t) = -t$. Então $x_3(t_3) = 0 \Rightarrow t_3 = 1.85715$. Portanto, $q_4 = y_3(t_3) = -1.85715$

Agora, o quarto campo deve ser da forma $\begin{cases} \dot{x}_4 = \alpha_4 \\ \dot{y}_4 = \beta_4 \end{cases}$ onde α_4 e β_4 devem satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_4(t) = \alpha_4 t \\ y_4(t) = \beta_4 t + q_4 \\ x_4(t_4) = q_1 \end{cases}$$

Escolhendo $\beta_4 = 3/2$, obtemos que $\alpha_4 = 0.78926$.

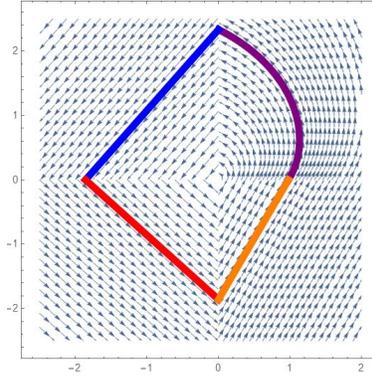


Figura 2: Curva obtida com o Mathematica para 1 foco centrado na origem e 3 campos lineares.

3.2 2 focos e 2 campos lineares

Novamente tome $q_1 = 0.977$. Definimos os três primeiros campos da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{4}{25}x_1(t) - 0.28876y_1(t) \\ \dot{y}_1 = 0.28876x_1(t) + \frac{4}{25}y_1(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -0.79593 \\ \dot{y}_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_3 = -\frac{4}{25}x_3(t) - y_3(t) \\ \dot{y}_3 = x_3(t) - \frac{4}{25}y_3(t) \end{cases}$$

A solução desses campos (como visto na seção anterior) são dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = 0.977e^{0.16t} \cos(0.28876t) \\ y_1(t) = 0.97718e^{0.16t} \sin(0.28876t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -0.79593t & x_3(t) = -1.85680e^{-0.16t} \cos(t) \\ y_2(t) = 2.33287 - t & y_3(t) = -1.85715e^{-0.16t} \sin(t) \end{cases}$$

onde temos que os tempos são $t_1 = 5.4398$, $t_2 = 2.33287$ e $t_3 = 1.57079$ e os pontos de tangência são dados por $q_2 = 2.33287$, $q_3 = -1.85680$ e $q_4 = -1.44416$. Resolvendo para obter o quarto campo, obtemos que se $\beta_4 = 3/2$ então $\alpha_4 = 1.01478$ (de fato, temos que $x_4(t_4) = 0.977 = q_1$ com $t_4 = 0.96277$). Logo obtivemos um quarto ciclo.

Note que podemos facilmente produzir um segundo ciclo. Basta tomar um $q'_1 \neq q_1$ e refazer as contas. Note que, como os campos permanecem os mesmos, os únicos valores que se alteram são os q_i e os t_i . Assim podemos calcular que

$$q'_1 = 2 \Rightarrow q'_2 = 4.77558 \Rightarrow q'_3 = -3.80102 \Rightarrow q'_4 = -2.95631$$

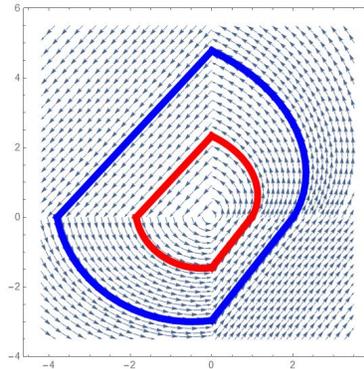


Figura 3: Curvas obtidas com o *Mathematica* no caso de dois focos centrados na origem e dois campos lineares.

3.3 2 focos fora da origem e 2 campos lineares

Nos exemplos anteriores, onde o foco estava na origem, uma vez conhecida a forma do campo, bastava usar o comando *Solve* do Mathematica para obter os t_i . Contudo, se o foco está fora da origem, isso não é possível.

