

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Relatório Final de Atividades

Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em Dimensão 2: o Caso das 3 Zonas

Bolsista: Mayara Duarte de Araujo Caldas, RA: 147422

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas

2017

1 Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Suaves vem ganhando destaque em diversas aplicações, como na mecânica, engenharia aeroespacial, física, economia, entre outros. Isto motivou um avanço rápido em seu desenvolvimento nos últimos anos.

Em diversas situações, os Sistemas Dinâmicos Não-Suaves são descritos por sistemas de equações diferenciais suaves por partes, definidas em certas regiões do retrato de fase, separados por interfaces, chamadas regiões de descontinuidade. Sistemas deste tipo possuem grande importância, além de apresentarem uma dinâmica muito rica e a vantagem de que a solução de cada parte contínua pode ser encontrada analiticamente.

Neste projeto estudamos o caso dos Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em 3 zonas no plano, analisando as situações em que as zonas são delimitadas por regiões do tipo 1: duas retas paralelas não-coincidente e do tipo 2: três semi-retas iniciando na origem. Na primeira etapa, estudamos as principais propriedades de sistemas de cada um dos tipos e, posteriormente, comparamos a localização de ciclos limite, analisando como a geometria da zona afeta a existência destes.

2 Objetivos

O objetivo principal é motivar os estudos da teoria de Sistemas Dinâmicos Não-Suaves, compreendendo a dinâmica de sistemas lineares por partes, principalmente a existência de ciclos limite.

3 Sistema de Filippov

Sejam X e Y campos de vetores definidos em um subconjunto aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ e, sem perda de generalidade, assumamos que $\vec{0} \in U$. Considere a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k (i.é., $f \in C^k(U, \mathbb{R})$) com $k > 1$, que possui 0 como valor regular, então $\Sigma = f^{-1}(0)$ a variável de descontinuidade em U que divide o aberto U em dois conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{x \in U; f(x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{x \in U; f(x, y) < 0\}$$

Definição 3.1. *Um sistema de Filippov é um campo vetorial suave por partes definido da forma*

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & \text{se } x \in \Sigma^+, \\ Y(x), & \text{se } x \in \Sigma^-, \end{cases}$$

denotado por $Z = (X, Y)_f$.

Para se estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y)_f$ em U , devemos definir uma trajetória local por um ponto $p \in U$, ou seja, definir o fluxo $\varphi_Z(t, p)$ de $Z = (X, Y)_f$.

Definimos então da seguinte forma a trajetória:

Se $p \in \Sigma^\pm$, então a trajetória por p é dada pelos campos X e Y de maneira usual. Porém, se $p \in \Sigma$, devemos ter mais cuidado ao definir a trajetória.

Para o caso em que $p \in \Sigma$, definimos as seguintes regiões.

- Região de costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : X_f(p) \cdot Y_f(p) > 0\}$,
- Região de desliz: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : X_f(p) < 0, Y_f(p) > 0\}$,
- Região de escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : X_f(p) > 0, Y_f(p) < 0\}$.

Onde $X_f(p) = X(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$ e $Y_f(p) = Y(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$ é a derivada de Lie de f com respeito ao campo X em p e de f com respeito ao campo Y em p respectivamente.

Podemos observar que nesses casos não estão incluídos os pontos de tangência, isto é, os pontos $p \in \Sigma$ tais que $X_f(p) = 0$ ou $Y_f(p) = 0$. Estes pontos estão nas fronteiras das regiões Σ^c , Σ^s , Σ^e .

Definição 3.2. Considere o Sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$. Defina o campo vetorial deslizante por:

$$Z^s(p) = \frac{1}{Y_f(p) - X_f(p)}(Y_f(p)X(p) - X_f(p)Y(p))$$

Observação 3.3. O fluxo $\varphi_X(t, p)$ de um campo autônomo X satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p \end{cases}$$

e está definido para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde $I = I(p, X)$ é um intervalo dependente do ponto p e do campo X , onde podemos escolher a origem no tempo $t = 0$.

Definição 3.4. A trajetória local (ou solução orbital) de um campo vetorial de Filippov $Z(x, y)_f$ por um ponto p é definida da seguinte forma:

- Para $p \in \Sigma^+$ e $p \in \Sigma^-$, tais que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$, respectivamente, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, respectivamente para $t \in I \subset \mathbb{R}$.
- Para $p \in \Sigma^c$, temos dois casos:

– Se $X_f(p), Y_f(p) > 0$ e tomando a origem do tempo em p , definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

– Se $X_f(p), Y_f(p) < 0$ e tomando a origem do tempo em p , definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

- Para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) \neq 0$ definimos $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$, para $t \in I$, onde Z^s é o campo vetorial deslizante dado por $Z^s(p)$.
- Para $p \in \partial \Sigma^c \cup \partial \Sigma^s \cup \partial \Sigma^e$ tal que as definições de trajetórias para pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é esta trajetória estendida.
- Para os pontos p que não se enquadram nos itens acima, definimos $\varphi_Z(t, p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.5. A órbita local de um ponto $p \in U$, é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I\}$.

Definição 3.6. As singularidades do Sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$ são:

- $p \in \Sigma^\pm$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$;
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$,
- $p \in \partial \Sigma^c \cup \partial \Sigma^s \cup \partial \Sigma^e$, isto é, os pontos de tangência de $Z = (X, Y)_f$, ($X_f(p) = 0$ ou $Y_f(p) = 0$).

