



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

PIBIC/CNPq 2020-2021
Relatório Final

*Aplicações dos sistemas de Filippov a modelos de
Engenharia Elétrica: otimização de conversores
DC-DC*

Aluna: Nicole Karen Moura de Jesus

RA: 242539

nicolekarenmj@gmail.com

Graduanda de Engenharia Elétrica
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

rmiranda@unicamp.br

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Salvador, 2021

Resumo

Este projeto visa estudar uma série de modelos de engenharia à luz da teoria de Filippov para equações diferenciais descontínuas. Nestes modelos, quando o sistema é tridimensional, é frequente o aparecimento de uma singularidade de Teixeira. Estudaremos a teoria matemática que suporta a dinâmica destas equações e faremos análise qualitativas e quantitativas sobre os modelos, com o objetivo de construir o modelo físico a partir destes estudos visando a otimização dos conversores DC-DC, que são amplamente utilizados na conversão de energia elétrica gerada a partir de fontes renováveis.

1 Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Suaves (SDNS) tem se desenvolvido rapidamente, principalmente devido às suas fortes relações com campos aplicados, como mecânica, engenharia aeroespacial, física, economia entre outros [17, 18]. Além disto, os SDNS estão na fronteira entre a matemática, física matemática e engenharia [21]. Nesta fronteira, encontramos os conversores DC-DC, importantes para as fontes de energia renováveis que, cada vez mais, são necessárias em função da sobrecarga das redes e de seus sistemas de distribuição.

Bem como, a crescente motivação para a utilização de fontes de energias renováveis está relacionada com a redução das emissões de CO_2 e com a melhoria da qualidade de vida da humanidade. Isto é potencializado em comunidades pequenas, isoladas e autônomas, onde o acesso a fontes de energia renováveis é a única solução para satisfazer as suas necessidades energéticas [20].

Esta necessidade, todavia, está acompanhada do desafio de entender e desenvolver modelos matemáticos que possibilitem aprimorar o processo de conversão de energia elétrica através dos conversores DC-DC, que possuem importantes aplicações no aproveitamento de fontes renováveis de energia elétrica e nos veículos elétricos [19].

Em muitos casos, os SDNS são descritos por sistemas de equações diferenciais definidas por partes, onde temos equações diferenciais suaves definidas em certas regiões do retrato de fase, separados por interfaces, chamadas regiões de descontinuidade [17].

A formalização matemática da teoria dos SDNS foi iniciada por Filippov em [22], onde ele apresenta uma convenção para as trajetórias de um SDNS. Questões como classificação de trajetórias e estabilidade estrutural foram mais tarde abordadas por Sotomayor-Teixeira [9].

Em termos de aplicações, a existência de várias soluções é em geral bem vista, pois permite a introdução de um controlador. O conceito de solução deslizante (*sliding motion*) já estava presente em vários modelos no final do século passado. Um fenômeno que com frequência acontece com estes modelos é o aparecimento de singularidades do tipo dobra-dobra sobre a região de descontinuidade. Quando isto acontece com modelos 3D, uma das opções genéricas para a singularidade é a Teixeira singularidade.

Nos artigos [11], [12] e [13], esta singularidade aparece em todos os modelos. Neste projeto, nosso objetivo foi entender a matemática que envolve esta singularidade, e sua importância para estes e outros modelos.

Para tanto, revisou-se sistemas de equações diferenciais lineares, com foco na classificação traço-determinante para sistemas 2D e 3D, bem como estudou-se os sistemas de equações diferenciais lineares por partes, incluindo critérios para existência de ciclos limite e órbitas homoclínicas/heteroclínicas. Ainda, estudou-se a teoria de Filippov, com foco na singularidade de Teixeira, a bifurcação que aparece dela e suas classificações, e como a bifurcação TS pode provocar o surgimento de um CLC. Utilizando estes alicerces teóricos, avaliou-se um conversor DC-DC operando no modo *boost*.

2 Cronograma de execução das atividades

Fase 1: Revisar sistemas de equações diferenciais lineares, incluindo classificação traço-determinante para sistemas 2D e seu análogo para 3D.

Fase 2: Estudar sistemas de equações diferenciais lineares por partes, incluindo critérios para existência de ciclos limite e órbitas homoclínicas/heteroclínicas.

Fase 3: Estudo da T -singularidade.

Fase 4: Elaboração do relatório parcial.

Fase 5: Estudo do artigo [13] e construção do modelo apresentado.

Fase 6: Estudo dos artigos [11] e [12].

Fase 7: Preparação do relatório final.

Mês	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6	Fase 7
Setembro	X						
Outubro	X	X					
Novembro		X					
Dezembro		X					
Janeiro			X				
Fevereiro			X	X			
Março				X			
Abril					X		
Maiο					X		
Junho						X	
Julho						X	
Agosto							X

Tabela 1: Cronograma de execução das atividades de pesquisa

3 Principais resultados

3.1 Sistemas de equações diferenciais lineares

Considere

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2)$$

Ambas são EDOS autônomas (variável t não aparece explicitamente), e para determinar as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, utilizaremos o conceito de espaço de fase, que consiste basicamente na criação de um plano perpendicular em que os eixos são as próprias variáveis.

A partir do espaço de fase é possível identificar a curva de evolução do sistema (que relaciona as variáveis de estado em relação ao estado inicial do sistema). Qualquer ponto do estado de fase pode ser classificado como estado inicial do sistema, já que em $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$, f_1 e f_2 tem valores bem definidos.

Quase sempre encontrar uma solução numérica para descrever a tendência de evolução de um sistema pode ser trabalhoso, e por isso é indicado utilizar o conceito de campo de direções (velocidade de fase em vários pontos do espaço de fase), porque assim não é necessário resolver a EDO. Um gráfico mais completo, mostrando várias curvas de evolução que ajudem a descrever os possíveis tipos de soluções do sistema, chama-se retrato de fase do sistema.

3.1.1 Sistemas lineares no plano

Um sistema dinâmico com duas variáveis é apresentado através de EDOs de evolução, como (1) e (2). Classifica-se como sistema linear quando as funções f_1 e f_2 estão escritas como combinação linear das variáveis de estado (x_1, x_2) . Representadas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A partir de (3), escreve-se o sistema como $X' = AX$, e é sabido que o determinante da matriz A pode nos fornecer algumas informações relacionadas às soluções do sistema. Chama-se de pontos de equilíbrio as soluções $x(t)$ tal que $F(x(t)) = 0$.

Proposição 1. *Seja $X' = AX$ um sistema linear no plano.*

1. Se $\det A \neq 0$, o sistema possui um único ponto de equilíbrio, que é a solução trivial, e a matriz A é não-singular.

2. Se $\det A = 0$, podem existir inúmeras soluções para o sistema, sendo que sempre existe a chamada solução trivial para os sistemas lineares homogêneos.

3.2 Classificação de pontos de equilíbrio

Para classificação dos pontos de equilíbrio, considera-se apenas sistemas de equações diferenciais lineares cuja matriz de coeficientes A é não-singular (apenas sistemas em que

a origem seja o único ponto crítico). Para tanto, as definições de autovalor, autovetor, dependência linear e polinômio característico, por [9], são apresentados.

Definição 1. *Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ com entradas pertencentes a um corpo K . Se existirem matrizes $X \in M_{n \times 1}(K)$, diferentes da matriz nula, e $\lambda \in K$ tais que $AX = \lambda X$, dizemos que λ é um autovalor da matriz A e X é um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ .*

Definição 2. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o polinômio de grau n dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ é denominado polinômio característico da matriz A .*

Definição 3. *Sejam V um E.V. sobre R e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto finito de elementos de V . S é Linearmente Independente (L.I.) se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = e$ com e o elemento neutro de V e $\alpha_i \in R$ possui somente a solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso exista pelo menos um $\alpha_i \neq 0$, o conjunto S é Linearmente Dependente (L.D).*

A partir dos autovalores e autovetores a classificação a estabilidade dos pontos é tal:

A.1 Autovalores reais distintos

- (a) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: Tipo nó, instável.
- (b) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: Tipo nó, assintoticamente estável.
- (c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Ponto de sela, sempre instável.

