



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

**GISELLE CACURE PEDROSO**

**UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS E  
CURVAS CÚBICAS NO PLANO, E O  
APLICATIVO EASYMATH**

CAMPINAS

2015

# GISELLE CACURE PEDROSO

UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS E CURVAS CÚBICAS NO PLANO, E O  
APLICATIVO EASYMATH

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Professor Doutor Ricardo Miranda Martins

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO  
FINAL DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO  
ALUNO GISELLE CACURE PEDROSO E  
ORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO  
MIRANDA MARTINS



---

CAMPINAS

2015

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

P343e Pedroso, Giselle Cacure, 1981-  
Um estudo sobre cônicas e curvas cúbicas no plano, e o aplicativo EasyMath / Giselle Cacure Pedroso. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matrizes (Matemática). 2. Sistemas lineares. 3. Cônicas. 4. Transformação de coordenadas. I. Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** A study on conics and plane cubic curves, and the app EasyMath

**Palavras-chave em inglês:**

Matrices

Linear systems

Conics

Coordinate transformations

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestra

**Banca examinadora:**

Ricardo Miranda Martins [Orientador]

Sergio Antonio Tozoni

Mariana Rodrigues da Silveira

**Data de defesa:** 06-10-2015

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 06 de outubro de 2015 e  
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

---

**Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS**

---

**Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI**

---

**Prof(a). Dr(a). MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

A Deus que sempre me guiou e me deu essa oportunidade. A meus pais Ademir Cacure (*in memoriam*) e Abenilza Silva Cacure, tudo o que eu realizar nesta vida serei eternamente agradecida a eles. Ao meu marido Ronaldo Bolela Pedroso e minha filha Beatriz Neiva Cacure Pedroso, pelo amor, apoio e paciência que nunca faltaram em nosso lar.

Dedico também às pessoas que vão além do seu dever.

## **Agradecimentos**

A Deus que me deu essa oportunidade de estudar e concluir esse mestrado que para mim é a realização de um sonho.

Ao meu marido Ronaldo e minha filha Beatriz, que me deram o apoio fundamental na conclusão deste curso. Sem eles eu jamais conseguiria.

Aos meus pais Ademir (*in memoriam*) e Abenilza que nunca deixaram me faltar o amor, o carinho e os bons conselhos que procurei seguir para alcançar meus objetivos. Aos meus irmãos Fabíola e Leandro por sempre acreditarem em mim e me incentivarem.

A todos os professores deste curso que lecionaram com muito amor e competência, seus ensinamentos foram fundamentais para a edificação da minha formação, em especial agradeço ao Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins, pela orientação que me foi dada na elaboração deste projeto.

A todos os meus colegas de curso em especial a minha querida amiga Fabiana Tesine, pelos momentos difíceis e as conquistas que passamos juntas durante essa jornada.

Aos meus colegas de trabalho que me apoiaram e me incentivaram a concluir este curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido.

Aos meus alunos que me motivam todos os dias a ser professor neste país. É por eles também que busco ir mais além.

## **Resumo**

Neste trabalho apresentamos tópicos de Geometria Analítica no Plano. Iniciamos com uma revisão sobre álgebra linear e daí mostramos a classificação das curvas cônicas no plano, levando em conta translações e rotações. Apresentamos também o Teorema do Hexágono de Pascal e a classificação de Newton de Curvas Cúbicas no Plano. A aplicação didática deste trabalho é o desenvolvimento do aplicativo "EasyMath" para smartphones e tablets disponível no sistema Android que contém os assuntos abordados neste trabalho.

**Palavras chave:** matrizes, sistemas lineares, cônicas, mudança de coordenadas, equação geral das cônicas.

## **Abstract**

In this work we present some topics on analytic geometry. We start with a general revision on linear algebra, and then study the classification of conics on the plane, considering translations and rotations. We also present the Pascal Hexagon Theorem and the Newton Classification of plane cubic curves. As application, we developed an Android app with the main results and examples of these topics.

**Keywords:** matrices, linear systems, conics, cubic curves.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2-1: Representação de um número complexo no plano. ....	20
Figura 5-1: Lei dos cossenos. ....	44
Figura 6-1: Dois sistemas de coordenadas. ....	47
Figura 6-2: $OP = xi + yj + zk$ . ....	47
Figura 6-3: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas. ....	50
Figura 6-4: Rotação de um ângulo $\theta$ . ....	52
Figura 6-5: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação). ....	53
Figura 7-1: Elipse, conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$ . ....	57
Figura 7-2: Sistema ortogonal. ....	58
Figura 7-3: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ . ....	59
Figura 7-4: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ . ....	60
Figura 7-5: Elipse obtida seccionando-se um cone no plano. ....	60
Figura 7-6: Elipse de focos $F_1 = 0, -3$ e $F_2 = 0, 3$ e $a = 5$ . ....	61
Figura 7-7: Hipérbole, conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $ \text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)  = 2a$ . .....	61
Figura 7-8: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ . ....	63
Figura 7-9: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ . ....	64
Figura 7-10: Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano. ....	64
Figura 7-11: Hipérbole $9y^2 - 4x^2 = 36$ . ....	65
Figura 7-12: Parábola, conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$ . ....	65
Figura 7-13: Sistema ortogonal e os pontos $P = (x, y)$ , $F = (p, 0)$ e a reta $r: x = -p$ . ....	66
Figura 7-14: Sistema ortogonal e os pontos $P = (x, y)$ , $F = (0, p)$ e a reta $r: y = -p$ . ....	66
Figura 7-15: Parábola $y^2 = -4px$ . ....	67
Figura 7-16: Parábola $y = 14px^2$ . ....	67
Figura 7-17: Parábola $y = -14px^2$ . ....	67
Figura 7-18: Parábola obtida seccionando-se um cone. ....	68
Figura 7-19: Parábola $y^2 + 28x = 0$ . ....	68
Figura 8-1: Elipse de centro $O' = (x_0, y_0)$ e focos sobre uma reta paralela ao eixo x. ....	70
Figura 8-2: Elipse de centro $O' = (x_0, y_0)$ e focos sobre uma reta paralela ao eixo y. ....	71
Figura 8-3: Elipse $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 31 = 0$ . ....	72
Figura 8-4: Elipse $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$ . ....	73
Figura 8-5: Hipérbole de centro $O' = (x_0, y_0)$ e focos paralelos ao eixo x. ....	74

Figura 8-6: Hipérbole de centro $O' = (x_0, y_0)$ e focos paralelos ao eixo $y$ .	75
Figura 8-7: Hipérbole de focos $F_1 = (2,2)$ e $F_2 = (6,2)$ e vértice $A_1 = (3,2)$ .	76
Figura 8-8: Hipérbole $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$ .	77
Figura: 8-9 Parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo $x$ .	78
Figura 8-10: Parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo $y$ .	79
Figura 8-11: Parábola com vértice $V = (3,3)$ e foco $F = (5,3)$ .	80
Figura 8-12: Parábola $x^2 - 2x - 12y - 35 = 0$ .	80
Figura 9-1: Elipse de centro $O = (0,0)$ e cujos focos são oblíquos ao eixo $x$ .	81
Figura 9-2: Elipse de centro $O = (0,0)$ e cujos focos são oblíquos ao eixo $y$ .	82
Figura 9-3: Elipse $19x^2 - 4xy + 16y^2 = 300$ .	83
Figura 9-4: Elipse de focos $F_1 = (-2,2)$ e $F_2 = (2, -2)$ com centro na origem e que passa pelo ponto $P = (1,1)$ .	84
Figura 9-5: Hipérbole de centro $O = (0,0)$ e cujos focos são oblíquos ao eixo $x$ .	85
Figura 9-6: Hipérbole de centro $O = (0,0)$ e cujos focos são oblíquos ao eixo $y$ .	86
Figura 9-7: Hipérbole $44x^2 + 64xy - 4y^2 = 75$ .	87
Figura 9-8: Hipérbole $13x^2 + 12xy - 3y^2 - 90x - 30y = 0$ .	88
Parábola 9-9: Parábola com eixo de simetria oblíquo ao eixo $x$ .	89
Figura 9-10: Parábola cujo eixo de simetria é oblíquo ao eixo $y$ .	90
Figura 9-11: Parábola $4x^2 - 4xy - 40x - 80y = 0$ .	90
Figura 9-12: Parábola $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 200x - 150y + 625 = 0$ .	92
Figura 10-1: Sistema de coordenadas ortogonal.	94
Figura 10-2: Cônica determinada pelos pontos $P_1 = (2,5), P_2 = (2,2), P_3 = (5,3), P_4 = (6,4)$ e $P_5 = (6,2)$ .	98
Figura 11-1: Representação do Teorema do Hexágono de Pascal na Elipse.	100
Figura 11-2: Representação do Teorema do Hexágono de Pascal na Hipérbole.	100
Figura 11-3: Representação do Teorema do Hexágono de Pascal na Parábola.	101
Figura 11-4: Hexágono inscrito em uma cônica.	102
Figura 11-5: Hexágono de Pascal degenerado.	103
Figura 11-6: Quadrilátero inscrito em uma cônica.	104
Figura 11-7: Triângulo inscrito em uma cônica.	105
Figura 12-1: Curva de Agnesi $y^1 + x^2 = 1$ .	106
Figura 12-2: Cissóide de Diocles $y^2 - x = x^3$ .	107
Figura 12-3: Curva de Fermat para $n = 3$ $x^3 + y^3 = 1$ .	107

Figura 12-4: Folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .....	108
Figura 12-5: $y = x^3$ ( $D \leq 0$ ).....	108
Figura 12-6: $y = x^3 - x$ $D > 0$ . ....	108
Figura 12-7: $xy = x^3$ .....	109
Figura 12-8: $xy = x^3 + 1$ .....	109
Figura 12-9: $xy = x - 1x - 2(x - 3)$ .....	110
Figura 12-10: Curva $y^2 = x^3 + x$ . ....	111
Figura 12-11: Curva $y^2 = x^3$ .....	111
Figura 12-12: Curva $y^2 = x^3 - x$ . ....	111
Figura 12-13: Curva $y^2 = x^3 - x^2$ .....	111
Figura 12-14: Curva $y^2 = x^3 + x^2$ .....	112
Figura 12-15: $xy^2 + y = -x^3$ .....	114
Figura 12-16: $xy^2 + y = x^3$ .....	114
Figura 12-17: $xy^2 - y = 1$ .....	114
Figura 12-18: $xy^2 - 2,45y = x^3 - 5x^2 + 8,75x - 6,25$ . ....	114
Figura 12-19: $xy^2 - y = x^2 - 1$ .....	114
Figura 12-20: $xy^2 - y = x^3 + x^2 + x + 1$ . ....	115
Figura 12-21: $xy^2 + 1,73y = -x^3 + 2x^2 + 0,25x - 2$ . ....	115
Figura 12-22: $xy^2 + 8y = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ .....	115
Figura 12-23: $xy^2 + 2,45y = -x^3 - 5x^2 + 8,75x - 6,25$ .....	115
Figura 12-24: $xy^2 + 11y = x^3 - 10x^2 + 35x - 50$ .....	115
Figura 12-25: $xy^2 + 10y = x^3 - 10x^2 + 35x - 50$ (degenerado).....	116
Figura 12-26: $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - x + y = 0$ (degenerado). ....	116
Figura 13-1: Corpo celeste e a estrela $\alpha$ . ....	118
Figura 13-2: Estrela $\alpha$ e os cinco pontos.....	118
Figura 13-3: Órbita do corpo celeste. ....	121
Figura 13-4: Elipse e1. ....	123
Figura 13-5: Elipse e2. ....	124
Figura 13-6: Elipse e3. ....	125
Figura 13-7: Rotação de eixos, mudanças de coordenadas da elipse e1 para a elipse e2.....	125
Figura 13-8: Translação de eixos, mudanças de coordenadas da elipse e2 para a elipse e3. ....	126
Figura 13-9: Translação e rotação de eixos, mudanças de coordenadas da elipse e1 para a elipse e3.....	126

Figura 14-1: Visualização do EasyMath no dispositivo.....	129
Figura 14-2: Tela Inicial .....	130
Figura 14-3: Tela Sair.....	130
Figura 14-4: Menu Principal.....	131
Figura 14-5: Tela Elipse. ....	132
Figura 14-6: Tela Hipérbole. ....	132
Figura 14-7: Tela Parábola .....	132
Figura 14-8: Tela para obter o trabalho completo. ....	133

# Sumário

1	Introdução.....	16
2	Números .....	19
2.1	Números Complexos.....	19
2.2	Corpos.....	20
3	Matrizes e Sistemas Lineares .....	22
3.1	Histórias das Matrizes.....	22
3.2	Matrizes .....	23
3.2.1	Operações com Matrizes .....	24
3.2.2	Matrizes Transpostas .....	26
3.2.3	Traço de uma Matriz.....	26
3.2.4	Escalonamento de Matrizes e Posto de uma Matriz .....	26
3.2.5	Matrizes Invertíveis (Não Singulares).....	29
3.2.6	Determinantes .....	30
3.3	Tipos Especiais de Matrizes Quadradas .....	31
3.3.1	Matrizes Diagonais .....	32
3.3.2	Matrizes Triangulares .....	32
3.3.3	Matrizes Simétricas .....	33
3.3.4	Matrizes Ortogonais .....	34
3.3.5	Matrizes Normais .....	34
3.4	Sistemas Lineares .....	35
3.4.1	Resolução de Sistemas Lineares.....	35
4	Autovalores e Autovetores - Diagonalização .....	39
4.1	Matrizes Diagonalizáveis.....	39
4.2	Cálculo de Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes.....	41
5	Teorema Espectral para Matrizes Simétricas .....	43
5.1	Conclusão.....	46

6	Mudança de Coordenadas.....	47
6.1	Rotação e Translação .....	47
6.2	Rotação .....	52
6.3	Translação.....	53
6.4	Aplicação das translações e rotações em $\mathbb{R}^2$ ao estudo da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .....	54
7	Cônicas: descrição elementar e formas canônicas.....	57
7.1	Elipse .....	57
7.1.1	Equação da Elipse na forma reduzida.....	58
7.2	Hipérbole .....	61
7.2.1	Equação da Hipérbole na forma reduzida.....	62
7.3	Parábola .....	65
7.3.1	Equação da Parábola na forma reduzida.....	65
7.4	Caracterização das Cônicas.....	68
8	Classificação de Cônicas I: Translação .....	70
8.1	Elipse Transladada.....	70
8.2	Hipérbole Transladada.....	73
8.3	Parábola Transladada.....	77
9	Classificação de Cônicas II: Rotação .....	81
9.1	Elipse Rotacionada .....	81
9.2	Hipérbole Rotacionada .....	85
9.3	Parábola Rotacionada .....	89
10	Classificação de Cônicas III: Caso Geral .....	93
10.1	A cônica obtida por cinco pontos no plano.....	96
11	Teorema do Hexágono de Pascal.....	99
11.1	Consequências do Teorema de Pascal.....	101
11.1.1	Primeira Consequência: o pentágono inscrito em uma cônica.....	101

11.1.2	Segunda Consequência: o quadrilátero inscrito em uma cônica. ....	103
11.1.3	Terceira Consequência: o triângulo inscrito em uma cônica.....	104
12	Curvas Cúbicas no Plano: Classificação de Newton .....	106
13	Plano de aula.....	117
14	Recursos didáticos: Aplicação para Tablets e Smartphones .....	127
14.1	EasyMath: aplicativo para Tablets e Smartphones .....	128
14.2	Funcionalidade do Aplicativo “EasyMath”.....	129
15	Bibliografia.....	134

# Parte I

---

## 1 Introdução

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre Cônicas, Curvas Cúbicas no plano e também o aplicativo “EasyMath” desenvolvido para tablets e celulares Android com a finalidade de aproximar alunos aos conteúdos estudados.

Esta dissertação de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como finalidade oferecer um material ao professor do Ensino Médio que apresente um estudo das Cônicas.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Ministério da Educação (MEC) prevê o estudo das curvas cônicas como lugar geométrico de pontos (elipse, parábola e hipérbole), acompanhado de suas equações.

As Cônicas possuem diversas aplicações nas áreas científicas, na engenharia e arquitetura, na astronomia. Podemos citar alguns como as antenas terem o formato de parábola, pois é necessário, após a captação dos sinais, concentrá-los em único ponto, com a finalidade de serem tratados adequadamente; os refletores em formato elíptico que os dentistas utilizam, os quais possuem como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando e, ao mesmo tempo, impedir que a iluminação ofusque a visão do paciente; as órbitas dos planetas do sistema solar em torno do Sol são elípticas e a elucidação destas leis do universo se deve a Kepler; aplicação da hipérbole, pode se considerar um espelho refletor da forma de uma folha do hiperboloide, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo focal, sendo que a parte refletora está do lado externo (parte côncava).

Este trabalho está dividido em três partes: Parte I que compreende do Capítulo 2 ao 6; Parte II do Capítulo 7 ao 12; Parte III que contém o Capítulo 13 e Parte IV referente ao Capítulo 14.

Na Parte I do trabalho, no Capítulo 2, apresentamos uma revisão sobre números, números complexos e corpos. O corpo utilizado nos demais capítulos é o corpo dos números reais. Já no Capítulo 3 temos uma introdução com a História das Matrizes desde a antiguidade e a sua definição atual. Temos também uma breve revisão de Operações com Matrizes, Matrizes Transpostas, Traço de uma Matriz, Escalonamento de Matrizes e Posto, Matrizes Invertíveis,

Determinantes e Tipos Especiais de Matrizes Quadradas. Ainda no Capítulo 2, há uma breve descrição de Sistemas Lineares e uma revisão de Resolução de Sistemas Lineares.

O Capítulo 4 refere-se a Autovalores e Autovetores – Diagonalização, há uma breve revisão da descrição e do cálculo de autovalores e autovetores e Diagonalização de Matrizes. No Capítulo 5 apresentamos e demonstramos o Teorema Espectral para Matrizes Simétricas de ordem  $2 \times 2$ , também encontramos a definição de produto interno e norma de vetor. Ainda na Parte I, o Capítulo 6 aborda a Mudança de Coordenada que é de grande importância ao estudo das Cônicas, além de estudar as mudanças de coordenadas que ocorrem na rotação e translação de sistemas ortogonais, há também a aplicação dessas mudanças de coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  ao estudo da equação geral das cônicas  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Na Parte II do trabalho apresentamos um estudo das Cônicas não degeneradas (elipse, parábola e hipérbole) e Curvas Cúbicas no Plano. No Capítulo 7 apresentamos a descrição elementar de cada cônica, bem como suas formas canônicas. No Capítulo 8 temos a Classificação de Cônicas através da Translação, bem como as suas equações após a mudança de coordenadas. Já o Capítulo 9 apresenta a Classificação de Cônicas através da Rotação. Neste Capítulo é apresentada a rotação de eixos tanto de forma isolada, ou seja sem ter ocorrido a translação, como também em conjunto com a translação de eixos.

No Capítulo 10 temos a Classificação Geral das Cônicas e exemplos de como realizar o reconhecimento de cônicas através de análise de sua equação. Também apresentamos no Capítulo 10 a Obtenção da Cônica por Cinco Pontos no Plano, onde é demonstrado este teorema e também resolvido um exemplo. Já no Capítulo 11, mostramos uma curiosidade sobre as cônicas, O Teorema do Hexágono de Pascal e o resultado deste nas cônicas não degeneradas.

No Capítulo 12 Curvas Cúbicas no Plano Classificação de Newton, apresentamos algumas classificações das curvas cúbicas no plano realizadas por Newton, as classificações apresentadas levam em conta análises das equações das curvas bem como os discriminantes e a natureza das raízes. Esta Parte II do trabalho consta com diversos exemplos resolvidos, alguns foram retirados das obras estudadas e adaptados, e muitos outros foram criados por mim com o auxílio do software GeoGebra.

A Parte III compreende o Capítulo 13 que apresenta um Plano de Aula flexível sobre cônicas. O professor poderá utilizá-lo em partes ou em sua totalidade conforme seus objetivos e perfil de alunos.

Na Parte IV, Capítulo 14, há uma descrição das Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC's e sua importante aplicação no ambiente escolar para facilitar a aprendizagem dos alunos e também a apresentação e descrição do aplicativo EasyMath para tablets e celulares que foi desenvolvido por mim como extensão deste trabalho.

## 2 Números

Sejam os seguintes conjuntos numéricos:

Números Naturais  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Números Inteiros  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Números Racionais  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$ .

O conjunto dos Números Reais será denotado por  $\mathbb{R}$ . Não será realizada uma formalização deste conjunto, porém esta pode ser facilmente encontrada em livros de análise matemática. Será trabalhada a ideia intuitiva usualmente atribuída a esse conjunto.

Quando se quiser indicar o subconjunto de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  excluindo-se o número zero (0), indicaremos por  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbb{Q}^*$  e  $\mathbb{R}^*$ , respectivamente.

### 2.1 Números Complexos

O conjunto dos números complexos é o conjunto:

$$\mathbb{C} = \{ a + bi : a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Se  $z = a + bi$ ,  $\omega = c + di \in \mathbb{C}$ , definimos a soma por:

$$z + \omega = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e o seu produto por:

$$z \cdot \omega = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Nesta última operação  $i^2 = i \cdot i = -1$ . Onde o elemento  $i$  é chamado imaginário puro. No geral, se  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , denotamos a parte real de  $z$  por  $a = \text{re}(z)$  e a parte imaginária de  $z$  por  $b = \text{im}(z)$ . Desta forma,  $z = \text{re}(z) + \text{im}(z)i$ .

Diversas vezes é conveniente representar números complexos geometricamente como pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ . Identificamos o número complexo  $z = a + bi$  com o ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Podem ser utilizadas também coordenadas polares. Para  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , teremos que  $a = r \cos\theta$  e  $b = r \sin\theta$ , onde  $r$  é a distância da origem do plano ao ponto  $(a, b)$  e  $\theta$  indica o ângulo formado entre o eixo  $O_x$  e a reta que passa pela origem do plano e por  $(a, b)$ .

O módulo de um número complexo  $z = a + bi$  é definido como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A representação polar de um número complexo não nulo  $z$  será  $z = |z| \cos\theta + |z| \sin\theta = |z|e^{i\theta}$ .

Dado  $z = a + bi$ , o conjugado complexo de  $z$  é definido como sendo:  $\bar{z} = a - bi$ . Na forma polar, se  $z = |z|e^{i\theta}$  então  $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$ . Geometricamente, o conjugado de um número complexo corresponde a refleti-lo em relação ao eixo real  $O_x$ .

Na figura abaixo, temos a representação no plano do número complexo  $z_1 = 4 + 3i$ :

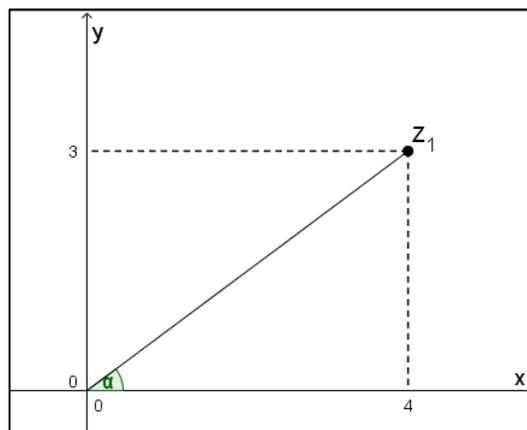


Figura 2-1: Representação de um número complexo no plano.

## 2.2 Corpos

Um conjunto não vazio  $\mathbb{K}$  é um corpo se em  $\mathbb{K}$  for possível definir as operações de adição e multiplicação, satisfazendo as seguintes propriedades de acordo com (Ulhoa & Lilian, 2005):

- I.  $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{K}$  (propriedade comutativa).
- II.  $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$  (propriedade associativa).

- III. Existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $0$  e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz  $0 + a = a + 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{K}$ .
- IV. Para cada  $a \in \mathbb{K}$ , existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $-a$  e chamado de oposto de  $a$  (ou inverso aditivo de  $a$ ), tal que  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- V.  $a \cdot b = b \cdot a$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{K}$  (propriedade comutativa).
- VI.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$  (propriedade associativa).
- VII. Existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $1$  e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{K}$ .
- VIII. Para cada elemento não nulo  $a \in \mathbb{K}$ , existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $a^{-1}$  e chamado de inverso multiplicativo de  $a$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ .
- IX.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$  (propriedade distributiva).

**Exemplo 2.1.** Os conjuntos de números  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são corpos, pois todos satisfazem as propriedades de I a IX. No entanto, o conjunto dos números  $\mathbb{Z}$  não é um corpo, já que não satisfaz a propriedade VIII, apenas os seus elementos  $1$  e  $-1$  admitem inversos multiplicativos.

## 3 Matrizes e Sistemas Lineares

### 3.1 Histórias das Matrizes

Os estudos das matrizes vêm de tempos antigos da humanidade. Presentes em textos chineses, por volta do século II a.C., aplicadas em problemas de resolução de equações lineares como exemplo o livro chinês: “Nove capítulos da arte matemática”, apresenta o método de matrizes para resolver equações lineares.

Em 1683 o matemático japonês Seki Kowa (1637 – 1708) e dez anos mais tarde, em 1693, o matemático alemão Gottfried Leibniz (1646 – 1716) desenvolveram métodos de resolução de sistemas lineares baseados em tabelas numéricas formadas por coeficientes das equações que compunham esses sistemas. Essas tabelas numéricas deram origem ao que hoje chamamos matrizes que, além de serem aplicadas ao estudo dos sistemas lineares, possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da matemática.

No século XVII o desenvolvimento da produção e do comércio colocou ao homem uma grande necessidade de trabalhar com tabelas numéricas. Em meados do século XVIII Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) descreveu a multiplicação de matriz, que no seu entender era como uma composição, sem tratar do conceito matriz algébrica. Nota-se que a aplicação das matrizes possui uma forte componente histórica na resolução de equações lineares.

Gabriel Cramer (1704 – 1752) desenvolveu, no século XVIII, a regra de Cramer que soluciona um sistema de equações lineares em termos de determinantes.

O primeiro matemático a definir um nome as matrizes foi Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) em 1826, denominado-as de tableau (tabela) para a matriz de coeficientes e introduziu a ideia de matrizes similares.

James Joseph Sylvester (1814 – 1897) em 1850 foi quem utilizou o significado da palavra matriz: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número  $p$  e escolher à vontade  $p$  linhas e  $p$  colunas..." (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pag. 363-370).

Amigo de Sylvester, Arthur Cayley (1821 – 1895) em *Memoir on the Theory of Matrices*, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade, desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria matricial. Cayley aprofundou os estudos das tabelas numéricas e foi um dos primeiros a estudar e aplicar as matrizes em estruturas algébricas. Isso permitiu um grande desenvolvimento da matemática. Também contribuíram para o desenvolvimento da teoria das matrizes: William R. Hamilton, Hermann G. Grassmann, Ferdinand G. Frobenius, entre outros.

Desde o seu aparecimento, no tempo da China antiga e durante sua evolução histórica, as matrizes têm permanecido como uma ferramenta fundamental para resolver problemas associados a equações simultâneas lineares. Atualmente permite também, descrever a mecânica quântica da estrutura dos átomos, desenvolver modelos matemáticos computáveis, analisar e representar relações entre variáveis matemáticas, entre muitas outras aplicações. Sendo um instrumento matemático de cientistas sociais, geneticistas, estatísticos, engenheiros, físicos e outros profissionais.

### 3.2 Matrizes

Nesta seção, assim como nas demais seções deste capítulo,  $\mathbb{K}$  irá representar o corpo dos números reais.

Chamamos de Matriz um conjunto retangular de números, símbolos ou expressões, organizados em linhas e colunas que pretendemos operar em bloco simultaneamente. Cada um dos itens de uma matriz é chamado de elemento (Santos, 2007).

Sejam  $m, n$  dois inteiros positivos. Uma matriz  $A$   $m$  por  $n$  sobre  $\mathbb{K}$  é dada por  $m \times n$  valores  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , com  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  agrupados em  $m$  linhas e  $n$  colunas, será representada como:

$$A = (a_{ij})_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A  $i$ -ésima linha de  $A$  é:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}],$$

para  $i = 1, \dots, m$  e a  $j$ -ésima coluna de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Também é utilizada a notação  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Dizemos que  $a_{ij}$  ou  $[A]_{ij}$  é o elemento ou a entrada de posição  $i, j$  da matriz  $A$ .

Se  $m = n$ , dizemos que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e os elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  formam a diagonal principal de  $A$ .

### 3.2.1 Operações com Matrizes

No conjunto  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  de todas as matrizes  $m \times n$  sobre  $\mathbb{K}$  podemos definir as seguintes operações:

**A. Soma de matizes:** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes de mesmo tamanho com  $A = (a_{ij})_{i,j}$  e  $B = (b_{ij})_{i,j}$ . A soma  $A + B$  é a matriz  $C = (c_{ij})_{i,j}$ , onde para cada par  $(i, j)$  temos  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , ou seja:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.1.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Então  $C = A + B$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 & (-3) + 0 \\ 3 + 5 & 4 + (-4) & 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**B. Multiplicação por escalar:** A multiplicação de uma matriz  $A = (a_{ij})_{i,j}$  por um escalar  $\lambda$ , podemos definir como sendo a matriz  $B = (b_{ij})_{i,j}$ , tal que para cada par  $(i, j)$ , temos  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ :

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.2.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ , e  $\lambda = 5$ , Calcular  $\lambda A$ . Então

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times (-2) & 5 \times (-3) \\ 5 \times 3 & 5 \times 4 & 5 \times (-5) & 5 \times 0 \\ 5 \times 7 & 5 \times 8 & 5 \times 0 & 5 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 & -15 \\ 15 & 20 & -25 & 0 \\ 35 & 40 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

**C. Produto de matrizes:** Sejam  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ , sendo o número de linhas de  $A$  igual ao número de colunas de  $B$ . Podemos definir o produto de  $A$  por  $B$  como sendo a matriz  $C = (c_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$  tal que:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj},$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, p$ , ou então,

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n a_{1l} b_{l1} & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{1l} b_{lp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n a_{ml} b_{l1} & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{ml} b_{lp} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.3.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Então  $C = A \times B$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & 0 \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Matrizes Transpostas

Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , definimos sua transposta como sendo a matriz  $A^t = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , tal que  $b_{ij} = a_{ji}$ , para cada par  $(i, j)$ .

**Exemplo 3.4.** Se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & \pi \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}),$$

então

$$A^t = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

### 3.2.3 Traço de uma Matriz

Seja  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  uma matriz quadrada. Definimos o traço  $\text{tr } A$  de  $A$  como sendo a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é,

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Exemplo 3.5.** Temos

$$\text{tr } A \begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix} = (-1) + 1 + 1 = 1.$$

### 3.2.4 Escalonamento de Matrizes e Posto de uma Matriz

Uma matriz  $A$  é uma matriz escalonada, ou está em forma escalonada, se prevalecem as duas condições seguintes:

- a) Todas as linhas zero, se houver, estão na base da matriz.

- b) Cada elemento principal não nulo está a direita do elemento principal não nulo da linha precedente.

Isto é,  $A = (a_{ij})$  é uma matriz escalonada se existem elementos não nulos  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ , onde  $j_1 < j_2 < j_r$  com a propriedade que  $a_{ij} = 0$  para a)  $i \leq r, j < j_i$  e para  $i > r$ .

Neste caso,  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  são os elementos não nulos principais de  $A$ .

**Exemplo 3.6.** As seguintes matrizes estão na forma escalonadas; os elementos não nulos principais estão em quadrados:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{2} & 5 & 2 & 16 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em geral pode-se escalonar qualquer matriz utilizando as seguintes operações elementares (Ulhoa & Lilian, 2005):

- i. Troca de posições de duas linhas;
- ii. Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo;
- iii. Substituição de uma linha pela soma desta com alguma outra.

Exemplificando tal processo de escalonamento:

**Exemplo 3.7.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Efetuando sucessivamente as seguintes operações nas linhas de  $A$ :

- I. Substituir a segunda linha pela soma da primeira linha com a segunda linha multiplicada por  $\left(\frac{1}{2}\right)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- II. Substituir a terceira linha pela soma da primeira linha com a terceira linha:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

- III. Substituir a terceira linha pela soma da segunda linha com a terceira linha multiplicada por  $(-\frac{1}{2})$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- IV. Multiplicar a primeira linha por  $(\frac{1}{3})$  e a segunda por  $-1$ . Chega-se a matriz escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- V. Na matriz resultante, substitui-se a terceira linha pela soma da primeira linha com a terceira linha subtraída da segunda linha.

**Exemplo 3.8.** Escalonar a matriz  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ .

- I. Realizar as seguintes substituições:

- Na 2ª linha: soma da 2ª linha com a 1ª linha multiplicada por  $(-2)$ ;
- Na 3ª linha: soma da 3ª linha com a 1ª linha multiplicada por  $(-1)$ ;
- Na 4ª linha: soma da 4ª linha com 1ª linha multiplicada por  $(-3)$ ;

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- II. Trocar de posição a 2ª linha com a 3ª linha (como o elemento  $a_{22} = 0$ , que seria o “pivô” nesta etapa do escalonamento é nulo, vamos trocar as linhas de posições e agora o pivô será 1):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- III. Realizar as seguintes substituições:

- IV. Na 3ª linha: soma da 3ª linha com a 2ª linha multiplicada por  $(0)$ ;

V. Na 4ª linha: soma da 4ª linha com 2ª linha multiplicada por (3):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

VI. Substituir a 4ª linha pela soma da 4ª linha com 3ª linha:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}.$$

Definição de posto: Dado uma matriz  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , definimos o seu posto como sendo o número de linhas não nulas em sua forma escalonada. Notação:

I. No Exemplo 2.7, a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\text{posto}(A) = 3$ .

II. No Exemplo 2.8, a matriz  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{posto}(M) = 4$ .

### 3.2.5 Matrizes Invertíveis (Não Singulares)

Nem todas as matrizes são invertíveis (ou não singulares), porém as que possuem inversas são bastante importantes. Uma matriz  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é invertível se existir uma matriz  $A^{-1} = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \text{Id}_n$ , isto é, tal que, para cada  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

**Exemplo 3.9.** Considere a matriz  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja  $A^{-1}$  a matriz inversa de  $A$ :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$A \cdot A^{-1} = \text{Id}_n \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ b + e = 0 \\ c + f = 0 \\ 2d + g = 0 \\ 2e + h = 1 \\ 2f + i = 0 \\ a + g = 0 \\ b + h = 0 \\ c + i = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas obtemos:  $a = i = \frac{2}{3}$ ;  $b = f = -\frac{1}{3}$ ;  $c = d = e = h = \frac{1}{3}$ ;  $g = -\frac{2}{3}$ , com isto a matriz  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada é dita singular quando não admite uma inversa. Uma matriz é singular se e somente se seu determinante é nulo (ver próxima seção).