4 Ciclos Limite

Definição 4.1. Uma **órbita periódica regular** é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t, p); t \in \mathbb{R}\}$ que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$, onde $\overline{\Sigma^c}$ é o fecho de Σ^c , e satisfaz $\varphi_Z(T + t, p) = \varphi_Z(t, p)$, para algum $T > 0$. Neste caso, T é chamado de **período** de γ .

Definição 4.2. Dizemos que γ é uma **órbita de costura** se é uma órbita periódica regular e $\emptyset \neq \gamma \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$. Caso $\gamma \subset \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, dizemos que γ é uma **órbita periódica padrão**.

Definição 4.3. Uma **órbita periódica deslizante** é uma órbita periódica de Z^s .

Definição 4.4. Dizemos que γ é um **ciclo limite** se é uma órbita periódica regular e existe uma vizinhança V de γ tal que $\gamma(q)$ não é órbita periódica regular, para todo $q \in V$, onde $\gamma(q)$ é a órbita que passa por q . Em outras palavras, γ é uma órbita periódica isolada.

Definição 4.5. Dizemos que γ é um ciclo limite **estável** se existir uma vizinhança V de γ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_Z(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$; é um ciclo limite **instável** se existir uma vizinhança V de γ tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi_Z(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$.

5 Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em 3 Zonas

Consideramos em nosso estudo Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em 3 zona da forma:

$$\begin{cases} x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y) \end{cases}$$

onde F e G são funções de um dos tipos abaixo:

Tipo 1: F e G são funções lineares em cada uma das regiões:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < L\},$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; L < x < M\},$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > M\},$$

e não necessariamente contínuas em $x = L$ e $x = M$, com $L < M$, onde $x = L$ e $x = M$ são as variedades de descontinuidade do sistema.

Tipo 2: F e G são funções lineares em cada uma das regiões:

$$\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, \theta_1 < \theta < \theta_2\},$$

$$\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, \theta_2 < \theta < \theta_3\},$$

$$\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, \theta_3 < \theta < \theta_1\},$$

e não necessariamente contínuas nas semirretas $\theta = \theta_j$, com $j = 1, 2, 3$, onde essas semirretas são as variedades de descontinuidade do sistema.

Nas próximas subseções, demonstraremos os seguintes resultados, relacionados à existência de ciclos limites para sistemas do tipo 1 e também do tipo 2:

Teorema 5.1. Para sistemas do tipo 1, existe uma superfície \mathcal{S}_1 de codimensão 1 no espaço dos parâmetros de modo que se os parâmetros do sistema estão em \mathcal{S}_1 então o sistema admite pelo menos 1 ciclo limite.

Teorema 5.2. Para sistemas do tipo 2, existe uma superfície \mathcal{S}_1 de codimensão 1 no espaço dos parâmetros de modo que se os parâmetros do sistema estão em \mathcal{S}_1 então o sistema admite pelo menos 1 ciclo limite.

5.1 Tipo 1

Restringimos nossos estudos considerando $L = -1$ e $M = 1$, onde as funções F e G serão analisadas nas seguintes regiões:

- 1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < -1\}$,
- 2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1\}$,
- 3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 1\}$,

onde 1 e 3 são regiões onde consideramos uma sela com singularidade $(-2, 0)$ e uma outra sela com singularidade $(2, \tilde{y})$, respectivamente. Já na região 2 consideramos um foco com singularidade $(0, 0)$.

Análise da Região 1

Considerando $F(x, y) = ax + by + e$ e $G(x, y) = cx + dy + f$, temos $X' = AX + A'$, onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Como $(-2, 0)$ é ponto de singularidade temos, $\begin{cases} 0 = a(-2) + b(0) + e \\ 0 = c(-2) + d(0) + f \end{cases}$, isso implica que $e = 2a$ e $f = 2c$. Para que seja uma sela temos a seguinte condição para os autovalores: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0$. Sendo assim, vamos encontrar estes autovalores.

$$\det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0$$

Considerando o caso em que $a = 0$ e $d = 0$, temos os seguintes autovalores, $\lambda_1 = \sqrt{bc}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{bc}$. Portanto,

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = ax + by + 2a \\ y' = cx + dy + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0x + by + 20 \\ y' = cx + 0d + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = by \\ y' = cx + 2c \end{cases}$$

Vamos encontrar os autovetores correspondentes a cada autovalor.

- Quando $\lambda_1 = \sqrt{bc}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{bc} & -b \\ -c & \sqrt{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{bc}}{c} z_2 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Quando $\lambda_2 = -\sqrt{bc}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{bc} & -b \\ -c & -\sqrt{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow w_1 = -\frac{\sqrt{bc}}{c} w_2 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos encontrar o fluxo $\varphi_t(x_0, y_0)$ do seguinte sistema: $\begin{cases} x'(t) = by(t) \\ y'(t) = cx(t) + 2c \end{cases}$. Como não é um sistema homogêneo devemos inicialmente encontrar a solução homogênea e depois a solução particular. Portanto, seja $\begin{cases} x'(t) = by(t) \\ y'(t) = cx(t) \end{cases}$ a parte homogênea do sistema. Temos que a solução homogênea X_h é dada por:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{(\sqrt{bc})t} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-(\sqrt{bc})t} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{\sqrt{b} e^{(\sqrt{bc})t}}{\sqrt{c}} c_1 - \frac{\sqrt{b} e^{-(\sqrt{bc})t}}{\sqrt{c}} c_2, e^{(\sqrt{bc})t} c_1 + e^{-(\sqrt{bc})t} c_2 \right)$$