A.2 Autovalores reais iguais

- (a) $\lambda_1 = \lambda_2$ e os autovetores são L.I.: Tipo nó próprio (estrela).
 $\lambda_1 > 0$: instável; $\lambda_1 < 0$: assintoticamente estável.
- (b) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ apenas um autovetor é L.I: Tipo nó inadequado.
 $\lambda_1 > 0$: instável; $\lambda_1 < 0$: assintoticamente estável.

A.3 Autovalores complexos

- (a) $\lambda = \alpha + i\beta$, tal que $\alpha = 0$: Tipo centro, estável.
- (b) $\lambda = \alpha + i\beta$, tal que $\alpha \neq 0$: Tipo espiral.
 $\alpha > 0$: instável; $\alpha < 0$: assintoticamente estável.

3.2.1 Classificação traço-determinante

Acima, foi apresentado o método de classificação de pontos de equilíbrio a partir dos autovalores e autovetores, mas essa determinação pode ser simplificada ao utilizar-se o determinante da matriz A $\det A$ e o traço de A , $tr A$. Para uma matriz $A_{2 \times 2}$ como em (3), o polinômio característico é dado por:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Como $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e $tr A = a_{11} + a_{22}$, obtém-se:

$$\lambda^2 - \text{tr } A \cdot \lambda + \det A = 0.$$

Assim, o discriminante desta equação é tal que:

$$D = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A.$$

$$\det A = \left(\frac{\text{tr } A}{2}\right)^2$$

Dessa forma, é possível construir a curva de bifurcação delineando os diferentes modos de estabilidade. Esta curva é uma parábola no plano $(\text{tr } A, \det A)$, como na Figura 1.

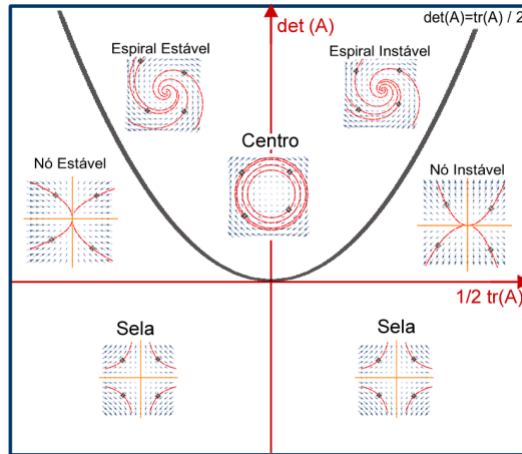


Figura 1: Representação do plano traço-determinante. Fonte: [4]

3.2.2 Sistemas Lineares em Dimensões Maiores

Novamente, dividiremos nossa análise em três grupos, o de autovalores reais distintos, o de autovalores reais iguais e por fim o de autovalores complexos. Como já apresentado na seção 3.1, é possível representar o sistema como $X' = JX$, e neste caso J é a forma de Jordan da matriz A . Ou seja, o sistema $X' = AX$ foi simplificado em um sistema do tipo $Y' = (T^{-1}AT)Y$.

B.1 Autovalores reais distintos

Considere um sistema que possui n autovalores distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Sabe-se também que a solução é do tipo $X(t) = TY(t)$, e partindo disso iremos propor que os autovalores sejam divididos em 2 grupos: (a) autovalores negativos; (b) autovalores positivos.

Ao realizar essa divisão, obtemos um sistema hiperbólico no qual as soluções geradas em cada subespaço (grupo), permanecem nele mesmo. Para o grupo dos autovalores negativos, as soluções tendem para a origem à medida em que $t \rightarrow \infty$ (subespaço estável), enquanto para o outro grupo as soluções tendem a se afastarem da origem (subespaço instável). Dessa forma, obtem-se um sistema que assume o formato de sela em maiores dimensões.

B.2 Autovalores Complexos

Ao tratarmos de autovalores complexos, tendo em vista que a solução do sistema é do tipo $X(t) = TY(t)$, sabemos que colunas da matriz T são formadas pelos autovetores associados à cada autovalor encontrado previamente. Dessa forma, assim como acontece no caso de autovalores reais distintos, os subespaços gerados pelos autovetores associados aos autovalores que possuem parte real negativa são estáveis, e aqueles autovalores os quais parte real é positiva são ditos como instáveis. Ainda, podemos classificar o comportamento dos sistemas como autovalores complexos como:

- (a) Central espiral: Ocorre a formação de um cilindro em \mathbb{R}^3 , em que parte estável do sistema está localizado sobre o eixo z , e as soluções localizadas no plano xy , descrevem círculos centrados na origem.
- (b) Sela espiral: A parte instável está localizada sobre o eixo z , e o plano xy é dito estável. As soluções do sistema descrevem planos estáveis em forma de espirais em direção ao eixo z .

B.3 Autovalores reais iguais

Ao tratarmos de sistemas que possuem autovalores reais e iguais encontramos matrizes cuja forma canônica nos fornece blocos como:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Disto, é sabido que obteremos como soluções expressões que contém termos exponenciais, e que nos casos em que $\lambda < 0$, todas as soluções tenderão à zero quando $t \rightarrow \infty$, tal como acontece para sistemas planares.

3.3 Sistemas de equações diferenciais lineares por parte e critérios para existência de ciclos limite e órbitas homoclínicas/heteroclínicas

As Equações Diferenciais Não Suaves por Partes (EDNSP), e caracterizam por possuir comportamento similar ao de sistemas lineares não lineares, e tem sido amplamente aplicadas porquê a sua resolução numérica é facilitada. Ao tratar de EDNSP, é muito provável que os conceitos de órbitas e ciclos limites sejam mencionados, já que um dos problemas associados às EDNSP é justamente a existência destes ciclos limites.

Ciclos podem ser definidos como curvas fechadas que estão posicionadas à volta de um ponto de equilíbrio, e o estudo destas curvas fechadas, torna-se importante pois implicam na ocorrência de movimento oscilatório ao redor do ponto de equilíbrio. Tendo como ponto de partida um sistema como em (3), estudou-se inicialmente as condições de existência de curvas fechadas.

Proposição 2 *Define-se um sistema tal que $f_1(x, y) = (-\alpha, \beta)$, $f_2(x, y) = (-\gamma, -\delta)$, $f_3(x, y) = (\epsilon, -\phi)$ e $f_4(x, y) = (\mu, \lambda)$, em que todos os parâmetros são positivos. Logo, uma condição suficiente para que uma órbita seja fechada é que os parâmetros obedecem a relação $\beta\gamma\phi\mu = \delta\epsilon$.*

Poincaré descreve ciclo limite, em sistemas não lineares, como uma trajetória fechada e isolada que existe apenas para um valor específico da amplitude e não para qualquer amplitude arbitrária. Podemos também classificá-los de acordo com sua estabilidade.

Definição 4 *Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Dizemos que uma órbita periódica γ de X é um ciclo limite se existir uma vizinhança V de γ tal que γ é uma órbita fechada de X e intercepta V . [1]*

Definição 5 *Considere uma órbita periódica ρ que também é um ciclo limite. Então:*

1. *Se ρ é o conjunto ω - limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de ρ , então ρ é um ciclo limite estável;*
2. *Se ρ é o conjunto α - limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de ρ , então ρ é um ciclo limite instável;*
3. *Se ρ é o conjunto ω - limite de uma trajetória, porém, ρ também é o conjunto α -limite de uma outra trajetória, então ρ é um ciclo limite semiestável. [4]*

Ainda hoje, não existe na literatura material suficiente que permita a determinação exata de quantos ciclos limite podem existir, mas o teorema de Dulac garante que existe uma quantidade finita de ciclos.

Teorema 1 Teorema de Dulac: *Em qualquer região limitada do plano, um sistema analítico planar $X' = F(X)$ com $F(X)$ analítica em $A \subset \mathbb{R}^2$ tem no máximo um número finito de ciclos limite. Qualquer sistema polinomial tem no máximo um número finito de ciclos limite em $A \subset \mathbb{R}^2$. [4]*

3.3.1 Critérios de existência de ciclos limites

A determinação da existência de ciclos limites está diretamente relacionada à alguns critérios, apresentados abaixo, por [10] e [4], respectivamente.