Nesse caso, precisamos encontrar um intervalo finito I onde existem $t_n, t_m \in I$ tais que $z(t_m) < 0 < z(t_n)$ (com $z(t) = x(t)$ ou $z(t) = y(t)$),

dependendo do quadrante analisado). Daí podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de um zero da função z nesse intervalo.

Assim, operamos da seguinte forma nesse segundo caso: usando o comando *ParametricPlot* conseguimos o gráfico da função $z(t)$ para um intervalo qualquer. Escolhemos então um intervalo de tamanho $\leq 10^{-3}$ que graficamente tem um zero da função. Como não conseguimos calcular com exatidão esse zero, escolhemos um ponto arbitrário \bar{t} nesse intervalo tal que $|x(\bar{t}) - 0| \leq 10^{-5}$

Seja $q_1 = 2$ e seja o campo

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -\frac{1}{2}x_4(t) + 0.45y_4(t) - 1 \\ \dot{y}_4 = -0.45x_4(t) - \frac{1}{2}y_4(t) - 2 \end{cases}$$

A solução desse campo é dada por

$$\begin{cases} x_4(t) = -3.09392 + 5.09392e^{-0.5t} \cos(0.45t) + 1.21547e^{-0.5t} \sin(0.45t) \\ y_4(t) = -1.21547 + 1.21547e^{-0.5t} \cos(0.45t) - 5.09392e^{-0.5t} \sin(0.45t) \end{cases}$$

Note que $x_4(1.0045) = 0.00043$ e $x_4(1.005) = -0.00050$. Então pelo TVI existe $\bar{t} \in (1.0045, 1.005)$ tal que $x_1(\bar{t}) = 0$. Como não é possível achá-lo exatamente, encontraremos uma aproximação próxima o suficiente. De fato, tome $t_4 = 1.00473$ pois $x_4(1.00475) = -0.0000018 \Rightarrow |x_4(1.00475) - 0| \leq 10^{-5}$. Dessa forma obtemos $q_4 = y_4(t_4) = -1.9005$

Definimos o campo no terceiro quadrante por $\dot{x}_3 = -3/2, \dot{y}_3 = 3/2$, cuja solução é $\begin{cases} x_3(t) = -1.5t \\ y_3(t) = 1.5(-1.267 + t) \end{cases}$. Logo $y_3(t_3) = 0 \Rightarrow t_3 = 1.267 \Rightarrow q_3 = -1.9005$

No segundo quadrante temos o campo definido por

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_2(t) + 2y_2(t) + 1 \\ \dot{y}_2 = -2x_2(t) + \frac{1}{2}y_2(t) + 3 \end{cases}$$

Logo

$$\begin{cases} x_2(t) = 1.29412 - 3.19462e^{t/2} \cos(2t) + 1.64706e^{t/2} \cos t \sin t \\ y_2(t) = -0.823529 + 0.823529e^{t/2} \cos(2t) + 6.38924e^{t/2} \cos t \sin t \end{cases}$$

Tem-se que $x_2(0.5043) = -0.00054$ e $x_2(0.5045) = 0.00096$, logo podemos escolher $t_2 = 0.50437$ pois $x(t_2) = 0.0000014 \Rightarrow |x(t_2) - 0| \leq 10^{-5}$. Portanto $q_2 = y_2(t_2) = 3.21976$

Agora, construímos campo linear no primeiro quadrante como nos casos anteriores, de modo a garantir a periodicidade da curva:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.621165 \\ \dot{y}_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 0.621165t \\ y_1(t) = 3.21976 - t \end{cases} \Rightarrow t_1 = 3.21976 \Rightarrow x(t_1) = 2 = q_1$$

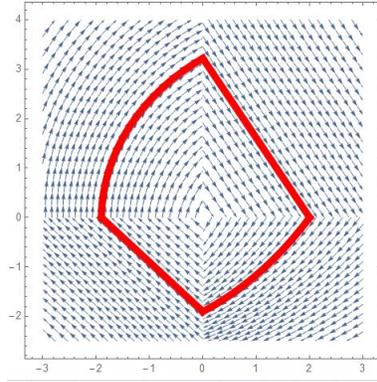


Figura 4: Curva obtida com o *Mathematica* para 2 focos virtuais e 2 campos lineares.