Portanto,

$$X_h = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bc}t} & -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bc}t} \\ e^{\sqrt{bc}t} & e^{-\sqrt{bc}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Em seguida, obtemos a solução particular $X_p = Xu(t)$, onde $u(t)$ é dado por $Xu' = f$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} & -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} \\ e^{\sqrt{bct}} & e^{-\sqrt{bct}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \end{bmatrix}$$

Calculando o Wronskiano, temos:

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} & -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} \\ e^{\sqrt{bct}} & e^{-\sqrt{bct}} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} e^{-\sqrt{bct}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} e^{\sqrt{bct}} = 2 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$$

Desta forma,

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} \\ 2c & e^{-\sqrt{bct}} \end{vmatrix}}{2 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}} = \frac{2c \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}}}{2 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}} = c e^{-\sqrt{bct}} \Rightarrow u_1 = \frac{-c e^{-\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} & 0 \\ e^{\sqrt{bct}} & 2c \end{vmatrix}}{2 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}} = \frac{2c \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}}}{2 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}} = c e^{\sqrt{bct}} \Rightarrow u_2 = \frac{c e^{\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}}$$

Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} X_p = Xu(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} & -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} \\ e^{\sqrt{bct}} & e^{-\sqrt{bct}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-c e^{-\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}} \\ \frac{c e^{\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} \left(\frac{-c e^{-\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}} \right) - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} \left(\frac{c e^{\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}} \right) \\ e^{\sqrt{bct}} \left(\frac{-c e^{-\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}} \right) + e^{-\sqrt{bct}} \left(\frac{c e^{\sqrt{bct}}}{\sqrt{bc}} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é dada por $X = X_h + X_p$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bct}} c_1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bct}} c_2 - 2 \\ e^{\sqrt{bct}} c_1 + e^{-\sqrt{bct}} c_2 \end{bmatrix}$$

Resta determinar onde os subespaços invariantes da sela interceptam a reta $x = -1$. Temos $v_1 = \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 1 \right)$, $v_2 = \left(-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 1 \right)$ e a singularidade do nosso sistema está no ponto $(-2, 0)$. Denotando por r a reta que passa pelos pontos $(-2, 0)$ e $\left(-2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 1 \right)$, obtemos a equação desta reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = -2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} y$$

Queremos saber onde a reta r intercepta a reta $x = -1$. Assim,

$$-1 = -2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} y \Rightarrow -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} y = 1 \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $P = \left(-1, -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} \right)$. Agora, denotando por s a reta que passa pelos pontos $(-2, 0)$ e $\left(-2 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 1 \right)$, obtemos a equação desta reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = -2 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} y$$

Queremos saber onde a reta s intercepta a reta $x = -1$. Assim,

$$-1 = -2 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}y \Rightarrow \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}y = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $Q = \left(-1, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)$.

Análise da Região 3

Considerando $F(x, y) = px + qy + g$ e $G(x, y) = rx + sy + h$, temos $X' = CX + C'$, onde $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, $C' = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Como $(2, \tilde{y})$ é ponto de singularidade temos, $\begin{cases} 0 = p(2) + q(\tilde{y}) + g \\ 0 = r(2) + s(\tilde{y}) + h \end{cases}$, isso implica que $g = -2p - q\tilde{y}$ e $h = -2r - s\tilde{y}$. Para que seja uma sela temos a seguinte condição para os autovalores: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0$. Sendo assim, vamos encontrar estes autovalores.

$$\det[\lambda I - C] = \det \begin{bmatrix} \lambda - p & -q \\ -r & \lambda - s \end{bmatrix} = (\lambda - p)(\lambda - s) - qr = 0$$

Considerando o caso em que $p = 0$ e $s = 0$, temos os seguintes autovalores, $\lambda_1 = \sqrt{qr}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{qr}$. Portanto,

$$\begin{cases} x' = apx + qy + g \\ y' = rx + sy + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = px + qy - 2p - q\tilde{y} \\ y' = rx + sy - 2r - s\tilde{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0x + qy + -2 * 0 - q\tilde{y} \\ y' = rx + 0y + -2r - 0\tilde{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = qy - q\tilde{y} \\ y' = rx - r \end{cases}$$

Vamos encontrar os autovetores correspondentes a cada autovalor.

- Quando $\lambda_1 = \sqrt{qr}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{qr} & -q \\ -r & \sqrt{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{z}_1 = \frac{\sqrt{q}}{r}\tilde{z}_2 \Rightarrow \tilde{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, 1\right)$$

- Quando $\lambda_2 = -\sqrt{qr}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{qr} & -q \\ -r & -\sqrt{qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{w}_1 = -\frac{\sqrt{q}}{r}\tilde{w}_2 \Rightarrow \tilde{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, 1\right)$$

Agora, vamos encontrar o fluxo $\alpha_t(x_0, y_0)$ do seguinte sistema: $\begin{cases} x'(t) = qy(t) - q\tilde{y} \\ y'(t) = rx(t) - 2r \end{cases}$. Como não é um sistema homogêneo devemos inicialmente encontrar a solução homogênea e depois a solução particular. Portanto, seja $\begin{cases} x'(t) = qy(t) \\ y'(t) = rx(t) \end{cases}$ a parte homogênea do sistema. Temos que a solução homogênea X_h é dada por:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \tilde{c}_1 e^{(\sqrt{qr})t} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \\ 1 \end{bmatrix} + \tilde{c}_2 e^{-(\sqrt{qr})t} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{\sqrt{q} e^{(\sqrt{qr})t}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_1 - \frac{\sqrt{q} e^{-(\sqrt{qr})t}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_2, e^{(\sqrt{qr})t} \tilde{c}_1 + e^{-(\sqrt{qr})t} \tilde{c}_2 \right)$$