Teorema 2 Bendixson-Dulac: *Sejam f, g funções suaves com f_x, g_y contínuas numa região simplesmente conexa R . Suponha que exista uma função $\phi(x, y)$ de classe C^1 (função de Dulac) tal que: $\frac{\partial(\phi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi g)}{\partial y}$ não muda de sinal em R . Então o sistema $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ não possui trajetórias fechadas em R (em particular, não possui ciclos limite).*

Teorema 3 Poincaré-Bendixson Considere o sistema planar $X' = F(X)$. Suponha que F é de classe C^1 definida em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e que o sistema possui uma órbita fechada ρ , tal que $\rho^+ = \{\rho_t(X); t > 0\}$ está contida em um subconjunto compacto K de A . Portanto, se o conjunto $\omega(\rho)$ não contém pontos de equilíbrio do sistema, $\omega(\rho)$ é uma órbita periódica.

Exemplo 1 Considere o sistema planar

$$\dot{x} = e^x + 3 \quad (3)$$

$$\dot{y} = 1 + y^5 \quad (4)$$

As derivadas do sistema são dadas por:

$$\frac{\partial(\phi \cdot f)}{\partial x} = e^x \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\phi \cdot g)}{\partial y} = 5y^4$$

Como $e^x + 5y^4 > 0$, e portanto não muda de sinal em \mathbb{R} , pelo critério de Bendixson-Dulac, o sistema não possui ciclos limite.

Exemplo 2 Equação de Van der Pol

A Equação de Van der Pol é um exemplo clássico de um equação não linear que dá origem a ciclos limite. Esse tipo de equação é normalmente utilizada para descrever circuitos RLC e alguns fenômenos elétricos. A equação é dada por:

$$\ddot{x} + 2\epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (5)$$

Seja ϵ um parâmetro positivo, e o valor de x^2 está diretamente relacionado ao comportamento do sistema. Para $x^2 > 1$ o sistema terá amplitude pequena (já que o segundo termo passa a ser dissipativo), enquanto para $x^2 < 1$ amplitude de oscilação aumentará. A equação (5) é equivalente ao seguinte sistema dinâmico autônomo:

$$\dot{x} = y \quad (6)$$

$$\dot{y} = -x - 2\epsilon(x^2 - 1)y \quad (7)$$

A matriz Jacobiana deste sistema é tal que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\epsilon \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como $\det A \neq 0$, existe um único ponto de equilíbrio, na origem. Ainda, os autovetores são dados por $\lambda = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}$, de modo que o ponto de equilíbrio pode ser foco ($\epsilon < 1$), nó ($\epsilon > 1$) ou impróprio ($\epsilon = 1$).

Em [2], na seção 3 do capítulo 12, é possível encontrar uma demonstração detalhada de como o Teorema de Poincaré-Bendixson pode ser aplicado de modo que prova que a Equação de Van der Pol possui órbita periódica, em particular a existência de ciclo limite.

3.3.2 Órbitas homoclínicas e heteroclínicas

As definições de órbitas homoclínicas e de órbitas heteroclínicas, descrita por [3], estão diretamente relacionado à quantidade de pontos de equilíbrio e de curvas de evolução existentes no sistema.

Definição 6 *Uma órbita é dita homoclínica caso os conjuntos ω -limite e α -limite consistidos do mesmo ponto de equilíbrio admissível, chamado equilíbrio limite, que, juntamente com a órbita homoclínica, constituem o loop homoclínico.*

Definição 7 *Um órbita é dita heteroclínica se tem como conjuntos ω -limite e α -limite dois equilíbrios admissíveis distintos, que, juntos com a órbita heteroclínica, constituem o loop heteroclínico.*

Em suma, uma órbita homoclínica é uma curva sobre um espaço de fase na qual inicia-se e termina-se no mesmo ponto de equilíbrio, representando uma solução não-periódica do sistema. Por outro lado, a órbita heteroclínica é caracterizada pela existência de n pontos de equilíbrio e n curvas de evolução, de modo que a primeira curva parte do primeiro ponto de equilíbrio para o segundo ponto, a segunda curva do sistema parte do segundo ponto para o terceiro, e segue desta forma até que a última curva de evolução termine no primeiro ponto de equilíbrio.

3.4 Sistemas de Filippov

Tem se tornado cada vez mais frequente que pesquisadores atuem na análise de sistemas dinâmicos suaves, em especial alguns fenômenos, como o do movimento deslizante. Na região deslizante o campo vetorial aponta em direção ao coletor de ambos os lados, e caso uma trajetória cruze esta região, irá evoluir nela até o limite da região. O limite ocorre quando o campo vetorial é tangente ao comutador em ao menos um dos lados. Por isso é importante sabermos o lado, já que temos então 2 limites distintos.

Teixeira e Filippov propuseram então que se os limites da região de deslizamento se cruzam transversalmente em um ponto chamado de dobra-dobra, isso pode ter um efeito dramático na dinâmica do sistema. Para configurações específicas do campo vetorial, a dinâmica em uma vizinhança de tais pontos pode ser estruturalmente instável, e a dinâmica em torno desses pontos pode ser bastante intrincado.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e considere $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave que tem 0 como valor regular. Definimos $\Sigma = f^{-1}(0)$ a variedade de descontinuidade.

Vamos denotar

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$$

e

$$\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$$

Definimos agora o SDNS (ou sistema de Filippov)

$$Z_\Sigma = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (8)$$

no qual X e Y são campos vetoriais suaves em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Denotaremos $Z = (X, Y)$. Distinguiremos três regiões em Σ :

Região de Costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$

Região de Deslize Estável: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$

Região de Deslize Instável ou Região de Escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$

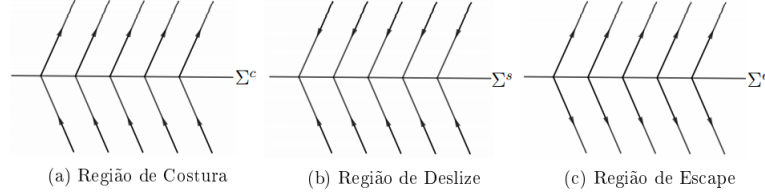


Figura 2: Exemplos das três regiões definidas na variedade de descontinuidade. Fonte: [16]

Dizemos que $p \in \Sigma$ é um ponto de tangência se $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$. Os pontos de tangência são as fronteiras dos conjuntos Σ^c , Σ^s e Σ^e , que são conjuntos abertos. As regiões definidas acima não consideram os pontos de equilíbrio, e assim, de fato, a trajetória que atravessa p é tangente a Σ . É importante destacar também os pontos que surgem na fronteira das regiões, denominados $\partial\Sigma^c, \partial\Sigma^s$ e $\partial\Sigma^u$, já que a derivada de Lie de f com respeito a cada campo vetorial também inclui os pontos $p \in \Sigma$ em que o campo avaliado em p é nulo, ou seja, os pontos críticos de cada campo vetorial em Σ .

Se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^u$, definimos o campo vetorial deslizante do sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ como o campo vetorial Z^s , que é a combinação linear convexa de X e Y tangente a Σ , ou seja,

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p))$$

Se $p \in \Sigma^+$ ou $p \in \Sigma^-$, a trajetória de p é a mesma trajetória de p pelo campo X ou pelo campo Y , respectivamente.

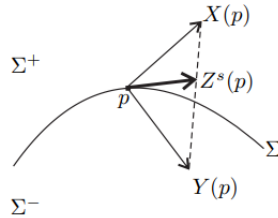


Figura 3: Combinação convexa adotada por Filippov para estabelecer o campo Z^s . Fonte: [15]

Agora, se $p \in \Sigma$, então definimos a trajetória de p conforme p está em Σ^c , Σ^s ou Σ^u .

a) Se $p \in \Sigma^c$ então ou existe uma trajetória de X que chega até p em tempo positivo e uma trajetória de Y que chega até p em tempo negativo, ou existe uma trajetória de X que chega até p em tempo negativo e uma trajetória de Y que chega até p em tempo positivo. Em ambos os casos, iremos considerar a trajetória de Z por p como sendo a concatenação destas trajetórias.

b) Se $p \in \Sigma^s$ então existem trajetórias de X e de Y que chegam até p para tempo positivo. Estas serão as trajetórias passadas de p (ou seja, para tempo negativo). A trajetória futura de p (para tempo positivo) será a trajetória do campo deslizante.

c) Se $p \in \Sigma^u$ então existem trajetórias de X e de Y que chegam até p para tempo negativo. Estas serão as trajetórias futuras de p (ou seja, para tempo positivo). A trajetória passada de p (para tempo negativo) será a trajetória do campo deslizante. Para definições mais detalhadas, veja [5].