3.4 Discussão

Observe que o processo do segundo exemplo poderia ser repetido infinitas vezes e poderíamos obter infinitos ciclos, o que obviamente não é possível. Logo temos algum problema com nossos cálculos. Isso se deve ao erro computacional associado ao cálculo dos t_i e dos t'_i . Apesar de esses números terem sido calculados com uma precisão de 10^{-20} (só apresentamos os primeiros cinco dígitos nos exemplos), o erro ainda existe. Isso fica claro no terceiro exemplo, em que foi necessário fazer aproximações para os t_i , pois é numericamente impossível de encontrar seus valores exatos.

Observação: Podemos verificar que a curva definida não é ciclo (muito menos ciclo limite). Note que se a curva fosse de fato um ciclo, ela seria contínua, ou seja, nos quadrantes pares as retas seriam paralelas. Ou seja, ter-se-ia que $|q'_2 - q_2| = |q'_3 - q_3|$ e que $|q'_4 - q_4| = |q'_1 - q_1|$. Todavia, temos que $|q'_2 - q_2| = 2.44271 \neq 1.94422 = |q'_3 - q_3|$ e que $|q'_4 - q_4| = 1.51215 \neq 1.023 = |q'_1 - q_1|$

Note também que o algoritmo usado para produzir um segundo ciclo no caso homogêneo não é extensível ao caso não homogêneo. Ou seja, uma

vez que determinamos os campos que produzem um ciclo, não conseguimos computacionalmente usar os mesmos campos para produzir um segundo ciclo (a segunda curva não será fechada).

4 O teorema de Newton-Kantorovich

Teorema 2. (*Newton-Kantorovich*) *Seja uma função $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e seja um convexo $C_0 \subset C$. Suponha que f é de classe \mathbb{C}^1 em C_0 e que existem α, β e γ tais que:*

- a) $|Df(z) - Df(z_0)| \leq \gamma |z - z_0| \forall z, z_0 \in C_0$
- b) $|Df(z_0)^{-1}f(z_0)| \leq \alpha$ para algum $z_0 \in C_0$
- c) $|Df(z_0)^{-1}| \leq \beta$ para algum $z_0 \in C_0$

Considere $h = \alpha\beta\gamma$ e as raízes $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2h}}{h}\alpha$. Se $h \leq 1/2$ e se $\overline{B_{r_1}(z_0)} \subset C_0$, então a sequência (z_k) , definida por $z_{k+1} = z_k - Df(z_k)^{-1}f(z_k) \forall k \geq 0$, está contida em $B_{r_1}(z_0)$ e converge para o único zero de f contido em $C_0 \cap B_{r_2}(z_0)$

A referência usada nessa seção foi [4]. Tomando o sistema usado, explicaremos o algoritmo usado para encontrar as constantes α, β e γ do Teorema de Newton-Kantorovich, mostrando que o sistema admite três ciclos limite. Ao final da seção, apresentamos parte do código usado para fazer tais cálculos. Observamos que os valores dados em [4] e os valores apresentados nesse arquivo diferem devido ao número de casas usado depois da vírgula. Nesse trabalho, usamos só 20 casas após a vírgula, ocasionando um valor ligeiramente menor/maior para as constantes.

Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} A^+x, & \text{se } x \geq 1 \\ A^-x, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (6)$$

onde

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{19}{500} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{19}{500} \end{pmatrix} \text{ e } A^- = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ \frac{377}{1000} & -\frac{13}{10} \end{pmatrix}$$

Se (6) tem solução $(x^+(t), y^+(t))$ se $x \geq 1$ e $(x^-(t), y^-(t))$ se $x < 1$ e se o ponto inicial é $(1, Y)$, então as soluções de (6) são dadas por

$$x^+(t) = e^{19t/50} (\cos t - Y \sin t)$$

$$\begin{aligned}
y^+(t) &= e^{19t/50} (Y \cos t + \sin t) \\
x^-(t) &= \frac{1}{15} e^{-t/5} (15 \cos t - 100Y \sin t + 23 \sin t) \\
y^-(t) &= \frac{1}{750} e^{-t/5} (750Y \cos t - 1150Y \sin t + 377 \sin t)
\end{aligned}$$

Considere os menores $t^+ > 0$ e $t^- > 0$ tais que $x^+(-t^+) = 1 = x^-(t^-)$. Então uma solução periódica de (6) é dada por uma solução (t^+, t^-, Y) do sistema

$$\begin{cases}
f_1(t^+, t^-, Y) = x^+(-t^+) - 1 = 0 \\
f_2(t^+, t^-, Y) = x^-(t^-) - 1 = 0 \\
f_3(t^+, t^-, Y) = y^+(-t^+) - y^-(t^-) = 0
\end{cases} \quad (7)$$

Afirmção 1. *As três soluções do sistema (7) são dadas aproximadamente*

$$\begin{aligned}
&t_1^+ = 1.48663 \quad t_2^+ = 0.85668 \quad t_3^+ = 0.39178 \\
\text{por: } &t_1^- = 3.45108 \quad , \quad t_2^- = 3.78234 \quad e \quad t_3^- = 4.66507 \\
&Y_1 = 1.68119 \quad Y_2 = 0.96580 \quad Y_3 = 0.61885
\end{aligned}$$

Denote a norma infinita por $|\cdot|_\infty$. Ela é definida por $|(z_1, z_2, z_3)|_\infty = \max_i |z_i|$. Ainda, se $A = (a_{ij})$ é matriz $n \times n$, definimos $|A|_\infty = \max_i \{\sum_j |a_{ij}|\}$

Logo, tomando $z = (z_1, z_2, z_3)$ e $z' = (z'_1, z'_2, z'_3)$, temos que

$$\begin{aligned}
|g(z) - g(z')| &\leq |g((z_1, z_2, z_3)) - g((z'_1, z_2, z_3))| + |g((z'_1, z_2, z_3)) - g((z'_1, z'_2, z_3))| \\
&+ |g((z'_1, z'_2, z_3)) - g((z'_1, z'_2, z'_3))| \leq \left[\frac{\partial g}{\partial z_1} \right] |z_1 - z'_1| + \left[\frac{\partial g}{\partial z_2} \right] |z_2 - z'_2| + \left[\frac{\partial g}{\partial z_3} \right] |z_3 - z'_3| \\
&\leq 3 \max \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial z_1} \right], \left[\frac{\partial g}{\partial z_2} \right], \left[\frac{\partial g}{\partial z_3} \right] \right\} |z - z'|_\infty
\end{aligned}$$

onde $\left[\frac{\partial g}{\partial z_k} \right] = \max_k \left| \frac{\partial g}{\partial z_k} \right|$

Logo temos que $|Df(z) - Df(z')| \leq 9 \max_{1 \leq i, j, k \leq 3} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k} \right] |z - z'|_\infty$