Portanto,

$$X_h = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} & -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \\ e^{\sqrt{qr}t} & e^{-\sqrt{qr}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix}$$

Em seguida, obtemos a solução particular $X_p = Xu(t)$, onde $u(t)$ é dado por $Xu' = f$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} & -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \\ e^{\sqrt{qr}t} & e^{-\sqrt{qr}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q\tilde{y} \\ -2r \end{bmatrix}$$

Calculando o Wronskiano, temos:

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} & -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \\ e^{\sqrt{qr}t} & e^{-\sqrt{qr}t} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} e^{-\sqrt{qr}t} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} e^{\sqrt{qr}t} = 2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1' &= \frac{\begin{vmatrix} -q\tilde{y} & -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \\ -2r & e^{-\sqrt{qr}t} \end{vmatrix}}{2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}} = \frac{-q\tilde{y} e^{-\sqrt{qr}t} - 2r\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t}}{2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}} = \frac{-\sqrt{qr} e^{-\sqrt{qr}t} \tilde{y}}{2} - r e^{-\sqrt{qr}t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{u}_1 = \frac{e^{-\sqrt{qr}t} (2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2' &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} & -q\tilde{y} \\ e^{\sqrt{qr}t} & -2r \end{vmatrix}}{2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}} = \frac{-2r\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} + q\tilde{y} e^{\sqrt{qr}t}}{2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}} = -r e^{\sqrt{qr}t} + \frac{\sqrt{qr} e^{\sqrt{qr}t} \tilde{y}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{u}_2 = \frac{e^{\sqrt{qr}t} (-2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} \end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} X_p = Xu(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} & -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \\ e^{\sqrt{qr}t} & e^{-\sqrt{qr}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{-\sqrt{qr}t} (2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} \\ \frac{e^{\sqrt{qr}t} (-2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} \frac{e^{-\sqrt{qr}t} (2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \frac{e^{\sqrt{qr}t} (-2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} \\ e^{\sqrt{qr}t} \frac{e^{-\sqrt{qr}t} (2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} + e^{-\sqrt{qr}t} \frac{e^{\sqrt{qr}t} (-2r + \sqrt{qr} \tilde{y})}{2\sqrt{qr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é dada por $X = X_h + X_p$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} \tilde{c}_1 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \tilde{c}_2 + 2 \\ e^{\sqrt{qr}t} \tilde{c}_1 + e^{-\sqrt{qr}t} \tilde{c}_2 + \tilde{y} \end{bmatrix}$$

Resta determinar onde os subespaços invariantes da sela interceptam a reta $x = 1$. Temos $\tilde{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, 1\right)$, $\tilde{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, 1\right)$ e a singularidade do nosso sistema está no ponto $(2, \tilde{y})$. Denotando por m a reta que passa pelos pontos $(2, \tilde{y})$ e $\left(2 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, 1 + \tilde{y}\right)$, obtemos a equação desta reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & \tilde{y} & 1 \\ 2 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} & 1 + \tilde{y} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = -y \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} + 2 + \tilde{y} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$$

Queremos saber onde a reta m intercepta a reta $x = 1$. Assim,

$$1 = -y \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} + 2 + \tilde{y} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \Rightarrow y \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} = 1 + \tilde{y} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $\tilde{P} = \left(1, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y}\right)$. Agora, denotando por n a reta que passa pelos pontos $(2, \tilde{y})$ e $\left(2 + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, 1 + \tilde{y}\right)$, obtemos a equação desta reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & \tilde{y} & 1 \\ 2 + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} & 1 + \tilde{y} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = y \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} + 2 - \tilde{y} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$$

Queremos saber onde a reta n intercepta a reta $x = 1$. Assim,

$$1 = y \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} + 2 - \tilde{y} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \Rightarrow y \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} = -1 + \tilde{y} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $\tilde{Q} = \left(1, -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y}\right)$.

Órbita Periódica

Nosso objetivo agora é encontrar uma órbita periódica para o sistema dinâmico linear que estamos considerando neste momento.

Vamos novamente analisar a região 1. Dado um ponto A entre os pontos $P = \left(-1, -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)$ e $Q = \left(-1, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)$ queremos encontrar um ponto B que após um tempo t o fluxo φ_t volte a encontrar a variedade de descontinuidade $x = -1$. Considere $A = \left(-1, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - 1\right)$. Temos que a solução do sistema referente a região 1 é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bc}t} c_1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bc}t} c_2 - 2 \\ y(t) = e^{\sqrt{bc}t} c_1 + e^{-\sqrt{bc}t} c_2 \end{cases}$$

Consideremos $(x(0), y(0)) = \left(-1, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - 1\right)$. Sendo assim,

$$x(0) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bc}0} c_1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bc}0} c_2 - 2 = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} c_1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} c_2 = 1$$

$$y(0) = e^{\sqrt{bc}0} c_1 + e^{-\sqrt{bc}0} c_2 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - 1 \Leftrightarrow c_1 = -c_2 + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - 1$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \left(-c_2 + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - 1\right) - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} c_2 &= 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} c_2 + 1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} c_2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} c_2 &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, $c_1 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bc}t} \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bc}t} \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \\ y(t) = e^{\sqrt{bc}t} \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2}\right) + e^{-\sqrt{bc}t} \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{\sqrt{bc}t} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bc}t} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bc}t} - 2 \\ y(t) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} e^{\sqrt{bc}t} - \frac{1}{2} e^{\sqrt{bc}t} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{bc}t} \end{cases}$$