O equilíbrio natural é o equilíbrio dos campos vetoriais Σ^\pm . Um equilíbrio natural é classificado como virtual ou real, dependendo de sua posição em relação à fronteira de comutação.

Definição 8. *Um ponto $p \in \mathfrak{R}^2$ em que $\Sigma^+(p) = 0$ é dito equilíbrio real (resp. virtual) de Σ^+ se $f(p) > 0$ (resp. $f(p) < 0$). Já para $p \in \mathfrak{R}^2$ no qual $\Sigma^-(p) = 0$, chama-se equilíbrio real (resp. virtual) de Σ^- se $f(p) < 0$ (resp. $f(p) > 0$).*

Ainda, [15] apresenta as seguintes definições:

Definição 9. *As singularidades do sistema de Filippov são:*

1. $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$ respectivamente.
2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma_e$ tal que p é um pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^s(p) = 0$.
3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$, isto é, os pontos p tais que $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$ (tangências regulares ou singulares).

Qualquer outro ponto é chamado de ponto regular.

Nota-se ainda que, caso o pseudo-equilíbrio p se comporte como um nó, um foco ou uma sela para a dinâmica em Σ , p é denominado como um pseudo-nó, pseudo-foco ou pseudo-sela, respectivamente.

Definição 10. *A órbita local do ponto $p \in U$, é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi Z(t, p) | t \in I\}$.*

Também, sabendo que em sistemas de Filippov existem singularidades em que a órbita $\gamma(p) \neq p$, classifica-se as singularidades como:

- *Singularidade Distinguida:* pontos p tais que $\gamma(p) = p$. Elas fazem o papel dos pontos críticos nos sistemas dinâmicos suaves.

- *Singularidade Não Distinguida*: pontos $p \in \Sigma$ que são pontos de tangência regulares e então, mesmo que eles não sejam pontos regulares, suas órbitas locais são homeomorfas a \mathbb{R} .

Definição 12. Um campo vetorial suave X possui uma dobra ou tangência quadrática com $\Sigma = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$ em um ponto $p \in \Sigma$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$.

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ em que $(0,0)$ é um ponto tipo dobra-dobra ($Xf(0,0) = Yf(0,0) = 0$ e $X^2f(0,0) \neq 0$, $Y^2f(0,0) \neq 0$). Teremos alguns casos distintos para analisar, dependendo da visibilidade/invisibilidade da tangência quadrática para cada um dos campos e também das direções de X e Y no ponto de dobra.

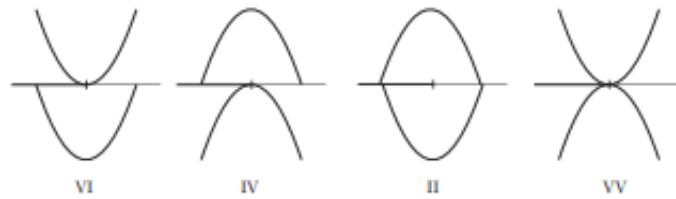


Figura 4: Configurações possíveis para a bifurcação dobra-dobra. Fonte: [15]

Definição 13. Sejam $Z = (X, Y)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra. Dizemos que p é uma dobra visível para X se $X^2f(p) > 0$ e invisível se $X^2f(p) < 0$, enquanto que p é uma dobra visível para Y se $Y^2f(p) < 0$ e invisível se $Y^2f(p) > 0$.

A singularidade dobra-dobra pode ser classificada como:

1. *Singularidade de Teixeira*: $X^2f(p) < 0 < Y^2f(p)$
2. *Visível*: $Y^2f(p) < 0 < X^2f(p)$
3. *Visível-Invisível*: $X^2f(p) \cdot Y^2f(p) > 0$

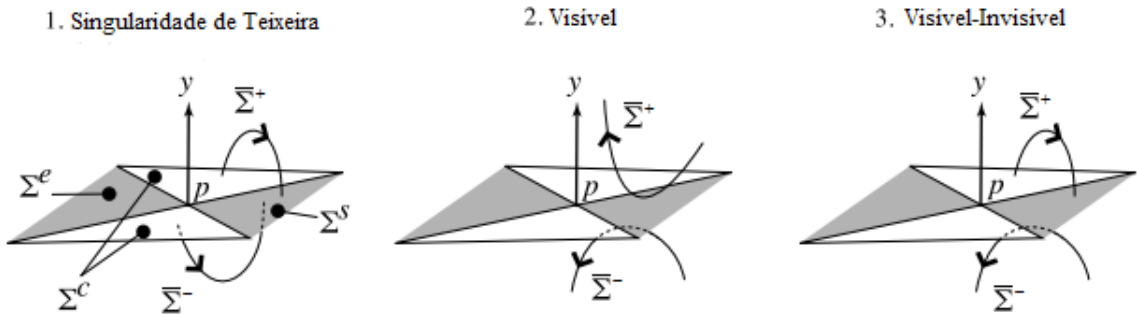


Figura 5: Tipos de dobra-dobra: 1. A singularidade de Teixeira, 2. Dobra-dobra Visível e 3. Dobra-dobra Visível-Invisível. Adaptado de [14]

A singularidade de Teixeira (TS-point), em que existem duas dobras invisíveis, é a que estamos interessados, e esta pode existir de duas formas, como na Figura 6:

- 1 Trajetórias fluem com segurança para além da singularidade e, portanto, certamente poderia ser esquecidas, já que as órbitas espiralam da região de fuga para a região de deslizamento.
- 2 A singularidade fica no ápice de um par de cones vincados, atraindo órbitas dentro de um e repelindo-as dentro do outro, e as trajetórias podem atingir a singularidade através da região de deslizamento, na qual não existe unicidade de soluções.

Entre os dois casos está uma bifurcação associada ao nascimento de ciclos de limite.

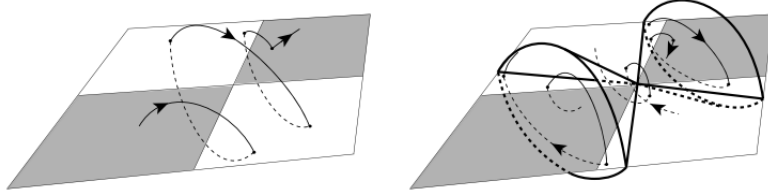


Figura 6: Representação do plano traço-determinante. Fonte: [14]

A classificação local de NSDS em dimensão baixa (1 e 2) está quase concluída, incluindo bifurcações de codimensão 2 [5]. Por outro lado, pouco se sabe sobre a dinâmica global.

3.5 Na bifurcação TS

A bifurcação TS está relacionada à colisão de um pseudo-equilíbrio real com um TS-point. Esta colisão é produzida, como resultado da alteração de um parâmetro, digamos $\mu \in \mathfrak{R}$, pela transição de um pseudo-equilíbrio entre as regiões de deslizamento atrativas e repulsivas, passando necessariamente pelo ponto TS. Portanto, reescreve-se a equação (8), em que $F^\pm : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ e uma função escalar $h : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$, de maneira que $\Sigma = x \in \mathfrak{R}^3, h(x) = 0$, dependendo do parâmetro μ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{F}^-(\mathbf{x}, \mu), & \text{if } h(\mathbf{x}, \mu) < 0 \\ \mathbf{F}^+(\mathbf{x}, \mu), & \text{if } h(\mathbf{x}, \mu) > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Define-se a bifurcação TS no sistema (9), assumindo que as linhas de tangência são transversais em $\hat{x}(\mu)$ (TS-point) para μ em uma vizinhança de 0 e que existe um pseudo-equilíbrio $\tilde{x}(\mu)$ que transita entre as duas diferentes regiões deslizantes para o valor crítico $\mu = 0$ do parâmetro.