Avaliemos as segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial(t^+)^2} = \frac{1}{2500}e^{-\frac{19}{50}t^+} [-(2139 + 1900Y) \cos t^+ + (1900 - 2139Y) \sin t^+]$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial Y \partial t^+} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^+ \partial Y} = e^{-\frac{19}{50}t^+} (\cos t^+ - \frac{19}{50} \sin t^+)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial(t^-)^2} = \frac{1}{375}e^{-t^-/5} [10(100Y - 59) \cos t^- + 6(400Y - 67) \sin t^-]$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^- \partial Y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial Y \partial t^-} = \frac{4}{3}e^{-t^-/5} (-5 \cos t^- + \sin t^-)$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial(t^+)^2} = \frac{1}{2500}e^{-\frac{19}{50}t^+} [(1900 - 2139Y) \cos t^+ + (2139 + 1900Y) \sin t^+]$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^+ \partial Y} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial Y \partial t^+} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial Y \partial t^+} = \frac{1}{50}e^{-\frac{19}{50}t^+} (-19 \cos t^+ - 50 \sin t^+)$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial(t^-)^2} = \frac{13}{9375}e^{-t^-/5} [(145 + 250Y) \cos t^- + (348 - 1350Y) \sin t^-]$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^- \partial Y} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial Y \partial t^-} = \frac{26}{75}e^{-t^-/5} (5 \cos t^- + 2 \sin t^-)$$

Como as funções seno e cosseno são limitadas, podemos obter o valor máximo para essas derivadas segundas:

$$\begin{array}{ll} \left| \frac{\partial^2 f_1}{\partial(t^+)^2} \right| \leq \frac{4039}{2500}e^{-19t^+/50}(1 + Y) & \left| \frac{\partial^2 f_1}{\partial Y \partial t^+} \right| \leq \frac{69}{50}e^{-19t^+/50} \\ \left| \frac{\partial^2 f_2}{\partial(t^-)^2} \right| \leq \frac{8}{375}e^{-t^-/5}(425Y + 124) & \left| \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^- \partial Y} \right| \leq 8e^{-t^-/5} \\ \left| \frac{\partial^2 f_3}{\partial(t^+)^2} \right| \leq \frac{4039}{2500}e^{-19t^+/50}(1 + Y) & \left| \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^+ \partial Y} \right| \leq \frac{69}{50}e^{-19t^+/50} \\ \left| \frac{\partial^2 f_3}{\partial(t^-)^2} \right| \leq \frac{13}{9375}e^{-t^-/5}(1600Y + 493) & \left| \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^- \partial Y} \right| \leq \frac{182}{75}e^{-t^-/5} \end{array}$$

Corolário 1. *O primeiro ciclo limite acontece na solução (t_1^+, t_1^-, Y_1) de (7) e as constantes do Teorema de Newton-Kantorovich são dadas por $\alpha = 3 \cdot 10^{-13}$, $\beta = 39$ e $\gamma = 82$.*

Encontrar γ

Lembre que temos que

$$|Df(z) - Df(z')| \leq 9 \max_{1 \leq i, j, k \leq 3} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k} \right] |z - z'|_\infty$$

Como já temos as derivadas, basta avaliar o máximo das derivadas segundas em (t_1^+, t_1^-, Y_1) . Usando o *Mathematica* obtemos que

$$\max \left\{ \frac{4039}{2500}e^{-19t_1^+/50}(1 + Y_1), \frac{69}{50}e^{-19t_1^+/50}, \frac{8}{375}e^{-t_1^-/5}(425Y_1 + 124), 8e^{-t_1^-/5}, \frac{13}{9375}e^{-t_1^-/5}(1600Y_1 + 493), \frac{182}{75}e^{-t_1^-/5} \right\} \cong 8.9703309985$$

Então $\gamma \geq 9 \times 8.9703309985 \cong 80.7329789$. Tome então $\gamma = 82 > 80.7$

Encontrar β

Seja $A = Df(z')$ o jacobiano de f avaliado em $z' = (z'_1, z'_2, z'_3)$, i.e., $a_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial z'_i}$,

onde $z_1 = t_1^+$, $z_2 = t_1^-$ e $z_3 = Y_1$. Usando o *Mathematica* novamente, obte-

mos que $Df(z') = \begin{bmatrix} -0.8660616491 & 0 & 0.5663933917 \\ 0 & 4.573744328 & 1.018224703 \\ -0.8152965733 & -1.345173525 & 0.2912329573 \end{bmatrix}$

Precisamos agora do seguinte resultado:

Lema 1. *Seja A matriz $n \times n$ e B uma aproximação de A^{-1} . Então se $|\cdot|$ é norma, temos que $|A^{-1}| = \frac{1}{1 - |Id - AB|}$*

O *Mathematica* nos dá que

$$A^{-1} \simeq B = \begin{bmatrix} -11.86035595 & 3.344682044 & 11.37230271 \\ 3.644329161 & -0.9199241438 & -3.871246153 \\ -16.36989338 & 5.114291391 & 17.38917753 \end{bmatrix}$$

Agora podemos calcular as normas dessas matrizes:

$$|Id - Df(z')B|_\infty = 1.10^{-8} \text{ e } |B|_\infty = 38.87336230$$

Daqui já podemos obter $\beta = 39 > 38.87$

Encontrar α

Agora, pelo Lema, temos que $|A^{-1}|_\infty = \frac{|B|_\infty}{1 - |Id - Df(z')B|} \cong 38.873362$.

Ainda, avaliando $f = (f_1, f_2, f_3)$ no ponto z' obtemos que

$$f(z') = \begin{pmatrix} -5.265699946 \cdot 10^{-17} \\ 6.242539313 \cdot 10^{-15} \\ -1.551969678 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Daí $|f(z')|_\infty = 6.242539313 \cdot 10^{-15}$. Agora estamos em condição de calcular α . Como $\alpha \geq |Df(z')^{-1}f(z')|_\infty = |Df(z')^{-1}|_\infty |f(z')|_\infty \cong 2.42668 \cdot 10^{-13}$ Logo tome $\alpha = 3 \cdot 10^{-13}$

Corolário 2. *O segundo ciclo limite acontece na solução (t_2^+, t_2^-, Y_2) de (7) e as constantes do Teorema de Newton-Kantorovich são dadas por $\alpha = 9 \cdot 10^{-14}$, $\beta = 57$ e $\gamma = 49$.*

Encontrar γ

Usando o *Mathematica* obtemos que

$$\max \left\{ \frac{4039}{2500} e^{-19t_2^+/50} (1 + Y_2), \frac{69}{50} e^{-19t_2^+/50}, \frac{8}{375} e^{-t_2^-/5} (425Y_2 + 124), 8e^{-t_2^-/5}, \right. \\ \left. \frac{13}{9375} e^{-t_2^-/5} (1600Y_2 + 493), \frac{182}{75} e^{-t_2^-/5} \right\} \cong 5.3511603428$$

Então temos que

$$|Df(z) - Df(z')| \leq 9 \max_{1 \leq i, j, k \leq 3} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k} \right] |z - z'|_\infty \cong 48.1604430859$$

Podemos então tomar $\gamma = 49$

Encontrar β

Seja A o jacobiano de f avaliado em $z' = (z'_1, z'_2, z'_3)$, onde $z_1 = t_2^+$, $z_2 = t_2^-$ e $z_3 = Y_2$. Usando o *Mathematica* novamente, obtemos que

$$A = Df(z') = \begin{bmatrix} -0.4689140809 & 0 & 0.5457008776 \\ 0 & 1.926093873 & 1.870387065 \\ -0.9662126492 & -0.6567844070 & 0.4190036791 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} \simeq B = \begin{bmatrix} 33.31814475 & -5.866662995 & -17.20464665 \\ -29.58134148 & 5.414536130 & 14.35616431 \\ 30.46237949 & -5.041151663 & -14.78374217 \end{bmatrix}$$

Agora podemos calcular as normas dessas matrizes: $|Id - Df(z')B|_\infty = 1.10^{-8}$ e $|B|_\infty = 56.38945440$. Daqui podemos obter $\beta = 57$

Encontrar α

Pelo Lema, temos que $|A^{-1}|_\infty = \frac{|B|_\infty}{1 - |Id - Df(z')B|} \cong 56.38945$. Ainda, avaliando $f = (f_1, f_2, f_3)$ no ponto z' obtemos que

$$f(z') = \begin{pmatrix} -2.489 \cdot 10^{-25} \\ -1.49435 \cdot 10^{-15} \\ 5.09563 \cdot 10^{-16} \end{pmatrix}$$