Queremos encontrar o tempo t no qual $x(t) = -1$ novamente, ou seja:

$$e^{\sqrt{bc}t} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{\sqrt{bc}t} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} e^{-\sqrt{bc}t} - 2 = -1$$

Chamando $M = e^{\sqrt{bc}t}$ e $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, então:

$$\begin{aligned} M - \frac{1}{2} \alpha M + \frac{1}{2} \alpha \frac{1}{M} &= 1 \Rightarrow M \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{M} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow M^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) + \frac{\alpha}{2} &= M \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) M^2 - M + \frac{\alpha}{2} = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação polinomial do segundo grau em M , obtemos as soluções $M = 1$ e $M = \frac{\alpha}{2-\alpha}$. Temos:

- $M = 1 \Rightarrow e^{\sqrt{bc}t} = 1 \Rightarrow \ln(e^{\sqrt{bc}t}) = \ln(1) \Rightarrow \sqrt{bc}t = 0 \Rightarrow t = 0.$

- Se $M = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, então:

$$e^{\sqrt{bc}t} = \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}}{2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}} = \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}}{\frac{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}} = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(e^{\sqrt{bc}t}) = \ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right) \Rightarrow \sqrt{bc}t = \ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{bc}}$$

O caso em que $t = 0$ temos o ponto A , então consideramos o caso em que $t = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{bc}}$. Vamos encontrar $y(t)$ neste caso.

$$y(t) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} e^{\sqrt{bc}t} - \frac{1}{2} e^{\sqrt{bc}t} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{bc}t} =$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} e^{\sqrt{bc} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{bc}}} - \frac{1}{2} e^{\sqrt{bc} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{bc}}} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{bc} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{bc}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}} - \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}\sqrt{c} - \sqrt{b}\sqrt{b} - (2\sqrt{c}-\sqrt{b})^2}{2(2\sqrt{c}-\sqrt{b})\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{b}\sqrt{c} - b - 4c - 4\sqrt{c}\sqrt{b} + b}{4\sqrt{b}\sqrt{c} - 2b} = \frac{6\sqrt{b}\sqrt{c} - 2b - 4c}{4\sqrt{b}\sqrt{c} - 2b}$$

Portanto, encontramos o ponto B ,

$$B = \left(-1, \frac{6\sqrt{b}\sqrt{c} - 2b - 4c}{4\sqrt{b}\sqrt{c} - 2b}\right)$$

Consideramos agora a região 3. Dado um ponto C entre os pontos $P = \left(-1, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y}\right)$ e $Q = \left(-1, -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y}\right)$ queremos encontrar um ponto D que após um tempo t o fluxo α_t volte a encontrar a variedade de descontinuidade $x = 1$. Tome $C = \left(1, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y} - 1\right)$. Temos que a solução do sistema referente a parte 3,

$$\begin{cases} x' = qy - q\tilde{y} \\ y' = rx - 2r \end{cases},$$

é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}t} \tilde{c}_1 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}t} \tilde{c}_2 + 2 \\ y(t) = e^{\sqrt{qr}t} \tilde{c}_1 + e^{-\sqrt{qr}t} \tilde{c}_2 + \tilde{y} \end{cases}$$

Consideremos $(x(0), y(0)) = \left(1, \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} + \tilde{y} - 1\right)$. Sendo assim,

$$x(0) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{\sqrt{qr}0} \tilde{c}_1 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{qr}0} \tilde{c}_2 + 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_1 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_2 = -1$$

$$y(0) = e^{\sqrt{qr}0} \tilde{c}_1 + e^{-\sqrt{qr}0} \tilde{c}_2 + \tilde{y} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \tilde{y} - 1 \Leftrightarrow \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - 1 \Leftrightarrow \tilde{c}_1 = -\tilde{c}_2 + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - 1$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos:

$$\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \left(-\tilde{c}_2 + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - 1\right) - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_2 = -1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_2 + 1 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \tilde{c}_2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}\tilde{c}_2 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} - 2 \Leftrightarrow \tilde{c}_2 = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2}$$

Logo, $\tilde{c}_1 = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - 1 - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tilde{c}_1 = -\frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}e^{\sqrt{qr}t} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}e^{-\sqrt{qr}t}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2}\right) + 2 \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{qr}t} + e^{-\sqrt{qr}t}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2}\right) + \tilde{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}e^{\sqrt{qr}t} - e^{-\sqrt{qr}t} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}e^{-\sqrt{qr}t} + 2 \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{qr}t} + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}e^{-\sqrt{qr}t} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{qr}t} + \tilde{y} \end{cases}$$

Queremos encontrar o tempo t no qual $x(t) = 1$ novamente, ou seja:

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}e^{\sqrt{qr}t} - e^{-\sqrt{qr}t} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}e^{-\sqrt{qr}t} + 1 = 0$$

Chamando $N = e^{\sqrt{qr}t}$ e $\beta = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$, então:

$$-\frac{1}{2}\beta N - \frac{1}{N} + \frac{1}{2}\beta\frac{1}{N} + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\beta N^2 + N - 1 + \frac{1}{2}\beta = 0$$

Resolvendo esta equação polinomial de segundo grau em N , obtemos as soluções $N = 1$ e $N = \frac{2-\beta}{\beta}$. Temos:

- $N = 1 \Rightarrow e^{\sqrt{qr}t} = 1 \Rightarrow \ln(e^{\sqrt{qr}t}) = \ln(1) \Rightarrow \sqrt{qr}t = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Se $N = \frac{2-\beta}{\beta}$, então:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{qr}t} &= \frac{2 - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}}{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - 1 \Rightarrow \ln(e^{\sqrt{qr}t}) = \ln\left(\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{q}} - 1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{qr}t = \ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)}{\sqrt{qr}} \end{aligned}$$

O caso em que $t = 0$ temos o ponto C , então consideramos o caso em que $t = \frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)}{\sqrt{qr}}$. Vamos encontrar $y(t)$ neste caso.