### 3.2.6 Determinantes

Seja a matriz  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . O seu determinante é uma função matricial que associa a matriz quadrada  $A$  a um escalar, transformando essa matriz em um número real.

Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  com  $n = 1$ , então a matriz  $A$  é dada por um único elemento  $a = a_{11}$ . Neste caso,  $\det A = a$ .

Suponhamos que  $n > 1$  e que  $\det B$  esteja definido para todas as matrizes  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ , com  $m < n$  e seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Para cada par  $(i, j)$ , defina a matriz  $A_{ij}$  formada a partir de  $A$  retirando-se a sua  $i$ -ésima linha e sua  $j$ -ésima coluna.

Como  $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$  e, portanto já está definido  $\det A_{ij}$ , definimos o determinante de  $A$  como sendo:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \cdot \det A_{1j}.$$

**Exemplo 3.10.** Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ . Pela definição, temos que  $\det A = a \cdot \det A_{11} - b \cdot \det A_{12}$ . Como  $A_{11} = (d)$  e  $A_{12} = (c)$ , segue então que  $\det A = ad - bc$ .

**Exemplo 3.11.** Seja  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ . Pela definição  $\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13}$ . Como  $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$  e  $A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ , teremos, como no Exemplo 2.9, que  $\det A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ ,  $\det A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$  e  $\det A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ .

Segue que:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.1.** Uma matriz  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  só será invertível se e somente se  $\det A \neq 0$ .

### 3.3 Tipos Especiais de Matrizes Quadradas

Esta secção descreve alguns tipos de matrizes quadradas que desempenham papel importante na álgebra linear.

### 3.3.1 Matrizes Diagonais

Uma matriz quadrada  $D = (d_{ij})$  é diagonal se seus elementos não diagonais são todos nulos. Denota-se frequentemente tal matriz por  $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ , onde alguns, porém nem todos, dos  $d_{ii}$  podem ser nulos.

**Exemplo 3.12.** São matrizes diagonais:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & & & \\ & 0 & & \\ & & -9 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

que podem ser representadas, respectivamente, por:

$\text{diag}(3, -7, 2)$ ,  $\text{diag}(4, -5)$ ,  $\text{diag}(6, 0, -9, 1)$ . Nota-se que os zeros da terceira matriz foram omitidos.

Obviamente, a soma, o produto por escalar e o produto de matrizes diagonais são também diagonais.

### 3.3.2 Matrizes Triangulares

Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  é chamada triangular superior ou simplesmente triangular se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, se  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ . São respectivamente matrizes triangulares superiores de ordem 2, 3 e 4.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Tal como nas matrizes diagonais é comum omitir os elementos que são nulos.

**Teorema 3.2.** Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  matrizes triangulares superiores. Então:

- i.  $A + B$  é triangular superior, com  $\text{diag}(a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, \dots, a_{nn} + b_{nn})$ .
- ii.  $kA$  é triangular superior, com  $\text{diag}(ka_{11}, ka_{12}, \dots, ka_{nn})$ .
- iii.  $AB$  é triangular superior com  $\text{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn})$ .

- iv. Para qualquer polinômio  $f(x)$ , a matriz  $f(A)$  é triangular superior com  $\text{diag}(f(a_{11}), f(a_{22}), \dots, f(a_{nn}))$ .
- v.  $A$  é invertível se e somente se cada elemento da diagonal  $a_{ii} \neq 0$ .

Analogamente, uma matriz triangular inferior é uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos, para tais matrizes, vale teorema análogo ao Teorema 2.2 (Lipschutz, 1994).

### 3.3.3 Matrizes Simétricas

Uma matriz real  $A$  é simétrica se  $A^t = A$ . Equivalentemente,  $A = (a_{ij})$  é simétrica se elementos simétricos (imagens espelho na diagonal) são iguais, isto é, se cada  $a_{ij} = a_{ji}$ . Note que  $A$  deve ser quadrada para que possa ter  $A^t = A$ .

Uma matriz real  $A$  é antissimétrica se  $A^t = -A$ . Equivalentemente,  $A = (a_{ij})$  é antissimétrica se cada  $a_{ij} = -a_{ji}$ . Obviamente, os elementos diagonais de uma matriz antissimétrica devem ser zero, pois  $a_{ij} = -a_{ij}$  acarreta  $a_{ij} = 0$ .

**Exemplo 3.13.** Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Por inspeção, os elementos simétricos de  $A$  são iguais, ou  $A^T = A$ . Assim,  $A$  é simétrica.
- b) Por inspeção, os elementos diagonais de  $B$  são nulos e os elementos simétricos são negativos um do outro. Assim  $B$  é antissimétrica.
- c) Como  $C$  não é quadrada,  $C$  não é simétrica nem antissimétrica.

Se  $A$  e  $B$  são matrizes simétricas, então  $A + B$  e  $kA$  são simétricas. Todavia,  $AB$  não é necessariamente simétrica. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ são simétricas, mas } AB = \begin{bmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{bmatrix} \text{ não é simétrica.}$$

**Teorema 3.3.** Se  $A$  é uma matriz quadrada, então:

- i.  $A + A^t$  é simétrica;
- ii.  $A - A^t$  é antissimétrica;

- iii.  $A = B + C$ , para alguma matriz simétrica  $B$  e alguma matriz antissimétrica  $C$ .

### 3.3.4 Matrizes Ortogonais

Uma matriz real  $A$  é ortogonal se  $AA^t = A^tA = I$ . Nota-se que uma matriz ortogonal  $A$  é necessariamente quadrada e invertível, com inversa  $A^{-1} = A^t$ .

**Exemplo 3.14.** Seja  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$ . Então:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 1 + 64 + 16 & 4 - 32 + 28 & 8 + 8 - 16 \\ 4 - 32 + 28 & 16 + 16 + 49 & 32 - 4 - 28 \\ 8 + 8 - 16 & 32 - 4 - 28 & 64 + 1 + 16 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \end{aligned}$$

Isto significa que  $A^tA = I$  e  $A^t = A^{-1}$ . Assim,  $A$  é ortogonal.

### 3.3.5 Matrizes Normais

Uma matriz real  $A$  é normal se comuta com sua transposta, isto é, se  $AA^t = A^tA$ . Obviamente, se  $A$  é simétrica, ortogonal ou antissimétrica, então  $A$  é normal. Estas, entretanto não são as únicas matrizes normais.

**Exemplo 3.15.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ . Então

$$AA^t = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$





$$A \cdot X = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Uma solução de um sistema linear é uma matriz  $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$  tal que as equações do

sistema são satisfeitas quando substituimos  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ . O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado conjunto solução ou solução geral do sistema. A matriz  $A$  é chamada matriz do sistema linear.

**Exemplo 3.17.** Utilizando o escalonamento de matrizes conforme definido na seção 2.2.4, vamos resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}.$$

Escrevemos então a matriz aumentada  $[A|B]$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 7 & \vdots & 6 \end{bmatrix}.$$

Realizaremos as seguintes operações elementares:

- i. Substituir a linha (2) pela soma da linha (1) com a linha (2);
- ii. Substituir a linha (3) pela soma da linha (3) com a linha (1) multiplicada por -3;
- iii. Substituir a linha (4) pela soma da linha (4) com a linha (1) multiplicada por -2.

Obtemos então a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 6 & -5 & 7 & \vdots & 4 \\ 0 & -7 & 5 & -10 & \vdots & -9 \\ 0 & -11 & 7 & -1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}.$$

Realizando as próximas operações:

- iv. Substituir a linha (3) pela soma da linha (3) com a linha (2) multiplicada por  $\frac{7}{6}$ ;
- v. Substituir a linha (4) pela soma da linha (4) com a linha (2) multiplicada por  $\frac{11}{6}$ .

Obtemos então a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 6 & -5 & 7 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{11}{6} & \vdots & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} & \frac{71}{6} & \vdots & \frac{16}{3} \end{bmatrix}.$$

Para finalizar o escalonamento da matriz, vamos substituir a linha (4) pela soma da linha (4) com a linha (3) multiplicada por  $-\frac{13}{5}$ , obtemos então a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 6 & -5 & 7 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{11}{6} & \vdots & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{83}{5} & \vdots & \frac{83}{5} \end{bmatrix}.$$

Esta última matriz está na forma escalonada, onde facilmente podemos verificar que  $x_4 = x_1 = 1$ ;  $x_3 = 3$  e  $x_2 = 2$  é solução do sistema.

## 4 Autovalores e Autovetores - Diagonalização

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Diz-se que um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um autovalor de  $A$  se existe um vetor (coluna) não nulo  $v \in \mathbb{K}^n$  para o qual  $Av = \lambda v$ .

Todo vetor que satisfaz esta relação é então chamado um autovetor de  $A$  pertencente ao autovalor  $\lambda$ . Observe que cada múltiplo escalar  $kv$  é um desses autovetores, pois  $A(kv) = k(Av) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$ .

O conjunto de todos os autovetores pertencentes a  $\lambda$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^n$ , chamado de autoespaço de  $\lambda$ .

**Exemplo 4.1.** Sejam  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  e  $v_1 = (2, 3)$  e  $v_2 = (1, -1)$ . Então

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4v_1$$

e

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)v_2.$$

Assim,  $v_1$  e  $v_2$  são autovetores de  $A$  pertencentes, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = -1$  de  $A$ .

**Teorema 4.1.** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Então as afirmações seguintes são equivalentes:

- i. Um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um autovalor de  $A$ .
- ii. A matriz  $M = \lambda I - A$  é singular, logo  $\det M = 0$ .
- iii. O escalar  $\lambda$  é raiz do polinômio característico de  $A$  denotado por  $P_n(\lambda) = \det M = \det(\lambda I - A)$ .

### 4.1 Matrizes Diagonalizáveis

Uma matriz  $A$  é diagonalizável (sob semelhança) se existe uma matriz não singular  $P$  tal que  $D = P^{-1}AP$  é uma matriz diagonal, isto é, se  $A$  é semelhante a uma matriz diagonal  $D$ .

**Teorema 4.2.** Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é semelhante a uma matriz diagonal  $D$  se e somente se  $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes. Em tal caso, os elementos diagonais de  $D$  são os autovalores correspondentes e  $D = P^{-1}AP$ , onde  $P$  é a matriz cujas colunas são autovetores.

Suponhamos que uma matriz  $A$  possa ser diagonalizada como acima,  $P^{-1}AP = D$ , onde  $D$  é diagonal. Então  $A$  admite a fatoração diagonal, extremamente útil,

$$A = PDP^{-1}.$$

**Exemplo 4.2.** Consideremos a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ . Pelo Exemplo 3.1,  $A$  tem dois autovetores

linearmente independentes  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Façamos  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ , e assim  $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ . Então

$A$  é semelhante à matriz diagonal

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os elementos diagonais  $4$  e  $-1$  da matriz diagonal  $B$  são os autovalores correspondentes aos autovetores dados. Em particular,  $A$  admite a fatoração  $A = PDP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Neste capítulo utilizaremos o fato de que a inversa da matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ é a matriz } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|p|} & \frac{-b}{|p|} \\ \frac{-c}{|p|} & \frac{a}{|p|} \end{bmatrix}.$$

Isto é,  $P^{-1}$  se obtém permutando os elementos diagonais  $a$  e  $d$  de  $P$ , tomando os negativos dos elementos não diagonais  $b$  e  $c$ , e dividindo cada elemento pelo determinante  $|P|$ .

## 4.2 Cálculo de Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes

Neste capítulo calculamos autovalores e autovetores para uma matriz quadrada  $A$  e determinamos se existe ou não uma matriz não singular  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  seja diagonal. Aplicaremos à matriz  $A$  o algoritmo seguinte.

### Algoritmo de Diagonalização

Considere uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ .

**Passo 1** Achar o polinômio característico de  $A$ .

**Passo 2** Achar as raízes de  $P_n(\lambda)$  para obter os autovalores de  $A$ .

**Passo 3** Repetir (a) e (b) para cada autovalor  $\lambda$  de  $A$ :

- Formar  $M = A - \lambda I$  subtraindo  $\lambda$  da diagonal de  $A$ .
- Achar uma base para o espaço solução do sistema homogêneo  $MX = 0$ . Esses vetores da base são autovetores linearmente independentes de  $A$  pertencentes a  $\lambda$ .

**Passo 4** Considerar o conjunto  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  de todos os autovetores obtidos no Passo 3:

- Se  $m \neq n$ , então  $A$  não é diagonalizável.
- Se  $m = n$ , seja  $P$  a matriz cujas colunas são os autovetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

$$\text{Então } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ onde } \lambda_i \text{ é o autovalor}$$

correspondente ao autovetor  $v_i$ .

Aplicamos o Algoritmo da Diagonalização a matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Passo 1** O polinômio característico  $P_n(\lambda)$  de  $A$  é o determinante:

$$P_n(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

**Passo 2** Faça  $P_n(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ . As raízes  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = -2$  são os autovalores de  $A$ .

**Passo 3** Ahamos um autovetor  $v_1$  de  $A$  pertencente ao autovalor  $\lambda_1 = 5$ . Vamos subtrair  $\lambda_1 = 5$  da diagonal de  $A$  obtendo a matriz  $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ . Os autovetores pertencentes a  $\lambda_1 = 5$  constituem a solução do sistema  $MX = 0$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

O sistema tem apenas uma solução independente; por exemplo,  $x = 2, y = 1$ . Assim,  $v_1 = (2, 1)$  é um autovetor que gera o autoespaço de  $\lambda_1 = 5$ .

i. Ahamos um autovetor  $v_2$  de  $A$  pertencente ao autovalor  $\lambda_2 = -2$ . Vamos subtrair  $\lambda_2 = -2$  da diagonal de  $A$  obtendo a matriz  $M = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Os autovetores pertencentes a  $\lambda_2 = -2$  constituem a solução do sistema  $MX = 0$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}.$$

O sistema tem apenas uma solução independente; por exemplo,  $x = -1, y = 3$ . Assim,  $v_2 = (-1, 3)$  é um autovetor que gera o autoespaço de  $\lambda_2 = -2$ .

**Passo 4** Seja  $P$  a matriz cujas colunas são os autovalores acima:  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Então

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$  e  $D = P^{-1}AP$  é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os

respectivos autovalores:

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 5 Teorema Espectral para Matrizes Simétricas

Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  dois vetores de  $\mathbb{R}^2$ . Denotaremos por  $[\vec{u} \ \vec{v}]$  a matriz  $2 \times 2$  que tem as coordenadas de  $\vec{u}$  como primeira coluna e as coordenadas de  $\vec{v}$  como segunda coluna, e denotaremos por  $\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$  a matriz que tem as coordenadas de  $\vec{u}$  como primeira linha e as coordenadas de  $\vec{v}$  como segunda linha.

**Exemplo 5.1.** Se  $\vec{u} = (1, 2)$  e  $\vec{v} = (3, -1)$ , temos  $[\vec{u} \ \vec{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = [\vec{u} \ \vec{v}]^t$ .

Se  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , denotamos por  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  o produto interno de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  e por  $\|\vec{u}\|$  a norma do vetor  $\vec{u}$ , isto é  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$  e  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .

**Lema 5.1** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$  e sejam  $A = [\vec{u} \ \vec{v}]$ ,  $B = [\vec{w} \ \vec{z}]$ . Então:

$$(a) \quad A^t B = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{z} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad A^t A = \begin{bmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \|\vec{v}\|^2 \end{bmatrix},$$

$$(c) \quad BA = [B\vec{u} \ B\vec{v}].$$

**Demonstração do Lema 5.1:** Sejam os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2)$ ,  $\vec{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  e sejam  $A = [\vec{u} \ \vec{v}] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [\vec{w} \ \vec{z}] = \begin{bmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{bmatrix}$  e  $A^t = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ .

$$(a) \quad A^t B = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \times [\vec{w} \ \vec{z}] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} u_1 w_1 + u_2 w_2 & u_1 z_1 + u_2 z_2 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 & v_1 z_1 + v_2 z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{z} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A^t A = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \times [\vec{u} \ \vec{v}] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} u_1 u_1 + u_2 u_2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 & v_1 v_1 + v_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \|\vec{v}\|^2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad BA = [\vec{w} \ \vec{z}] \times [\vec{u} \ \vec{v}] = \begin{bmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 u_1 + z_1 u_2 & w_1 v_1 + z_1 v_2 \\ w_2 u_1 + z_2 u_2 & w_2 v_1 + z_2 v_2 \end{bmatrix} = [B\vec{u} \quad B\vec{v}]$$

$$(d) [\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{u} \rangle \quad \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{v} \rangle]$$

**Lema 5.2** Seja  $A$  uma matriz simétrica real  $2 \times 2$  e sejam  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ . Então

$$\langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle.$$

**Demonstração do Lema 5.2:** Se  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  e  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ , então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 + bu_2 \\ bu_1 + cu_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + cv_2 \end{bmatrix}$$

e assim

$$\langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (au_1 + bu_2, bu_1 + cu_2), (v_1, v_2) \rangle = au_1 v_1 + bu_2 v_1 + bu_1 v_2 + cu_2 v_2$$

$$\langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle (u_1, u_2), (av_1 + bv_2, bv_1 + cv_2) \rangle = au_1 v_1 + bu_1 v_2 + bu_2 v_1 + cu_2 v_2$$

Assim obtemos  $\langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle$ .

**Lema 5.3** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores não nulos de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ .

**Demonstração do Lema 5.3:** Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ,  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$ , então pela lei dos cossenos temos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

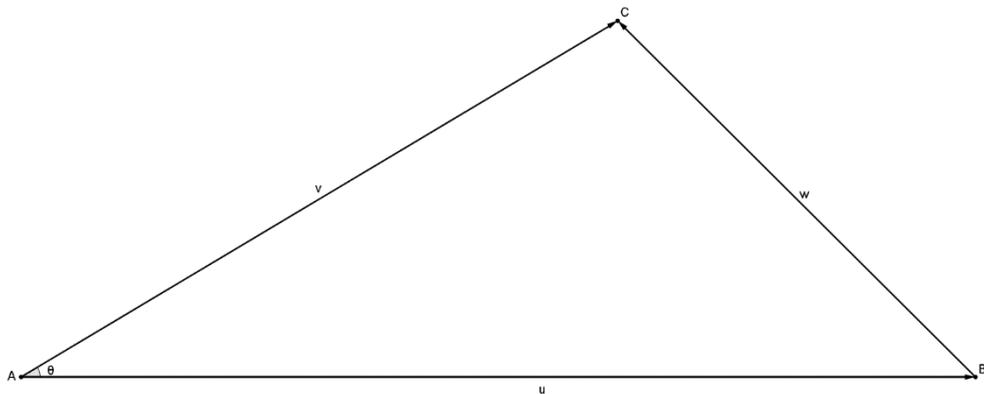


Figura 5-1: Lei dos cossenos.

Assim obtemos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 - 2\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \\ \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.\end{aligned}$$

**Definição 5.1** Sejam  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  não nulos. Se o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é  $\frac{\pi}{2}$ , dizemos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais e  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ , dizemos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortonormais.

**Observação:** Os vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  são ortonormais se, e somente se,

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = 0 \text{ e } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1.$$

**Lema 5.4** Toda matriz real e simétrica  $2 \times 2$  possui somente autovalores reais.

**Demonstração do Lema 5.4:** Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ . Então o polinômio característico de  $A$  é dado por

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2).\end{aligned}$$

$$\text{Como } \Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Temos que as raízes de  $p(\lambda)$ , que são autovalores de  $A$ , são reais.

**Teorema 5.1.** Seja  $A$  uma matriz simétrica real  $2 \times 2$ . Então:

- (a)  $A$  possui dois autovetores ortonormais  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ .
- (b) Se  $\vec{w}_1$  está associado ao autovalor  $\lambda_i, i = 1, 2$ , e  $P = [\vec{w}_1 \quad \vec{w}_2]$ ,  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , então  $P^t = P^{-1}$  e  $P^tAP = D$ .

**Demonstração do Teorema 5.1:** (a) Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  e  $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$  o polinômio característico de  $A$ . Temos que  $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$ .

Se  $\Delta = 0$  temos  $a = c$  e  $b = 0$ . Assim  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Neste caso tomamos  $\vec{w}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{w}_2 = (0, 1)$ .

Suponhamos  $\Delta > 0$ . Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes reais distintas de  $p(\lambda)$  e sejam  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  não nulos tal que  $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$ .

Então pelos Lemas 4.1 e 4.2,

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= \langle \lambda_1 \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle A\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \\ &= \langle \vec{v}_1, A\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle,\end{aligned}$$

assim

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

e portanto  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$  pois  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Tomamos  $\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$  e  $\vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$  e temos que  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$  são autovetores ortonormais de  $A$ .

(b) Como  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$  são vetores ortonormais pelo Lema 4.1 (b)

$$P^t P = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{bmatrix} \times [\vec{w}_1 \quad \vec{w}_2] = \begin{bmatrix} \|\vec{w}_1\| & \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle \\ \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle & \|\vec{w}_2\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto  $P^t = P^{-1}$ . Como  $A[\vec{w}_1 \quad \vec{w}_2] = [A\vec{w}_1 \quad A\vec{w}_2] = [\lambda_1 \vec{w}_1 \quad \lambda_2 \vec{w}_2]$  então pelo Lema 4.1,

$$\begin{aligned}P^t A P &= \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{bmatrix} \times [\lambda_1 \vec{w}_1 \quad \lambda_2 \vec{w}_2] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle & \lambda_2 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle & \lambda_2 \langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D\end{aligned}$$

## 5.1 Conclusão

O teorema espectral para operadores simétricos é fundamental na álgebra linear por garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores para operadores simétricos. Isto implica que o operador seja diagonalizável o que facilita os cálculos. Desta forma podemos fazer o reconhecimento de cônicas, quádras e tornar o cálculo de composição de funções reais mais simples entre outras aplicações.

## 6 Mudança de Coordenadas

### 6.1 Rotação e Translação

Em Geometria Analítica é comum passarmos de um sistema de coordenadas  $O$  adotado inicialmente para outro  $O'$ , mais conveniente. Essa maior conveniência pode ser devida a vários fatores, como por exemplo, se o primeiro sistema não for ortogonal pode surgir a necessidade de mudar para um sistema ortogonal; outras vezes, o objetivo é simplificar os cálculos algébricos, com a mudança de um sistema de coordenadas para outro. A questão será sempre estabelecer relações entre as “antigas” e as “novas” coordenadas (Gomez, et al., 2012).

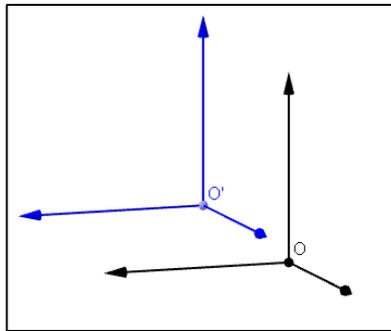


Figura 6-1: Dois sistemas de coordenadas.

Se as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço são  $(x, y, z)$ , então os componentes do vetor  $\overrightarrow{OP}$  também são  $(x, y, z)$  e então podemos escrever:

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \text{ em que } \vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{k} = (0, 0, 1).$$

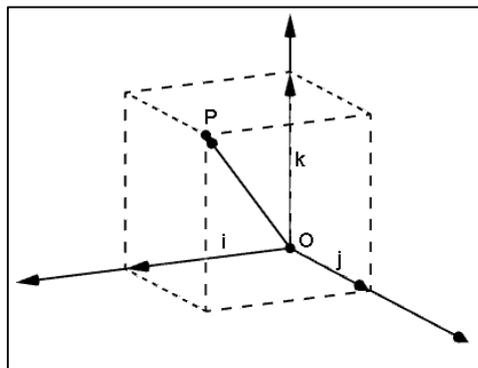


Figura 6-2:  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

Ou seja, as coordenadas de um ponto  $\vec{P}$  são iguais aos escalares que aparecem aos escrevermos  $\vec{OP}$  como uma combinação linear de vetores canônicos. Sendo assim, o ponto  $O = (0,0,0)$  e os vetores  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  determinam um sistema de coordenadas ortogonal,  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo sistema de coordenadas ortogonal determinado por uma origem  $O'$  e por vetores  $U_1, U_2$  e  $U_3$  unitários e mutuamente ortogonais.

**Exemplo 6.1.**  $O' = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ ,  $U_1 = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$ ,  $U_2 = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$  e  $U_3 = \{0,0,1\} = \vec{k}$ , então  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$  determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto  $O'$ , cujos eixos  $x', y'$  e  $z'$  são retas que passam por  $O'$  orientadas com os sentidos e direções de  $U_1, U_2$  e  $U_3$  respectivamente.

As coordenadas de um ponto  $P$  no sistema de coordenadas  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$  são definidas como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos  $\vec{O'P}$  como combinação linear dos vetores  $U_1, U_2$  e  $U_3$ , ou seja, se  $\vec{O'P} = x' U_1 + y' U_2 + z' U_3$ , então as coordenadas de  $P$  no sistema  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$  são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar inicialmente o caso em que  $O = O'$ . Assim  $\vec{OP} = (x, y, z)$ , então  $x' U_1 + y' U_2 + z' U_3 = \vec{OP}$  pode ser escrito como

$$[U_1 U_2 U_3] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz  $Q = [U_1 U_2 U_3]$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ U_3^T \end{bmatrix} [U_1 U_2 U_3] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ U_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mas, como  $U_1, U_2$  e  $U_3$  são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ U_3^T \end{bmatrix} [U_1 U_2 U_3] = \begin{bmatrix} U_1^T U_1 & U_1^T U_2 & U_1^T U_3 \\ U_2^T U_1 & U_2^T U_2 & U_2^T U_3 \\ U_3^T U_1 & U_3^T U_2 & U_3^T U_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 & U_1 \cdot U_3 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 & U_2 \cdot U_3 \\ U_3 \cdot U_1 & U_3 \cdot U_2 & U_3 \cdot U_3 \end{bmatrix} = I_3.$$

Assim, a matriz  $Q = [U_1 U_2 U_3]$  é invertível e  $Q^{-1} = Q^T$ . Desta forma as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço em relação ao sistema  $\{O, U_1, U_2, U_3\}$  estão bem definidas, ou seja,  $x', y'$  e  $z'$  estão unicamente determinados por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^T [P]_{\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}.$$

Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma análoga. As coordenadas de um ponto  $P$  no plano em relação a um sistema de coordenadas  $\{O', U_1, U_2\}$ , em que  $U_1$  e  $U_2$  são vetores unitários e ortogonais, não definidos como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos  $\overrightarrow{O'P}$  com combinação linear de  $U_1$  e  $U_2$ , ou seja, se  $\overrightarrow{O'P} = x' U_1 + y' U_2$ , então as coordenadas de  $P$  no sistema  $\{O', U_1, U_2\}$  são dadas por  $[P]_{\{O', U_1, U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ .

Vamos considerar também no plano, inicialmente o caso em que  $O = O'$ . Assim, se  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ , então  $x' U_1 + y' U_2 = \overrightarrow{OP}$  pode ser escrito como

$$[U_1 U_2] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz  $Q = [U_1 U_2]$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [U_1 U_2] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Mas, como  $U_1$  e  $U_2$  são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [U_1 U_2] = \begin{bmatrix} U_1^T U_1 & U_1^T U_2 \\ U_2^T U_1 & U_2^T U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 \end{bmatrix} = I_2.$$

Assim, a matriz  $Q = [U_1 U_2]$  é invertível e  $Q^{-1} = Q^T$ . Desta forma, as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço em relação ao sistema  $\{O, U_1, U_2\}$  estão bem definidas, ou seja,  $x'$  e  $y'$  estão unicamente determinados por  $[P]_{\{O', U_1, U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^T [P]_{\{O, E_1, E_2\}}$ , em que  $E_1 = (1, 0)$  e  $E_2 = (0, 1)$ . Observe que, tanto no caso do espaço, a matriz  $Q$  satisfaz,  $Q^{-1} = Q^T$ . Uma matriz que satisfaz essa propriedade é chamada de matriz ortogonal, como já visto anteriormente.

**Exemplo 6.2.** Considere o sistema de coordenadas no plano em que  $O = O'$  e  $U_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  e  $U_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Se  $P = (2, 4)$ , vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas. Primeiro temos que encontrar  $x'$  e  $y'$  tais que  $x' U_1 + y' U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$ , ou  $x' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) + y' \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (2, 4)$ .

Esta equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' = 2 \\ \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Em que  $Q = [U_1 U_2]$  com  $U_1$  e  $U_2$  escritos como matrizes colunas. Como

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = I_2,$$

então as coordenadas em  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2\}} = Q^T \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas é  $(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$ .

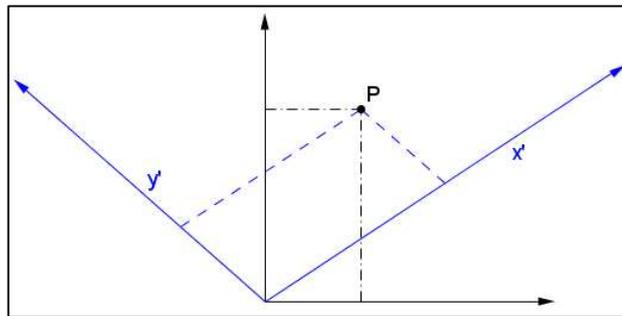


Figura 6-3: Coordenadas de um ponto  $P$  em dois sistemas.

**Exemplo 6.3.** Considere o mesmo sistema de coordenadas anteriormente, mas agora seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar  $x'$  e  $y'$  tais que:  $x' U_1 + y' U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$ , ou  $x' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) + y' \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (x, y)$ .

A equação acima é equivalente ao sistema linear nas variáveis  $x'$  e  $y'$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou

$$Q \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que  $Q = [U_1 \ U_2]$  com  $U_1$  e  $U_2$  escritos como matrizes colunas. Como  $Q^T Q = I_2$ , então as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por:

$$[P]_{\{O, U_1, U_2\}} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{3}x + y)}{2} \\ \frac{(-x + \sqrt{3}y)}{2} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 6.4.** Suponhamos que sejam válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

entre as coordenadas  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  de um ponto  $P$  em relação a um sistema de coordenadas  $\{O, U_1, U_2\}$  e as coordenadas de  $P$ ,  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , em relação ao sistema de coordenadas original  $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$ . Queremos determinar quais são os vetores  $U_1$  e  $U_2$ .

Os vetores  $U_1$  e  $U_2$  da nova base possuem coordenadas  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , respectivamente, em relação ao novo sistema de coordenadas,  $\{O, U_1, U_2\}$ . Pois  $U_1 = 1U_1 + 0U_2$  e  $U_2 = 0U_1 + 1U_2$ . Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original,  $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$ . Logo,

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,  $U_1$  e  $U_2$  são as colunas da matriz  $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ .

## 6.2 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas  $\{O, U_1, U_2\}$  seja obtido do sistema original  $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$  por uma rotação de um ângulo  $\theta$ . Observando a Figura 6.4, obtemos:

$$U_1 = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$U_2 = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

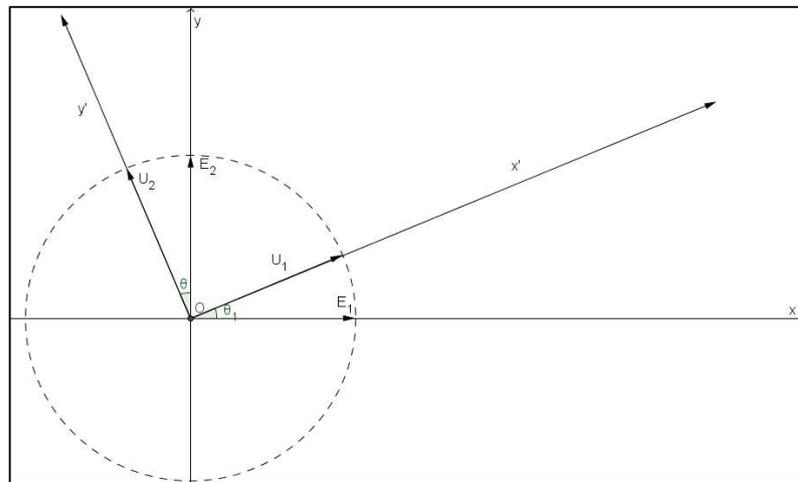


Figura 6-4: Rotação de um ângulo  $\theta$ .

Seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar  $x'$  e  $y'$  tais que  $x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}$ . A equação é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad \text{ou seja:} \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

ou  $R_\theta X = P$ , em que  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  e  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta^{-1}P = R_\theta^T P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O sistema de coordenadas que aparece nos dois primeiros exemplos desta seção pode ser obtido por uma rotação de um ângulo  $\theta = \frac{\pi}{6}$  em relação ao sistema original. A matriz  $R_\theta$  é chamada matriz de rotação (Giacaglia, 1985).