Daí $|f(z')|_\infty = 1.49435 \cdot 10^{-15}$. Portanto, como $\alpha \geq |Df(z')^{-1}f(z')|_\infty = |Df(z')^{-1}|_\infty |f(z')|_\infty \cong 8.42658 \cdot 10^{-14}$, tome $\alpha = 9 \cdot 10^{-14}$

Corolário 3. *O terceiro ciclo limite acontece na solução (t_3^+, t_3^-, Y_3) de (7) e as constantes do Teorema de Newton-Kantorovich são dadas por $\alpha = 1 \cdot 10^{-13}$, $\beta = 73$ e $\gamma = 69$.*

Encontrar γ

Usando o *Mathematica* obtemos que

$$\max \left\{ \frac{4039}{2500} e^{-19t_3^+/50} (1 + Y_3), \frac{69}{50} e^{-19t_3^+/50}, \frac{8}{375} e^{-t_3^-/5} (425Y_3 + 124), 8e^{-t_3^-/5}, \right. \\ \left. \frac{13}{9375} e^{-t_3^-/5} (1600Y_3 + 493), \frac{182}{75} e^{-t_3^-/5} \right\} \cong 3.2477398154$$

Então temos que

$$|Df(z) - Df(z')| \leq 9 \max_{1 \leq i, j, k \leq 3} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k} \right] |z - z'|_\infty \cong 29.2296583387$$

Note que todo número maior que 29.229 satisfaz a condição do Teorema sobre γ . Então, posso tomar $\gamma = 69$

Encontrar β

Seja A o jacobiano de f avaliado em $z' = (z'_1, z'_2, z'_3)$, onde $z_1 = t_3^+$, $z_2 = t_3^-$ e $z_3 = Y_3$. Usando o *Mathematica* novamente, obtemos que

$$A = Df(z') = \begin{bmatrix} -0.2161737724 & 0 & 0.3290197836 \\ 0 & 0.2411584825 & 2.619505639 \\ -1.062253966 & -0.2187012054 & 0.2125041179 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \simeq B = \begin{bmatrix} -12.32584827 & 1.421054146 & 1.566974725 \\ 54.95220656 & -5.994994395 & -11.18303736 \\ -5.059042648 & 0.9336661524 & 1.029539421 \end{bmatrix}$$

Agora podemos calcular as normas dessas matrizes: $|Id - Df(z')B|_\infty = 1.10^{-9}$ e $|B|_\infty = 72.13023831$. Daqui podemos obter $\beta = 73$

Encontrar α

Pelo Lema, temos que $|A^{-1}|_\infty = \frac{|B|_\infty}{1 - |Id - Df(z')B|} \cong 72.130238$. Ainda, avaliando $f = (f_1, f_2, f_3)$ no ponto z' obtemos que

$$f(z') = \begin{pmatrix} -3.269331961 \cdot 10^{-18} \\ 1.358020836 \cdot 10^{-15} \\ -1.262991230 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Logo $|f(z')|_\infty = 1.358020836 \cdot 10^{-15}$. Portanto, como $\alpha \geq |Df(z')^{-1}f(z')|_\infty = |Df(z')^{-1}|_\infty |f(z')|_\infty \cong 9.79544 \cdot 10^{-14}$, podemos tomar $\alpha = 1.10^{-13}$

4.1 Códigos usados

Observação: As funções xu , yu , xd , yd abaixo representam, respectivamente, as funções x^+ , y^+ , x^- , y^- usadas acima. Do mesmo modo, os valores t^+ , t^- dados pela Afirmação 1 foram incorporadas no código como tu , td