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}e^{\sqrt{qr}t} + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}e^{-\sqrt{qr}t} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{qr}t} + \tilde{y} = \\ &= -\frac{1}{2}e^{\sqrt{qr}\frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)}{\sqrt{qr}}} + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}e^{-\sqrt{qr}\frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)}{\sqrt{qr}}} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{qr}\frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)}{\sqrt{qr}}} + \tilde{y} = \\ &= -\frac{1}{2}e^{\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)} + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}e^{-\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)} - \frac{1}{2}e^{-\ln\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)} + \tilde{y} = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right) + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}\left(\frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{r} - \sqrt{q}}\right) + \tilde{y} = \\ &= \frac{-2\sqrt{r} + \sqrt{q}}{2\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{r} - \sqrt{q}} - \frac{\sqrt{q}}{2(2\sqrt{r} - \sqrt{q})} + \tilde{y} = \\ &= \frac{(-2\sqrt{r} + \sqrt{q})(2\sqrt{r} - \sqrt{q}) + 2\sqrt{r}\sqrt{q} - \sqrt{q}\sqrt{q}}{2(2\sqrt{r} - \sqrt{q})\sqrt{q}} + \tilde{y} = \\ &= \frac{-4r + 2\sqrt{r}\sqrt{q} + 2\sqrt{r}\sqrt{q} - q - q}{2(2\sqrt{r}\sqrt{q} - q)} + \tilde{y} = \frac{-4r + 4\sqrt{r}\sqrt{q} - 2q}{4\sqrt{r}\sqrt{q} - 2q} + \tilde{y} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{-2r + 2\sqrt{r}\sqrt{q} - q}{2\sqrt{r}\sqrt{q} - q} + \tilde{y}$$

Portanto o ponto D é dado por

$$D = \left(1, \frac{-2r + 2\sqrt{r}\sqrt{q} - q}{2\sqrt{r}\sqrt{q} - q} + \tilde{y} \right)$$

Construímos assim uma órbita periódica γ passando pelos pontos A, B, C e D . Com isto pode ser construído um foco na região 2 que nos permita obter tal órbita periódica, que pode até mesmo ser um ciclo limite para o sistema. Com isto, provamos o Teorema 5.1.

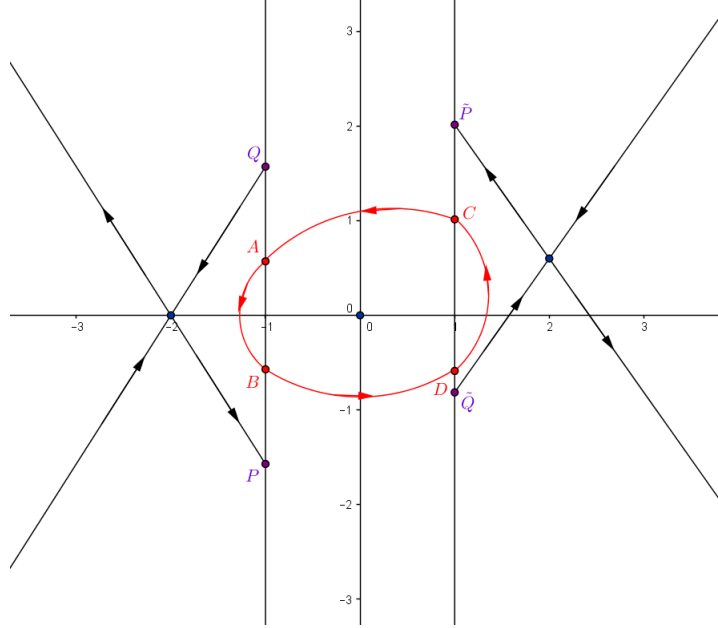


Figura 1: Ilustração da Órbita Periódica

5.2 Tipo 2

Restringimos nossos estudos considerando $\theta_1 = \frac{5\pi}{4}$, $\theta_2 = 2\pi = 0$ e $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, onde as funções F e G serão analisadas nas seguintes regiões:

- 1) $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$,
- 2) $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{4}\}$,
- 3) $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, \frac{5\pi}{4} < \theta < 2\pi\}$,

As funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ serão denotadas de outra forma para este caso, onde o sistema para cada região será dado da seguinte forma:

Região j :

$$X_j : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_j & -1 \\ D_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

onde X_j se anula na semirreta $\theta = \theta_j$, para $j = 1, 2, 3$, T_j é o traço e D_j é o determinante do sistema de cada região.

Vamos considerar o caso em que as singularidades são visíveis. Na região 1 teremos um centro com a singularidade na reta r_1 , dada por (α_1, α_1) , onde a reta r_1 é $x = y$ que contem a semirreta $\theta = \theta_1$, já na região 2 consideraremos uma sela com singularidade $(2T_2, 2D_2)$, e na região 3 teremos um foco com singularidade na reta r_3 , dada por $(0, \beta_3)$, onde a reta r_3 é $x = 0$ que contem a semirreta $\theta = \theta_3$.