### 6.3 Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que  $O' \neq O$ , ou seja, em que ocorre uma translação dos eixos coordenados. Observando a Figura 6.5, obtemos  $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$ . Assim, se  $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$ , então  $\overrightarrow{O'P} = (x', y') = (x, y) - (h, k) = (x - h, y - k)$ .

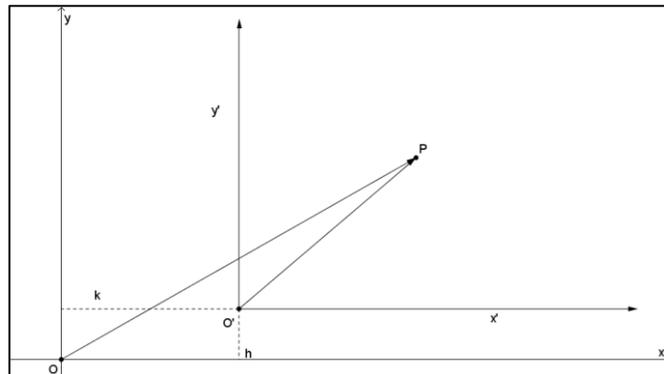


Figura 6-5: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação).

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dadas por

$$[P]_{\{O', E_1, E_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}.$$

O eixo  $x'$  tem equação  $y' = 0$ , ou seja,  $y = k$  e o eixo  $y'$ ,  $x' = 0$ , ou seja,  $x = h$ .

Seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do plano, que tenha coordenada  $x$  e  $y$  em relação ao sistema  $xOy$ , e coordenadas  $x'$  e  $y'$  em relação ao sistema  $x'O'y'$ . Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas  $x'O'y'$ , para isto obtemos a seguinte relação de translação:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}} \text{ ou seja: } \boxed{\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}}.$$

#### 6.4 Aplicação das translações e rotações em $\mathbb{R}^2$ ao estudo da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

No sistema ortogonal de coordenadas  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  em  $\mathbb{R}^2$ , será de grande utilidade no próximo capítulo fazer simplificações na equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

Vamos analisar aqui duas questões:

- I. Eliminar por meio de uma translação os termos de 1° grau.

Consiste em descobrir o ponto  $P = (x_0, y_0)$  para o qual se deve transladar o sistema de modo que a equação (1) se transforme numa equação da forma:  $\bar{A}x'^2 + \bar{B}x'y' + \bar{C}y'^2 + \bar{F} = 0$ . (2)

Substituindo as equações de translação  $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$  em (1) temos:

$$A(x_0 + x')^2 + B(x_0 + x')(y_0 + y') + C(y_0 + y')^2 + D(x_0 + x') + E(y_0 + y') + F = 0$$

e assim

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (By_0 + 2Ax_0 + D)x' + (2Cy_0 + Bx_0 + E)y' + Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0.$$

Então devemos encontrar  $x_0$  e  $y_0$  de modo que:

$$\begin{cases} By_0 + 2Ax_0 + D = 0 \\ 2Cy_0 + Bx_0 + E = 0 \end{cases}.$$

Se o sistema tiver solução, a questão estará resolvida. Note que se o determinante  $\begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC$  for diferente de zero, o sistema terá solução única. Se for nulo terá infinitas soluções ou poderá não ter nenhuma solução. Neste caso, não será possível eliminar os termos de 1° por uma translação.

Observamos também que os termos de segundo grau não são afetados pela translação de eixos, dizemos que os coeficientes dos termos de 2 graus são invariantes por translação (Venturi, 1949).

II. Eliminar, por meio de uma rotação, o termo misto de 2º grau.

Consiste em descobrir um ângulo de rotação tal que a equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  (1) se transforme após a rotação, em uma equação da forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \quad (3)$$

Após uma rotação de ângulo  $\theta$ , a equação (1) se transforma em:

$$A'x'^2 + Bx'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \quad (4)$$

onde:

- a)  $A' = A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \sin 2\theta + C \sin^2 \theta$ ,
- b)  $B' = (C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta$ ,
- c)  $C' = A \sin^2 \theta - \frac{B}{2} \sin 2\theta + C \cos^2 \theta$ ,
- d)  $D' = D \cos \theta + E \sin \theta$ ,
- e)  $E' = E \cos \theta - D \sin \theta$ ,
- f)  $F' = F$ .

Observamos a semelhança das relações, de onde podemos obter (d) e (e):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & y' & x' \\ \hline x & \cos \theta & -\sin \theta \\ \hline y & \sin \theta & \cos \theta \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & D' & E' \\ \hline D & \cos \theta & -\sin \theta \\ \hline E & \sin \theta & \cos \theta \\ \hline \end{array}.$$

A última igualdade (f) indica que rotações não alteram o termo independente, ou seja, é invariante por rotações.

Como o termo misto é eliminado,  $B' = 0$ , ou seja:

$$(C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0.$$

- Se  $A = C$ , então  $\cos 2\theta = 0$ , portanto  $\theta$  poderá ser  $\frac{\pi}{4}$ , de onde (a) e (c),  $A' = \frac{1}{2}(A + B + C)$  e  $C' = \frac{1}{2}(A - B + C)$ ; ou  $\frac{3\pi}{4}$ , e segue que  $A' = \frac{1}{2}(A - B + C)$  e  $C' = \frac{1}{2}(A + B + C)$ .
- Se  $A \neq C$ , temos:  $B \cos 2\theta = -(C - A) \sin 2\theta$ , dividindo a igualdade por  $\cos 2\theta$  temos:  

$$B = -(C - A) \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \rightarrow \boxed{\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}}.$$

Não necessariamente a translação preceda a rotação. A ordem das transformações pode ser alterada dependendo da equação. Vimos na translação que se o sistema tiver solução única a questão estará resolvida, ou seja, o determinante  $\begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC \neq 0$ . Note que se esse determinante for nulo não será possível eliminar os termos de primeiro grau através da translação, isso ocorre nas equações da parábola como veremos a seguir, onde  $B^2 = 4AC$ , logo a ordem das transformações deverá ser primeiro a rotação e posteriormente a translação (Venturi, 1949).

## Parte II

---

### 7 Cônicas: descrição elementar e formas canônicas

Uma cônica no plano é definida como o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem a equação:  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , em que  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são números reais, com  $a, b$  ou  $c$  não nulos. A elipse, a hipérbole e a parábola são chamadas de cônicas não degeneradas. As outras que incluem um único ponto e um par de retas são chamadas cônicas degeneradas (Boulos & CAMARGO, 2005).

As cônicas não degeneradas podem ser obtidas da interseção de um cone circular com um plano.

Definiremos as cônicas como um conjunto de pontos que satisfazem certas propriedades e determinaremos suas formas canônicas.

#### 7.1 Elipse

**Definição 7.1** A elipse é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que a soma das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (focos) é constante, ou seja, se  $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$ . Assim a elipse é o conjunto dos pontos  $P$  tais que:  $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$ , em que  $a > c$ .

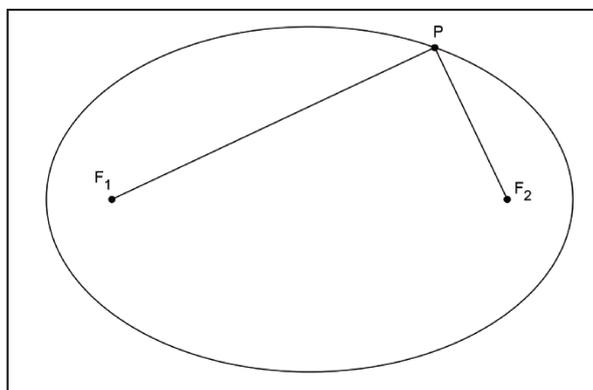


Figura 7-1: Elipse, conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que  $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$ .

### 7.1.1 Equação da Elipse na forma reduzida

Tomando um sistema ortogonal como mostra a Figura 7.2, a igualdade  $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$  fica, para  $P = (x, y)$ ,  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ :

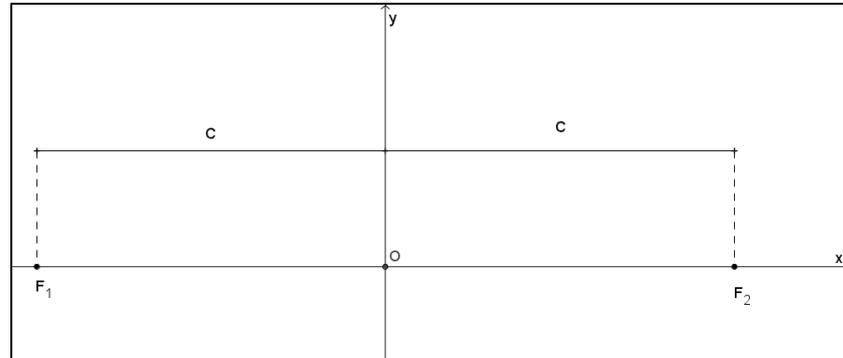


Figura 7-2: Sistema ortogonal.

$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$ , portanto  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$  e logo  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ .

Elevando ao quadrado obtemos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

assim

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx,$$

e portanto

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado obtemos

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

logo

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

e assim

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como  $(a^2 - c^2) > 0 \Rightarrow a > c > 0$ , vamos dividir a igualdade por  $a^2(a^2 - c^2)$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

Seja  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Então  $0 < b < a$  e  $a^2 = b^2 + c^2$ , logo a equação da elipse é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

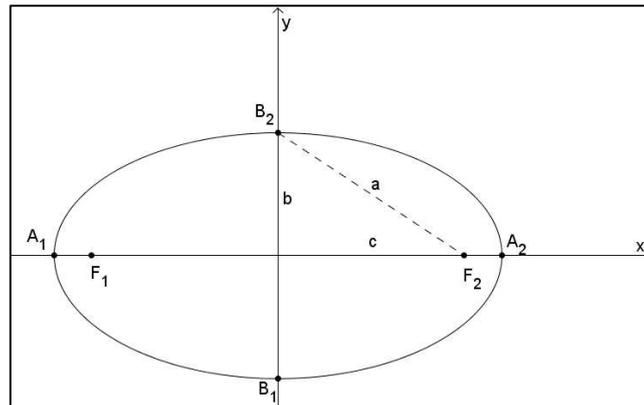


Figura 7-3: Elipse com focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ .

A Figura 7.3 apresenta uma elipse com foco nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , e pontos  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$  pertencentes a elipse.

A Figura 7.4 apresenta uma elipse com foco nos pontos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , e pontos  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$  e  $B_2 = (b, 0)$  pertencentes a elipse. Neste caso  $F_1$  e  $F_2$  estão no eixo  $O_y$ , então de forma análoga,  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  e fornecerá a seguinte equação:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}.$$

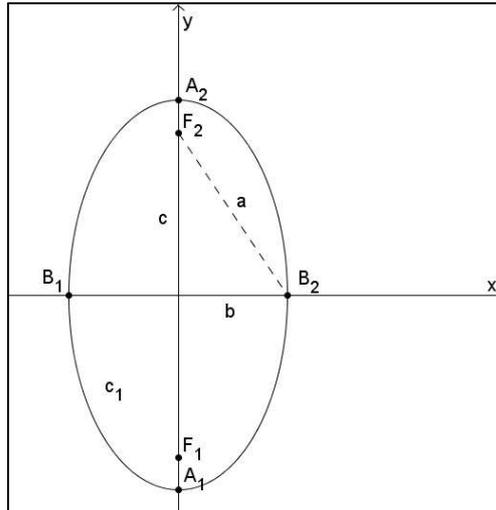


Figura 7-4: Elipse com focos nos pontos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ .

Nas Figuras 7.3 e 7.4, os pontos  $A_1$  e  $A_2$  são os vértices da elipse. Os segmentos  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  são chamados eixos da elipse.

A excentricidade da elipse é o número  $e = \frac{c}{a}$ . Como,  $c < a$ , a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor que 1. Observe que se  $F_1 = F_2$ , então a elipse reduz-se ao círculo de raio  $a$ . Além disso, como  $c = 0$ , então  $e = 0$ . Assim o círculo é uma elipse de excentricidade nula.

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma geratriz.

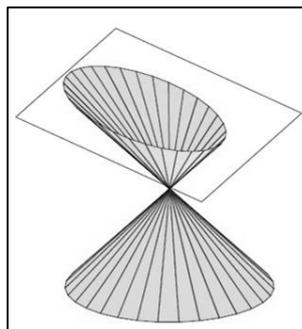


Figura 7-5: Elipse obtida seccionando-se um cone no plano.

**Exemplo 7.1.** Escreva a equação reduzida da elipse de focos  $F_1 = (0, -3)$  e  $F_2 = (0, 3)$  e  $a = 5$ . Temos que  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , logo  $c = 3$  e que  $a^2 = b^2 + c^2$ , logo:  $5^2 = b^2 +$

$3^2 \Rightarrow 25 - 9 = b^2 \Rightarrow b^2 = 16$ . Neste caso os focos da elipse estão no eixo  $O_y$ , e a sua equação é da forma (vide Figura 7.4):  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ , portanto  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

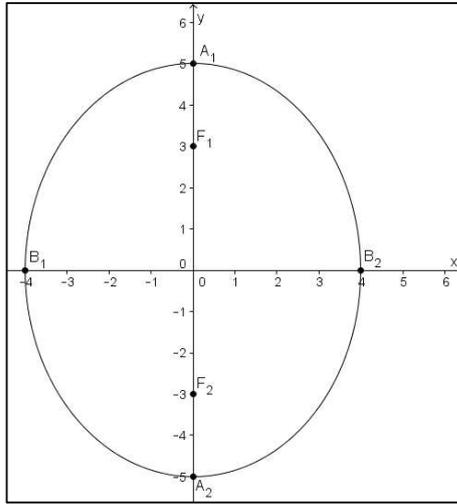


Figura 7-6: Elipse de focos  $F_1 = (0, -3)$  e  $F_2 = (0, 3)$  e  $a = 5$ .

## 7.2 Hipérbole

**Definição 7.1** A hipérbole é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é constante, ou seja, se  $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$ , então a hipérbole é o conjunto dos pontos  $P$  tais que:

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a, \text{ em que } a < c.$$

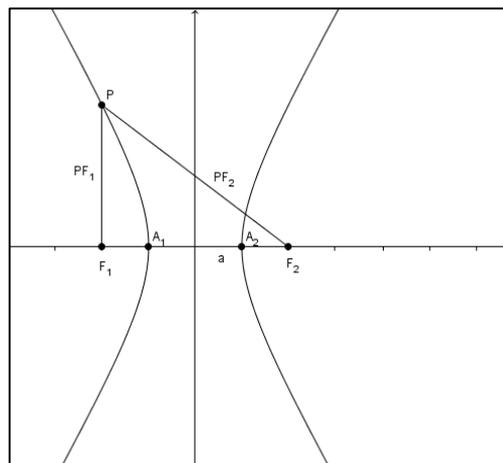


Figura 7-7: Hipérbole, conjunto dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a$ .

### 7.2.1 Equação da Hipérbole na forma reduzida

Tomando um sistema ortogonal como mostra a Figura 7.2, da mesma forma como no caso da elipse, chega-se que  $P = (x, y)$  está na hipérbole se e somente se:

$$\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) = 2a, \text{ portanto } \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

e logo

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

em seguida

$$2cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx,$$

e finalmente

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando novamente ao quadrado obtemos

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

assim

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4$$

e portanto

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como  $(c^2 - a^2) > 0 \Rightarrow 0 < a < c$ , vamos dividir a igualdade por  $a^2(c^2 - a^2)$ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1.$$

Seja  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ . Então  $0 < b < c$  e  $c^2 = a^2 + b^2$ , logo a equação da hipérbole

é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Se a equação da hipérbole é resolvida em  $y$  obtemos  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  que, para  $x > 0$ , pode ser escrita como  $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ .

Quando  $x \rightarrow \pm\infty$  a equação se aproxima de  $y = \pm \frac{b}{a} x$ .

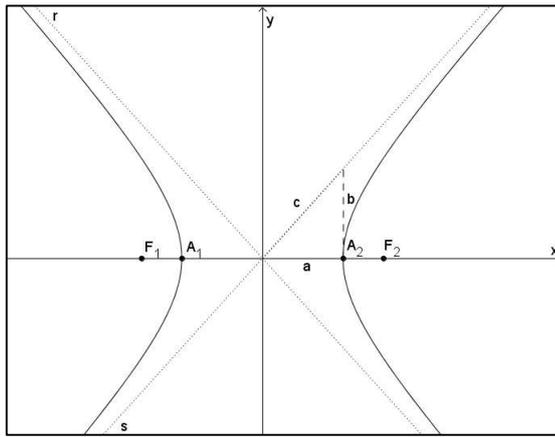


Figura 7-8: Hipérbole com focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ .

A Figura 7.8 apresenta uma hipérbole com focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , e pontos  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ , pertencentes a hipérbole. As retas  $r: y = -\frac{b}{a}x$  e  $s: y = \frac{b}{a}x$  são também chamadas de assíntotas.

A Figura 7.9 apresenta uma hipérbole com focos nos pontos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , e pontos  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ , pertencentes a hipérbole. Como os focos estão no eixo  $O_y$  a hipérbole terá equação:

$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1},$$

com  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

As retas  $\boxed{r: y = -\frac{a}{b}x}$  e  $\boxed{s: y = \frac{a}{b}x}$  são as assíntotas.

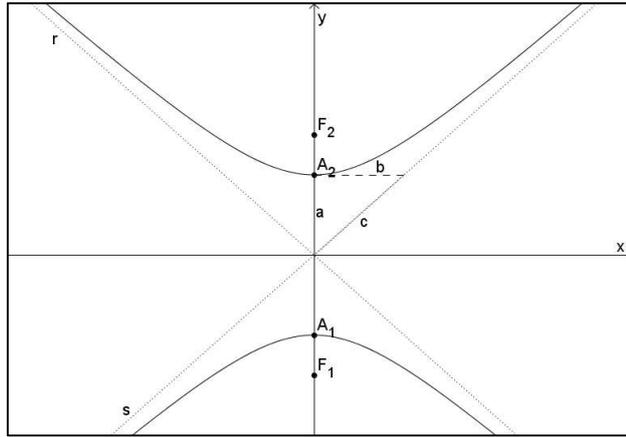


Figura 7-9: Hipérbole com focos nos pontos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ .

A hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma geratriz e que corta as duas folhas da superfície com mostra a Figura 7.10.

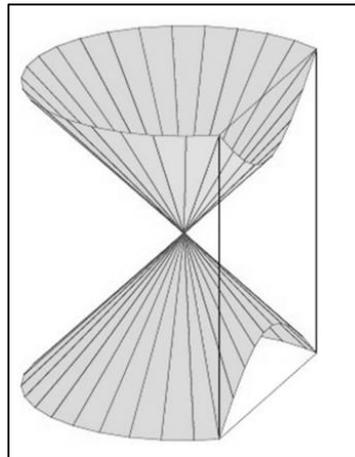


Figura 7-10: Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano.

**Exemplo 7.2.** Determine os vértices, os focos, a excentricidade ( $e = \frac{c}{a}$ ) e as assíntotas da hipérbole  $9y^2 - 4x^2 = 36$ . Dividindo a equação por 36 obtemos  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ . Os focos estão no eixo  $O_y$  a hipérbole terá equação da forma:  $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ , logo  $a = 2$  e  $b = 3$ . Sendo  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ , calculamos  $c = \sqrt{13}$ . Os focos da hipérbole são:  $F = (0, \pm c) \rightarrow F_1 = (0, -\sqrt{13})$  e  $F_2 = (0, \sqrt{13})$ . Os vértices da hipérbole são:  $A = (0, \pm a) \rightarrow A_1 = (0, -2)$  e  $A_2 = (0, 2)$ . A excentricidade da hipérbole é  $e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ . Assíntotas:  $y = \pm \frac{a}{b}x \rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x$ .

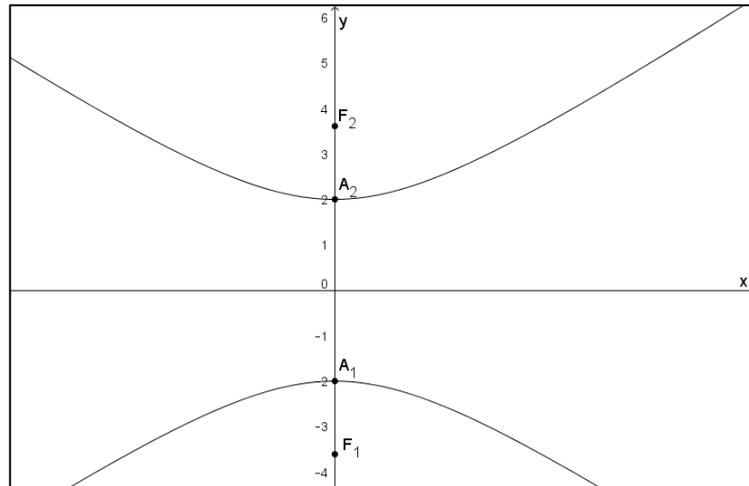


Figura 7-11: Hipérbole  $9y^2 - 4x^2 = 36$ .

### 7.3 Parábola

**Definição 7.2** Uma parábola é o conjunto de pontos  $P$  no plano equidistantes de uma reta  $r$  (diretriz) e de um ponto  $F$  (foco), não pertencente a  $r$ , ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos  $P$  tais que  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$ .

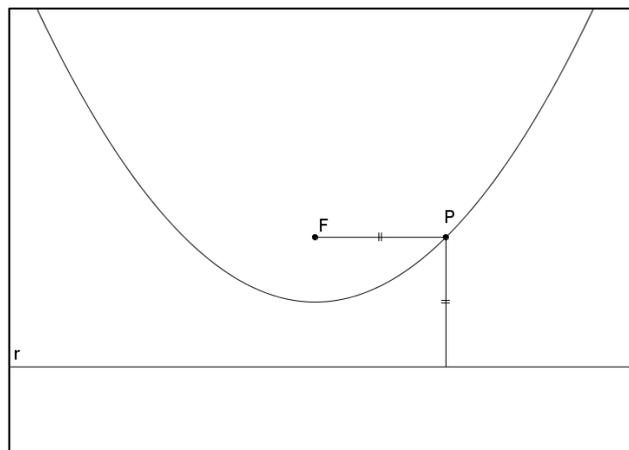


Figura 7-12: Parábola, conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$ .

#### 7.3.1 Equação da Parábola na forma reduzida

Tomemos um sistema ortogonal como se mostra na figura. Seja  $2p = d(F, r)$ . Neste caso,  $F = (p, 0)$   $r: x = -p \therefore x + p = 0$

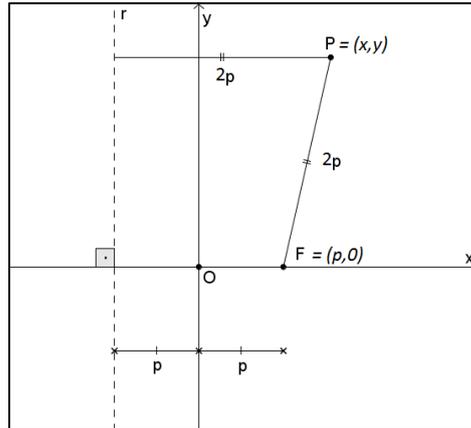


Figura 7-13: Sistema ortogonal e os pontos  $P = (x, y)$ ,  $F = (p, 0)$  e a reta  $r: x = -p$ .

Então  $P = (x, y)$  está na parábola se e somente se  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$ , isto é,  
 $\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \frac{|x+p|}{\sqrt{1^2+0^2}}$  que elevando ao quadrado e simplificando é equivalente a  
 $y^2 = 4px$ .

Já a equação da parábola com foco  $F = (0, p)$  e reta diretriz  $r: y = -p$ , como mostra a Figura 7.14 pode ser obtida de forma análoga que é  $x^2 = 4py$ .

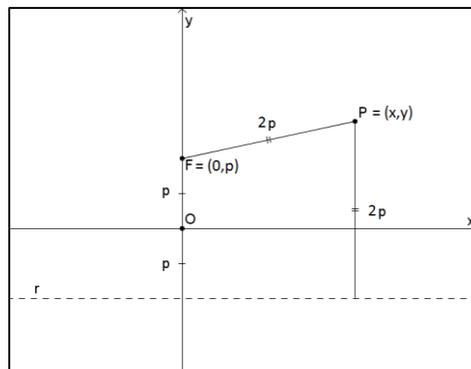


Figura 7-14: Sistema ortogonal e os pontos  $P = (x, y)$ ,  $F = (0, p)$  e a reta  $r: y = -p$ .

Escolhendo outros sistemas de coordenadas a equação da parábola muda, segue alguns casos:

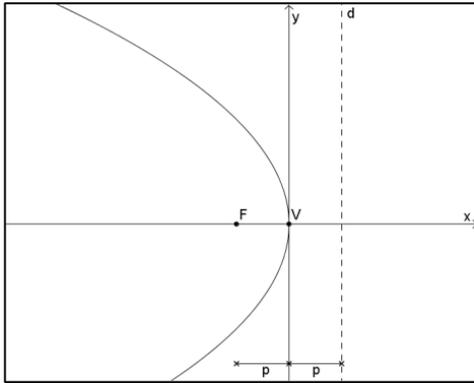


Figura 7-15: Parábola  $y^2 = -4px$ .

$$F = (-p, 0)$$

$$r: x = p$$

$$y^2 = -4px$$

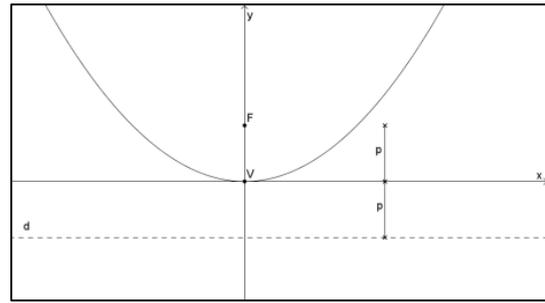


Figura 7-16: Parábola  $y = \frac{1}{4p}x^2$ .

$$F = (0, p)$$

$$r: y = -p$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

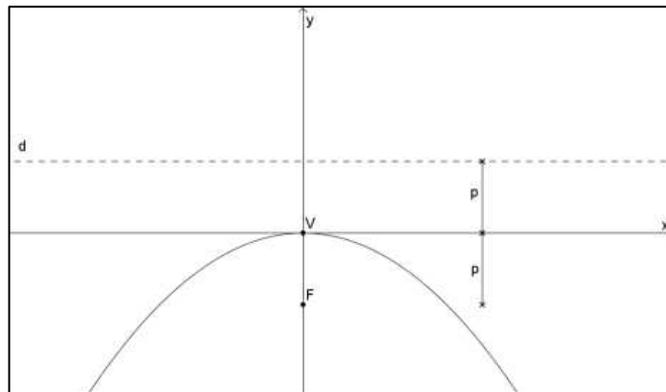


Figura 7-17: Parábola  $y = -\frac{1}{4p}x^2$ .

$$F = (0, -p)$$

$$r: y = p$$

$$y = -\frac{1}{4p}x^2$$

A Parábola é uma seção cônica gerada pela interseção de uma superfície cônica e um plano paralelo à reta geratriz do cone, sendo que o plano não contém esta, como mostra a Figura 7.18:

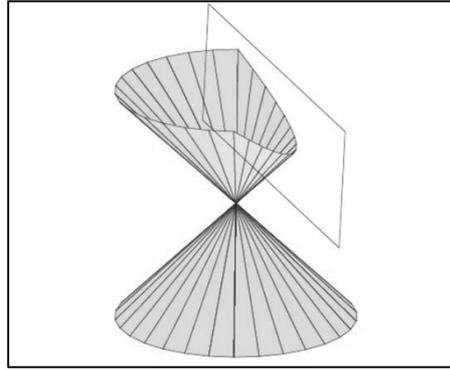


Figura 7-18: Parábola obtida seccionando-se um cone.

**Exemplo 7.3.** Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola  $y^2 + 28x = 0$ .

Podemos reescrever a parábola como  $y^2 = -28x \rightarrow y^2 = -4(7)x$ . Assim como mostra a Figura 7.15, determinamos que: foco  $F = (-7,0)$ , vértice  $V = (0,0)$  e diretriz  $d: x = 7$ .

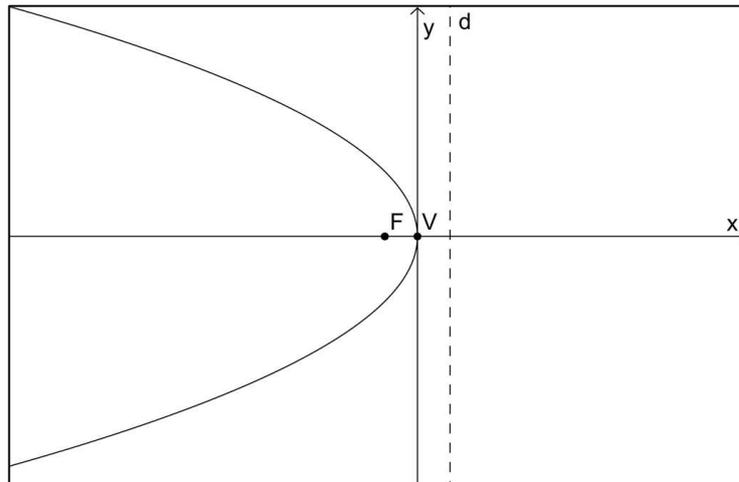


Figura 7-19: Parábola  $y^2 + 28x = 0$ .

## 7.4 Caracterização das Cônicas

Todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

**Proposição 7.1** Seja  $r$  uma reta fixa (diretriz) e  $F$  um ponto fixo (foco) tal que  $F \notin r$ . O conjunto dos pontos do plano  $P = (x, y)$  tais que  $\text{dist}(P, F) = e \text{ dist}(P, r)$ , em que  $e > 0$  é uma constante fixa, é uma cônica.

- a) Se  $e = 1$ , então a cônica é uma parábola.
- b) Se  $0 < e < 1$ , então a cônica é uma elipse.
- c) Se  $e > 1$ , então a cônica é uma hipérbole.

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma  $\text{dist}(P, F) = e \text{ dist}(P, r)$ .

## 8 Classificação de Cônicas I: Translação

### 8.1 Elipse Transladada

Por meio de uma translação de eixos, representamos um novo sistema  $Ox'y'$ , cuja origem  $O' = (x_0, y_0)$  coincide com o centro da elipse e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados. A equação da elipse cujos focos estão na reta paralela ao eixo  $x$  ao novo sistema  $Ox'y'$  é:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad (1)$$

Porém conforme já visto anteriormente no capítulo 6, podemos escrever  $x'$  e  $y'$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

Esta é a equação canônica da elipse de centro  $O' = (x_0, y_0)$  e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo  $x$  como mostra a Figura 8.1:

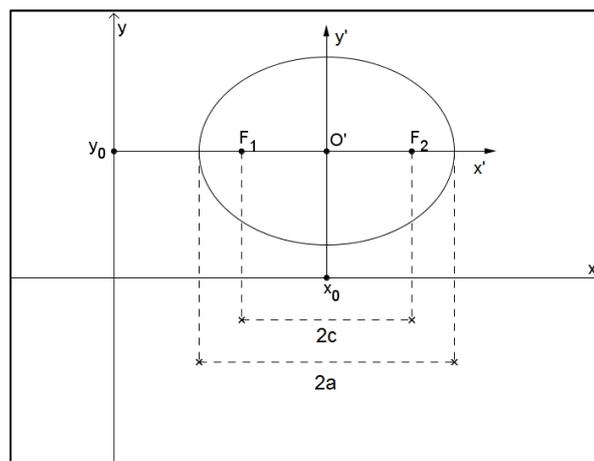
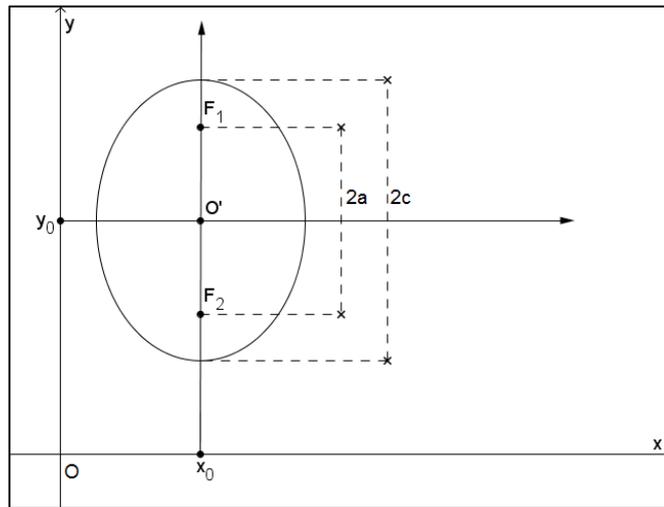


Figura 8-1: Elipse de centro  $O' = (x_0, y_0)$  e focos sobre uma reta paralela ao eixo  $x$ .

Quando os focos da elipse estão sobre uma reta paralela ao eixo  $y$  como mostra a Figura 8.2, adotando um raciocínio similar ao anterior, teremos a seguinte equação para esta elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1. \quad (\text{II})$$



Elipse 8-2: Elipse de centro  $O' = (x_0, y_0)$  e focos sobre uma reta paralela ao eixo  $y$ .

Tanto em (I) como em (II) desenvolvendo-se os produtos notáveis e ordenando-se as variáveis, a equação da elipse assume a forma  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , em que  $A$  e  $C$  são não nulos tem o mesmo sinal e  $A \neq C$ .

**Exemplo 8.1.** Determinar a equação da elipse de centro no ponto  $P = (3, -2)$  e focos  $F_1 = (2, -2)$  e  $F_2 = (4, -2)$  e  $a = 2$ . Faça um esboço da elipse.