Definição 14. *O sistema 3D-NSDS (3) sofre uma bifurcação TS para $\mu = 0$ se houver um ponto de tangência dupla $\hat{x}(\mu)$ e um ponto de pseudo-equilíbrio $\tilde{x}(\mu)$, definido para todos os μ em uma vizinhança de 0, tal que $\tilde{x}(\mu) = \hat{x}(\mu)$ e*

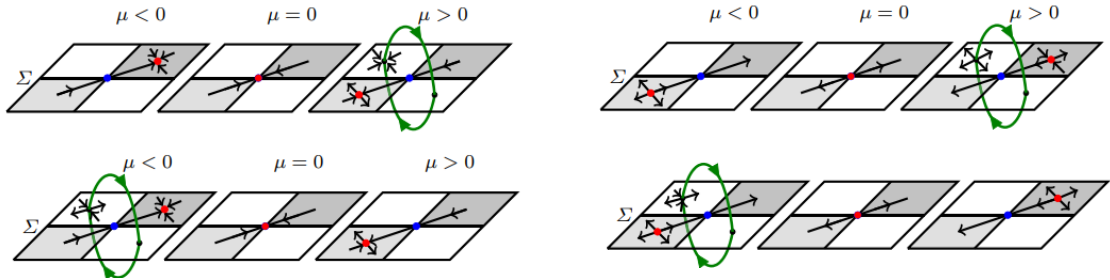
$$\frac{d}{d\mu}L_{\mathbf{F}^+}h(\tilde{\mathbf{x}}(\mu), \mu)\frac{d}{d\mu}L_{\mathbf{F}^-}h(\tilde{\mathbf{x}}(\mu), \mu)|_{\mu=0} < 0 \quad (10)$$

e também,

$$L_{\mathbf{F}^+}^2h(\tilde{\mathbf{x}}(0), 0) < 0, \quad L_{\mathbf{F}^-}^2h(\tilde{\mathbf{x}}(0), 0) > 0. \quad (11)$$

Observe que $L_{\mathbf{F}^+}h(\tilde{\mathbf{x}}(0), 0) = L_{\mathbf{F}^-}h(\tilde{\mathbf{x}}(0), 0) = 0$, porque $\tilde{x}(0) = \hat{x}(0)$ é um ponto de tangência duplo. A condição (10) indica que para $\mu = 0$ as funções $L_{\mathbf{F}^+}h(\tilde{\mathbf{x}}(\mu), \mu) = L_{\mathbf{F}^-}h(\tilde{\mathbf{x}}(\mu), \mu)$ têm sinais opostos, e seus gráficos são transversais em $\mu = 0$. A condição (11) garante que a tangência dupla x é uma singularidade dupla de tipo invisível para $\mu = 0$, ou seja, $\tilde{x}(0) = \hat{x}(0)$ é um TS-point.

A bifurcação TS provoca o surgimento de um ciclo de limite de cruzamento (CLC) que nasce do TS-point, podendo ser classificado como estável ou instável. O CLC é uma órbita periódica composta por dois arcos, cada um definido por um dos campos vectoriais F^\pm , cruzando a variedade Σ em dois pontos e sem quaisquer segmentos deslizantes, conforme ilustrado pelo ciclo limite não suave (na cor verde), na Figura 7



(a) Casos supercríticos: (superior) para $\mu > 0$, aparece uma pseudo-sela em Σ^e junto com um CLC estável de dinâmica tipo nó; (inferior) o pseudo-nó estável em Σ^s junto com um CLC instável de dinâmica de sela que existe para $\mu < 0$ desaparece para $\mu > 0$. (b) Casos subcríticos: (superior) para $\mu > 0$, aparece uma pseudo-sela em Σ^s junto com um CLC instável de dinâmica de nó; (inferior) o pseudo-nó instável em Σ^e junto com um CLC instável de dinâmica de sela que existe para $\mu < 0$ e desaparece para $\mu > 0$.

Figura 7: Alguns cenários possíveis para a bifurcação TS. À esquerda, casos supercríticos; à direita, casos subcríticos. O ponto azul é o TS-point, o ponto vermelho é o pseudo-equilíbrio. Fonte: [13]

3.6 Análise de bifurcação de um conversor de energia *boost*

Com base na teoria apresentada na seção anterior, e tendo como principal referência [13], avalia-se e prova-se a existência de uma bifurcação de Teixeira num SDNS em 3D, que modela um conversor de energia *boost*.

3.6.1 Modelagem e controle de um conversor DC – DC *Boost*.

Seja o conversor boost abaixo, no qual R , L , C , r_L e V_{in} são, respectivamente, a carga resistiva, a indutância, a capacitância, a resistência do indutor e a fonte de tensão.

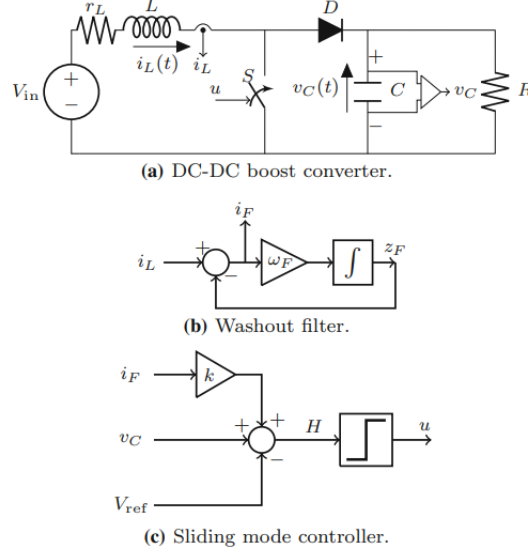


Figura 8: Conversor boost com controle de modo deslizante (SMC) e um filtro de lavagem. A função de controle é (15). A corrente filtrada do indutor, $i_F = i_L - z_F$, representa a diferença entre a corrente do indutor i_L e o sinal filtrado z_F . Fonte: [13]

A tensão de saída v_{out} , é igual à tensão sobre a carga resistiva R , dita v_C , e é regulada através de uma estratégia de controle por modos deslizantes com base no uso de um filtro *washout* passa-alta, de modo que seja obtido desejado valor $v_{out} > V_{in}$ desejado. Um filtro *washout* é usado para eliminar as entradas em regime permanente enquanto deixa passar as entradas transientes. O modelo do conversor boost de malha fechada, em modo de condução contínua (corrente de indução não-nula), é dado por:

$$L \frac{di_L}{dt} = V_{in} - r_L i_L - u v_C \quad (12)$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = u i_L - \frac{v_C}{R} \quad (13)$$

$$\frac{dz_F}{dt} = \omega_F (i_L - z_F) \quad (14)$$

Aqui, $v_C > 0$ e $i_L > 0$ são a tensão do capacitor e a corrente do indutor instantâneos. A corrente filtrada do indutor, denotada pela nova variável z_F , é a saída do filtro washout, descrito em (14) onde ω_F é a frequência de corte do filtro. Seja a lei de controle $u \in 0, 1$, definido como

$$u = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}[H]) \quad (15)$$

De modo que para $u = 0$ (resp. $u = 1$) a chave S está ligada (resp. desligada).

A superfície de controle é tal que

$$H(i_L, v_C, z_F) = v_C - V_{ref} + K(i_L - z_F) = 0 \quad (16)$$

Sendo $K > 0$ um parâmetro de controle a ser ajustado e $V_{ref} > V_{in}$ é a tensão de referência (valor de tensão desejado na saída). Normalizando e aplicando a mudança de variáveis, tempo e parâmetros, dados na Tabela 1 nas equações (12)-(14), obtém-se o seguinte sistema dinâmico adimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - bx - uy \\ \dot{y} &= ux - ay \\ \dot{z} &= (u - kb)x + (\omega - a - uk)y - \omega z + k - \omega y_r \end{aligned} \quad (17)$$

Variáveis de tempo e estado	Parâmetros
$x = \frac{i_L}{V_{in}} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$y_r = \frac{V_{ref}}{V_{in}}$
$y = \frac{v_C}{V_{in}}$	$a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
$z = \frac{v_C - V_{ref} + K(i_L - z_F)}{V_{in}}$	$k = K \sqrt{\frac{C}{L}}$
$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$	$b = r_L \sqrt{\frac{C}{L}}$
	$\omega = \omega_F \sqrt{LC}$

Tabela 1: Novas variáveis normalizadas, parâmetros e tempo

No qual $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$ são as novas variáveis de estado e os novos parâmetros são $\omega \in (0, 1]$, $y_r > 1$, $a > 0$, $b > 0$ e $k > 0$ (o ponto “.” indica derivadas em relação ao tempo normalizado τ). Note que $x > 0$ é a corrente normalizada do indutor, $y > 0$ é a tensão do capacitor normalizada e $a > 0$ é o parâmetro de carga normalizada. Portanto, o sistema (17) pode ser representado como:

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = \begin{cases} \mathbf{F}^+(x, y, z), & \text{if } z > 0 \\ \mathbf{F}^-(x, y, z), & \text{if } z < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Composto pelos 2 campos lineares de vetores,

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - bx - y \\ x - ay \\ f_3^+(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{F}^-(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - bx \\ -ay \\ f_3^-(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$f_3^+ = (1 - kb)x + (\omega - a - k)y - \omega z + k - \omega y_r$$

$$f_3^- = -kbx + (\omega - a)y - \omega z + k - \omega y_r$$

3.6.2 Análise do comportamento dinâmico do sistema na fronteira de comutação

Calculando as derivadas de Lie de primeira e segunda ordem da função escalar $h(x, y, z) = z$ em relação aos campos vetoriais F^\pm , por meio das fórmulas:

$$L_{\mathbf{F}^\pm} h = f_3^\pm,$$

$$L_{\mathbf{F}^\pm}^2 h = \langle \nabla f_3^\pm, \mathbf{F}^\pm \rangle$$

Sabemos que as regiões de Σ são separadas por linhas de tangência

$$T_- = \{x \in \Sigma : f_3^- = (x, y, 0) = 0\},$$

$$T_+ = \{x \in \Sigma : f_3^+ = (x, y, 0) = 0\},$$

O ponto de dupla tangência está na intersecção transversal das retas T^\pm . Então, o sistema (17) tem apenas um ponto de tangência dupla, dado por:

$$\hat{x} = (k\hat{y}, \hat{y}, 0)$$

Em que,

$$\hat{y} = \frac{k - \omega y_r}{a + bk^2 - \omega} \quad (19)$$

Sendo $a \neq \omega - bk^2$. O ponto de tangência dupla deve estar no primeiro quadrante em relação aos eixos (x, y) no plano $z = 0$, já que é necessário $i_L > 0$ ($x > 0$) e $v_C \geq 0$ ($y \geq 0$) devido às restrições operacionais do circuito. O campo vetorial deslizando em Σ associado ao sistema dinâmico (17) é calculado de acordo com (9), obtendo

$$F^S(x, y, 0) = \frac{1}{ky - x} \begin{bmatrix} bx^2 - x + ay^2 - \omega y(y - y_r) \\ -k(bx^2 - x + ay^2) + \omega x(y - y_r) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desde que $ky - x = 0$. Pontos de pseudo-equilíbrio de (17) são facilmente obtidos resolvendo a equação vetorial $F^S(x, y, 0) = (0, 0, 0)^T$, que se reduz à quadrática $bx^2 - x + ay^2 = 0$ mais a condição $y = y_r$. Portanto, temos dois pontos de pseudo-equilíbrio,

$$\tilde{\mathbf{x}}^\pm = (\tilde{x}^\pm, y_r, 0) \quad (20)$$

Em que

$$\tilde{x}^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4aby_r^2}}{2b} > 0 \quad (21)$$

Para qualquer $a \leq a_{NS}$, com $a_{NS} = \frac{1}{4by_r^2}$. Para $a = a_{SN}$, ocorre uma colisão entre eles, ou seja, $\tilde{x}^+ = \tilde{x}^-$, e para $a > a_{SN}$ ambos os pseudo-equilíbrios desaparecem em uma bifurcação de dobra ou nó-sela. A Figura 9 ilustra esta colisão através da variação do parâmetro a , e a Figura 10 mostra um retrato de Σ no plano (x, y), onde assumimos $\omega < a < a_{SN}$ e $k > \omega y_r$. A inclinação da linha reta $ky - x = 0$ varia com o parâmetro k , e assim o ponto de tangência dupla $\hat{x}(k)$ se move na elipse dada por

$$x - \omega y_r y - bx^2 + (\omega - a)y^2 = 0 \quad (22)$$

Para $y > 0$, onde o valor máximo para sua coordenada y é dado por

$$Y_{\max} = \left[2b\omega y_r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a - \omega}{b\omega^2 y_r^2}} \right) \right]^{-1}$$

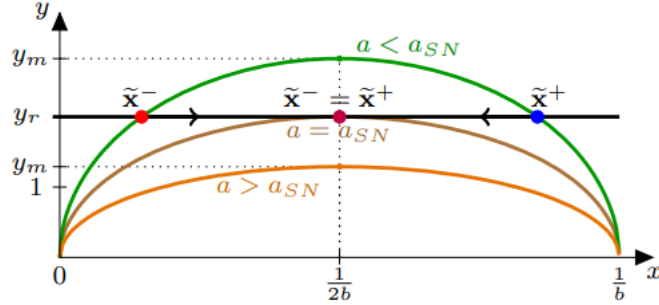


Figura 9: Bifurcação de dobra de pseudo-equilíbrios. Pseudo-equilíbrios são os pontos de intersecção entre a linha reta $y = y_r$ e a elipse $bx^2 - x + ay^2 = 0$. Fonte: [13]

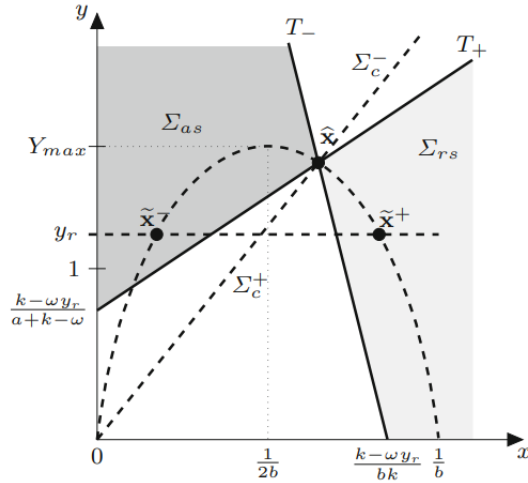


Figura 10: Configuração topológica em Σ . Seja $\omega < a < a_{SN}$ e $k > \omega y_r$. Ambos os pseudo-equilíbrios \tilde{x}^\pm estão localizados no intersecção de $y = y_r$ com a elipse. O ponto de tangência dupla \hat{x} move-se na linha da elipse variando o parâmetro k , já que também deve pertencer a linha reta $x - ky = 0$. Fonte: [13]

O ponto de tangência dupla $\hat{x}(k)$ é capaz de colidir com o ponto de pseudo-equilíbrio \tilde{x}^- ou \tilde{x}^+ , localizado na intersecção de $y = y_r$ com a elipse, já que sob tal condição a equação (22) coincide com a equação quadrática que define pseudo-equilíbrios. A partir disso, a transição de pseudo-equilíbrios entre regiões deslizantes pode ocorrer, levando a uma bifurcação TS.

Lema 1. (Sobre a posição do pseudo-equilíbrio) *Assumindo $\omega - bk^2 \neq a \leq a_{SN}$, os pontos $\mathbf{x}^\pm = (x^\pm, y_r, 0)$ e $\hat{x} = (k\hat{y}, \hat{y}, 0)$ são bem definidos, sendo \hat{x} dado em (19) e \hat{x}^\pm dado em (21). As seguintes afirmações mantêm:*

- (i) Se $\tilde{x}^\pm < ky_r$ então $\tilde{x}^\pm \in \Sigma^s$

- (ii) Se $\tilde{x}^\pm > ky_r$ então $\tilde{x}^\pm \in \Sigma^e$
- (iii) Se $\tilde{x}^\pm = ky_r$ então $\tilde{x}^\pm = \hat{x} = (ky_r, y_r, 0)$.