Vamos analisar o que acontece com o traço e o determinante do sistema quando se tem um centro, um foco ou uma sela. Seja A uma matriz 2×2 , temos que:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix}\right) = \\ &= \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - cb = \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = \lambda^2 - \lambda T(A) + D(A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{T(A) \pm \sqrt{T(A)^2 - 4D(A)}}{2} \end{aligned}$$

onde $T(A)$ é o traço da matriz A e $D(A)$ o determinante. Além disso, sabemos que $T(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $D(A) = \lambda_1\lambda_2$. Temos o seguinte:

- Centro: autovalor dado por $\lambda = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha = 0$, isso implica $T(A) = 0$ e $D(A) > 0$.
- Sela: os autovalores satisfazem $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, isso implica $D(A) < 0$.
- Foco: autovalor dado por $\lambda = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha \neq 0$, isso implica $T(A)^2 - 4D(A) < 0$.

Para analisar a variedade de descontinuidade, consideramos:

$$f(x, y) = xy(x - y)$$

e os seguintes casos:

Caso 1) Centro-Sela

A variedade de descontinuidade que vamos analisar é

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ e } y > 0\} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

que está entre a região 1 e 2, logo temos:

A sela dada por:

$$X_2 : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2 & -1 \\ D_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2T_2 \\ 2D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2x - y + 2T_2 \\ D_2x + 2D_2 \end{bmatrix}$$

e o centro dado por:

$$X_1 : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + \alpha_1 \\ D_1x + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Calculando a derivada de Lie, obtemos:

$$X_1f(0, y) = (-y + \alpha_1, D_1x + \alpha_1)(1, 0) = -y + \alpha_1$$

$$X_2f(0, y) = (T_2x - y + 2T_2, D_2x + 2D_2)(1, 0) = T_2x - y + \alpha_2 + 2T_2 = -y + 2T_2$$

- Temos que $y > 0$, $\alpha_1 > 0$, $D_2 < 0$ e considere $T_2 \geq \alpha_1$. Logo, $X_2f(0, y) = -y + T_2 < 0$ quando $y > T_2$ e $X_2f(0, y) = -y + T_2 > 0$ quando $y < T_2$, $X_1f(0, y) > 0$ quando $y < \alpha_1$ e $X_1f(0, y) < 0$ quando $y > \alpha_1$. Portanto, teremos uma região de costura quando $X_2f(0, y)X_1f(0, y) > 0$ quando $y < \alpha_1$ e $y > T_2$. Como $T_2 \geq \alpha_1$, teremos uma região de deslize quando $\alpha_1 < y < T_2$. O ponto de tangência das regiões é dado por: $X_1f(0, y)X_2f(0, y) = 0 \Rightarrow y = \alpha_1$ e $y = T_2$, ou seja, $(0, \alpha_1)$ e $(0, T_2)$.

Caso 2) Centro-Foco

A variedade de descontinuidade que iremos avaliar é

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y = 0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

que está entre as regiões 1 e 3, temos assim:

O centro dado por:

$$X_1 : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + \alpha_1 \\ D_1x + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

e o foco dado por:

$$X_3 : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 & -1 \\ D_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3x - y \\ D_3x + \beta_3 \end{bmatrix}$$

Calculando a derivada de Lie temos:

$$X_1f(x, 0) = (-y + \alpha_1, D_1x + \alpha_1)(0, 1) = D_1x + \alpha_1$$

$$X_3f(x, 0) = (T_3x - y, D_3x + \beta_3)(0, 1) = D_3x + \beta_3$$

Temos que $x > 0$, $\alpha_1 > 0$, $D_1 > 0$, $\beta_3 < 0$ e $T_3^2 - 4D_3 < 0 \Rightarrow D_3 > \frac{T_3^2}{4} \Rightarrow D_3 > 0$. Logo, $X_1f(x, 0) = D_1x + \alpha_1 > 0$, $X_3f(x, 0) = D_3x + \beta_3 > 0$ quando $x > -\frac{\beta_3}{D_3}$ e $X_3f(x, 0) < 0$ quando $x < -\frac{\beta_3}{D_3}$. Portanto, teremos uma região de costura quando $X_1f(x, 0)X_3f(x, 0) > 0 \Rightarrow x > -\frac{\beta_3}{D_3}$ e uma região de escape quando $X_1f(x, 0) > 0$ e $X_3f(x, 0) < 0 \Rightarrow x < -\frac{\beta_3}{D_3}$. O ponto de tangência das regiões é dado por: $X_1f(x, 0)X_3f(x, 0) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\beta_3}{D_3}$, ou seja, $(-\frac{\beta_3}{D_3}, 0)$.