**Solução:** A distância de cada foco ao centro  $P$  da elipse é 1, logo  $c = 1$ . Sendo assim:  $b^2 = a^2 + c^2 \rightarrow b^2 = \sqrt{3}$ . Como os focos são paralelos ao eixo  $x$ , a equação da elipse é da forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1.$$

Ao desenvolver a equação obtemos:  $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 31 = 0$ .

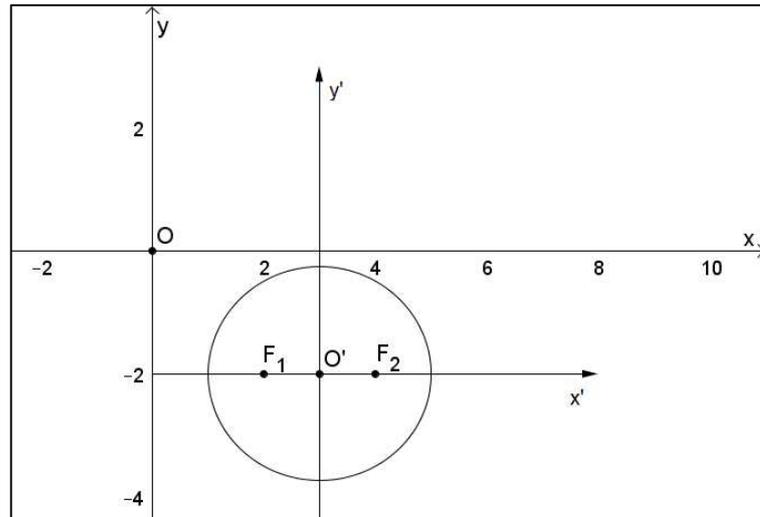


Figura 8-3: Elipse  $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 31 = 0$ .

**Exemplo 8.2.** Determinar a equação canônica e as coordenadas dos focos da elipse  $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$ . Faça um esboço da elipse.

**Solução:** Pela translação deve-se eliminar os termos em  $x$  e em  $y$  do primeiro grau, levando em conta que:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Sendo assim:  $9(x_0 + x')^2 + 4(y_0 + y')^2 - 54(x_0 + x') - 32(y_0 + y') + 109 = 0$ .

Fazendo o coeficiente de  $x' = 0$ :

$$18x_0 - 54 = 0 \rightarrow x_0 = 3.$$

Fazendo o coeficiente de  $y' = 0$ :

$$8y_0 - 32 = 0 \rightarrow y_0 = 4.$$

Logo o centro  $O' = (3, 4)$ . A nova equação:  $9x'^2 + 4y'^2 + F' = 0$ , onde  $F' = 9(3)^2 + 4(4)^2 - 54(3) - 32(4) + 109 = -36$ . Portanto:  $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ ,  $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$ .

Coordenadas dos focos:  $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 9 - 4 = 5$  e assim:  $c = \sqrt{5}$ . Sabendo que  $F_1 = (x, y + c)$  e  $F_2 = (x, y - c)$  e que  $x = x_0 + x'$  e  $y = y_0 + y'$ , obtemos  $F_1 = (3, 4 + \sqrt{5})$  e  $F_2 = (3, 4 - \sqrt{5})$ .

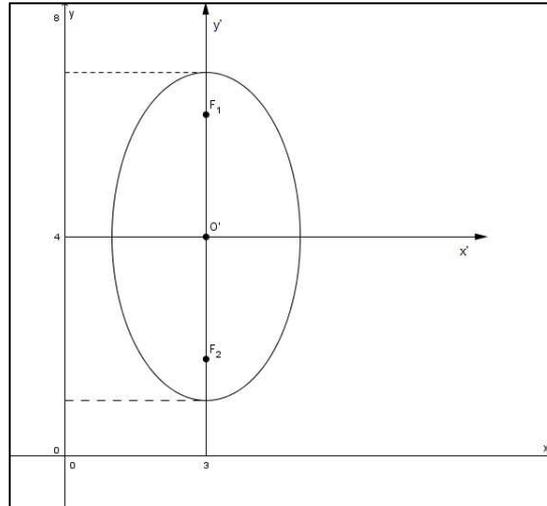


Figura 8-4: Elipse  $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$ .

**Exemplo 8.3.** Qual é a equação do conjunto de pontos  $P = (x, y)$  cuja soma das distâncias a  $F_1 = (1, 0)$  e  $F_2 = (3, 0)$  é 5?

**Solução:** Temos  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 5$ , logo  $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 5$  e assim  $[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}]^2 = 5^2$ .

$$(x+1)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + (x-3)^2 + y^2 = 25,$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 15 = -2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

$$(2x^2 + 2y^2 - 8x - 15)^2 = (-2)^2[\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-3)^2 + y^2}]^2.$$

Ao desenvolver esta igualdade obtemos:  $84x^2 + 100y^2 - 336x - 189 = 0$ .

## 8.2 Hipérbole Transladada

Por meio de uma translação de eixos, representamos um novo sistema  $Ox'y'$ , cuja origem  $O' = (x_0, y_0)$  coincide com o centro da hipérbole e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados. A equação da hipérbole cujos focos estão na reta paralela ao eixo  $x$  ao novo sistema  $Ox'y'$  é:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad .(1)$$

Como há translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \cdot (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad . (I)$$

Esta é a equação canônica da hipérbole de centro  $O' = (x_0, y_0)$  e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo  $x$  como mostra a Figura 8.5:

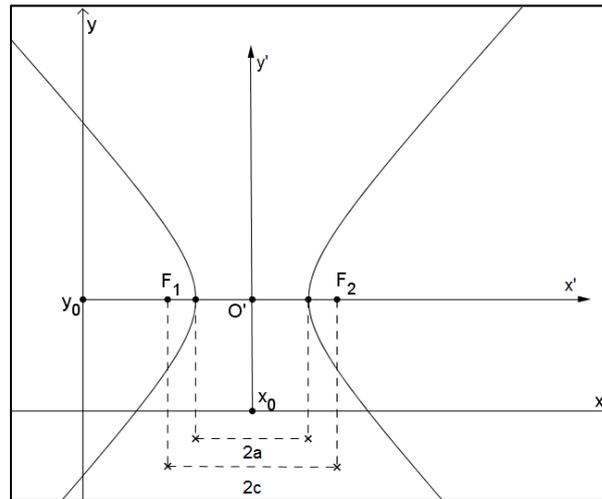


Figura 8-5: Hipérbole de centro  $O' = (x_0, y_0)$  e focos paralelos ao eixo  $x$ .

Quando os focos da hipérbole estão sobre uma reta paralela ao eixo  $y$  como mostra a Figura 8.6, adotando um raciocínio similar ao anterior, teremos a seguinte equação para esta hipérbole:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \quad . (II)$$

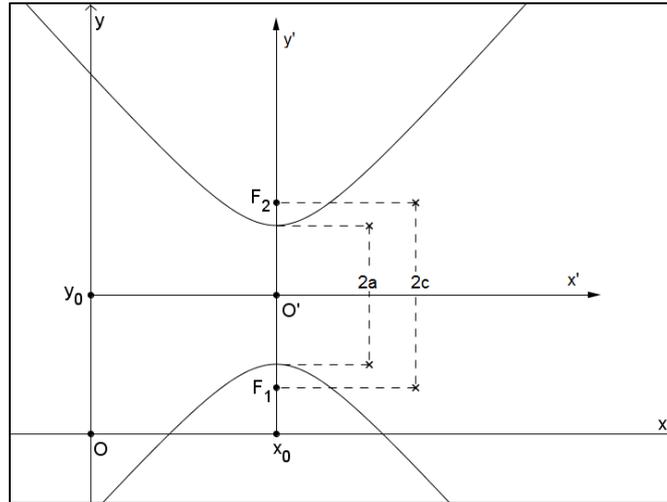


Figura 8-6: Hipérbole de centro  $O' = (x_0, y_0)$  e focos paralelos ao eixo  $y$ .

Tanto em (I) como em (II) desenvolvendo-se os produtos notáveis e ordenando-se as variáveis, a equação da hipérbole assume a forma  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , em que  $A$  e  $C$  são não nulos e diferem em sinal.

As demais, quando a hipérbole tem centro  $O' = (x_0, y_0)$ , as assíntotas passarão por esse ponto e terão por equações:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \text{ para a hipérbole (I).}$$

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0) \text{ para a hipérbole (II).}$$

**Exemplo 8.4.** Determinar a equação da hipérbole e assíntotas com focos nos pontos  $F_1 = (2,2)$  e  $F_2 = (6,2)$  e um vértice  $A_1 = (3,2)$ . Faça um esboço da hipérbole.

**Solução:** Observamos que a hipérbole tem focos sobre o eixo  $x$  e que o centro  $O'$  é o ponto médio dos focos  $F_1$  e  $F_2$ , logo  $O' = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (4,2)$ . Sendo assim  $a = d(F_1, A_1) \rightarrow a = 1$

e  $c = d(F_1, O') = 2$ . Temos que  $b^2 = a^2 + c^2$  e assim  $b = \sqrt{3}$ . A equação da hipérbole se configura:  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$  ou  $3x^2 - y^2 - 24x + 4y + 41 = 0$ .

Assíntotas:  $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \rightarrow y = \pm\sqrt{3}(x - 2) + 2$ .

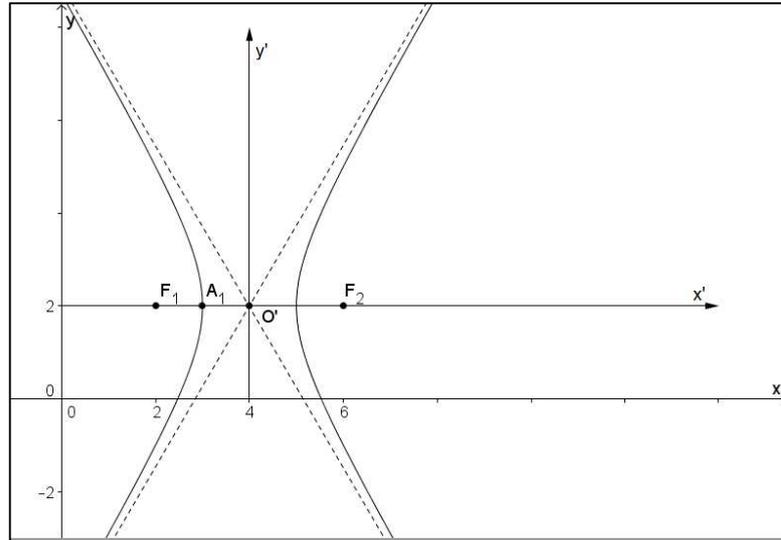


Figura 8-7: Hipérbole de focos  $F_1 = (2, 2)$  e  $F_2 = (6, 2)$  e vértice  $A_1 = (3, 2)$ .

**Exemplo 8.5.** Obter os focos, o centro, os vértices e as assíntotas da hipérbole  $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$ .

**Solução:** Na hipérbole transladada vimos que temos a seguinte correspondência:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}.$$

Substituindo temos:  $4(x_0 + x')^2 - (y_0 + y')^2 - 8(x_0 + x') - 4(y_0 + y') - 4 = 0$ .

Fazendo o coeficiente  $x' = 0$ ,

$$8x_0 - 8 = 0 \rightarrow x_0 = 1.$$

Fazendo o coeficiente  $y' = 0$ ,

$$-2y_0 - 4 = 0 \rightarrow y_0 = -2.$$

Logo o centro  $O' = (1, -2)$ . A nova equação tem a forma:  $4x'^2 - y'^2 + F' = 0$ , onde  $F' = 4(1)^2 - (-2)^2 - 8(1) - 4(-2) - 4 = -4$ .

Portanto:  $4x'^2 - y'^2 = 4$ ,  $\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1$ .

Coordenadas dos focos:  $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 1 + 4 = 5$ ,  $c = \sqrt{5}$ . Sabendo que  $F_1 = (x - c, y)$  e  $F_2 = (x + c, y)$ , obtemos  $F_1 = (1 - \sqrt{5}, -2)$  e  $F_2 = (1 + \sqrt{5}, -2)$ . Vértices: sendo  $a = 1$ , temos  $A_1 = (0, -2)$  e  $A_2 = (2, -2)$ . Assíntotas:  $y - y_0 = \pm 2(x - 1) \rightarrow y = \pm 2(x - 1) - 2$ .

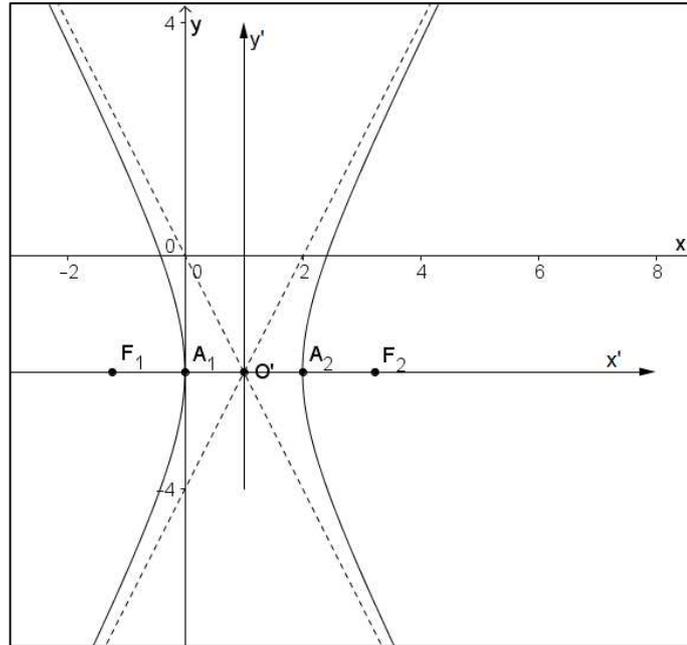


Figura 8-8: Hipérbole  $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$ .

### 8.3 Parábola Transladada

Por meio de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema  $x'O'y'$ , representamos um novo sistema  $Ox'y'$ , cuja origem  $O'$  coincide com o vértice da parábola  $V = (x_0, y_0)$  da parábola e cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo  $x$ .

A equação da parábola referida ao novo sistema  $x'O'y'$  é:

$$\boxed{y'^2 = 2px'} \quad (1)$$

Como há translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (I)$$

Ao desenvolver a equação (I) e isolando o  $x$ , temos:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2p}}_a y^2 + \underbrace{\frac{y_0}{p}}_b y + \underbrace{\frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}}_c \quad (I')$$

$$x = ay^2 + by + c \quad (I'')$$

Sendo assim:

$$a = \frac{1}{2p} \rightarrow p = \frac{1}{2a},$$

$$b = \frac{-y_0}{p} \rightarrow y_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Esta é a equação da parábola de centro  $V = (x_0, y_0)$  e cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo  $x$  como mostra a Figura 8.9. O parâmetro  $p$  será positivo ou negativo se, respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para a direita ou para a esquerda.

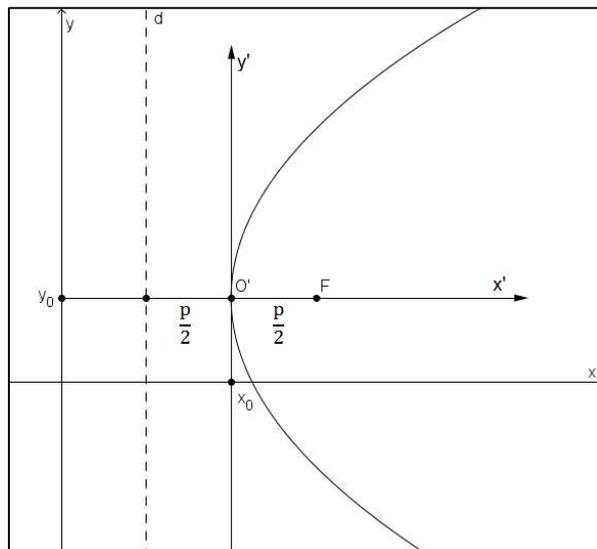


Figura: 8-9 Parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo  $x$ .

Quando a parábola de centro  $V = (x_0, y_0)$  e cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo  $y$  como mostra a Figura 8.10, a equação da parábola referida ao novo sistema  $x'O'y'$  é:

$$\boxed{x'^2 = 2py'} \quad (2)$$

Como há translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) obtemos:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (II)$$

Ao desenvolver a equação (II) e isolando o  $y$ , temos:

$$y = \underbrace{\frac{1}{2p}}_a x^2 + \underbrace{\frac{x_0}{p}}_b x + \underbrace{\frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}}_c, \quad (\text{II}')$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{II}'').$$

De forma análoga temos que:

$$p = \frac{1}{2a},$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

O parâmetro  $p$  será positivo ou negativo se, respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para cima ou para baixo.

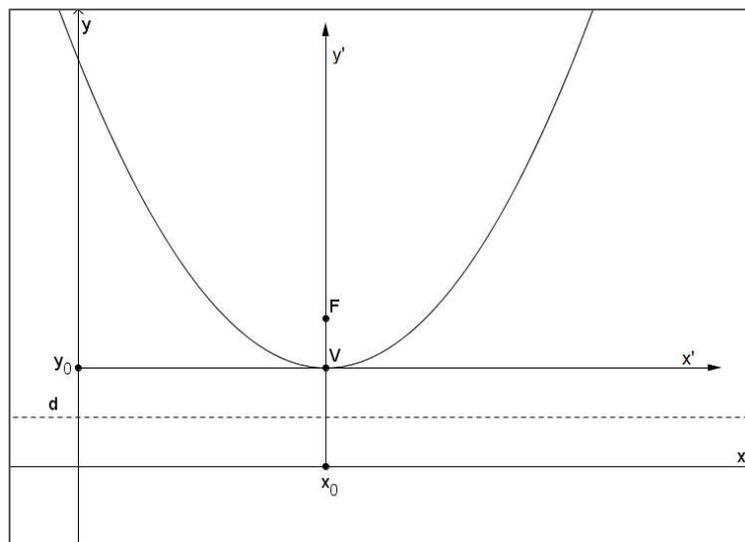


Figura 8-10: Parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo  $y$ .

**Exemplo 8.6.** Obter a equação da parábola com vértice  $V = (3,3)$  e foco  $F = (5,3)$ . Faça um esboço.

**Solução:** Temos  $\frac{p}{2} = d(V, F)$  e logo  $p = 4$ . Como o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo  $x$ , logo ela tem equação da forma:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

$$(y - 3)^2 = 8(x - 3) \rightarrow y^2 - 6y - 8x + 33 = 0.$$

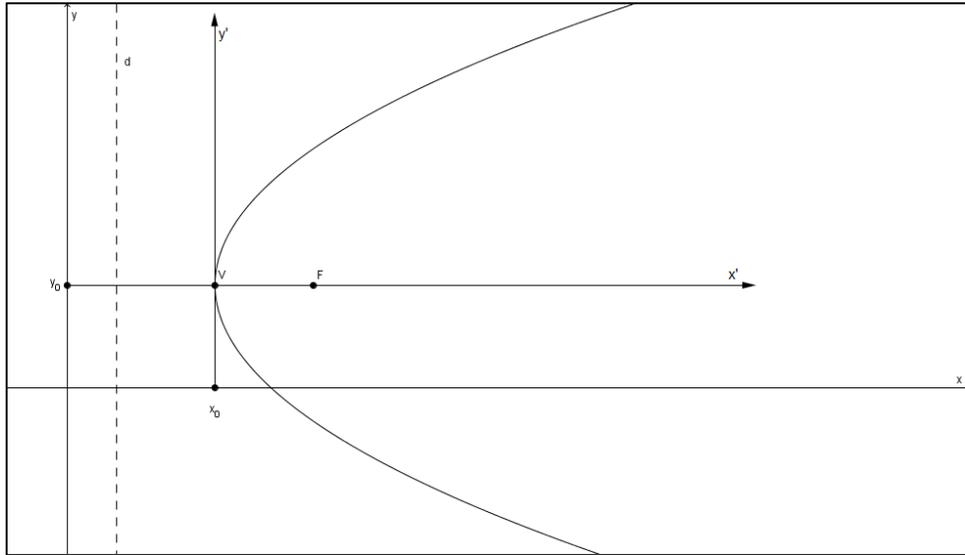


Figura 8-11: Parábola com vértice  $V = (3, 3)$  e foco  $F = (5, 3)$ .

**Exemplo 8.7.** Encontrar o foco, o vértice, a diretriz e esboçar o gráfico da parábola  $x^2 - 2x - 12y - 35 = 0$ .

**Solução:** A equação da parábola pode ser escrita como:  $(x - 1)^2 = 12(y - 3)$ , assim conseguimos identificar que a equação da parábola é da forma  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ , com vértice  $V = (1, 3)$ ,  $p = 6$  e eixo de simetria paralelo ao eixo  $y$ . Como  $d(V, F) = d(V, r) = 2p = 3$ , logo concluímos que  $F = (1, 0)$  e  $r: x = 6$ .

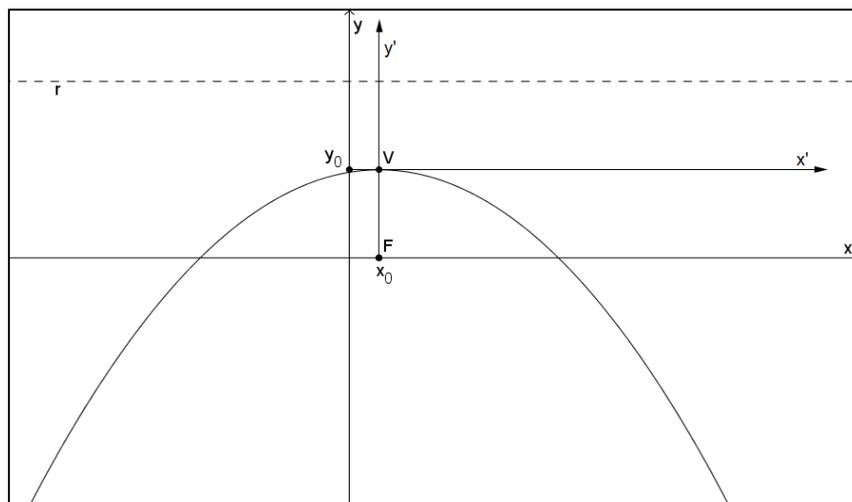


Figura 8-12: Parábola  $x^2 - 2x - 12y - 35 = 0$ .

## 9 Classificação de Cônicas II: Rotação

### 9.1 Elipse Rotacionada

Por meio de uma rotação  $\theta$  de eixos, representamos um novo sistema  $Ox'y'$ , cuja origem  $O = (0,0)$  coincide com o centro da elipse e cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados, ou seja, os eixos da elipse são oblíquos aos eixos cartesianos.

A equação da elipse cujos focos são oblíquos ao eixo  $x$ , no novo sistema  $Ox'y'$  é:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad (1)$$

Porém conforme já visto anteriormente no capítulo 6, podemos escrever  $x'$  e  $y'$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(-x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

Esta é a equação canônica da elipse de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $x$  como mostra a Figura 9.1:

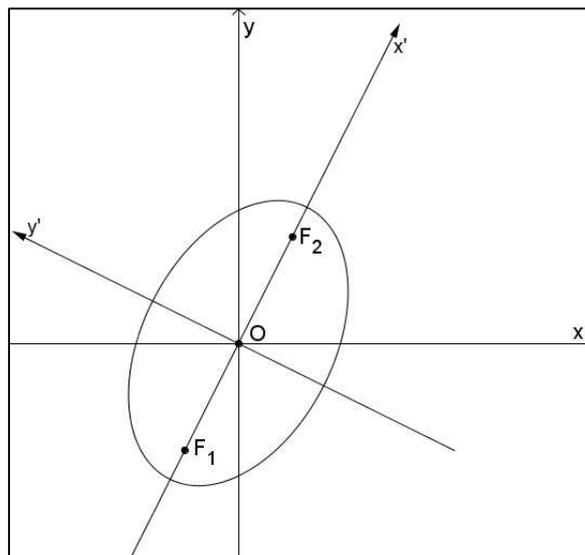


Figura 9-1: Elipse de centro  $O = (0, 0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $x$ .

Quando os focos da elipse de centro  $O = (0,0)$  são oblíquos ao eixo  $y$ , podemos escrever a equação como:

$$\boxed{\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1} \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3) obtemos:

$$\frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{b^2} + \frac{(-x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{a^2} = 1 \quad (II)$$

Esta é a equação canônica da elipse de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $y$  como mostra a Figura 9.2:

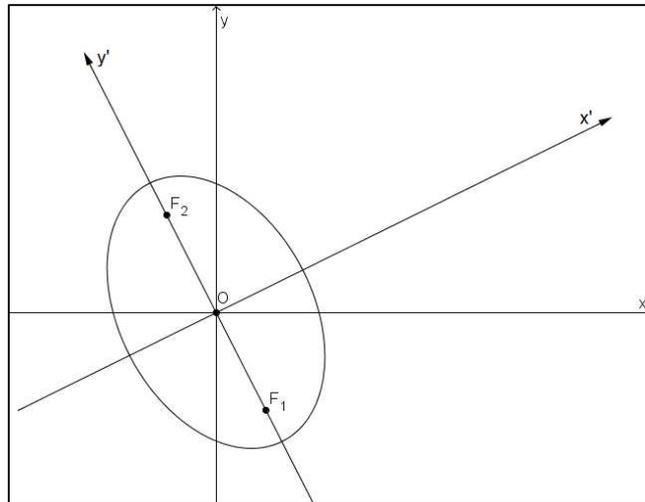
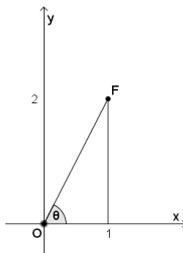


Figura 9-2: Elipse de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $y$ .

**Exemplo 9.1.** Uma elipse tem o centro na origem e um dos focos  $F_1 = (1,2)$ , sendo  $a = 2\sqrt{5}$  e  $c = \sqrt{5}$ . Obtenha a equação da elipse e faça um esboço do gráfico.

**Solução:**  $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 15$ .



Sendo  $F_1 = (1,2)$  e  $c = \sqrt{5}$ , conseguimos obter:  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  
 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Sabendo que a equação da elipse é da forma  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$

e que  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta \rightarrow x' = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}$  e  $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \rightarrow y' = \frac{-2x+y}{\sqrt{5}}$ ,

substituindo  $x'$  e  $y'$  na equação da elipse obtemos:

$$\frac{\left(\frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right)^2}{20} + \frac{\left(\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}\right)^2}{15} = 1,$$

$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{100} + \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{75} = 1.$$

$$\frac{3x^2 + 12xy + 12y^2 + 16x^2 - 16xy + 4y^2}{300} = 1 \rightarrow \boxed{19x^2 - 4xy + 16y^2 = 300}.$$

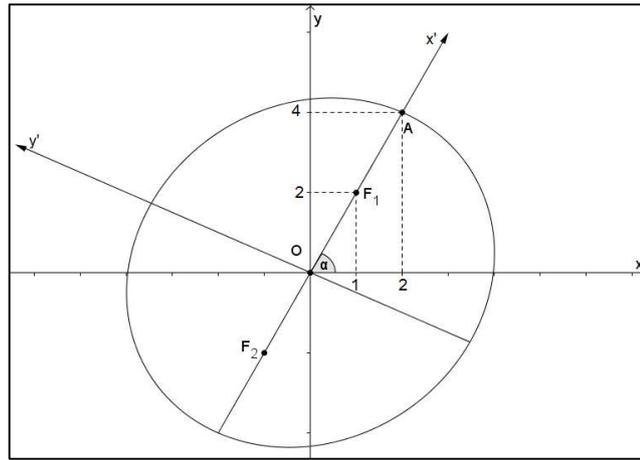


Figura 9-3: Elipse  $19x^2 - 4xy + 16y^2 = 300$ .

**Exemplo 9.2.** Determine a equação da elipse de focos  $F_1 = (-2, 2)$  e  $F_2 = (2, -2)$  com centro na origem e que passa pelo ponto  $P = (1, 1)$ . Faça um esboço do gráfico.

**Solução:** Temos que  $d(F_1, O) = d(F_2, O) = 2\sqrt{2}$  e  $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2^a \rightarrow 2\sqrt{10} = 2a$ ,  $a = \sqrt{10}$ . Como  $a^2 = b^2 + c^2$ , então  $b^2 = 10 - 8 \rightarrow b = \sqrt{2}$ .

Os focos estão sob a reta  $y = -x$ , logo concluímos que a elipse transladada tem o eixo focal

oblíquo ao eixo  $y$ , logo sua equação é da forma:  $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$  com  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , portanto  $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$  e  $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$ . Logo temos:

$$\frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)\right]^2}{2} + \frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)\right]^2}{10} = 1 \rightarrow 5x^2 + 10xy + 5y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 20,$$

$$\boxed{3x^2 + 4xy + 3y^2 = 10}.$$

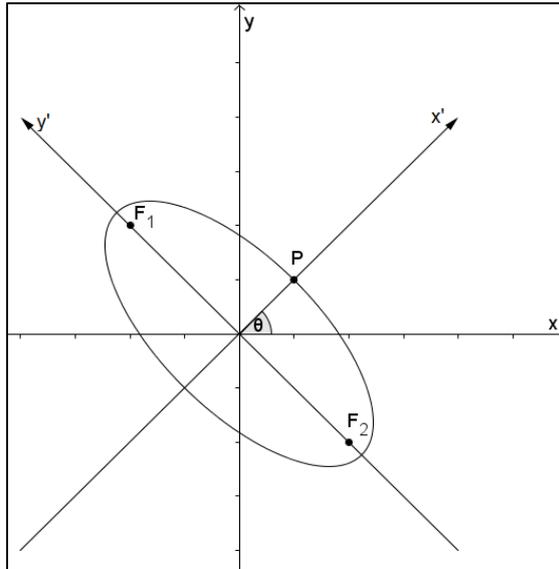
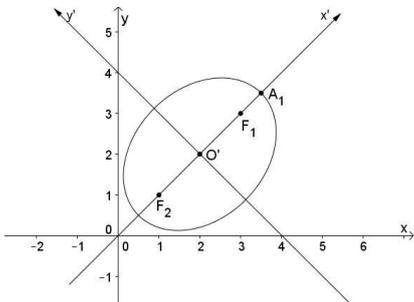


Figura 9-4: Elipse de focos  $F_1 = (-2, 2)$  e  $F_2 = (2, -2)$  com centro na origem e que passa pelo ponto  $P = (1, 1)$ .

**Exemplo 9.3.** Determine a equação da elipse com focos  $F_1 = (3,3)$  e  $F_2 = (1,1)$ , com centro no ponto  $O' = (2,2)$  e com um dos vértices iguais a  $A_1 = (7/2, 7/2)$ , conforme esboço do gráfico abaixo.



**Solução:** Temos que  $c = d(O', F_1) = \sqrt{2}$  e  $a = d(O', A_1) = \sqrt{4,5}$ , logo  $b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{2,5}$ . Como  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Sabendo que a equação da elipse é da forma  $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ , vamos realizar primeiro a rotação:  $x'' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y')$  e  $y'' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x' + y')$ .

$$\text{Logo } \frac{1}{2} \cdot \frac{(x'+y')^2}{4,5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-x'+y')^2}{2,5} = 1 \rightarrow \frac{(x'+y')^2}{9} + \frac{(-x'+y')^2}{5} = 1 \text{ e assim}$$

$14x'^2 + 14y'^2 - 8x'y' = 45$  (1). Como o centro  $O' = (2,2)$ , aplicaremos a translação de

$$\text{eixos } \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 2 \end{cases} \text{ (2). Substituindo (2) em (1):}$$

$14(x-2)^2 + 14(y-2)^2 - 8(x-2)(y-2) = 45$ , resolvendo resulta em:

$$\boxed{14x^2 + 14y^2 - 8xy + 40x - 40y = -35}.$$

## 9.2 Hipérbole Rotacionada

Por meio de uma rotação  $\theta$  de eixos, representamos um novo sistema  $Ox'y'$ , cuja origem  $O = (0,0)$  coincide com o centro da hipérbole e cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados, ou seja, os eixos da hipérbole são oblíquos aos eixos cartesianos.

A equação da hipérbole cujos focos são oblíquos ao eixo  $x$ , no novo sistema  $Ox'y'$  é:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad (1)$$

Porém conforme já visto anteriormente no Capítulo 6, podemos escrever  $x'$  e  $y'$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\ y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\frac{(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)^2}{a^2} - \frac{(-x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta)^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

Esta é a equação canônica da hipérbole de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $x$  como mostra a Figura 9.5:

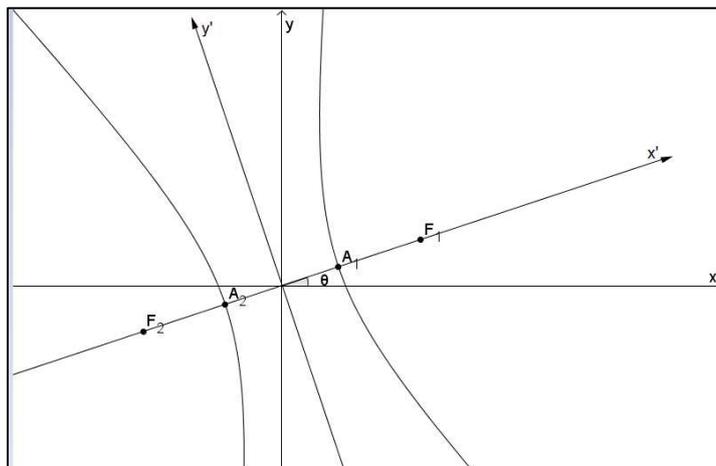


Figura 9-5: Hipérbole de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $x$ .