A dinâmica de deslizamento definida no plano $z = 0$ e restrita às regiões de deslizamento pode ser estendida aos limites de tangência de cada região, sendo o campo vetorial planificado sem singularidade $F^{ds} = (ky - x)F^s$, desde que $ky - x > 0$ (região atrativa) ou $-(ky - x) > 0$ (região de escape). Para tanto, descartamos o terceiro componente de (18). Note que o pseudo-equilíbrio $x^\pm = (\tilde{x}^\pm, y_r, 0)$, uma vez expresso em coordenadas reduzidas, são os pontos $p^\pm = (\tilde{x}^\pm, y_r)$. Consideramos

$$k_H^\pm = \frac{(\omega + 2b)\tilde{x}^\pm - 1}{2ay_r}$$

Proposição 1. *Assumimos $a < a_{SN}$ e $k \neq k_H^\pm$. O ponto \tilde{x}^- é uma pseudo-sela quando está em Σ^e e um pseudo nó (ou pseudo-foco) quando está em Σ^s . O ponto \tilde{x}^+ é uma pseudo-sela quando em Σ^s e um pseudo-nó (ou pseudo-foco) quando em Σ^e . Portanto, \tilde{x}^+ é sempre um pseudo-equilíbrio instável enquanto \tilde{x}^- é um pseudo-equilíbrio estável sempre que o parâmetro de controle k é utilizado tal que $k > \tilde{x}^-/y_r$ e $k > k_H^-$.*

Pode-se classificar ainda a estabilidade do ponto de pseudo-equilíbrio com base no cálculo do determinante e do traço da matriz Jacobiana associada aos sistemas deslizantes planos equivalentes, $Det(J_{as})$ e $Tr(J_{as})$, respectivamente. Com relação à dinâmica de deslizamento, três diferentes bifurcações de um parâmetro podem aparecer: o nó-sela de equilíbrio, a bifurcação de Hopf e a bifurcação transcritical.

Caso $k \neq \omega y_r$ e $k = 1/(2by_r)$ então em $a = a_{SN}$ ocorre uma bifurcação nó-sela. Uma bifurcação de Hopf ocorre em Σ^s (resp. Σ^e) para $k = k_H^- > \tilde{x}^-/y_r$ (resp. $k = k_H^+ < \tilde{x}^+/y_r$), uma vez que $Tr(J_{as}) = 0$ e $Det(J_{as}) > 0$. Por fim, existem 2 casos para a bifurcação transcritical, considerando $\omega - bk^2 \neq a < a_{SN}$. Para o primeiro caso, o pseudo-equilíbrio \tilde{x}^- e ocorre em $\tilde{x}^- = ky_r$, enquanto o outro envolve \tilde{x}^+ e ocorre em $\tilde{x}^+ = ky_r$, desde que o $Tr(J_{as}) \neq 0$.

Lema 2. *O sistema (18) passa por um pseudo-equilíbrio na transição de Σ^s para Σ^e (ou vice-versa) para $a = a_{TS}(k)$, onde*

$$a_{TS}(k) = \frac{k(1 - bky_r)}{y_r} \quad (23)$$

Além disso, em relação ao valor crítico

$$k_c = \frac{1}{2by_r} \quad (24)$$

temos $a_{TS}(k) \geq a_{TS}(k_c) = a_{SN} = 1/(4by_r^2)$.

3.6.3 A bifurcação TS

O valor do parâmetro a pode mudar durante a operação do conversor boost, já que a carga representada pela impedância R pode variar. Assim, consideramos este parâ-

metro como o principal parâmetro de bifurcação. Ambos os pseudo-equilíbrios \tilde{x}^\pm e o ponto dobra-dobra \hat{x} têm suas coordenadas parametrizadas por a .

Considere $b < b_{\max}$, no qual

$$b_{\max} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 y_r^2} - \omega y_r}{2y_r}$$

$$b_{\max} = \frac{1}{2y_r \left(\sqrt{1 + \omega^2 y_r^2} + \omega y_r \right)} < \frac{1}{2\omega y_r^2} \quad (25)$$

de modo que podemos assegurar que $1 - 4b(b + \omega)y_r^2 > 0$. Introduzimos os valores k_1 e k_2 , tal que:

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4b(b + \omega)y_r^2}}{2by_r}$$

$$k_1 = \frac{2(b + \omega)y_r}{1 + \sqrt{1 - 4b(b + \omega)y_r^2}} > (b + \omega)y_r \quad (26)$$

$$k_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4b(b + \omega)y_r^2}}{2by_r} < \frac{1}{by_r} \quad (27)$$

Teorema 1. *Considere o sistema (18), com $b < b_{\max}$ e $k \neq k_c$ de modo que $k_1 < k < k_2$, onde k_c, b_{\max}, k_1 e k_2 são definido em (24), (25), (26) e (27). Para valores próximos à a_{TS} , definido em (23), as seguintes afirmações são válidas:*

1. **Bifurcação TS supercrítica:** Se $k_1 < k < k_c$ então para $a = a_{TS}$ o sistema sofre uma bifurcação TS, de modo que existe $\epsilon > 0$ tal que para $a_{TS} - \epsilon < a < a_{TS}$ o pseudo-equilíbrio $\tilde{x}^- \in \Sigma^s$ e é um pseudo-nó estável, enquanto para $a_{TS} < a < a_{TS} + \epsilon$ o pseudo-equilíbrio $\tilde{x}^- \in \Sigma^e$ e é uma pseudo-sela.
2. **Bifurcação TS subcrítica:** Se $k_c < k < k_2$ então para $a = a_{TS}$ o sistema sofre uma bifurcação TS, de modo que existe $\epsilon > 0$ tal que para $a_{TS} - \epsilon < a < a_{TS}$ o pseudo-equilíbrio $\tilde{x}^+ \in \Sigma^e$ e é um pseudo-nó instável, enquanto para $a_{TS} < a < a_{TS} + \epsilon$ o pseudo-equilíbrio $\tilde{x}^+ \in \Sigma^s$ e é uma pseudo-sela.

3.7 Resultados e Análises do modelo de conversor DC-DC

A análise numérica de órbitas periódicas bifurcadas se dá pelos resultados da simulação do conversor boost com SMC-washout modelado pelo sistema dinâmico (18), sendo as figuras 11 e 12 retiradas de [13]. O caso supercítico pode ser notado na Figura 11, sendo possível visualizar a bifurcação TS e ainda o surgimento de um CLC (Γ_s) com dinâmica de nó estável. Na Figura 12 apresenta-se o caso subcrítico onde é possível detectar o surgimento de a CLC (Γ_u) com dinâmica de sela.

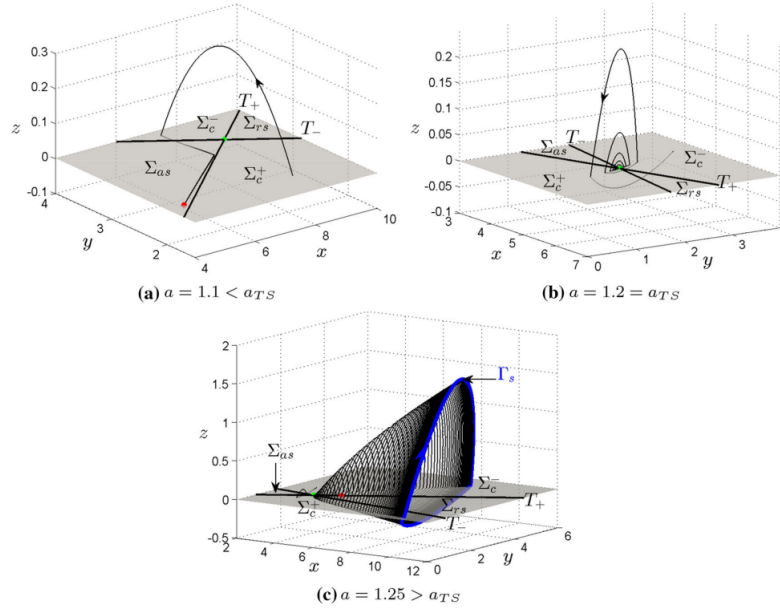


Figura 11: Resultados da simulação do sistema (18), caso supercrítico. Os pontos verde e vermelho indicam o ponto TS e o pseudo equilíbrio \tilde{x}^- , respectivamente. Parâmetros de simulação: $\omega = 1, y_r = 2, b = 0,01$ e $k = 2, 5$.

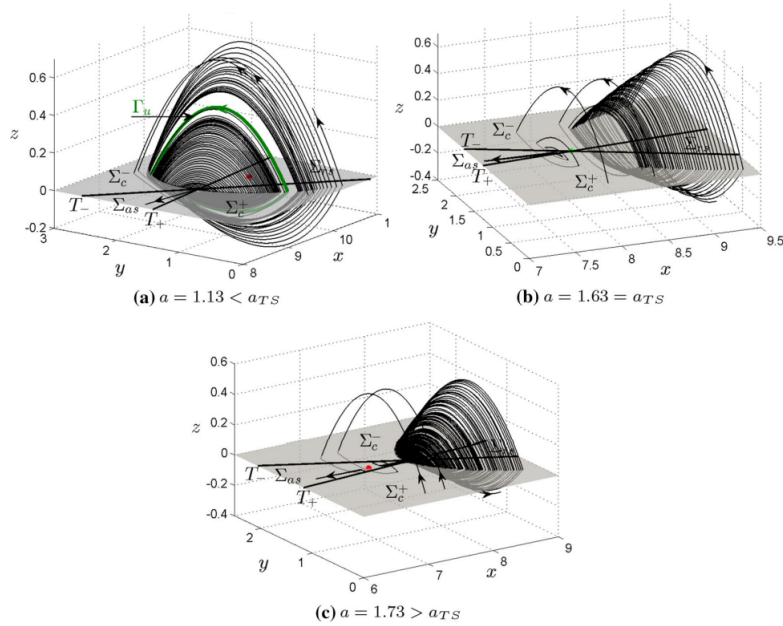


Figura 12: Resultados da simulação do sistema (18), caso subcrítico. Os pontos verde e vermelho indicam o ponto TS e o pseudo equilíbrio \tilde{x}^+ , respectivamente. Parâmetros de simulação: $\omega = 0.6, y_r = 1.33, b = 0.08$ e $k = 6$.

Para investigar a existência e estabilidade de um CLC, pode-se utilizar as equações de fechamento e a teoria dos mapas de primeiro retorno. Podemos reescrever o sistema (18) da seguinte maneira:

$$\dot{x} = \begin{cases} A^-x + b, & \text{if } z < 0 \\ A^+x + b, & \text{if } z > 0 \end{cases} \quad (28)$$

Em que,

$$A^- = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ -kb & \omega - a & -\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k - \omega y_r \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} -b & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 - kb & \omega - a - k & -\omega \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dado $F^\pm(x, y, z) = A^\pm x + b$, e sendo o sistema por partes linear, escreve-se o fluxo em cada zona como $\Phi^\pm(\tau, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}^\pm + e^{A^\pm \tau} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}^\pm)$. A seguir, assumimos a existência de um CLC que cruza $\Sigma = z = 0$ nos dois pontos:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, as equações de fechamento são:

$$\mathbf{x}_1 = \bar{\mathbf{x}}^+ + e^{A^+ \tau^+} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}^+)$$

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}^- + e^{A^- \tau^-} (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}^-)$$

4 Conclusões

Portanto, através deste projeto foi possível entender a teoria matemática que suporta a dinâmica de um conversor boost DC-DC controlado por um SMC, através da determinação de um SDNS com duas zonas em um espaço tridimensional dividido por uma superfície plana. Ainda, foi possível analisar como os parâmetros e condições do circuito atuam para que seja possível obtermos uma bifurcação TS. Avaliou-se também que a bifurcação TS pode ocorrer de duas formas, a supercrítica e a subcrítica, sendo a primeira delas importante por estar diretamente associada ao ponto de operação desejado para o conversor boost, e entendendo que os dois casos não ocorrem ao mesmo tempo. Foi possível ainda notar que a bifurcação TS pode provocar o surgimento de um CLC, que pode se caracterizar como tipo nó estável ou sela.

5 Perspectivas de continuidade

Em razão da pandemia, não foi possível a construção do modelo proposto por [13], e por isso, seria interessante que esta atividade fosse realizada futuramente, visando a obtenção de mais dados. Ainda, destaca-se a possibilidade da utilização da linguagem

OpenModelica para simulação do caso aqui relatado, para que seja possível a comparação dos resultados obtidos experimentalmente. Ainda é escasso na comunidade científica a utilização da OpenModelica para simular conversores DC-DC tendo como foco a bifurcação da singularidade de Teixeira, mas algumas pesquisas e trabalhos, como [23], que implementa nesta linguagem sistemas *Stick-slip* e um Controlador PI Anti-Windup usando a teoria de Filippov, pode servir como referência para projetos futuros.

6 Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins, meu orientador, por sempre estar disponível para orientar, incentivar e apoiar a realização deste trabalho e de outras atividades acadêmicas. As suas críticas construtivas, as discussões e reflexões foram fundamentais ao longo de todo o percurso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq que, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica da UNICAMP, financiou a realização desta pesquisa.

7 Bibliografia

PEREZ, O., CARVALHO, T., *Introdução à Teoria de Poincaré-Bendixson para campos de vetores planares*, C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 3, p. 59-74, dez. 2014.

HIRSCH, STEPHEN SMALE, ROBERT L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, INC. 1970, San Diego, California.

OLIVEIRA, ANNA PAULA MACHADO DE, *Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas em Sistemas Dinâmicos Suaves Por Partes*, disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/330248>>.

MAGNO, DANIEL, *Introdução à teoria qualitativa das equações diferenciais*, disponível em: <<https://www.matematicasorocaba.ufscar.br/arquivos/tcc-daniel-carlos-magno.pdf>>.

M. GUARDIA, T. M. SEARA, M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*, Journal of Differential Equations, vol. **250**, 1967-2023, 2011

SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

PERKO, L., *Differential equations and dynamical systems, Texts in Applied Mathematics*, 7, Springer-Verlag, New York, 1991

VILLATE, JAIME E. *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos*, Universidade do Porto, Portugal, Quinta edição, 2019.

RUGGIERO, MÁRCIA APARECIDA GOMES, *Álgebra Linear e Aplicações*, 2016, disponível em: <www.ime.unicamp.br/marcia/AlgebraLinear/>.

MIRANDA, RICARDO M., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, 2020, disponível em: <<https://rmiranda99.github.io/cursos/2020-2-mm442/2020-2-mm442.html>>.

R. Cristiano, D. J. Pagano, L. Benadero, E. Ponce, *Bifurcation Analysis of a DC-DC Bidirecional Power Converter Operating with Constant Power Loads*, International Journal of Bifurcation and Chaos **26**, 1630010, 2016.

R. Cristiano, D. J. Pagano, *Two-parameter Boundary Equilibrium Bifurcations in 3D-Filippov Systems*, Journal of Nonlinear Science **29** 2845–2875 (2019).

R. Cristiano, E. Ponce, D. J. Pagano, M. Granzotto, *On the Teixeira singularity bifurcation in a DC-DC power electronic converter*, Nonlinear Dynamics **96**, 1243–1266 (2019).

A. Colombo, M. di Bernardo, E. Fossas, M.R. Jeffrey, *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*, Systems & Control Letters **59**, 615–622 (2010).

Juliana F. Larrosa, *Sistemas planares de Filippov e bifurcações genéricas de baixa codimensão*, disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/305970>>, acesso em: 02 ago 2021.

CALDAS, Mayara Duarte de Araujo. *Sistemas dinâmicos lineares por partes (em infinitas zonas): estabilidade estrutural e assintótica*. 2019. 1 recurso online (91 p.). Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP.

M. DI BERNARDO, C. J. BUDD, A. R. CHAMPNEYS, P. KOWALCZYK, *Piecewise-smooth Dynamical Systems – Theory and Applications*, Springer-Verlag, 2008.

M. DI BERNARDO, A. COLOMBO, E. FOSSAS, *Two-fold singularity in nonsmooth electrical systems*, Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2713–2716, 2011.

FELLIPE SALDANHA GARCIA, *Step-up, non-insulated, high-gain DC-DC converters*, Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2010.

FERNANDA CATARINA LOURENÇO GUEDES, *Conversor DC-DC em tecnologia CMOS para energy harvesting*, Dissertação de mestrado integrado em Engenharia Biomédica - Universidade do Minho, 2013.

O. MAKARENKOV, J. S. W. LAMB, *Dynamics and bifurcations of non smooth systems: A survey*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. **241**, 1826–1844, 2012.

A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. **18** of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.

M. A. A. MURAD, L. VANFRETTI, F. MILANO, *Modeling and Simulation of Filippov System Models with Sliding Motions using Modelica*, disponível em: <<http://faraday1.ucd.ie/archive/papers/filippov.pdf>>, acesso em: 02 set 2021.