- Definição das funções usadas

```
xu[t_] := Exp[(19/50)*t]*(Cos[t] - (Y*Sin[t]))
yu[t_] := Exp[(19/50)*t]*(Sin[t] + (Y*Cos[t]))
xd[t_] := (1/15)*Exp[-t/5]*((15*Cos[t]) - (100*Y*Sin[t]) + (23*Sin[t]))
yd[t_] := (1/750)*Exp[-t/5]*((750*Y*Cos[t]) - (1150*Y*Sin[t]) + (377*Sin[t]))
f1 = xu[-tu] - 1
f2 = xd[td] - 1
f3 = yu[-tu] - yd[td]
```

- Definição das segundas derivadas

```
D2f1Dtu2[tu_, td_, Y_] := (4039/2500)*Exp[(-19/50)*tu]*(Y + 1)
D2f1DtuDty[tu_, td_, Y_] := (69/50)*Exp[(-19/50)*tu]
D2f2Dtd2[tu_, td_, Y_] := (8/375)*Exp[-td/5]*((425*Y) + 124)
D2f2DtdDY[tu_, td_, Y_] := 8*Exp[-td/5]
D2f3Dtu2[tu_, td_, Y_] := (4039/2500)*Exp[(-19/50)*tu]*(Y + 1)
D2f3DtuDY[tu_, td_, Y_] := (69/50)*Exp[(-19/50)*tu]
D2f3Dtd2[tu_, td_, Y_] := (13/9375)*Exp[-td/5]*((1600*Y) + 493)
D2f3DtdDY[tu_, td_, Y_] := (182/75)*Exp[-td/5]
```

- Calcular o valor mínimo de γ

```
9*Max[D2f1Dtu2[tu, td, Y], D2f1DtuDty[tu, td, Y],
D2f2Dtd2[tu, td, Y], D2f2DtdDY[tu, td, Y],
D2f3Dtu2[tu, td, Y], D2f3DtuDY[tu, td, Y],
D2f3Dtd2[tu, td, Y], D2f3DtdDY[tu, td, Y]]
```

- Calcular jacobiano

```
N[{{e^(-19 tu/50) (Y Cos[tu] - Sin[tu]) - 19/50 e^(-19 tu/50)
(Cos[tu] + Y Sin[tu]), 0, e^(-19 tu/50) Sin[tu]},
{0, 1/15 e^(-td/5) (23 Cos[td] - 100 Y Cos[td] - 15 Sin[td])}
```

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{75} e^{-(td/5)} (15 \cos[td] + 23 \sin[td] - 100 Y \sin[td]), \\
& -(20/3) e^{-(td/5)} \sin[td] \}, \{ -(19/50) E^{(-19 tu/50)} (Y \cos[tu] \\
& - \sin[tu]) + e^{(-19 tu/50)} (-\cos[tu] - Y \sin[tu]), (e^{-(td/5)} \\
& (750 Y \cos[td] + 377 \sin[td] - 1150 Y \sin[td]))/3750 \\
& - \frac{1}{750} e^{-(td/5)} (377 \cos[td] - 1150 Y \cos[td] - 750 Y \sin[td]), \\
& e^{(-19 tu/50)} \cos[tu] - \frac{1}{750} e^{-(td/5)} (750 \cos[td] - 1150 \sin[td]) \} \}
\end{aligned}$$

- Calcular o valor das funções f_1 , f_2 e f_3 em um ponto $z_0 = (t^+, t^-, Y)$
 $N[f_1, f_2, f_3]$

Referências

- [1] GOMIDE, O.M.L. *Ciclo limite em sistemas dinâmicos suaves e não suaves*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- [2] HIRSCH, M.W.; SMALE, S.; DEVANEY, R.L. *Differential equations, dynamical systems and introduction to chaos* 3 ed. Elsevier, 2013.
- [3] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems* 1 ed. New York: Springer Verlag, 1991.
- [4] LLIBRE, J., PONCE, E. *Three limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*. Dynamical Continuous and Discrete Systems. Ser. B, vol. 19, 325-335, 2012.
- [5] PONCE, E. *Bifurcation in piecewise linear systems: case studies - Notes of a minicourse held at IMECC, Campinas, São Paulo*. Campinas, 2014.