Quando os focos da hipérbole e centro  $O = (0,0)$  são oblíquos ao eixo  $y$ , podemos escrever a equação como:

$$\boxed{\frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1} \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3) obtemos:

$$\frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{b^2} - \frac{(-x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{a^2} = 1 \quad (II)$$

Esta é a equação canônica da hipérbole de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $y$  como mostra a Figura 9.6:

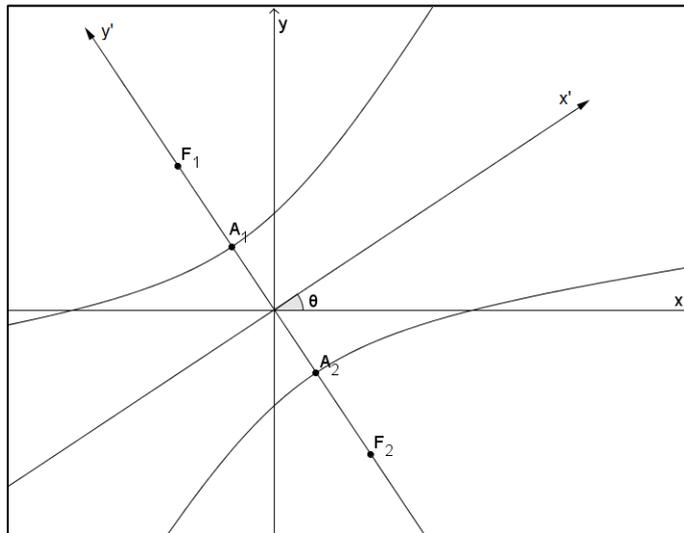


Figura 9-6: Hipérbole de centro  $O = (0,0)$  e cujos focos são oblíquos ao eixo  $y$ .

**Exemplo 9.4.** Determine a equação da hipérbole com centro na origem e focos  $F_1 = (2,1)$  e  $F_2 = (-2,-1)$  e um dos vértices  $A_1 = (1, \frac{1}{2})$ . Faça um esboço do gráfico.

**Solução:**  $c = d(O, F_1) = d(O, F_2) = \sqrt{5}$  e  $a = d(O, A_1) = \sqrt{1,25}$ , logo

$b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = 3,75$ . Sendo  $\cos \theta = \frac{2}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}}$  e  $\sin \theta = \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e como os focos são

oblíquos ao eixo  $x$ , a equação canônica da hipérbole é da forma:  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ . Fazendo a

rotação de eixos temos:  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{2x+y}{\sqrt{5}}$  e  $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{-x+2y}{\sqrt{5}}$ ,

logo:

$$\frac{(2x+y)^2}{5 \cdot 1,25} - \frac{(-x+2y)^2}{5 \cdot 3,75} = 1 \rightarrow 12(2x+y)^2 - 4(-x+2y)^2 = 75$$

$$\boxed{44x^2 + 64xy - 4y^2 = 75}.$$

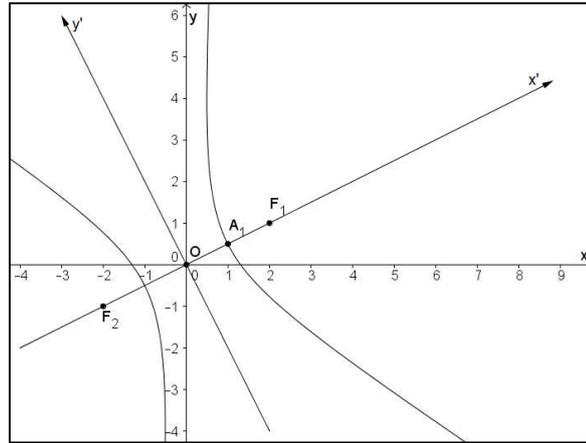


Figura 9-7: Hipérbole  $44x^2 + 64xy - 4y^2 = 75$ .

**Exemplo 9.5.** Dada a equação da hipérbole  $13x^2 + 12xy - 3y^2 - 90x - 30y = 0$ , dê a sua forma canônica, o centro, os focos e os vértices. Esboce o gráfico.

**Solução:** Levando as fórmulas de translação na equação dada:

$$13(x_0 + x')^2 + 12(x_0 + x')(y_0 + y') - 3(y_0 + y')^2 - 90(x_0 + x') - 30(y_0 + y') = 0.$$

Fazendo o coeficiente  $x' = 0$ ,

$$26x_0 + 12x'y_0 - 90x' \rightarrow x'(26x_0 + 12y_0 - 90) = 0.$$

Fazendo o coeficiente  $y' = 0$ ,

$$12x_0y' - 6y_0y' - 30y' \rightarrow y'(12x_0 - 6y_0 - 30) = 0. \text{ Assim}$$

$$\begin{cases} 26x_0 + 12y_0 = 90 \\ 12x_0 - 6y_0 = 30 \end{cases} \rightarrow x_0 = 3 \text{ e } y_0 = 1, \text{ portanto } O' = (3,1).$$

Substituindo  $O' = (3,1)$  temos:

$$13(3 + x')^2 + 12(3 + x')(1 + y') - 3(1 + y')^2 - 90(3 + x') - 30(1 + y') = 0 \text{ e logo}$$

$$13x'^2 + 12x'y' - 3y'^2 = 150. (1)$$

Rotação: vamos eliminar o termo  $x'y'$  da equação acima, como  $A \neq B$ :

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{12}{13+3} = \frac{3}{4}, \text{ sendo } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - (\tan \theta)^2} \text{ e assim } \tan \theta = \frac{1}{3} \text{ ou } \tan \theta = -3. \text{ Como}$$

$0 < \theta \leq 90^\circ$ , assumimos  $\tan \theta = \frac{1}{3}$ . Através das relações trigonométricas  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  e

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1, \text{ obtemos que } \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ e } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{cases} \rightarrow x' = \frac{3x'' - y''}{\sqrt{10}} \text{ e } y' = \frac{x'' + 3y''}{\sqrt{10}}.$$

Levando as fórmulas de rotação em (1):

$$13 \left( \frac{3x'' - y''}{\sqrt{10}} \right)^2 + 12 \left( \frac{3x'' - y''}{\sqrt{10}} \right) \left( \frac{x'' + 3y''}{\sqrt{10}} \right) - 3 \left( \frac{x'' + 3y''}{\sqrt{10}} \right)^2 = 150, \text{ assim}$$

$$117x'^2 - 78x'y' + 13y'^2 + 36x'^2 + 96x'y' - 36y'^2 - 3x'^2 - 18x'y' - 27y'^2 = 1500$$

$$\text{e portanto } 150x'^2 - 50y'^2 = 1500 \rightarrow \boxed{\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{30} = 1}.$$

Através da equação canônica conseguimos então obter,  $a = \sqrt{10}$ ,  $b = \sqrt{30}$  e  $c = \sqrt{40}$ .

O centro  $O' = (3,1)$  e a origem  $O = (0,0)$ , pertencem a reta  $r$ , que contém o eixo focal da hipérbole, podemos escrever a equação da reta  $r$ :  $x - 3y = 0$ . Os focos devem satisfazer que  $d(O', F) = c$  e  $F \in r$ , logo  $F = (3y, y)$ :  $d(O', F) = c \rightarrow \sqrt{(3 - 3y)^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{40} \rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$ . Obtemos  $y_1 = 3$  e  $y_2 = -1$ , que nos fornecem os pontos:  $F_1 = (9,3)$  e  $F_2 = (-3, -1)$ . De forma análoga, os vértices satisfazem  $d(O', A) = a$  e  $A \in r$ , logo  $A = (3y, y)$ :  $d(O', A) = a \rightarrow \sqrt{(3 - 3y)^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{10} \rightarrow 10y^2 - 20y = 0$ . Obtemos  $y_1 = 2$  e  $y_2 = 0$ , que nos fornecem os pontos:  $A_1 = (6,2)$  e  $A_2 = (0,0)$ .

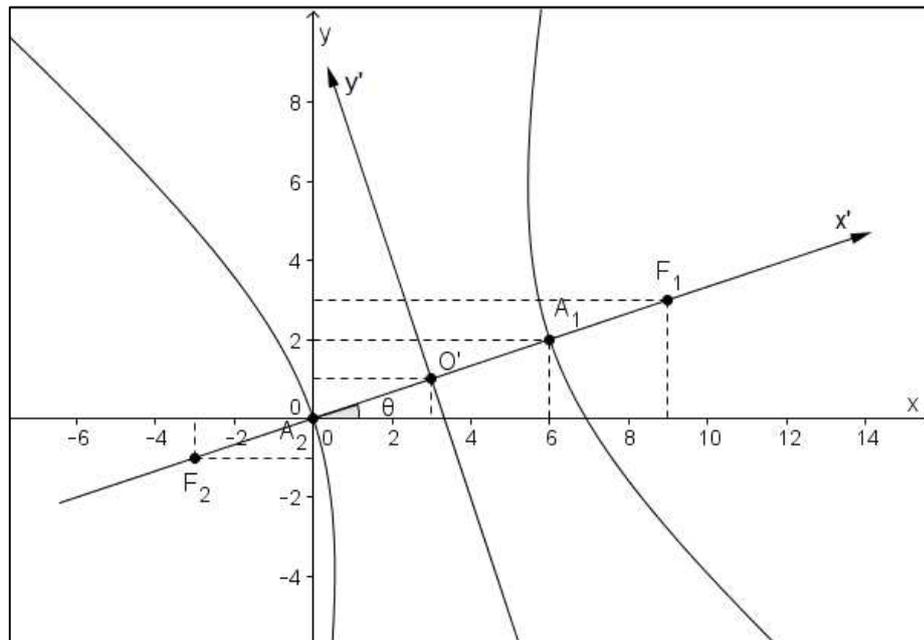


Figura 9-8: Hipérbole  $13x^2 + 12xy - 3y^2 - 90x - 30y = 0$ .

### 9.3 Parábola Rotacionada

Por meio de uma rotação  $\theta$  de eixos, representamos um novo sistema  $Ox'y'$ , cuja origem  $O = (0,0)$  coincide com o centro da parábola e cujo eixo de simetria não é paralelo aos eixos coordenados, ou seja, o eixo de simetria da parábola é oblíquo aos eixos cartesianos.

A equação da parábola cujo eixo de simetria é oblíquo ao eixo  $x$ , no novo sistema  $Ox'y'$  é:

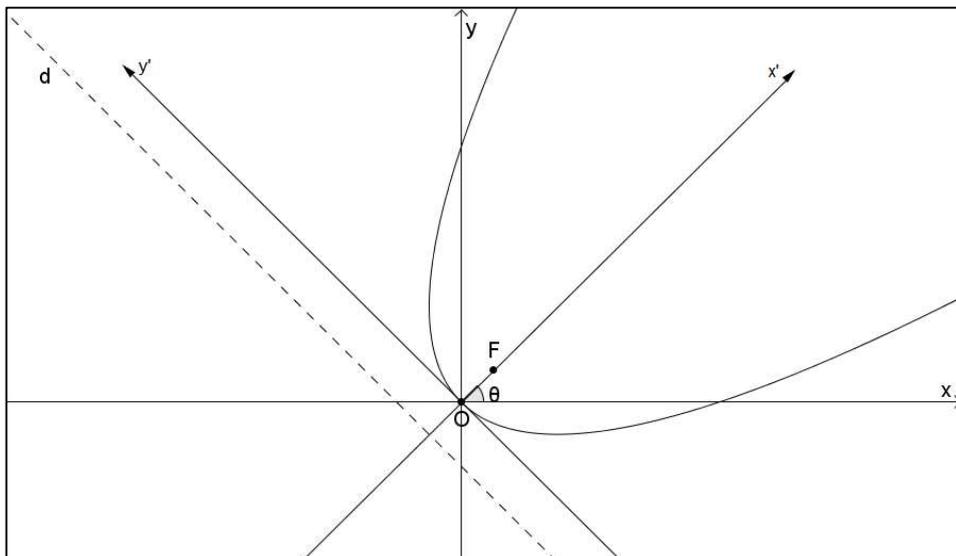
$$\boxed{y'^2 = 2px'} \quad (1)$$

Como há rotação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$(-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = 2p(x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (1)$$



Parábola 9-9: Parábola com eixo de simetria oblíquo ao eixo  $x$ .

Quando a parábola cujo eixo de simetria é oblíquo ao eixo  $y$ , como mostra a Figura 9.10, a equação da parábola referida ao novo sistema  $x'O'y'$  é:

$$\boxed{x'^2 = 2py'} \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3) obtemos:

$$(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 = 2p(-x \sin \theta + y \cos \theta) \cdot (II)$$

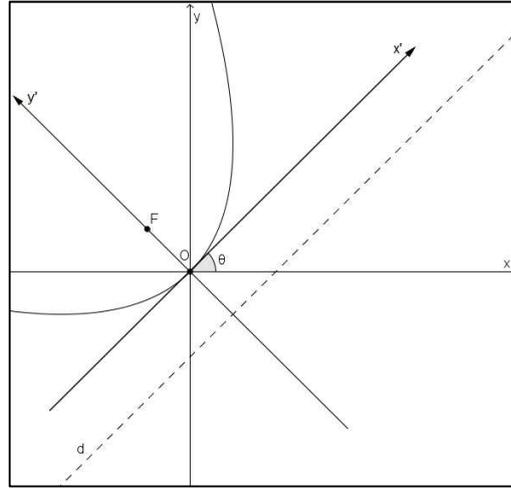
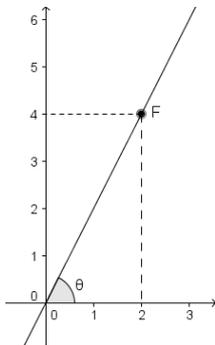


Figura 9-10: Parábola cujo eixo de simetria é oblíquo ao eixo y.

**Exemplo 9.6.** Obter a equação da parábola sabendo que o foco é  $F = (2,4)$  e o vértice coincide com a origem. Faça um esboço do gráfico.

**Solução:** Analisando a posição do foco, conseguimos obter o  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ :



$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  e  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Sabendo que  $\frac{p}{2} = d(O, F) \rightarrow p = 4\sqrt{5}$ .  
 A parábola tem o eixo de simetria oblíquo ao eixo x, portanto sua equação é da forma:  $y'^2 = 2px'$ . Levando as relações de rotação  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$  e  $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$ , obtemos:  
 $\left(\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2(4\sqrt{5})\left(\frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right)$ .

Logo:  $4x^2 - 4xy - 40x - 80y = 0$ .

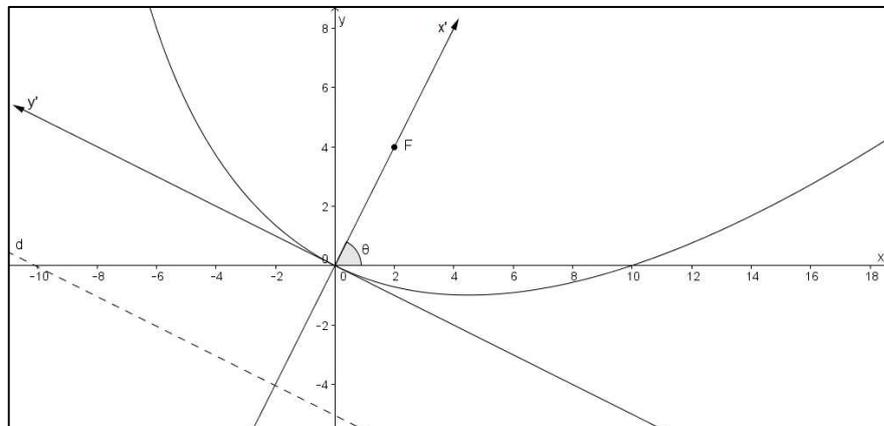


Figura 9-11: Parábola  $4x^2 - 4xy - 40x - 80y = 0$ .

**Exemplo 9.7.** Dada a parábola  $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 200x - 150y + 625 = 0$ , obtenha a equação canônica, o vértice e o foco.

**Solução:** Como  $B^2 = 4AC \rightarrow 24^2 = 4 \times 9 \times 16$ , realizaremos primeiro a rotação e posteriormente a translação. Rotação: vamos eliminar o termo  $x'y'$  da equação acima, como  $A \neq B$ :  $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{24}{9-16} = -\frac{24}{7}$ , sendo  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - (\tan \theta)^2} \rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3}$ , já que  $0 < \theta \leq 90^\circ$ . Através das relações trigonométricas encontramos,  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  e  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ .

$$\text{Logo: } \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \rightarrow x' = \frac{3x' + 4y'}{5} \text{ e } y' = \frac{4x' + 3y'}{5}.$$

Levando as fórmulas de rotação na equação da parábola temos:

$$9 \left( \frac{3x' + 4y'}{5} \right)^2 + 24 \left( \frac{3x' + 4y'}{5} \right) \left( \frac{4x' + 3y'}{5} \right) + 16 \left( \frac{4x' + 3y'}{5} \right)^2 + 200 \left( \frac{3x' + 4y'}{5} \right) - 150 \left( \frac{4x' + 3y'}{5} \right) + 625 = 0,$$

$$\frac{625}{25} x'^2 - 250y' + 625 = 0 \rightarrow x'^2 - 10y' + 25 = 0. \text{ Levando as fórmulas de translação na equação obtida:}$$

$$(x_0 + x'')^2 - 10(y_0 + y'') + 25 = 0 \rightarrow x''^2 - 10y'' + x_0^2 - 2x_0x'' - 10y_0 + 25 = 0.$$

Fazendo o coeficiente  $x'' = 0 \rightarrow -2x_0x'' = 0 \rightarrow x_0 = 0$ . Levando o termo independente a zero:

$$x_0^2 - 10y_0 + 25 = 0 \rightarrow y_0 = \frac{5}{2}.$$

Logo  $O' = (0, \frac{5}{2})$  é o vértice da parábola  $x'^2 - 10y' + 25 = 0$ , aplicando a rotação de eixo obtemos:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \rightarrow x = 0 \cos \theta - \frac{5}{2} \sin \theta \rightarrow x = -2 \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \rightarrow y = 0 \sin \theta + \frac{5}{2} \cos \theta \rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow O = \left( -2, \frac{3}{2} \right).$$

A equação canônica da parábola é:  $x''^2 = 10y''$ , sendo assim  $p = 5$ . Como o vértice da parábola  $x'^2 - 10y' + 25 = 0$  é  $O' = (0, \frac{5}{2})$  e sendo  $p = 5$ , o foco da parábola  $x'^2 - 10y' + 25 = 0$ , é  $F' = (0, 5)$ , de forma análoga ao ponto  $O'$  e aplicando a rotação de eixo obtemos:  $F = (-4, 3)$ .

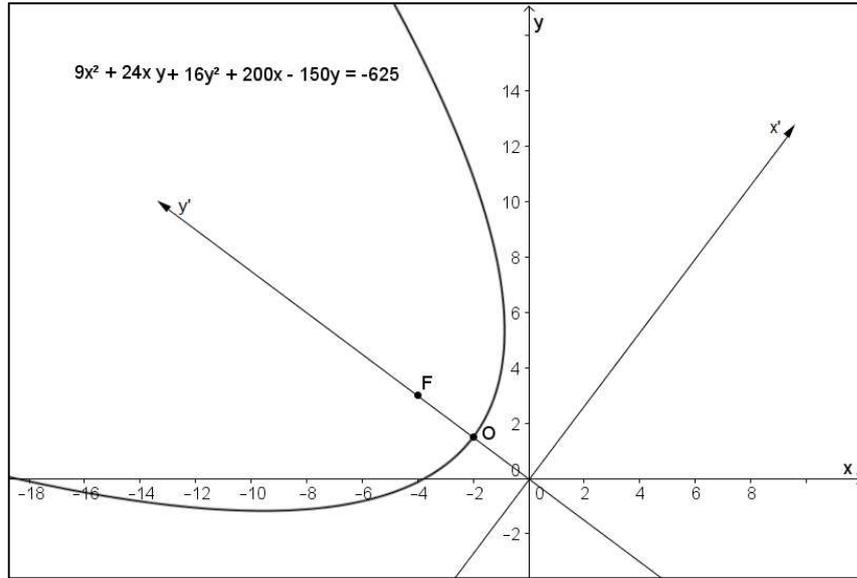


Figura 9-12: Parábola  $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 200x - 150y + 625 = 0$ .

## 10 Classificação de Cônicas III: Caso Geral

Neste capítulo vamos conhecer os procedimentos de reconhecimento de uma cônica de um modo relativamente simples, através da análise dos coeficientes de sua equação.

Dado um plano  $\pi$  num sistema de coordenadas, e dada a equação:

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

com  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ , chama-se cônica ao conjunto de pontos  $P = (x, y)$  de  $\pi$  tais que (1) se verifica.

Exemplos de Cônicas (Boulos & CAMARGO, 2005):

- 1) O conjunto vazio:  $G(x, y) = x^2 + y^2 + 2 = 0$ .
- 2) Um ponto:  $G(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ .
- 3) Uma reta:  $G(x, y) = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 0$ .
- 4) Reunião de duas retas paralelas:  $G(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0$ .
- 5) Reunião de duas retas concorrentes:  $G(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ .
- 6) Elipse:  $G(x, y) = 35x^2 - 2xy + 35y^2 - 34x - 34y - 289 = 0$ .
- 7) Hipérbole:  $G(x, y) = 3x^2 + 12xy + 8y^2 - 18x - 28y + 11 = 0$ .
- 8) Parábola:  $G(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .
- 9) Circunferência:  $G(x, y) = x^2 + y^2 = 16$ .
  - Se  $B^2 - 4AC < 0$ , a cônica poderá ser: vazio, ponto, circunferência ou elipse.
  - Se  $B^2 - 4AC = 0$ , a cônica poderá ser: reta, reunião de duas retas paralelas, parábola ou vazio.
  - Se  $B^2 - 4AC > 0$ , a cônica poderá ser: reunião de duas retas concorrentes ou hipérbole.

Fixado um sistema ortogonal  $Oxy$  em  $\mathbb{R}^2$ , vamos associar uma matriz simétrica a equação (1) de uma cônica:

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix}. \quad (2)$$

E os números

$$\Delta_1 = A + C, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix} = -\frac{B^2 - 4AC}{4}, \quad \Delta_3 = \det M \quad (3)$$

Considere a mudança de coordenadas dada por:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = y_0 + x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

Que corresponde a uma translação seguida de uma rotação. O novo sistema de coordenadas também é ortogonal:

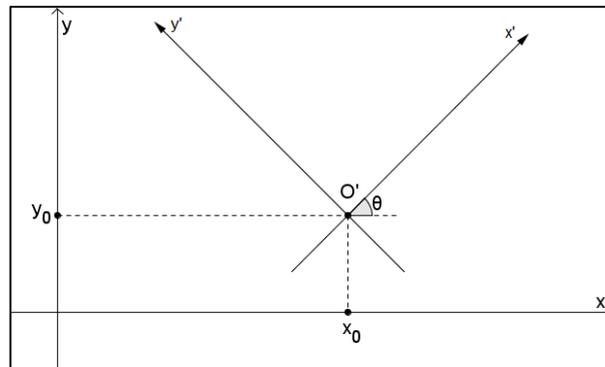


Figura 10-1: Sistema de coordenadas ortogonal.

Substituindo (3) em (1) resulta uma equação da forma

$$g(x', y') = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + dx' + ey' + f = 0$$

a qual fica associada uma matriz

$$m = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

e os correspondentes números

$$\delta_1 = a + c, \quad \delta_2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4}, \quad \delta_3 = \det m.$$

**Proposição 10.1** Valem as igualdades  $\delta_1 = \Delta_1$ ,  $\delta_2 = \Delta_2$ ,  $\delta_3 = \Delta_3$ . Os números  $\Delta_1, \Delta_2$  e  $\Delta_3$  são invariantes por rotações e translações, por isso são chamados invariantes ortogonais da cônica dada.

**Lema 10.1** Seja  $g(x', y') = cy'^2 + dx' + ey' + f$

a) Se  $c \neq 0$  e  $d \neq 0$ , então a mudança de variáveis (translação)

$$x' = X - \frac{f}{d} + \frac{e^2}{4cd}, y' = Y - \frac{e}{2c}, \text{ transforma } g(x', y') \text{ em } cY^2 + dX.$$

b) Se  $c \neq 0$  e  $d = 0$ , então a mudança de variáveis (translação)  $y' = Y - \frac{e}{2c}$  ( $x' = X$ ),

transforma  $g(x', y')$  em  $cY^2 + q$ , onde  $q = f - \frac{e^2}{4c^2}$ .

As translações acima foram obtidas através de complementação de quadrados:

$$\begin{aligned} cy'^2 + ey' &= c\left(y'^2 + \frac{e}{c}y'\right) = c\left[y'^2 + 2\frac{e}{2c}y' + \left(\frac{e}{2c}\right)^2 - \left(\frac{e}{2c}\right)^2\right] \\ &= c\left[\left(y' + \frac{e}{2c}\right)^2 - \frac{e^2}{4c^2}\right] = c\left(v + \frac{e}{2c}\right)^2 - \frac{e^2}{4c^2} \end{aligned}$$

**Proposição 10.2** Considere a cônica dada por

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ com } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0:$$

a) Se  $\Delta_2 \neq 0$ , existe um sistema de coordenadas ortogonal, em relação ao qual a equação da cônica tem a forma  $pY^2 + qX^2 + r = 0$  ( $p^2 + q^2 \neq 0$ ).

b) Se  $\Delta_2 = 0$ , então

i. Se  $\Delta_3 \neq 0$ , existe um sistema ortogonal de coordenadas, em relação ao qual a cônica tem equação da forma:

$$pY^2 + qX = 0 \quad (p \neq 0, q \neq 0).$$

ii. Se  $\Delta_3 = 0$ , existe um sistema ortogonal de coordenadas, em relação ao qual a cônica tem equação da forma:

$$pY^2 + q = 0 \quad (p \neq 0).$$

**Exemplo 10.1.** Reconheça a cônica de equação:  $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$ .

**Solução:** Associando a equação a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -30 \\ 2 & 8 & -84 \\ -30 & -84 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 13, \\ \Delta_2 &= -\frac{16-160}{4} = 36 \neq 0, \\ \Delta_3 &= \det M = -25920. \end{aligned}$$

Como  $\Delta_2 \neq 0$ , existe, pela Proposição 9.2, um sistema de coordenadas ortogonal em relação o qual a equação cônica é da forma  $pX^2 + qY^2 = r = 0$ ,

$$m = \begin{bmatrix} p & 2 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \delta_1 &= p + q, \\ \delta_2 &= pq, \\ \delta_3 &= pqr. \end{aligned}$$

Pela Proposição 9.1 devemos ter:

$$\begin{cases} pqr = -25920 \\ pq = 36 \\ p + q = 13 \end{cases}, \text{ de onde resulta facilmente } p > 0, q > 0, r < 0. \text{ Trata-se portanto da elipse}$$

ou circunferência. Das igualdades  $pq = 36$  e  $p + q = 13$ , conclui-se imediatamente que  $p \neq q$ . Logo, a cônica não é circunferência, trata-se de uma elipse.

## 10.1 A cônica obtida por cinco pontos no plano

**Teorema 10.1.** A partir da equação geral das cônicas  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , onde  $A \neq 0$  ou  $B \neq 0$  ou  $C \neq 0$ , dados cinco pontos quaisquer no plano existe uma única cônica determinada por eles.

**Demonstração do Teorema 10.1:** Sejam  $P_k = (x_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$  os pontos no plano, sendo que três deles não sejam colineares, que pertencem a uma cônica definida pela equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  não degenerada, ou seja,  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . Sem perda de generalidade, podemos dividir a equação da cônica por um dos termos não nulos, por exemplo  $B \neq 0$ , podemos reescrever a equação da cônica como:  $ax^2 + xy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , onde  $A/B = a$ ,  $C/B = c$ ,  $D/B = d$ ,  $E/B = e$ ,  $F/B = f$ . Utilizamos o fato que os cinco pontos são tais que satisfazem a equação, obtendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ax_1^2 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = -x_1y_1 \\ ax_2^2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + f = -x_2y_2 \\ ax_3^2 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + f = -x_3y_3 \\ ax_4^2 + cy_4^2 + dx_4 + ey_4 + f = -x_4y_4 \\ ax_5^2 + cy_5^2 + dx_5 + ey_5 + f = -x_5y_5 \end{cases}$$

O sistema linear escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \\ x_3y_3 \\ x_4y_4 \\ x_5y_5 \end{bmatrix}.$$

Como três dos cinco pontos não são colineares, a matriz não é singular (determinante não nulo), portanto o sistema apresenta uma única solução.

**Exemplo 10.2.** Dados os pontos  $P_1 = (2,5)$ ,  $P_2 = (2,2)$ ,  $P_3 = (5,3)$ ,  $P_4 = (6,4)$  e  $P_5 = (6,2)$ , determinar a equação da cônica que passa por eles, considerando  $A \neq 0$ .

**Solução:** Substituindo os pontos na equação geral das cônicas, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4A + 10B + 25C + 2D + 5E + F = 0 \\ 4A + 4B + 4C + 2D + 2E + F = 0 \\ 25A + 15B + 9C + 5D + 3E + F = 0 \\ 36A + 24B + 16C + 6D + 4E + F = 0 \\ 36A + 12B + 4C + 6D + 2E + F = 0 \end{cases}, \text{ vamos dividir cada equação por } A, \text{ vamos}$$

considerar  $B/A = b$ ,  $C/A = c$ ,  $D/A = d$ ,  $E/A = e$ ,  $F/A = f$ :

$$\begin{cases} 10b + 25c + 2d + 5e + f = -4 \\ 4b + 4c + 2d + 2e + f = -4 \\ 15b + 9c + 5d + 3e + f = -25 \\ 24b + 16c + 6d + 4e + f = -36 \\ 12b + 4c + 6d + 2e + f = -36 \end{cases} \text{ ou } A = \begin{vmatrix} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & -4 \\ 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & -25 \\ 24 & 16 & 6 & 4 & 1 & -36 \\ 12 & 4 & 6 & 2 & 1 & -36 \end{vmatrix}$$

Escalonando a Matriz A:

$$\begin{vmatrix} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & -4 \\ 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & -25 \\ 24 & 16 & 6 & 4 & 1 & -36 \\ 12 & 4 & 6 & 2 & 1 & -36 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 15 & -3 & 0 & -3/2 & 6 \\ 0 & 19 & -4/3 & 3 & 1/3 & 38/3 \\ 0 & 55/3 & -1/2 & 10/3 & 7/12 & 11 \\ 0 & 65/3 & -3 & 10/3 & 1/6 & 26 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 15 & -3 & 0 & -3/2 & 6 \\ 0 & 0 & -37/19 & -45/19 & -67/38 & 4 \\ 0 & 0 & -57/22 & -30/11 & -87/44 & -3 \\ 0 & 0 & -12/13 & -30/13 & -21/13 & -12 \end{vmatrix} \rightarrow \text{para facilitar os cálculos, iremos}$$

multiplicar as linhas 3, 4 e 5 da matriz por 38, 44 e 23 respectivamente:

$$\begin{vmatrix} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 15 & -3 & 0 & -3/2 & 6 \\ 0 & 0 & -74 & -90 & -67 & 152 \\ 0 & 0 & -114 & -120 & -87 & -132 \\ 0 & 0 & -12 & -30 & -21 & -156 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 15 & -3 & 0 & -3/2 & 6 \\ 0 & 0 & -74 & -90 & -67 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & -230/19 & -200/19 & -1260/19 \\ 0 & 0 & 0 & 95 & 125/2 & 810 \end{array} \right| \rightarrow \text{novamente para facilitar os}$$

cálculos iremos multiplicar as linhas 4 e 5 por 19 e 2 respectivamente:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 15 & -3 & 0 & -3/2 & 6 \\ 0 & 0 & -74 & -90 & -67 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & -230 & -200 & -1260 \\ 0 & 0 & 0 & 190 & 125 & 1620 \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} 10 & 25 & 2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 15 & -3 & 0 & -3/2 & 6 \\ 0 & 0 & -74 & -90 & -67 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & -230 & -200 & -1260 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -925/19 & 13320/19 \end{array} \right|, \text{ chegamos então que:}$$

$$-\frac{925}{19}f = \frac{13320}{19} \rightarrow f = -14,4, \text{ e assim obtemos } e = 18; d = -6,8; c = -2,4 \text{ e } b = -0,6.$$

Como todo o sistema foi dividido por A sendo  $A \in \mathbb{R}$  e  $A \neq 0$ , podemos assumir qualquer valor A que seja conveniente, assumiremos  $A = 5$ , sendo assim teremos  $B = -3, C = -12, D = -34, E = 90$ , logo a equação da cônica será:

$$\boxed{5x^2 - 3xy - 12y^2 - 34x + 90y - 72 = 0}.$$

Como  $(-3)^2 - 4.5.(-12) = 249 > 0$ , trata-se de uma hipérbole.

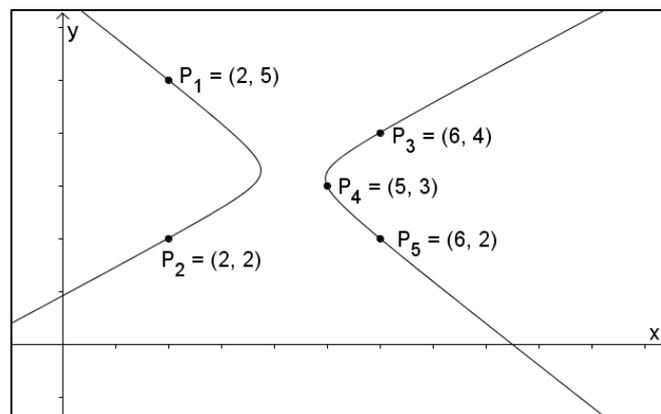


Figura 10-2: Cônica determinada pelos pontos  $P_1 = (2, 5), P_2 = (2, 2), P_3 = (5, 3), P_4 = (6, 4)$  e  $P_5 = (6, 2)$ .