Caso 3) Sela-Foco

A variedade de descontinuidade que estamos avaliando é

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x < 0 \text{ e } y < 0\} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$$

que está entre as regiões 2 e 3, logo temos:

A sela dada por:

$$X_2 : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2 & -1 \\ D_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2x - y + 2T_2 \\ D_2x + 2D_2 \end{bmatrix}$$

e o foco dado por:

$$X_3 : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 & -1 \\ D_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3x - y \\ D_3x + \beta_3 \end{bmatrix}$$

Assim, calculando a derivada de Lie temos:

$$X_2f(x, x) = (T_2x - y + 2T_2, D_2x + 2D_2)(1, -1) = T_2x - y + 2T_2 - D_2x - 2D_2 = T_2x - x + 2T_2 - D_2x - 2D_2$$

$$X_3f(x, x) = (T_3x - y, D_3x + \beta_3)(1, -1) = T_3x - y - D_3x - \beta_3 = T_3x - x - D_3x - \beta_3$$

Temos que $x < 0$, $\beta_3 < 0$, $D_2 < 0$, $D_3 > 0$ e consideramos $T_2 > 0$. Note que $T_3 - D_3 - 1 < 0$, pois caso contrário, ou seja, se $T_3 - D_3 - 1 \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} T_3 &\geq D_3 + 1 \Rightarrow T_3^2 \geq (D_3 + 1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_3^2 - 4D_3 &\geq D_3^2 + 2D_3 + 1 - 4D_3 = D_3^2 - 2D_3 + 1 = (D_3 - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois como se trata de um foco temos que ter $T_3^2 - 4D_3 < 0$. Portanto, $T_3 - D_3 - 1 < 0$. Assim, $X_3f(x, x) = x(T_3 - D_3 - 1) - \beta_3 > 0$.

Vamos considerar $T_2 - D_2 - 1 > 0$. Assim, temos que:

- $X_2f(x, x) > 0 \Rightarrow x(T_2 - D_2 - 1) + 2(T_2 - D_2) > 0 \Rightarrow x < \frac{-2(T_2 - D_2)}{T_2 - D_2 - 1}$.
- $X_2f(x, x) < 0 \Rightarrow x(T_2 - D_2 - 1) + 2(T_2 - D_2) < 0 \Rightarrow x > \frac{-2(T_2 - D_2)}{T_2 - D_2 - 1}$.

Portanto, teremos uma região de costura quando $X_3f(x, x)X_2f(x, x) > 0$, ou seja, $x < \frac{-2(T_2 - D_2)}{T_2 - D_2 - 1}$. Além disso, teremos uma região de escape quando $x > \frac{-2(T_2 - D_2)}{T_2 - D_2 - 1}$. O ponto de tangência das regiões é dado por: $X_2f(x, 0)X_3f(x, 0) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2(T_2 - D_2)}{T_2 - D_2 - 1}$, ou seja, $(\frac{-2(T_2 - D_2)}{T_2 - D_2 - 1}, 0)$

5.3 Existência do ciclo limite

Corolário 5.1. *Considerando os parâmetros $D_2 = 2 + \epsilon$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_3 = -1$, $D_1 = 1$, $D_3 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1$, existe ϵ tal que o sistema admite um ciclo limite.*

Demonstração: Vamos denotar por $\Sigma_1 = \{(x, 0); x > 0\}$, $\Sigma_2 = \{(0, y); y > 0\}$ e $\Sigma_3 = \{(x, x); x < 0\}$ as três semirretas que compõe Σ e por $F_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, $F_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$, $F_3 : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1$ as aplicações de Poincaré entre estas seções. Considere $F_3 = (\tilde{F}_3)^{-1}$. Nosso objetivo é mostrar que existe $p > 0$ tal que $F_2(F_1(p, 0)) = F_3(p, 0)$.

Considerando os valores do parâmetro usados no enunciado e $p = 1$, a solução da equação $F_2(F_1(p, 0)) = F_3(p, 0)$ é equivalente à solução do seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
& 18 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}}}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} - 4 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \sqrt{9-4\epsilon}}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} - 17 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} + \\
& 2 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon \sqrt{9-4\epsilon}}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} + 4 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon^2}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} + 4 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \sqrt{9-4\epsilon}}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} + \\
& 18 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}}}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} - 17 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} - 2 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon \sqrt{9-4\epsilon}}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} + \\
& 4 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon^2}{(-9+4\epsilon)(-2+\epsilon)} + 4(-2+\epsilon)^{-1} - 2 \frac{\epsilon}{-2+\epsilon} = 1 - \frac{1}{\sqrt[9]{e^{\pi\sqrt{3}}}} \\
& - \frac{27}{2} \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}}}{-9+4\epsilon} + 11/2 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \sqrt{9-4\epsilon}}{-9+4\epsilon} + \\
& 6 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon}{-9+4\epsilon} - 2 \frac{e^{1/2t} e^{1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon \sqrt{9-4\epsilon}}{-9+4\epsilon} - 11/2 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \sqrt{9-4\epsilon}}{-9+4\epsilon} - \\
& \frac{27}{2} \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}}}{-9+4\epsilon} + 6 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon}{-9+4\epsilon} + 2 \frac{e^{1/2t} e^{-1/2t\sqrt{9-4\epsilon}} \epsilon \sqrt{9-4\epsilon}}{-9+4\epsilon} = 1 - \frac{1}{\sqrt[9]{e^{\pi\sqrt{3}}}}
\end{aligned}$$

Utilizando métodos numéricos e o software Matlab, encontra-se uma solução para o sistema, com $\epsilon = -13,046\dots$ e $t = 0,470\dots$. Isto demonstra o Teorema 5.2. □

Referências

- [1] E. PONCE, *Bifurcations in piecewise linear systems: case studies*, Notas de Minicurso, MAT70, IMECC, 2014.
- [2] O. MAKARENKOV, J. S. W. LAMB, *Dynamics and bifurcations of non smooth systems: A survey*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 241, 1826-1844, 2012.
- [3] J. C. ARTÉS, F. DUMORTIER F., J. LLIBRE, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer-Verlag, 2006.
- [4] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. 18 of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [5] O. M. L. GOMIDE, *Ciclos Limites em Sistemas Dinâmicos Suaves e Não-Suaves*, Universidade Estadual de Campinas, 2015.