## 11 Teorema do Hexágono de Pascal

Blaise Pascal foi um importante matemático, físico e filósofo francês do século XVII. Seu talento precoce para as ciências físicas levou a família a Paris, onde ele se consagrou ao estudo da matemática. Contribuiu decisivamente para a criação de dois novos ramos da matemática: a Geometria Projetiva e a Teoria das Probabilidades. Em Física, estudou a mecânica dos fluidos, e esclareceu os conceitos de pressão e vácuo, ampliando o trabalho de Evangelista Torricelli. É ainda o autor de uma das primeiras calculadoras mecânicas, a Pascaline, e de estudos sobre o método científico.

Em 1640 com apenas 16 anos publica *Essay pour les coniques*, (Ensaio sobre as cônicas), obra na qual está formulado o célebre teorema de Pascal (Nunes de Andrade, 2001):

**Teorema 11.1** Em num hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos interceptam-se em pontos colineares.

Neste trabalho não realizaremos a demonstração deste teorema pois ele utiliza argumentos e outros teoremas que aqui não foram estudados. Analisaremos os resultados deste teorema e as suas consequências.

Em um hexágono definiremos lados opostos como sendo os lados que estão separados por dois outros lados. Neste contexto o hexágono poderá ser côncavo ou convexo. Tomamos por exemplo o hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , nesta definição são lados opostos  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$ ,  $P_2P_3$  e  $P_5P_6$ ,  $P_3P_4$  e  $P_6P_1$ .

Sejam  $f, g, h, i, j, k$  as retas que passam pelos pontos  $P_1P_4$ ,  $P_1P_5$ ,  $P_2P_4$ ,  $P_2P_6$ ,  $P_3P_5$  e  $P_3P_6$  respectivamente e  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  os pontos de inserção das retas  $g$  e  $i$ ,  $f$  e  $k$ ,  $h$  e  $j$ , respectivamente. Observamos que  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são colineares, e assim seja  $r$  a reta que passa por esses pontos, ou seja,  $M_1, M_2, M_3 \in r$ .

Vejam a seguir como ficam a situação descrita acima na elipse, hipérbole e parábola:

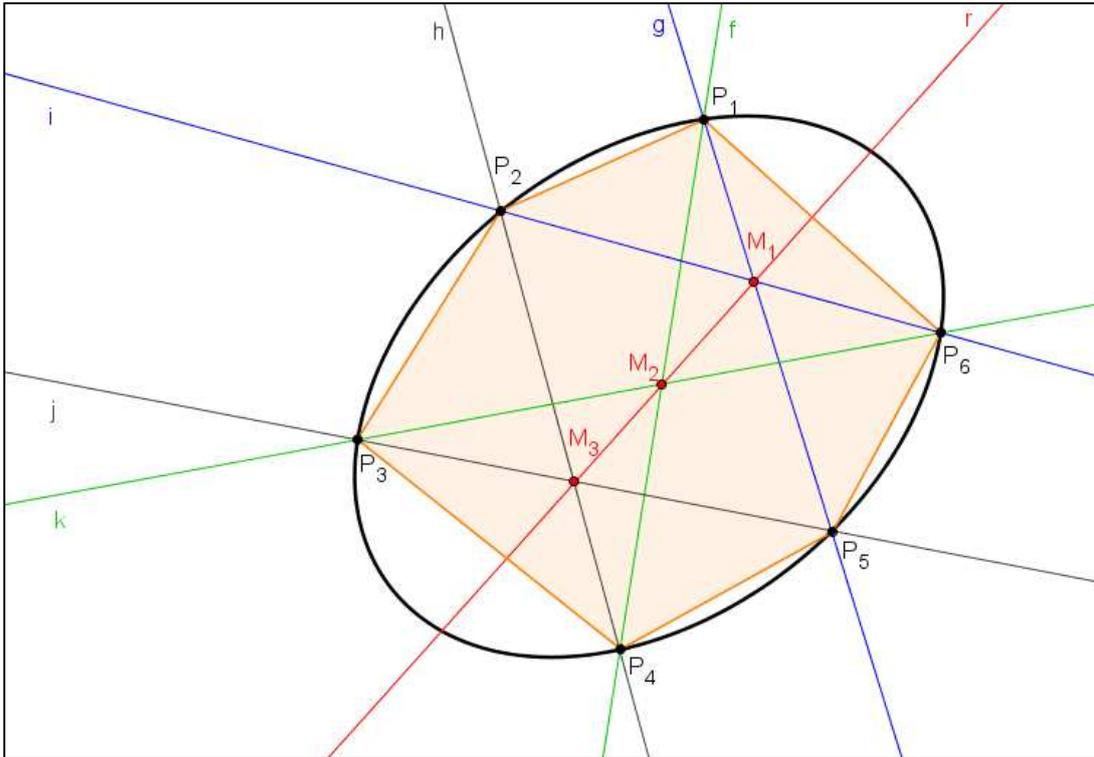


Figura 11-1: Representação do Teorema do Hexágono de Pascal na Elipse.

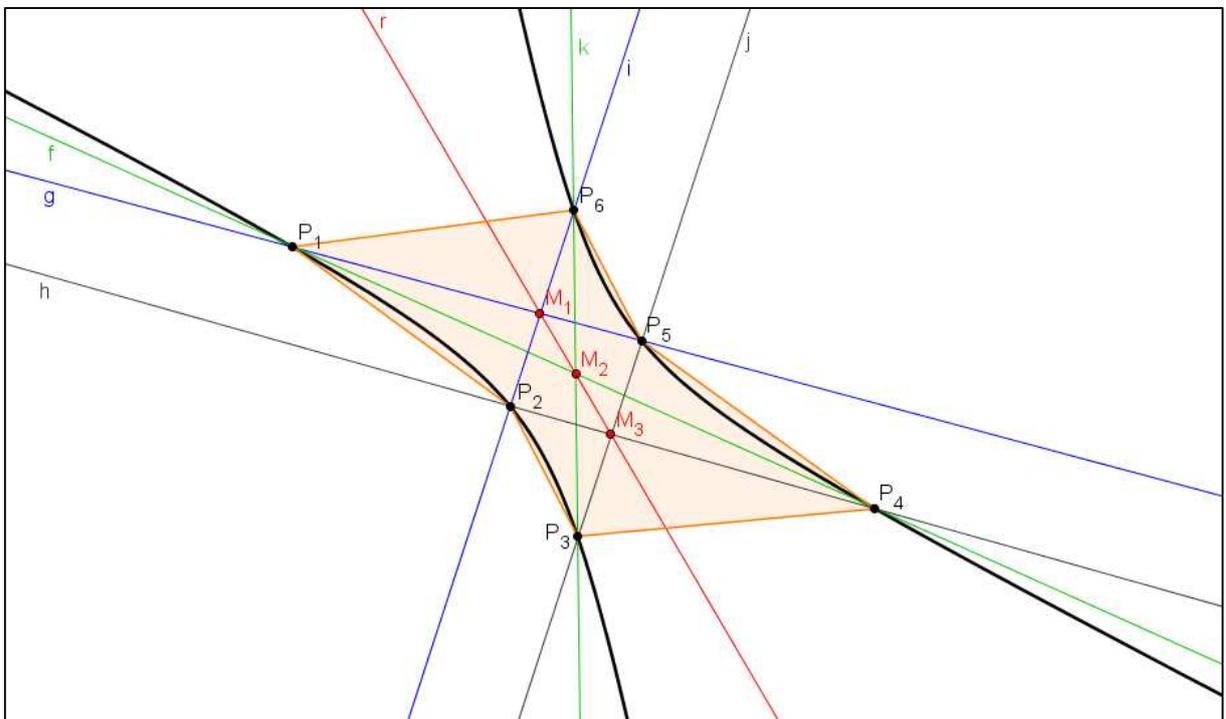


Figura 11-2: Representação do Teorema do Hexágono de Pascal na Hipérbole.

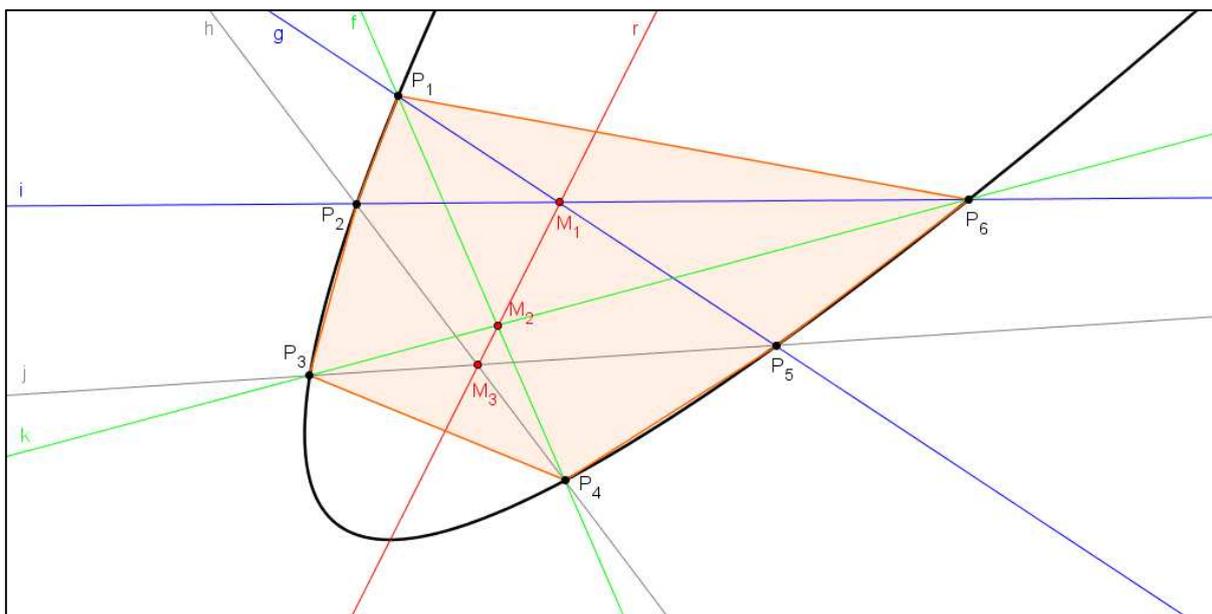


Figura 11-3: Representação do Teorema do Hexágono de Pascal na Parábola.

## 11.1 Consequências do Teorema de Pascal

O teorema de Pascal tem consequências interessantes, vejamos algumas delas que serão expostas a seguir.

### 11.1.1 Primeira Consequência: o pentágono inscrito em uma cônica.

Consideremos o hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , inscrito na cônica e a reta  $r$  conforme a figura:

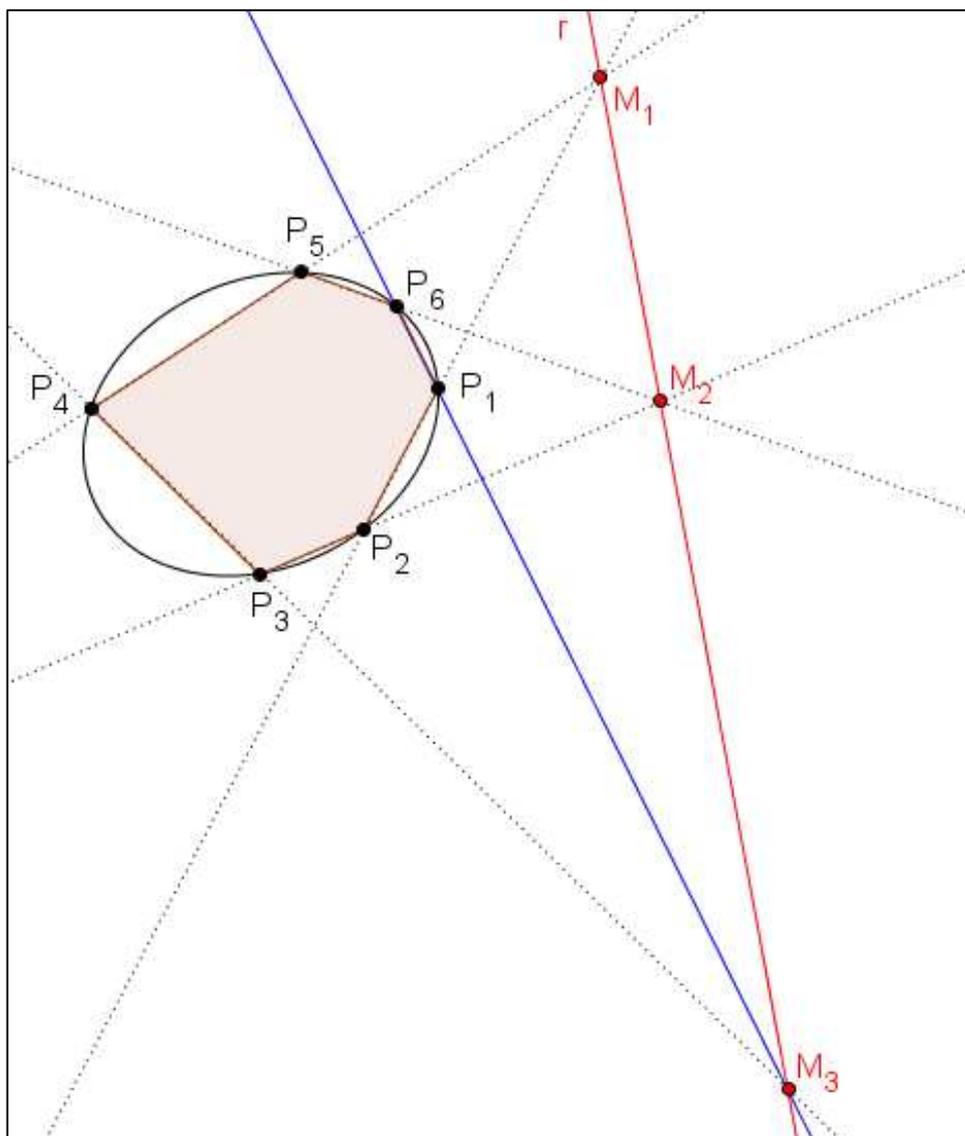


Figura 11-4: Hexágono inscrito em uma cônica.

Façamos o vértice  $P_6$  se aproximar do vértice  $P_1$  de modo que o polígono se aproxime do pentágono  $P_1P_2P_3P_4P_5$ . Então a reta que contém o lado  $P_1P_6$  tende a uma reta tangente à curva no ponto  $P_1$ ; assim, obtém-se o hexágono de Pascal degenerado, conforme sugere a figura abaixo:

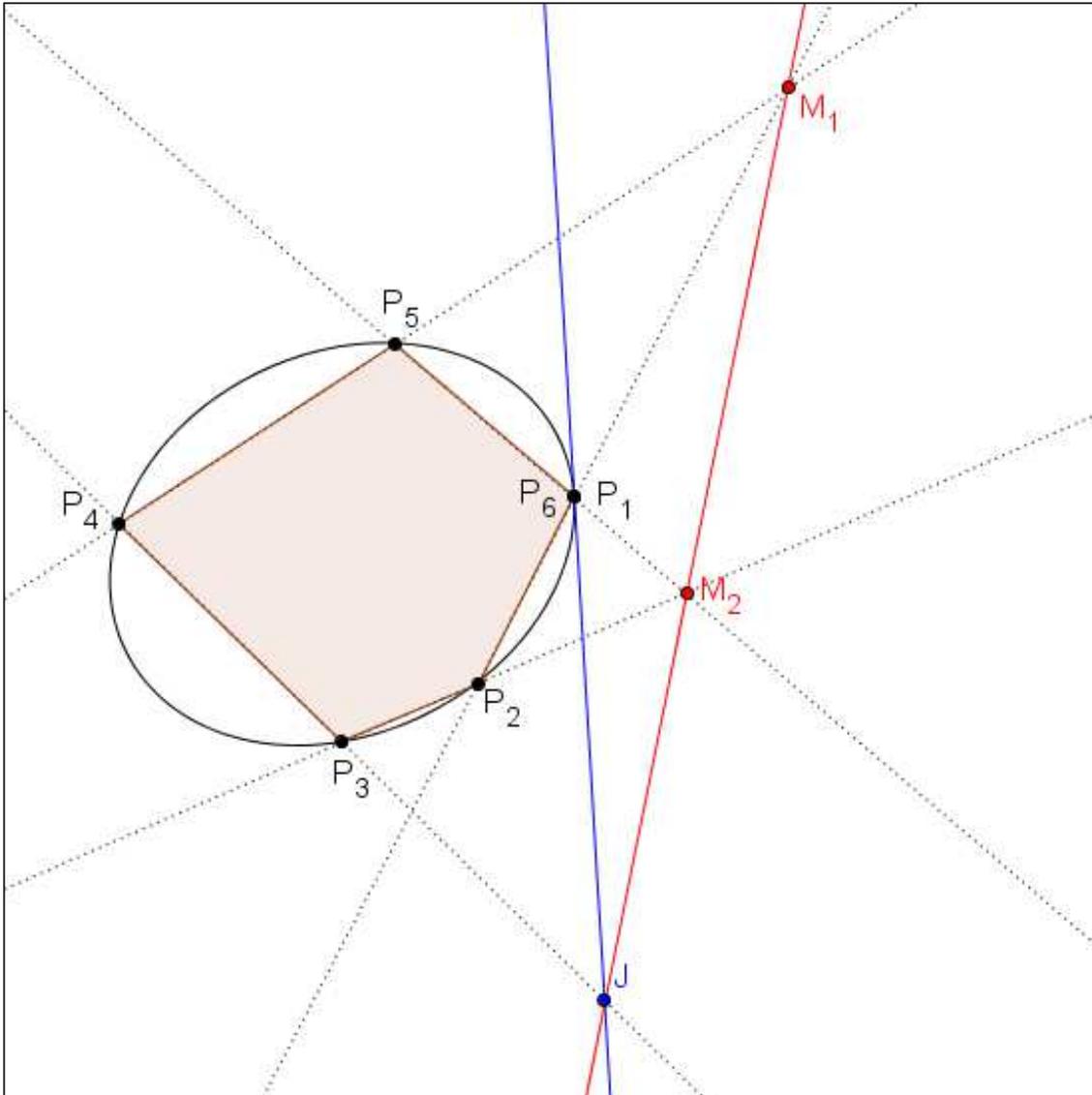


Figura 11-5: Hexágono de Pascal degenerado.

Um pentágono está inscrito em uma cônica e a reta tangente à curva num vértice intersecta a reta que contém o lado oposto no ponto  $X$ . Se  $M_1$  e  $M_2$  são os pontos de interseção das retas suportes dos outros pares de lados não adjacentes, então  $M_1$ ,  $M_2$  e  $X$  são colineares.

### 11.1.2 Segunda Consequência: o quadrilátero inscrito em uma cônica.

Com procedimento análogo ao anterior, degenere o pentágono  $P_1P_2P_3P_4P_5$ , em um quadrilátero  $P_1P_2P_3P_4$ , conforme a figura abaixo.

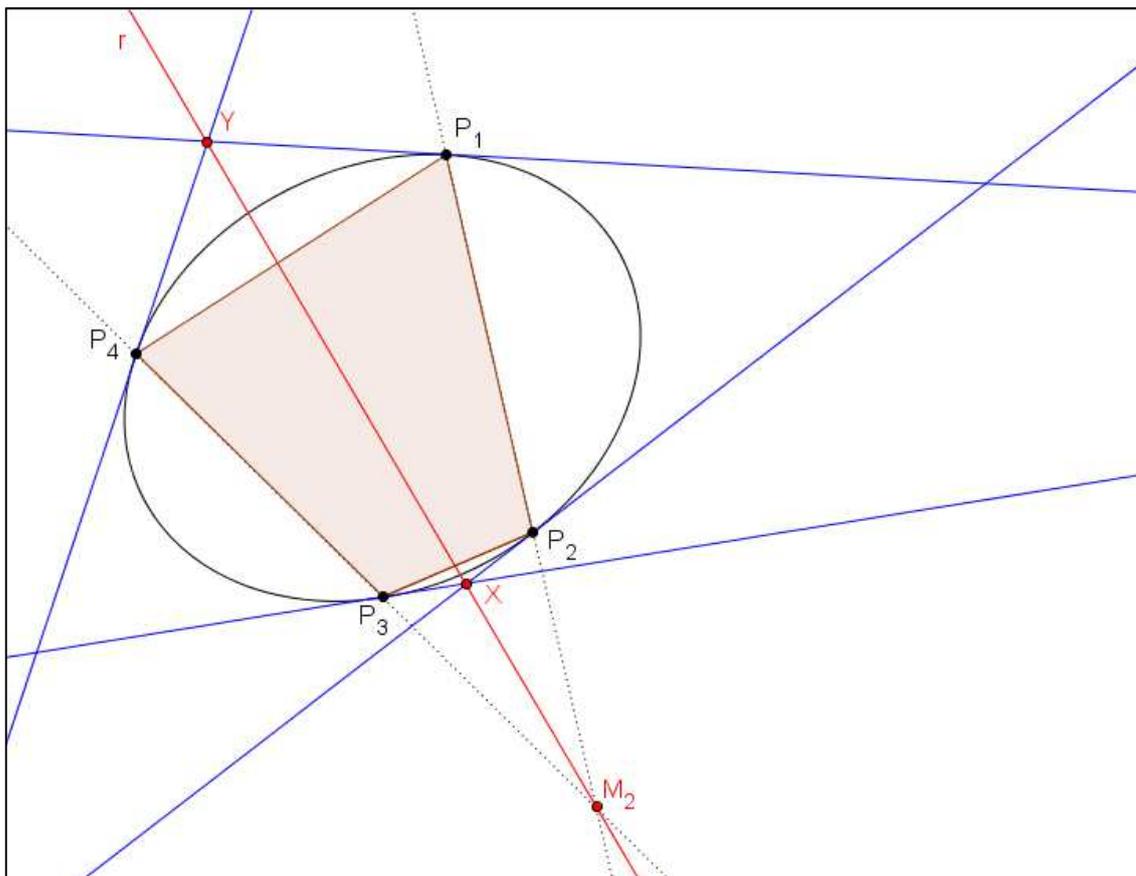


Figura 11-6: Quadrilátero inscrito em uma cônica.

O quadrilátero  $P_1P_2P_3P_4$  está inscrito em uma cônica, com os lados opostos  $P_1P_4$  e  $P_2P_3$  concorrentes em um ponto  $M_2$ . Se os pares de retas  $(t_1, t_2)$  e  $(t_3, t_4)$  tangentes à cônica, nos pontos  $(P_1, P_2)$  e  $(P_3, P_4)$ , intersectam-se nos pontos  $Y$  e  $X$ , então esses pontos  $M_2, Y$  e  $X$  são colineares.

### 11.1.3 Terceira Consequência: o triângulo inscrito em uma cônica.

Agora considere a situação limite do polígono anterior para obter um triângulo inscrito na cônica com as retas tangentes em cada vértice.

Dado um triângulo  $P_1P_2P_3$  inscrito em uma cônica, os pontos,  $X, Y$  e  $Z$  de interseção de cada um dos lados com as tangentes à cônica, nos respectivos vértices opostos, são colineares, conforme figura abaixo:

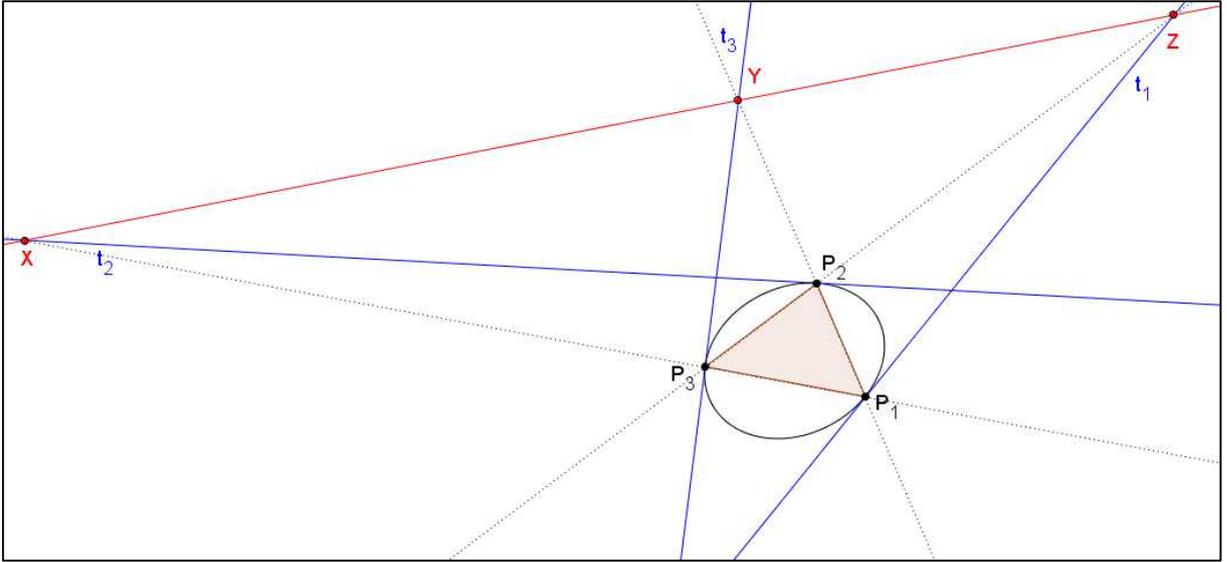


Figura 11-7: Triângulo inscrito em uma cônica.

## 12 Curvas Cúbicas no Plano: Classificação de Newton

Este capítulo explorará uma parte da Classificação de Curva Cúbicas realizado por Isaac Newton no final do século XVII. As curvas cúbicas estão definidas pela equação geral de duas variáveis:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + ixy + jy^2 + mx + ny + p = 0 \quad (1)$$

Onde  $a, b, c, d, e, i, j, m, n, e p$  são constantes reais. Assumiremos que os coeficientes  $a, b, c$ , ou  $d \neq 0$ , logo a curva é uma cúbica legítima. Newton classificou as cúbicas não degeneradas em 72 diferentes exemplos de acordo com seu comportamento assintótico (Nunemacher, 1993). Atualmente de acordo com o esquema de Newton deveríamos ter 78 diferentes classificações, onde seis delas foram encontradas por outros matemáticos mais tarde. Embora seja um pouco complicado estudar cuidadosamente a classificação completa, conseguimos aprender uma boa parte utilizando cálculos e álgebra para demonstrar as classificações. Procederemos como a seguir:

- 1) Para obter uma ideia do alcance e beleza das curvas cúbicas, seguem abaixo os gráficos das famosas curvas das quais tenham ocorrido particularmente em definições geométrica ou algébrica.

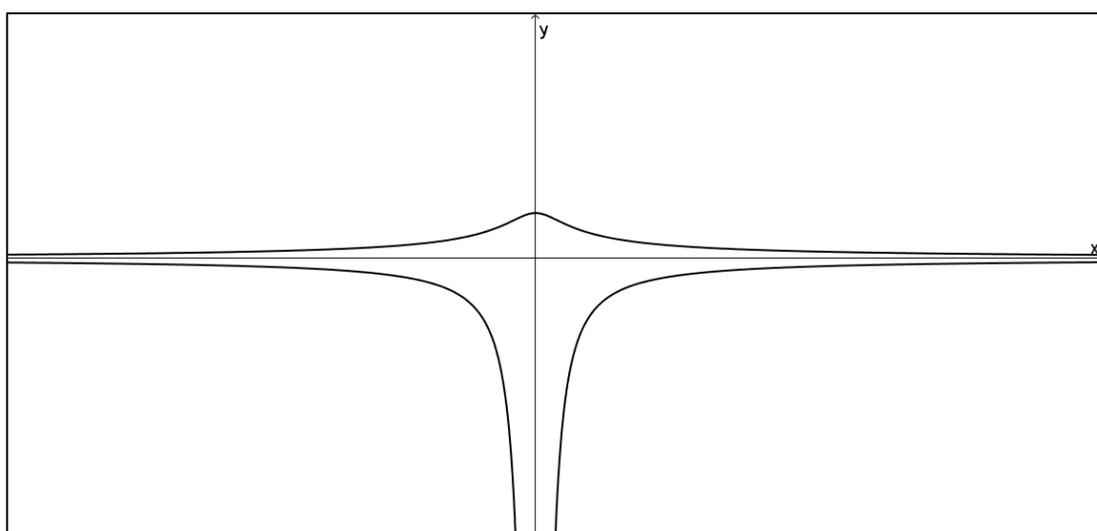


Figura 12-1: Curva de Agnesi  $y(1+x^2) = 1$ .

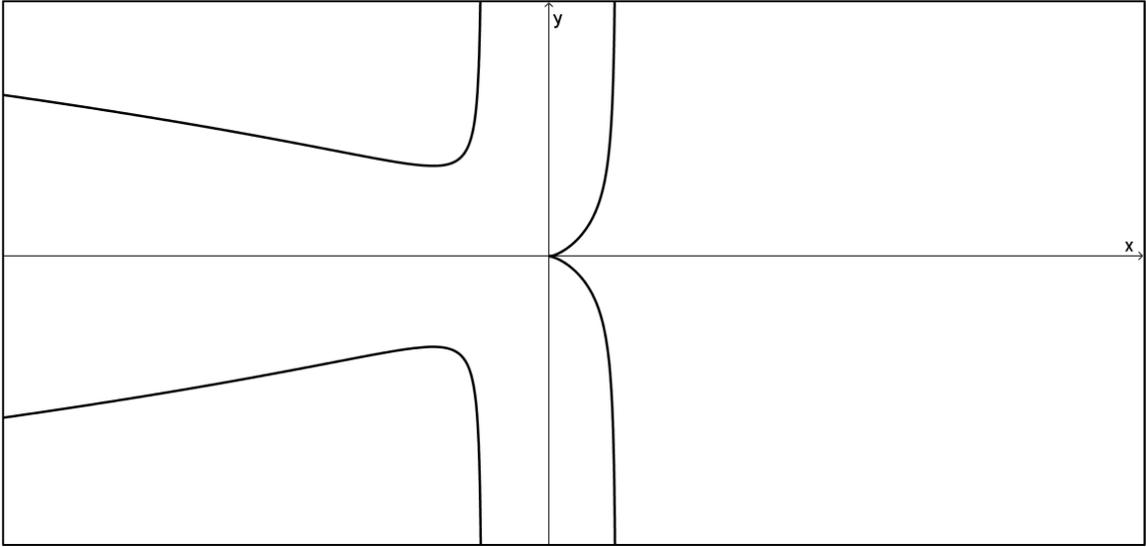


Figura 12-2: Cissóide de Diocles  $y^2(2 - x) = x^3$ .

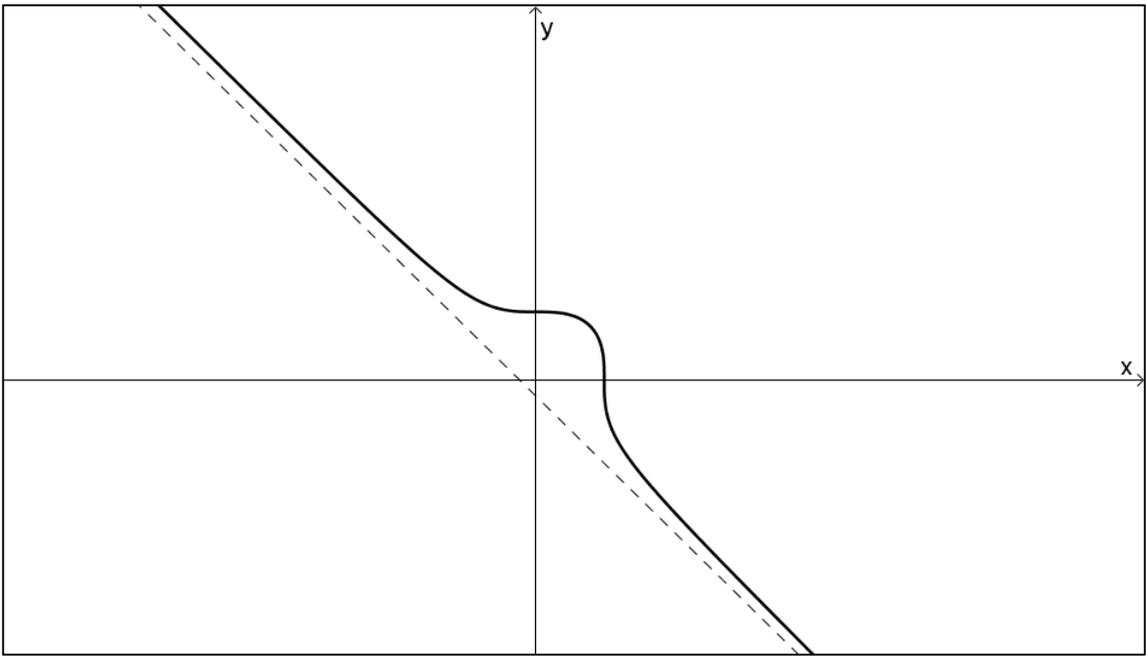


Figura 12-3: Curva de Fermat para  $n = 3$   $x^3 + y^3 = 1$ .

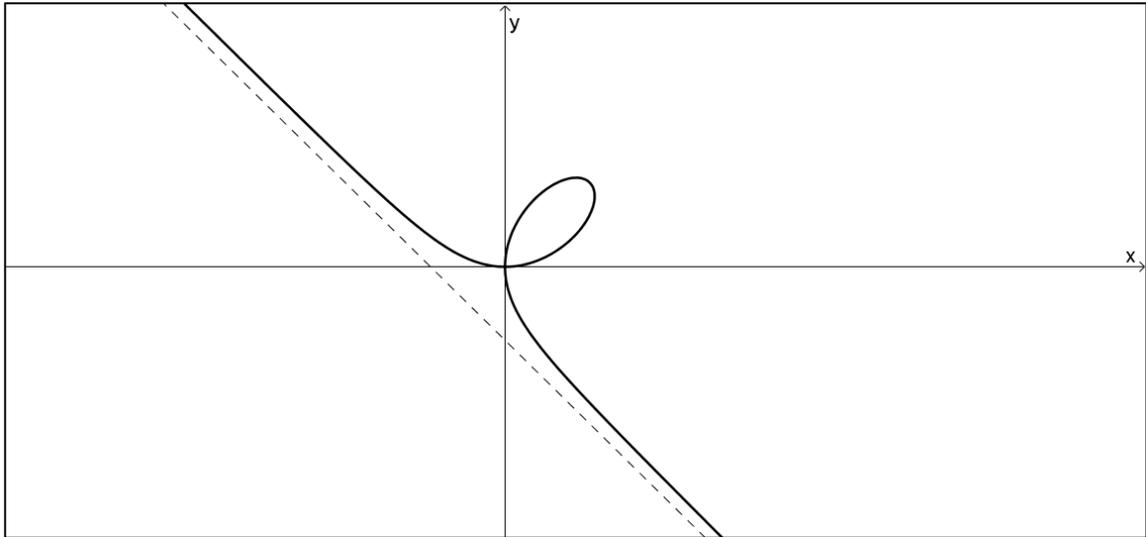


Figura 12-4: Folium de Descartes  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

- 2) Considerando o caso especial  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , onde  $a \neq 0$ ;  $b, c$  e  $d$  são números reais. A forma da curva é determinada pelo discriminante de  $y$ ,  $D = 4b^2 - 12ac$ . A curva da Figura 12.6 possui duas corcovas e temos  $D > 0$  e na Figura 12.5 temos  $D \leq 0$ .

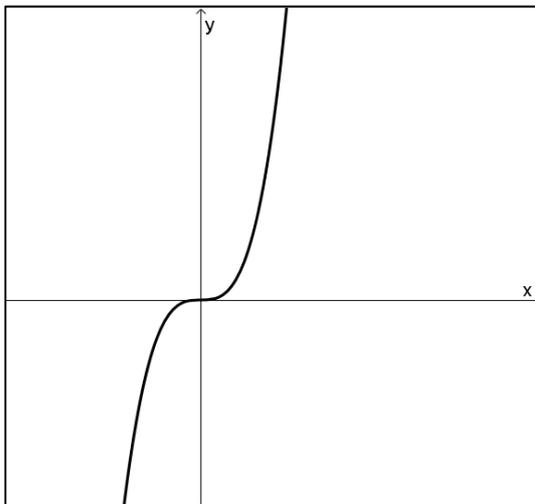


Figura 12-5:  $y = x^3$  ( $D \leq 0$ ).

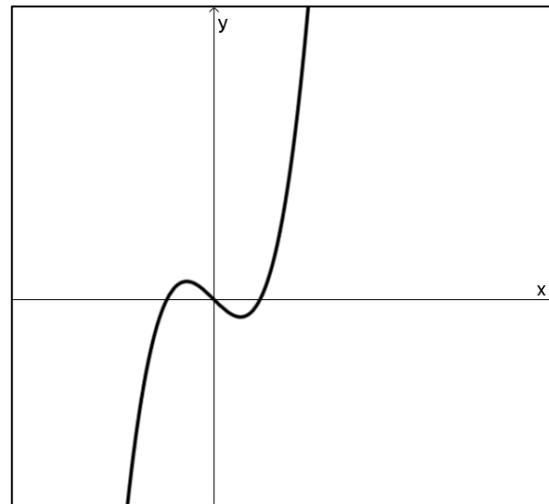


Figura 12-6:  $y = x^3 - x$  ( $D > 0$ ).

O sinal de "a" determina a direção da curva que se aproxima de  $+\infty$ . Observe que foi posto que  $a \neq 0$ , de forma que temos uma cúbica.

- 3) De forma análoga, vamos explorar as formas das curvas  $xy = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , onde  $a \neq 0$ . Novamente vamos determinar as formas em termos dos coeficientes. Para essa classe de cúbicas existem três formas que podemos generalizar dependendo

de “d” e do número de raízes positivas ou negativas de  $f(x)$ . Quando  $d = 0$  o gráfico da curva é a união de uma parábola e o eixo  $y$  (Figura 12.7). Quando  $d \neq 0$ , o gráfico da curva é conhecido como “Tridente de Newton”. A curva tem uma assíntota  $x = 0$ , duas corcovas e se  $f(x) = 0$  possui três raízes positivas ou negativas (Figura 12.9) e não há corcovas no caso contrario (Figura 12.8). É interessante encontrar condições sobre os coeficientes da equação dos quais garantem as condições das raízes. Observe primeiro que a condição necessária do discriminante  $D$  de  $f(x)$  é ser positivo. Denotamos  $r < R$  as raízes de  $f(x)$  quando  $D > 0$ . Logo  $f(x)$  terá três raízes reais se  $f(r)$  e  $f(R)$  tem sinais contrários. Outra forma é utilizar o discriminante de  $f(x)$ . Neste caso as raízes terão o mesmo sinal se  $r > 0$ ,  $d$  e  $f(r)$  tiverem sinais contrários ou se  $R < 0$ ,  $d$  e  $f(R)$  tiverem sinais opostos. O sinal de “a” possui a mesma influência no gráfico conforme item 2.

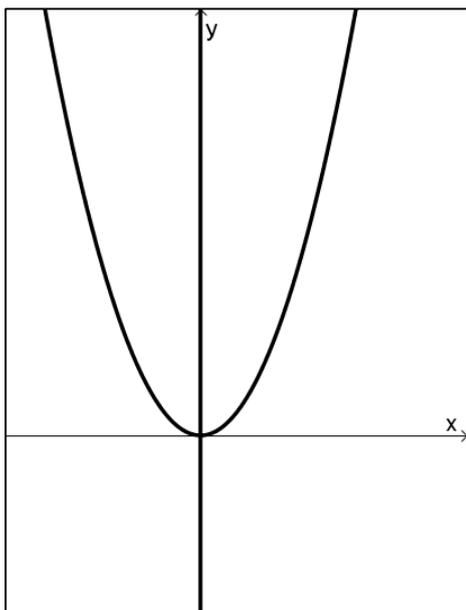


Figura 12-7:  $xy = x^3$

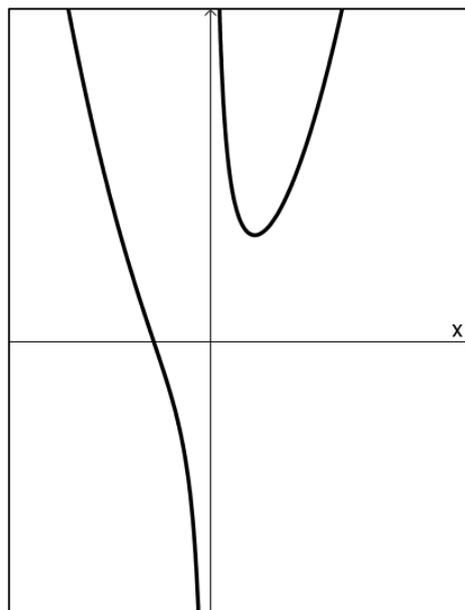


Figura 12-8:  $xy = x^3 + 1$

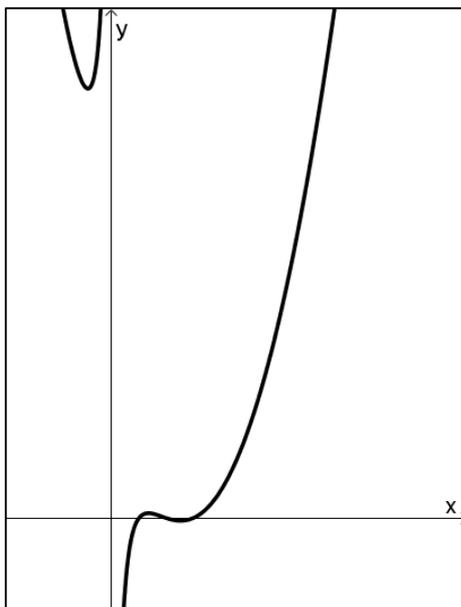


Figura 12-9:  $xy = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .

- 4) Consideraremos as curvas que atendam a equação  $y^2 = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  para  $a \neq 0$ . Iremos encontrar cinco diferentes formas de curvas que dependem da natureza das raízes de  $f(x)$ . As formas serão classificadas conforme o número de raízes e suas localizações. Teremos cinco casos. 1º caso: uma raiz real e duas raízes complexas (Figura 12.10); 2º caso: uma raiz real de multiplicidade três (Figura 12.11); 3º caso: três raízes reais distintas (Figura 12.12); 4º caso: uma raiz real de multiplicidade dois e outra raiz real de multiplicidade um, na qual esta última é maior do que a raiz de multiplicidade dois (Figura 12.13); 5º caso: uma raiz real de multiplicidade dois e outra raiz real de multiplicidade um, na qual esta última é menor do que a raiz de multiplicidade dois (Figura 12.14). Estes cinco casos podem ser determinados através dos coeficientes da equação. De forma análoga ao item 3. O 1º caso ocorre quando  $D < 0$ ; 2º caso quando  $D = 0$ ; 3º caso quando  $D > 0$  e  $f(r)$  e  $f(R)$  tem sinais contrários (lembrando que  $r$  e  $R$  denotamos as raízes de  $f'(x)$  e  $r < R$ ); 4º caso quando  $D > 0$  e  $f(r) = 0$ ; 5º caso quando  $D > 0$  e  $f(R) = 0$ .

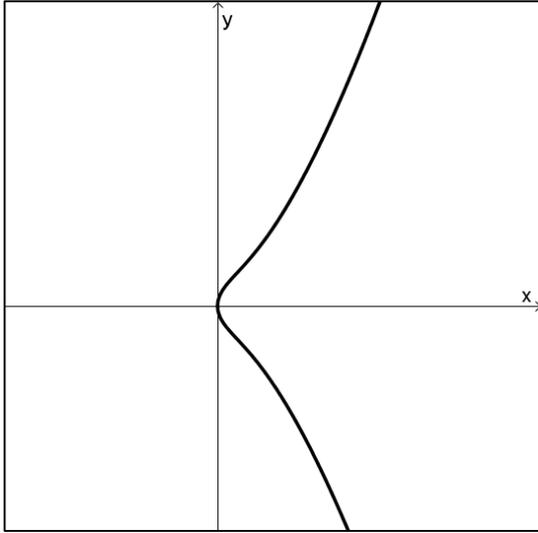


Figura 12-10: Curva  $y^2 = x^3 + x$ .

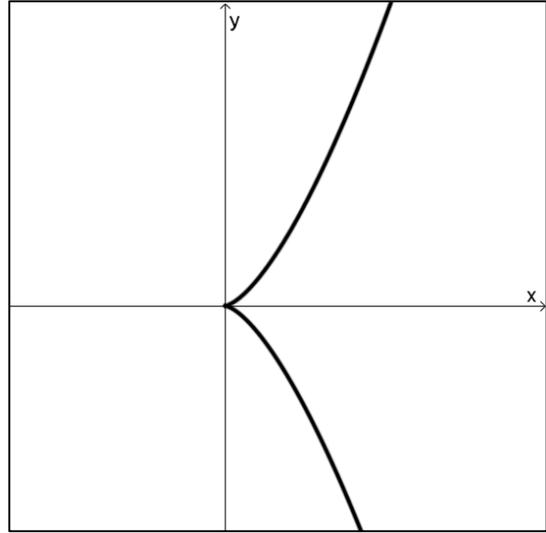


Figura 12-11: Curva  $y^2 = x^3$ .

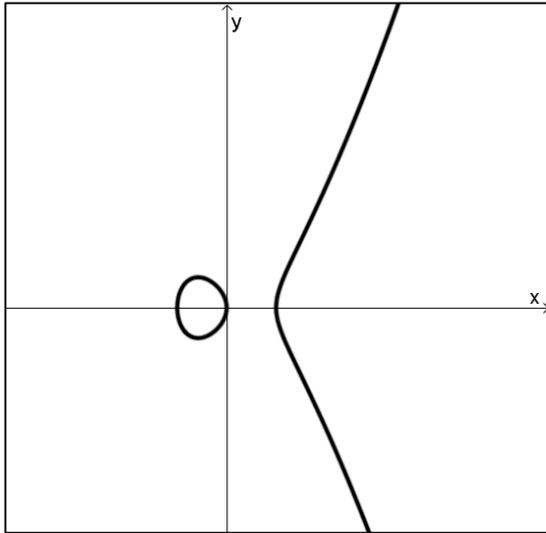


Figura 12-12: Curva  $y^2 = x^3 - x$ .

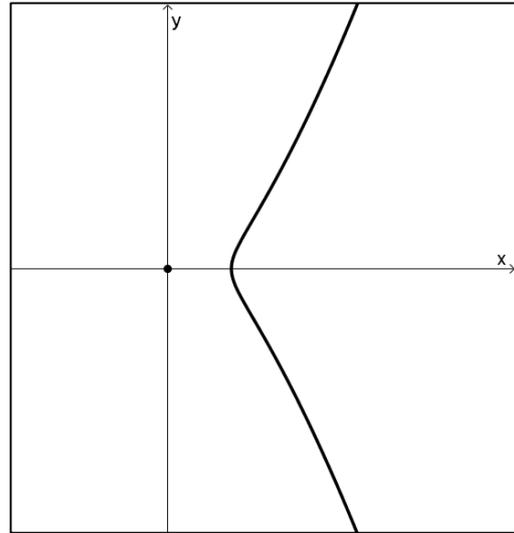


Figura 12-13: Curva  $y^2 = x^3 - x^2$ .

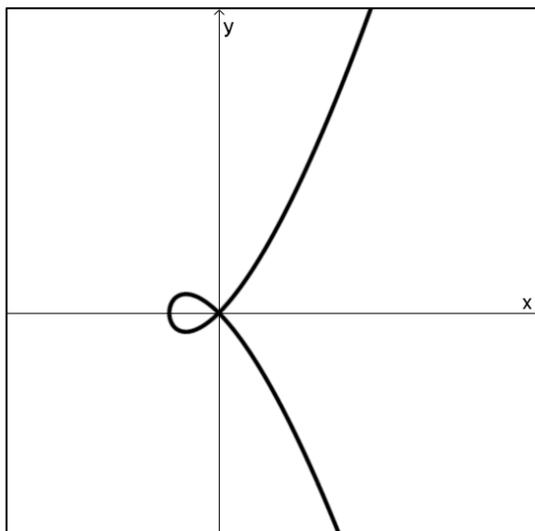


Figura 12-14: Curva  $y^2 = x^3 + x^2$ .

- 5) Newton foi capaz de reduzir a equação geral das cúbicas (1) em quatro formas de equações que podemos adequar mudando as coordenadas:
- $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;
  - $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;
  - $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;
  - $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .
- 6) Vimos os três primeiros tipos de curvas cúbicas nos itens 2, 3 e 4. O quarto tipo de curva  $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , em geral é um tanto quanto complicado, existem muitos tipos de curvas cúbicas, são 71 ao todo. Porém é possível resolver  $y$  em termos de  $x$ . Newton multiplicou os termos por  $x$  e completou os quadrados:

$$x^2y^2 + ey = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx,$$

$$(xy + e/2)^2 = g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e^2/4. \quad (2)$$

Então ele dividiu as curvas em classes de acordo com o coeficiente líder e dividiu em mais classes de acordo com o comportamento das raízes de  $g(x)$ . Abaixo temos alguns exemplos representados que foram obtidos escolhendo valores simples para os coeficientes da equação (2) e outros exemplos através da seleção de valores dos parâmetros de Newton.

Na Figura 12.23 abaixo, nenhuma dessas curvas consegue ter mais do que dois pontos acima do valor de  $x$ , uma vez que a curva original é  $y$  ao quadrado. Existem intervalos

no eixo  $x$  que não correspondem a valores reais de  $y$ , quando  $g(x) < 0$ . Isto pode ocorrer em no máximo três intervalos, desde que  $g$  tenha no máximo quatro raízes reais.

Os casos degenerados (dos quais não estão sendo contados dentro dos 78 tipos de curvas), são a união de uma cônica com uma reta, um ponto com uma reta, ou três retas, algumas destas podem coincidir. Abaixo temos dois exemplos de curvas degeneradas Figura 12.25 e 12.26.

Observe que um ponto único, do qual é um caso degenerado de uma curva quadrática, porém não é nenhum ponto de uma cúbica e nem um conjunto nulo.

Qualquer cúbica que seja obtida pela equação (2), deverá ter três assíntotas. Supomos que a curva está definida pela equação polinomial de ordem  $n$   $f(x, y) = 0$ , e seja  $f_k(x, y)$  de ordem  $k$  parte de  $f$  de modo que  $f = f_n + f_{n-1} + \dots$ , se  $f$  tiver  $ax + by$  com um simples fato de que  $f_n = (ax + by)_{g_{n-1}}$ , então a curva  $f = 0$  tem assíntota.

$$(ax + by)_{g_{n-1}}(b, -a) + f_{n-1}(b, -a) = 0$$

Se  $f_n$  tem  $ax + by$  como um fator repetido e  $ax + by$  é também um fator de  $f_{n-1}$  de modo que  $f_n = (ax + by)_{h_{n-2}}$ , então a curva possui um par de assíntotas.

$$(ax + by)_{g_{n-1}}^2(b, -a) + (ax + by)_{h_{n-1}}(b, -a) + f_{n-2}(b, -a) = 0$$

Finalmente, se  $f_n$  tem  $ax + by$  como um fator repetido, porém  $f_{n-1}$  não possui  $ax + by$  como um fator, então não há assíntota  $ax + by = c$ , para qualquer constante  $c$ . Observe que o ponto máximo de três  $f_k$  são necessários para determinar completamente as assíntotas, porém o ponto máximo de uma  $f_k$  é suficiente para especificar as possibilidades (no máximo  $n$ ).

A Classificação das Curvas Cúbicas de Newton mostra que não é possível haver mais do que quatro partes em qualquer curva cúbica. Exemplos de curvas estão dadas abaixo.

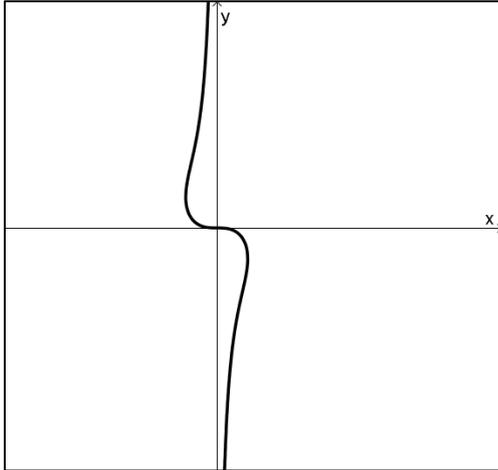


Figura 12-15:  $xy^2 + y = -x^3$ .

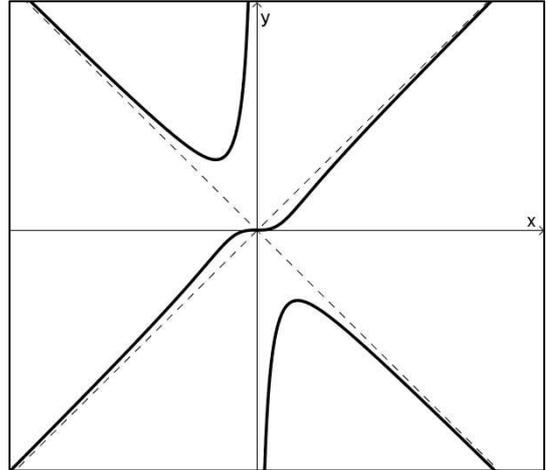


Figura 12-16:  $xy^2 + y = x^3$ .

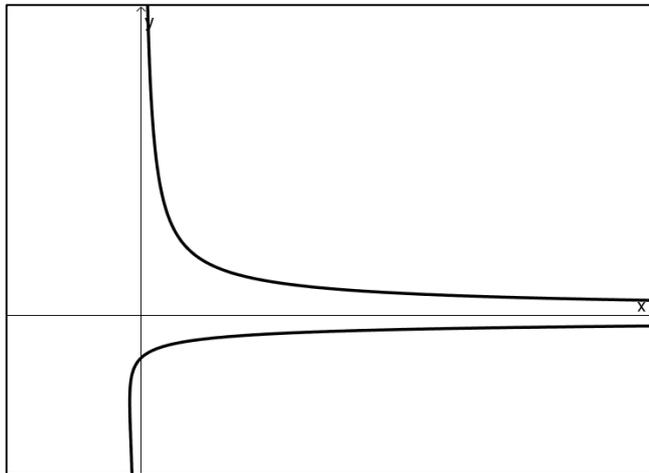


Figura 12-17:  $xy^2 - y = 1$ .

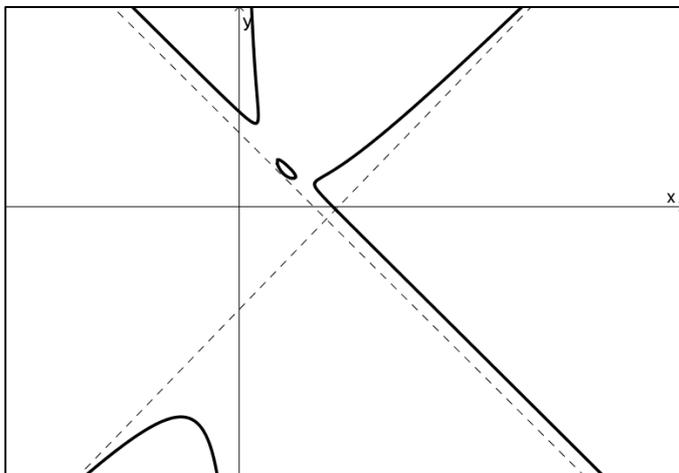


Figura 12-18:  $xy^2 - 2,45y = x^3 - 5x^2 + 8,75x - 6,25$ .

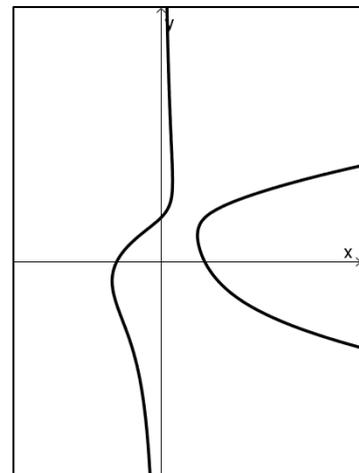


Figura 12-19:  $xy^2 - y = x^2 - 1$ .

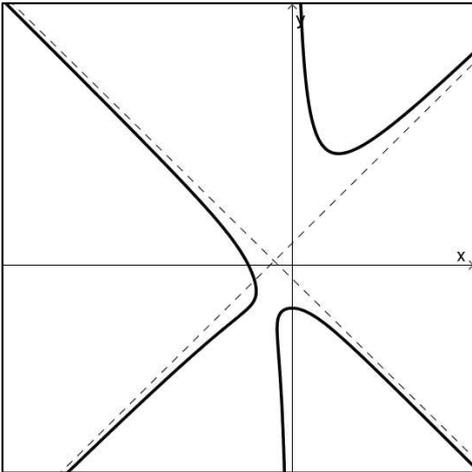


Figura 12-20:  $xy^2 - y = x^3 + x^2 + x + 1$ .

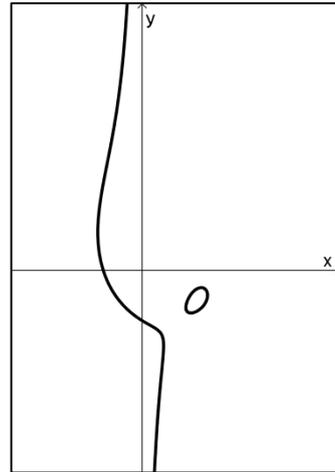


Figura 12-21:  $xy^2 + 1,73y = -x^3 + 2x^2 + 0,25x - 2$ .

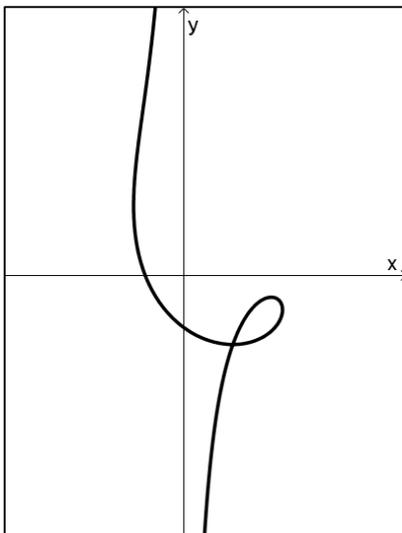


Figura 12-22:  $xy^2 + \sqrt{8}y = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ .

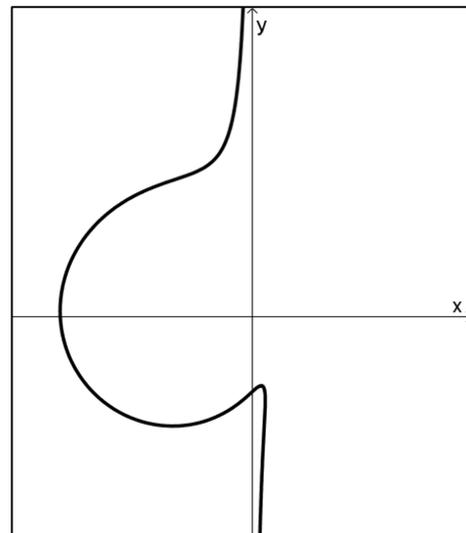


Figura 12-23:  $xy^2 + 2,45y = -x^3 - 5x^2 + 8,75x - 6,25$ .

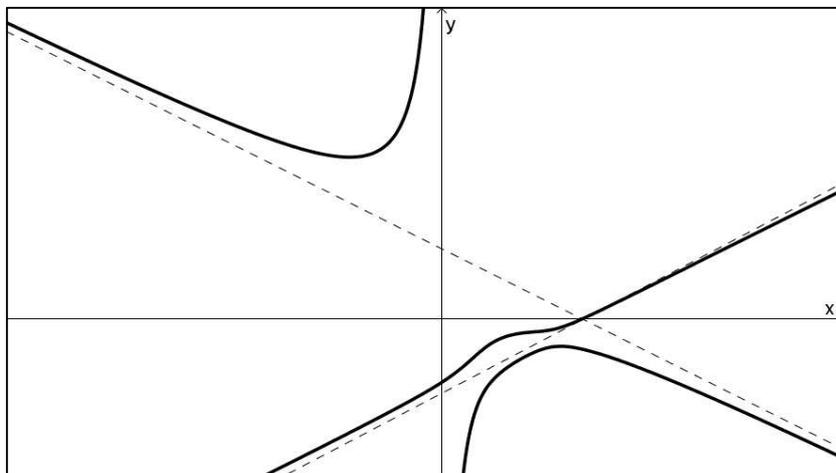


Figura 12-24:  $xy^2 + 11y = x^3 - 10x^2 + 35x - 50$ .

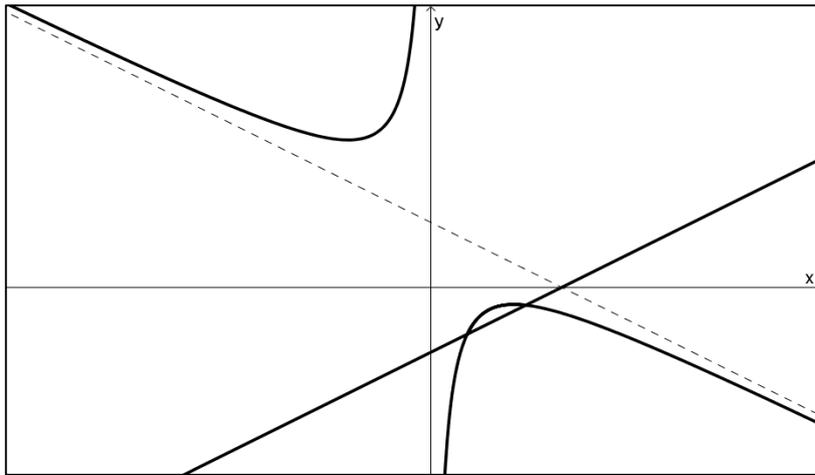


Figura 12-25:  $xy^2 + 10y = x^3 - 10x^2 + 35x - 50$  (degenerado).

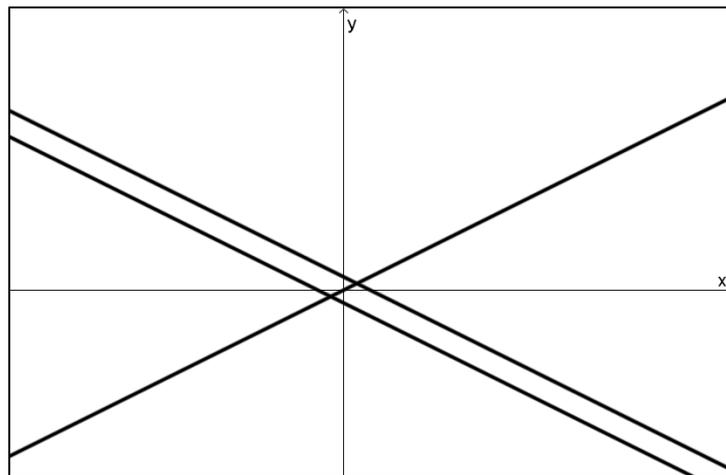


Figura 12-26:  $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - x + y = 0$  (degenerado).

## Parte III

---

### 13 Plano de aula

A proposta deste plano de aula é exercitar os conceitos estudados neste trabalho em um exercício completo. A execução deste plano de ano é flexível, pois permite o professor escolher de qual etapa quer iniciar ou escolher apenas uma ou duas etapas, respeitando assim o nível de conhecimentos dos alunos e a profundidade do assunto que o professor quer atingir.

O plano de aula será atingido inteiramente quando o professor iniciar pela primeira etapa.

**Público alvo:** alunos do terceiro ano de ensino médio, cursinhos pré-vestibulares e graduação em matemática.

**Objetivo:** obter a equação da cônica por cinco pontos e a partir desta a obtenção dos elementos da elipse como focos, vértices e centro; desenhar a elipse no plano cartesiano ou utilizando o software GeoGebra; fazer comparações com as mudanças de coordenadas quando há rotação e/ou translação.

**Material necessário:** papel quadriculado e régua para uma construção manual ou o software GeoGebra para uma construção digital.

**Duração:** de 3 a 4 aulas.

#### Etapa 1

**Desenvolvimento:**

Um grupo de astrônomos está tentando descrever a órbita elíptica de um corpo celeste em torno de uma estrela batizada com o nome de “ $\alpha$ ”, conforme ilustração abaixo:

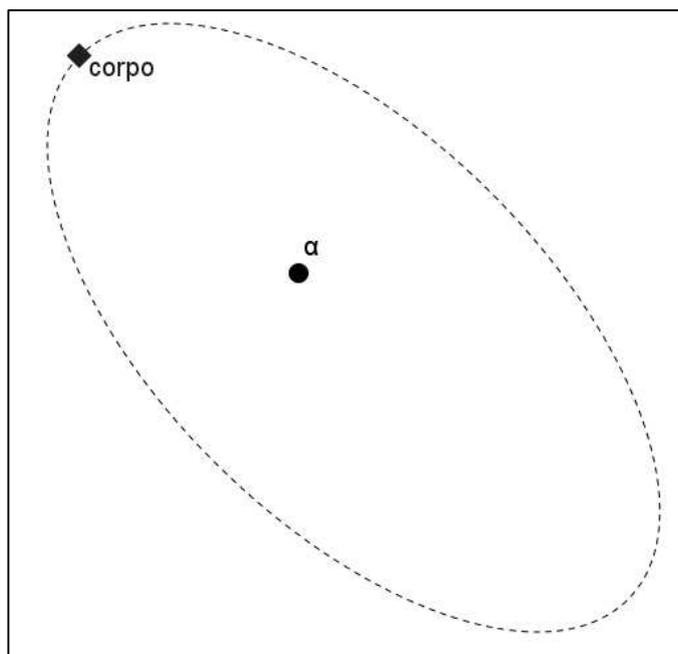


Figura 13-1: Corpo celeste e a estrela  $\alpha$ .

Para facilitar as conclusões, o grupo criou um sistema de coordenadas ortogonal onde a estrela  $\alpha$  se encontra na origem desse sistema  $O = (0,0)$ , e após várias observações, os astrônomos identificaram cinco pontos em que o corpo celeste teria passado, sendo eles:  $P_1 = (-2,2)$ ;  $P_2 = (3,-1)$ ;  $P_3 = (3,-3)$ ;  $P_4 = (-2,0)$  e  $P_5 = (1,-3)$ :

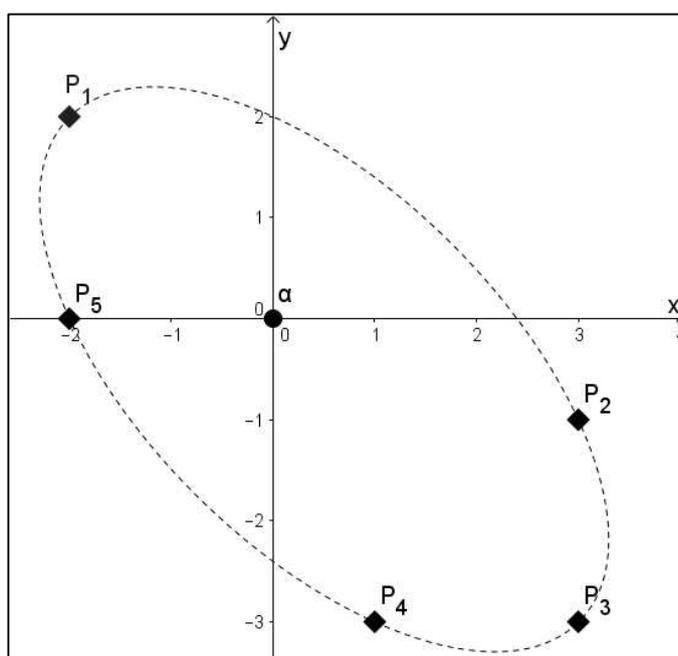


Figura 13-2: Estrela  $\alpha$  e os cinco pontos.

**Proposta:** A partir desses cinco pontos obtenha a equação geral da elipse.

**Solução:** Conforme já visto anteriormente, a partir da equação geral das cônicas  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , onde  $A \neq 0$  ou  $B \neq 0$  ou  $C \neq 0$ , dados cinco pontos quaisquer no plano existe uma única cônica determinada por eles.

Substituindo os pontos na equação geral das cônicas, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} P_1 \rightarrow 4A - 4B + 4C - 2D + 2E + F = 0 \\ P_2 \rightarrow 9A - 3B + C + 3D - E + F = 0 \\ P_3 \rightarrow 9A - 9B + 9C + 3D - 3E + F = 0 \\ P_4 \rightarrow 4A + 0B + 0C - 2D + 0E + F = 0 \\ P_5 \rightarrow A - 3B + 9C + D - 3E + F = 0 \end{cases} .$$

Para este sistema estamos considerando  $A \neq 0$ , logo vamos dividir cada equação por  $A$ .

Considerando  $B/A = b$ ,  $C/A = c$ ,  $D/A = d$ ,  $E/A = e$ ,  $F/A = f$ ,

$$\begin{cases} -4b + 4c - 2d + 2e + f = -4 \\ -3b + c + 3d - e + f = -9 \\ -9b + 9c + 3d - 3e + f = -9 \\ 0b + 0c - 2d + 0e + f = -4 \\ -3b + 9c + d - 3e + f = -1 \end{cases} \rightarrow M = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 1 & -9 \\ -9 & 9 & 3 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ -3 & 9 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Escalonando a Matriz  $M$ :

- i. Substituir a linha (2) pela soma da linha (2) multiplicada por 4 com a linha (1) multiplicada por  $-3$ ;
- ii. Substituir a linha (3) pela soma da linha (3) multiplicada por 4 com a linha (1) multiplicada por  $-9$ ;
- iii. Substituir a linha (5) pela soma da linha (5) multiplicada por 4 com a linha (1) multiplicada por  $-3$ ;

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 1 & -9 \\ -9 & 9 & 3 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ -3 & 9 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 24 & 10 & -18 & 1 & 8 \end{bmatrix} .$$

- iv. Substituir a linha (5) pela soma da linha (5) com a linha (2) multiplicada por 3;

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 24 & 10 & -18 & 1 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 64 & -48 & 4 & -64 \end{bmatrix} .$$

- v. Dividir a linha (3) por 5 e a linha (5) por 4;

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & 1 & -16 \end{bmatrix}.$$

- vi. Substituir a linha (4) pela soma da linha (4) multiplicada por 3 com a linha (3);  
vii. Substituir a linha (5) pela soma da linha (5) multiplicada por 6 com a linha (3) multiplicada por  $-16$ ;

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & 1 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 22 & -96 \end{bmatrix}.$$

- viii. Dividir a linha (4) e a linha (5) por 2;

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 11 & -48 \end{bmatrix}.$$

- ix. Substituir a linha (5) pela soma da linha (5) com a linha (4) multiplicada por 3;

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 11 & -48 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & 18 & -10 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & -72 \end{bmatrix}.$$

Obtemos  $f = -\frac{72}{15}$ , que após a fração ser simplificada por 3 obtemos  $f = -\frac{24}{5}$ . E assim

sucessivamente obtém-se:  $e = \frac{2}{5}$ ;  $d = -\frac{2}{5}$ ;  $c = 1$  e  $b = \frac{6}{5}$ . Como foi considerado  $B/A =$

$b$ ,  $C/A = c$ ,  $D/A = d$ ,  $E/A = e$ ,  $F/A = f$ , logo concluímos que  $A = 5$ , sendo assim teremos

$B = 6$ ,  $C = 5$ ,  $D = -2$ ,  $E = 2$  e  $F = -24$ , logo a equação da elipse será:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 24 = 0.$$

## Etapa 2

### Desenvolvimento:

Um corpo celeste possui uma órbita elíptica em torno de uma estrela “ $\alpha$ ” que pode ser obtida pela equação:  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 24 = 0$ , considerando que  $\alpha$  está localizada no centro do sistema ortogonal  $Oxy$ , como mostra a figura abaixo:

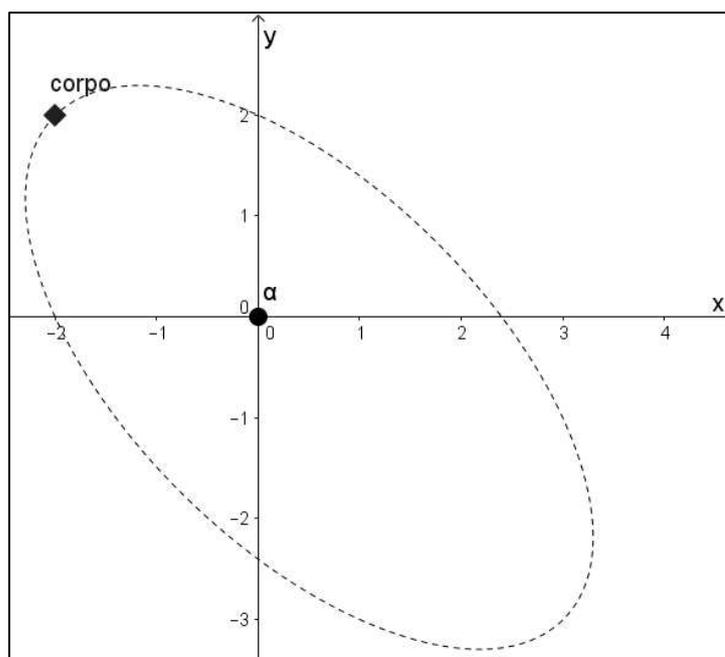


Figura 13-3: Órbita do corpo celeste.

**Proposta:** Dada a equação da elipse  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 24 = 0$ , determine a sua forma canônica, o centro, os focos e os vértices.

**Solução:** Levando as fórmulas de translação na equação dada:

$$5(x_0 + x')^2 + 6(x_0 + x')(y_0 + y') + 5(y_0 + y')^2 - 2(x_0 + x') + 2(y_0 + y') - 24 = 0$$

e fazendo o coeficiente  $x' = 0$ , obtemos  $10x_0 + 6x'y_0 - 2x' \rightarrow x'(10x_0 + 6y_0 - 2) = 0$ .

Fazendo o coeficiente  $y' = 0$ , obtemos  $6x_0y' + 10y_0y' + 2y' \rightarrow y'(6x_0 + 10y_0 + 2) = 0$  e assim

$$\begin{cases} 10x_0 + 6y_0 = 2 \\ 6x_0 + 10y_0 = -2 \end{cases} \rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ e } y_0 = -\frac{1}{2}, \text{ portanto } \boxed{O' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}.$$

Substituindo  $O' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  temos:

$$5\left(\frac{1}{2} + x'\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2} + x'\right)\left(-\frac{1}{2} + y'\right) + 5\left(-\frac{1}{2} + y'\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} + x'\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + y'\right) - 24 = 0$$

e logo  $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 = 24$ . (1)

Rotação: vamos eliminar o termo  $x'y'$  da equação acima, como  $A = C$ , conforme visto na seção 5.4, se  $A = C$ , então  $\cos 2\theta = 0$ , portanto  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Logo:  $\begin{cases} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{cases} \rightarrow x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \text{ e } y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'')$ .

Levando as fórmulas de rotação em (1):

$$5 \frac{(x'' - y'')^2}{2} + 6 \frac{(x'' - y'')(x'' + y'')}{2} + 5 \frac{(x'' + y'')^2}{2} = 24,$$

$$\frac{5x''^2}{2} - 5x''y'' + \frac{5y''^2}{2} + 3x''^2 - 3y''^2 + \frac{5x''^2}{2} + 5x''y'' + \frac{5y''^2}{2} = 24$$

e assim

$$8x''^2 + 2y''^2 = 24 \rightarrow \boxed{\frac{x''^2}{3} + \frac{y''^2}{12} = 1}.$$

Através da equação canônica, podemos notar que os focos são oblíquos ao eixo  $y$  e conseguimos então obter,  $b = \sqrt{3}$ ,  $a = 2\sqrt{3}$  e  $c = 3$ . Os focos da elipse na forma canônica são obtidos nos pontos  $F''_1 = (0, -c)$  e  $F''_2 = (0, c)$ , logo  $F''_1 = (0, -3)$  e  $F''_2 = (0, 3)$ . Como a elipse sofreu rotação de  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , aplicamos a rotação de eixos que nos fornece:

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{cases} \rightarrow x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \text{ e } y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y''), \text{ e assim } F'_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } F'_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Como a elipse sofreu translação, já que o centro da mesma é  $O' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , aplicamos a translação de eixos que nos fornece:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{2} + x' \text{ e } y = -\frac{1}{2} + y'.$$

Logo  $\boxed{F_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}+1}{2}, -\frac{3\sqrt{2}+1}{2}\right)}$  e  $\boxed{F_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \frac{3\sqrt{2}-1}{2}\right)}$ .

Os vértices da elipse na forma canônica são obtidos nos pontos  $A''_1 = (0, -a)$ ,  $A''_2 = (0, a)$ . De forma análoga, os vértices são obtidos por:

$$A''_1 = (0, -2\sqrt{3}) \text{ e } A''_2 = (0, 2\sqrt{3});$$

$$A'_1 = (\sqrt{6}, -\sqrt{6}) \text{ e } A'_2 = (-\sqrt{6}, \sqrt{6});$$

$A_1 = \left(\sqrt{6} + \frac{1}{2}, -\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right)$  e  $A_2 = \left(-\sqrt{6} + \frac{1}{2}, \sqrt{6} - \frac{1}{2}\right)$ , podemos aproximar para:

$$\boxed{A_1 \approx (3, -3)} \text{ e } \boxed{A_2 \approx (-2, 2)}.$$

### Etapa 3

#### **Desenvolvimento:**

Esta etapa consiste em na construção das três elipses obtidas na etapa anterior. Nesta fase o aluno poderá observar e compreender melhor através da construção as mudanças de coordenadas que ocorrem quando há translação e/ou rotação de eixos. A construção poderá ser realizada manualmente ou através do software GeoGebra.

**Proposta:** Construir a primeira elipse  $e_1$ , que possui equação  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ , centro  $O = (0,0)$ , focos  $F''_1 = (0, -3)$  e  $F''_2 = (0,3)$  e vértices  $A''_1 = (0, -2\sqrt{3})$  e  $A''_2 = (0, 2\sqrt{3})$ . No software GeoGebra, construa todos os pontos, clique na função “elipse”, selecione apenas os dois focos e um vértice para finalizar a construção, consideraremos  $A''_1 \approx (0, -3.46)$  e  $A''_2 \approx (0, 3.46)$ .

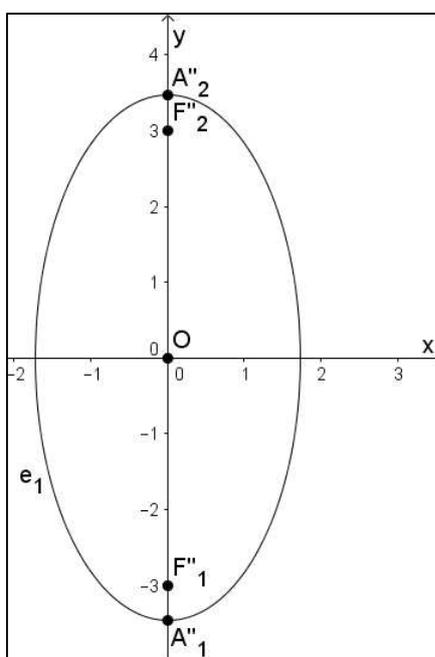


Figura 13-4: Elipse  $e_1$ .

Construir a segunda elipse  $e_2$  que representa a rotação de  $\frac{\pi}{4}$  da elipse  $e_1$ . A elipse  $e_2$ , possui equação  $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 = 24$ , centro  $O = (0,0)$ , focos  $F_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}+1}{2}, -\frac{3\sqrt{2}+1}{2}\right)$  e  $F_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \frac{3\sqrt{2}-1}{2}\right)$  e vértices  $A'_1 = (\sqrt{6}, -\sqrt{6})$  e  $A'_2 = (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ . No software GeoGebra considere  $F'_1 \approx (2.12, -2.12,)$  e  $F'_2 \approx (-2.12, 2.12)$  e vértices  $A'_1 \approx (2.45, -2.45)$  e  $A'_2 \approx (-2.45, 2.45)$ :

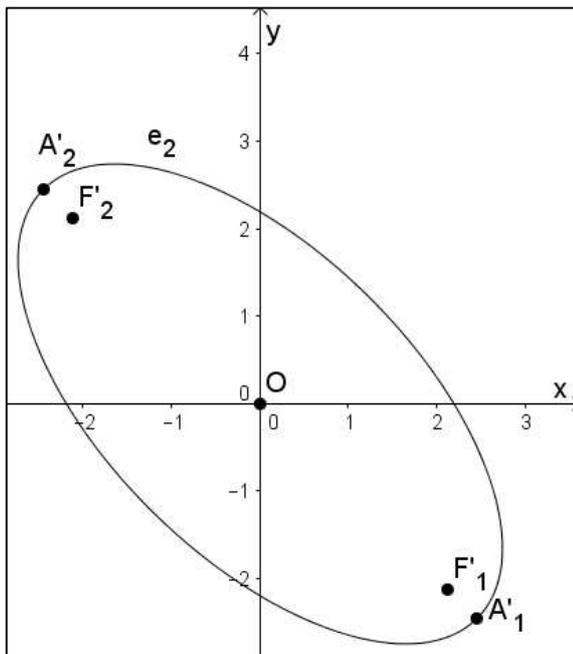


Figura 13-5: Elipse  $e_2$ .

Construir a segunda elipse  $e_3$  que representa a translação das coordenadas da elipse  $e_2$ , abscissas em  $x = \frac{1}{2}$  e as ordenadas em  $y = -\frac{1}{2}$ . A elipse  $e_3$ , possui equação  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 24 = 0$ , centro  $O' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , focos  $F_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}+1}{2}, -\frac{3\sqrt{2}+1}{2}\right)$  e  $F_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \frac{3\sqrt{2}-1}{2}\right)$  e vértices  $A_1 = \left(\sqrt{6} + \frac{1}{2}, -\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right)$  e  $A_2 = \left(-\sqrt{6} + \frac{1}{2}, \sqrt{6} - \frac{1}{2}\right)$ . No software GeoGebra considere  $F'_1 \approx (1.62, -1.62,)$  e  $F'_2 \approx (-1.62, 1.62)$  e vértices  $A_1 \approx (3, -3)$  e  $A_2 \approx (-2, 2)$ :

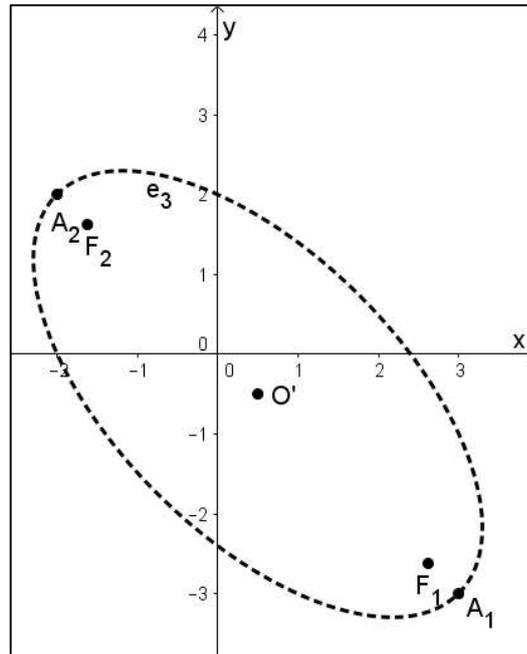


Figura 13-6: Elipse  $e_3$ .

O professor poderá também fazer uma comparação das mudanças de coordenadas quando há rotação de eixo da elipse  $e_1$  para a elipse  $e_2$  conforme abaixo:

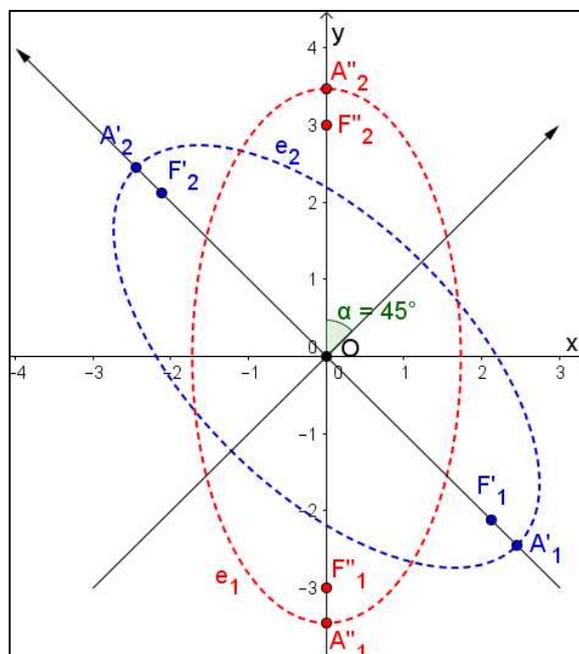


Figura 13-7: Rotação de eixos, mudanças de coordenadas da elipse  $e_1$  para a elipse  $e_2$ .

E também das mudanças de coordenadas quando há translação da elipse  $e_2$  para a elipse  $e_3$ :

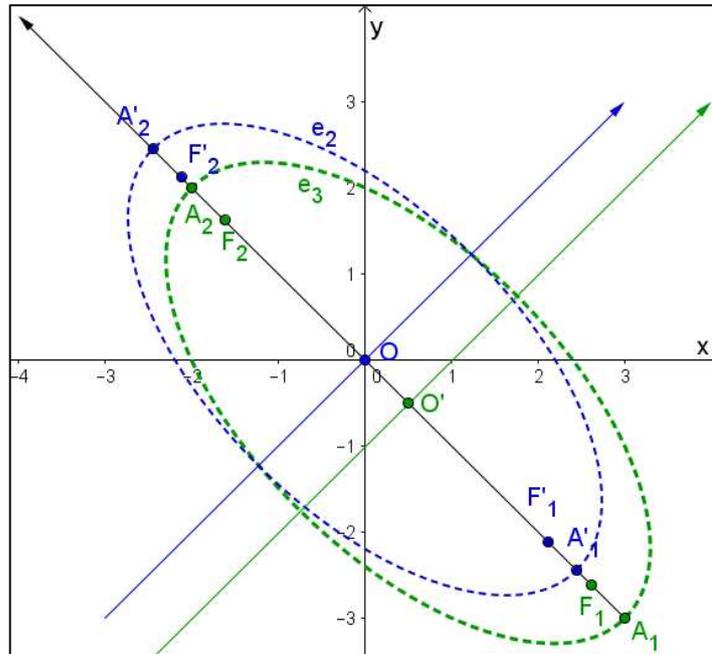


Figura 13-8: Translação de eixos, mudanças de coordenadas da elipse  $e_2$  para a elipse  $e_3$ .

E por último, pode-se fazer uma comparação das mudanças de coordenadas quando há rotação e translação de eixo, neste caso da elipse  $e_1$  para a elipse  $e_3$  conforme abaixo:

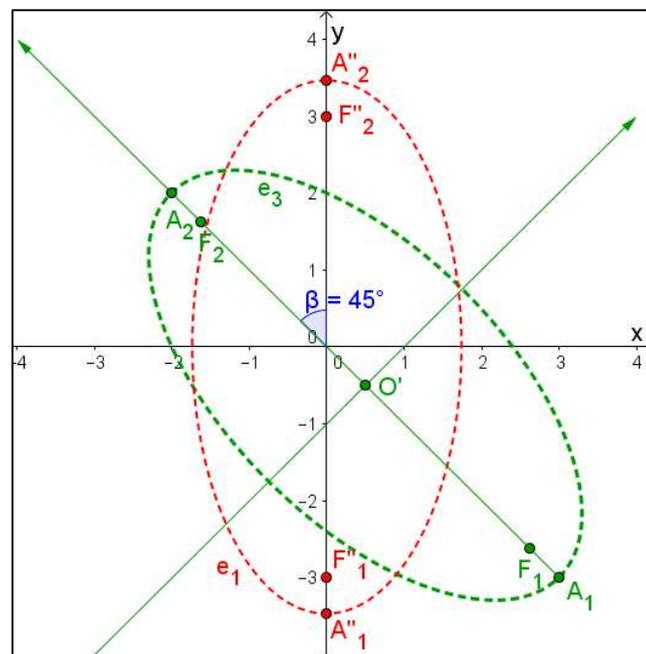


Figura 13-9: Translação e rotação de eixos, mudanças de coordenadas da elipse  $e_1$  para a elipse  $e_3$ .

## Parte IV

---

### **14 Recursos didáticos: Aplicação para Tablets e Smartphones**

Conhecida como a sociedade da tecnologia, sociedade do conhecimento ou ainda a sociedade da aprendizagem, a atual sociedade é marcada pela rapidez e grande abrangência de informações. A nova realidade exige um perfil de profissional e cidadão que coloca para a escola e educadores novos desafios. Encontramos situações que demandam o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação – chamadas de TICs – que transformam a maneira de pensar e de se relacionar com as pessoas, objetos e com o mundo ao redor.

Desenvolver projetos educacionais como estratégia pedagógica é uma tentativa de unir dois mundos que existem separadamente: a vida e a escola. Projetos inovadores têm ajudado estudantes a estarem mais motivados e a aprender de maneira significativa os conceitos envolvidos nestes projetos.

O uso das tecnologias e mídias no desenvolvimento de projetos favorece efetivamente, uma nova visão educacional, colocando a escola como um espaço privilegiado de interação social, pontes entre conhecimentos, valores, crenças usos e costumes.

As Tecnologias de Informação e Comunicação – TICs estão cada vez mais presentes no âmbito educacional, e através delas tem-se maior acesso a dados e informações nunca vistos em outros tempos. Certamente uma das tecnologias que mais ultrapassa a linearidade de informações e conhecimentos, que está presente na rotina das pessoas é a internet.

A rede mundial de computadores oportuniza a inúmeros usuários a navegação entre mundos distintos, uma transição acelerada que também inclui o contexto educacional e não deve ser ignorada pelas Instituições de Ensino.

As novas tecnologias utilizadas como ferramentas pedagógicas e também como uma forma de linguagem, redefinem a função docente e o modo como o aluno interage com a escola e o aprendizado. Agregam às práticas de ensino e aprendizagem novos modos de acesso aos conhecimentos. Antes mesmo de influir sobre a aprendizagem do aluno, a utilização das novas tecnologias implica ao educador repensar sua prática docente. Deste modo, além de

reestruturar seu planejamento escolar, e adaptar sua prática às novas possibilidades de ensino e aprendizagem, os alunos estarão sujeitos a novas formas de comunicação, linguagem, expressão mudando a forma tradicional de aprender e o interesse pela escola.

Os paradigmas educacionais atuais partem para uma concepção integracionista e construtivista, na qual o conhecimento é compreendido como uma relação de interdependência entre o sujeito e seu meio. Sendo as trocas sociais a motivação para o desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem. O conhecimento estará em constante mudança, em constante reforma, e nas construções sempre haverá algo de novo para surgir, um novo conhecimento para emergir.

Nesse contexto deve-se levar em consideração a marcante pluralidade mundial em que vivemos, diversidade cultural, de informações, comunicações, proporciona uma acelerada e significativa produção de conhecimentos.

#### **14.1 EasyMath: aplicativo para Tablets e Smartphones**

Os aplicativos para tablets e smartphones estão cada vez mais populares em todo o mundo, tornando-se mais presentes no dia a dia de muitas pessoas, pois oferecem vários tipos de facilidades ao alcance das mãos de uma forma rápida, simples e prática. São softwares que desempenham atividades específicas que são obtidos pelas “lojas de aplicativos” como a App Store, Google Play entre outras.

Utilizando esse canal amplamente difundido, surgiu a ideia de criar um aplicativo que auxiliasse no estudo da matemática: o “EasyMath”.

A princípio está disponível em dispositivos que operam no sistema Android, podendo ser adquirido no GooglePlay, tendo como a versão inicial “Cônicas” (objeto de estudo deste trabalho), porém poderá ser estendido a outras versões, plataformas bem como com diferentes abordagens.

São inúmeras justificativas para a criação de um aplicativo ao invés de disponibilizar todo o conteúdo online:

- Facilidade de uso: possibilita melhor o uso de recursos e interface dos dispositivos, facilitando a navegação e a agilidade das ações. Muitas pessoas tem dificuldades em realizar pesquisas na internet, pois há grande volume de informações há serem analisadas, filtradas e demanda tempo.

- Menor custo de acesso: como o aplicativo é adaptado ao dispositivo, o tráfego de dados necessários para a navegação é menor se comparado a navegadores convencionais.
- Menor uso dos recursos disponíveis: os aplicativos possibilitam melhor experiência com os recursos que o aparelho possui, por exemplo: e-mail, captura de tela, aplicativos de comunicação, arquivamento de dados, etc.

## 14.2 Funcionalidade do Aplicativo “EasyMath”

O aplicativo “EasyMath Cônicas” está disponível no Google Play através do link: [https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai\\_gcacure.EasyMath&hl=pt\\_BR](https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_gcacure.EasyMath&hl=pt_BR).

Após realizar o download, o mesmo fica alocado na tela inicial do dispositivo (tablet ou smartphone):



Figura 14-1: Visualização do EasyMath no dispositivo.

Na tela inicial do aplicativo temos uma mensagem de boas vindas e encontramos o assunto no qual iremos abordar nesta versão.

Em todas as telas há uma frase de alguma personalidade importante na matemática e também há um provérbio chinês. A ideia dessas mensagens é aproximar as pessoas para o

estudo da matemática que é uma ciência importantíssima para o nosso desenvolvimento e sobrevivência. Ainda na tela inicial (Figura 14.2), temos duas funções iniciar e sair.

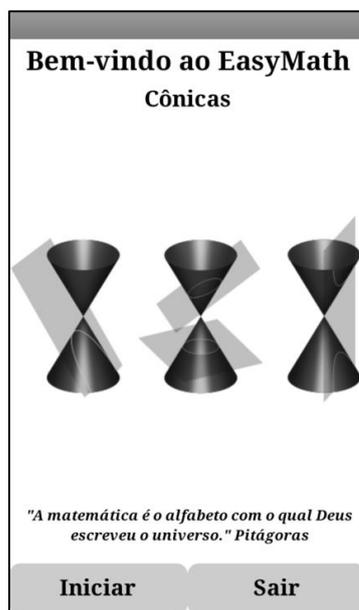


Figura 14-2: Tela Inicial

Ao clicar no botão sair, o usuário é direcionado a uma tela (Figura 14.3) que encerra o aplicativo.

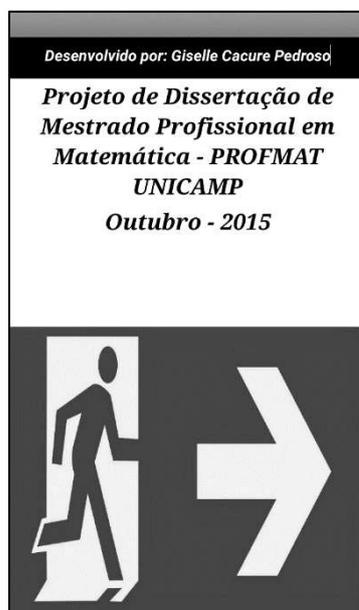


Figura 14-3: Tela Sair.

Se na tela inicial o usuário clicar em “Iniciar”, o mesmo é direcionado a tela de Menu Principal (Figura 14.4), onde encontramos um índice referente a “Cônicas”. Há também a opção de voltar a tela anterior e a opção “mais” que mostraremos posteriormente.



Figura 14-4: Menu Principal.

Ao selecionar as opções de cônicas (elipse, hipérbole ou parábola) conforme a sua classificação o aplicativo direciona o usuário as telas que possuem opções simples como menu (voltar ao menu principal), anterior (voltar a tela anterior quando houver) e próximo (ir para a próxima tela quando houver).

**5 Cônicas: descrição elementar e formas canônicas**

Uma cônica no plano é definida como o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem a equação:  $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = f$ , em que  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são números reais, com  $a, b$  ou  $c$  não nulos. A elipse, a hipérbole e a parábola são chamadas de cônicas não degeneradas. As cônicas que incluem um único ponto e um par de retas são chamadas cônicas degeneradas.

As cônicas não degeneradas podem ser obtidas da interseção de um cone circular com um plano.

Definimos as cônicas como um conjunto de pontos que satisfazem certas propriedades e determinam suas formas canônicas.

**5.1 Elipse**

**Definição 5.1** A elipse é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que a soma das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (focos) é constante, ou seja, se  $\text{dist}(P, F_1) = 2c$ , então a elipse é o conjunto dos pontos  $P$  tal que:  $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$ , em que  $a > c$ .

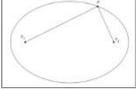


Figura 5.1: Elipse que o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tal que  $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$ .

Menu      Próximo

Figura 14-5: Tela Elipse.



Figura 6: Hipérbole de centro  $O = (x_0, y_0)$  e focos pontos no eixo  $x$ .

Tanto em (I) como em (II) desenvolvendo-se os produtos notáveis e ordenando-se as variáveis, a equação da hipérbole assume a forma  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , em que  $A$  e  $C$  são não nulos e diferentes em sinal.

Assim, quando a hipérbole tem centro  $O' = (x_0, y_0)$ , as assíntotas passando por esse ponto e serão por equações:

$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$  para a hipérbole (I)

$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$  para a hipérbole (II)

**Exemplo 6.4** Determinar a equação da hipérbole e assíntotas com focos nos pontos  $F_1 = (2, 2)$  e  $F_2 = (8, 2)$  e um vértice  $A_1 = (3, 2)$ . Faça um esboço da hipérbole.

**Solução** Observamos que a hipérbole tem focos sobre o eixo  $x$  e que o centro  $O'$  é o ponto médio dos focos  $F_1$  e  $F_2$ , logo  $O' = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \rightarrow O' = (4, 2)$ . Sendo assim  $a = \text{dist}(P, A_1) \rightarrow a = 1$  e  $c = \text{dist}(P, O') \rightarrow c = 2$ .

Temos que  $b^2 = a^2 + c^2 - b = \sqrt{3}$ . A equação da hipérbole se configura:

$$\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \rightarrow \frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \text{ ou } 3(x-4)^2 - (y-2)^2 - 24x + 6y + 41 = 0.$$

Assíntotas:  $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \rightarrow y = \pm\sqrt{3}(x - 2) + 2$ .

Menu      Anterior      Próximo

Figura 14-6: Tela Hipérbole.

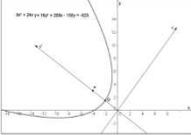


Figura 7.11: Parábola  $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 20x + 16y + 2019 = 1520y + 425 = 0$ .

Menu      Anterior

Figura 14-7: Tela Parábola

A funcionalidade deste aplicativo é simples, pois ao escolher o assunto de interesse basta navegar entre as telas através dos botões “Menu”, “Anterior” e “Próximo”. No botão “Mais” do menu principal encontra-se a opção de obter este trabalho na íntegra clicando no botão “Acesse aqui o Trabalho de Dissertação completo”, onde é possível obter todos os assuntos abordados neste trabalho: Matrizes, Sistemas Lineares, Autovalores e Autovetores,

Mudança de Coordenadas, Cônica Obtida por Cinco Pontos no Plano, Teorema do Hexágono de Pascal e Curvas Cúbicas no Plano: Classificação de Newton.

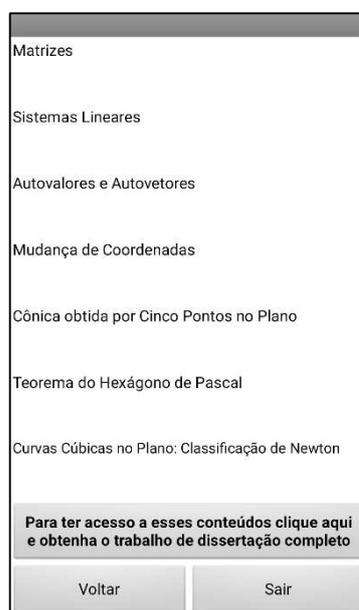


Figura 14-8: Tela para obter o trabalho completo.

## 15 Bibliografia

Boulos, P. & CAMARGO, I. d., 2005. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. s.l.:Makron Books do Brasil.

Giacaglia, G. E. O., 1985. *Vetores e Geometria Analítica - Elementos de Álgebra Linear*. São Paulo: Nobel.

Gomez, J. J. D., Fresnel, K. R. & Crissaff, L. d. S., 2012. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM.

Hefez, A. & Fernandez, C. d. S., 2012. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM.

Lima, E. L., 2001. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA.

Lipschutz, S., 1994. *Álgebra Linear*. 3 ed. São Paulo: Makron Books.

Nunemacher, J., 1993. Newton's investigation of cubic curves. *Mathematics Association of America*, Volume 30.

Nunes de Andrade, L., 2001. Construção de Conicas e o Teorema de Pascal. *Revista do Professor de Matemática*, Issue 45.

Santos, R. J. S., 2007. *Matrizes, vetores e geometria analítica*. s.l.:Editora da UFMG.

Ulhoa, F. & Lilian, M., 2005. *Um Curso de Álgebra Linear*. s.l.:Editora da USP.

Venturi, J. J., 1949. *Cônicas e Quádricas*. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado.