

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Relatório Final de Atividades

# Sistema Lineares por Partes em Duas Zonas do Plano

Bolsista: Mayara Duarte de Araujo Caldas, RA: 147422

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas

2016

# 1 Introdução

O estudo de Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes surgiu da necessidade de descrever determinados fenômenos que não podem ser representados apenas com equações suaves. Este assunto é muito importante para diversas aplicações.

Neste sentido, surgiram vários estudos sobre o tema, por tratar de sistemas que apresentam comportamentos diferentes em determinados aspectos. Neste trabalho, estudamos um destes comportamentos: a existência de ciclos limites, que é o interesse principal do projeto, onde analisamos dois sistemas específicos com variedades de descontinuidade distintas.

## 2 Resultados e Discussões

Apoiados na literatura e em softwares, como o MatLab e o Maple, na primeira parte do projeto fizemos um estudo prévio dos seguintes tópicos:

- i) Sistema de Filippov: estudando os conceitos básicos, com foco principal na variedade de descontinuidade, definindo região de costura, deslize e escape.
- ii) Ciclos Limites: definindo órbita periódica regular, órbita de costura, órbita periódica deslizante, ciclo limite e sua estabilidade.
- iii) Aplicação de Poincaré: estudando os conceitos básicos, possibilitamos encontrar os ciclos limites de um determinado sistema.

Na segunda parte, a partir dos estudos feitos anteriormente, fizemos um estudo detalhado de duas situações específicas.

A existência de três ciclos limites em sistemas descontínuos por partes com duas zonas no plano em que a variedade de descontinuidade é uma reta, de modo que um sistema possua um foco real estável e o outro um foco virtual instável, tal que coincidem. Inicialmente estudamos o comportamento do sistema com o objetivo de determinar as regiões da variedade de descontinuidade, em seguida exploramos a demonstração deste resultado utilizando o Teorema de Newton-Kantorovick tendo por base [4]. Além disso, definimos a estabilidade de cada ciclo limite do sistema.

Outro ponto considerado foi a existência de sete ciclos limites em sistema descontínuos por partes com duas zonas no plano, baseado nos estudos em [1], em que a variedade de descontinuidade é uma função que possui o formato de uma escada, que é uma ampliação da situação anterior. Inicialmente consideramos um sistema mais geral que possui algumas condições, porém nos focamos em um sistema específico, que satisfaz estas condições, para a análise deste resultado.

## 3 Sistema de Filippov

**Definição:** Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores definidos em um subconjunto aberto convexo  $U \subset \mathbb{R}^n$  e, sem perda de generalidade, assumamos que  $\vec{0} \in U$ . Considere a função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k$  (i.e.,  $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ ) com  $k > 1$ , que possui 0 como valor regular, então  $\Sigma = f^{-1}(0)$  é a variável de descontinuidade em  $U$  que divide o aberto  $U$  em dois conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{x \in U; f(x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{x \in U; f(x, y) < 0\}$$

Um sistema de Filippov é um campo vetorial suave por partes definido da seguinte forma para esse caso:

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & \text{se } x \in \Sigma^+ \\ Y(x), & \text{se } x \in \Sigma^- \end{cases}$$

e denotado por  $Z = (X, Y)_f$ .

**Definição:** Para se estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov  $Z = (X, Y)_f$  em  $U$ , devemos definir uma trajetória local por um ponto  $p \in U$ , ou seja, definir o fluxo  $\varphi_Z(t, p)$  de  $Z = (X, Y)_f$ . Isto pode ser feito da seguinte forma:

Se  $p \in \Sigma^\pm$ , então a trajetória por  $p$  é dada pelos campos  $X$  e  $Y$  de maneira usual. Porém, se  $p \in \Sigma$ , devemos ter mais cuidado ao definir a trajetória. Para o caso em que  $p \in \Sigma$ , definimos as seguintes regiões:

- Região de costura:  $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : X_f(p) \cdot Y_f(p) > 0\}$ ,
- Região de deslize:  $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : X_f(p) < 0, Y_f(p) > 0\}$ ,
- Região de escape:  $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : X_f(p) > 0, Y_f(p) < 0\}$ ,

onde  $X_f(p) = X(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$  e  $Y_f(p) = Y(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$  é a derivada de Lie de  $f$  com respeito ao campo  $X$  em  $p$  e de  $f$  com respeito ao campo  $Y$  em  $p$  respectivamente.

Podemos observar que nestes casos não estão inclusos os pontos de tangência, isto é, os pontos  $p \in \Sigma$  tais que  $X_f(p) = 0$  ou  $Y_f(p) = 0$ . Estes pontos estão nas fronteiras das regiões  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ .

**Definição:** Considere o Sistema de Filippov  $Z = (X, Y)_f$ . Definimos o campo vetorial deslizante por:

$$Z^s(p) = \frac{1}{Y_f(p) - X_f(p)}(Y_f(p)X(p) - X_f(p)Y(p))$$

**Observação:** O fluxo  $\varphi_X(t, p)$  de um campo autônomo  $X$  satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)) \\ \varphi_X(0, p) = p \end{cases}$$

e está definido para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , onde  $I = I(p, X)$  é um intervalo que depende do ponto  $p$  e do campo  $X$ . Podemos escolher a origem no tempo  $t = 0$ .

**Definição:** A trajetória local (ou solução orbital) de um campo vetorial de Filippov  $Z(x, y)_f$  por um ponto  $p$  é definida da seguinte forma:

- Para  $p \in \Sigma^+$  e  $p \in \Sigma^-$ , tais que  $X(p) \neq 0$  e  $Y(p) \neq 0$ , respectivamente, as trajetórias são dadas por  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ , respectivamente, para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .
- Para  $p \in \Sigma^c$ , temos dois casos:
  - se  $X_f(p), Y_f(p) > 0$  e tomando a origem do tempo em  $p$ , definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\} \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\} \end{cases}$$

- se  $X_f(p), Y_f(p) < 0$  e tomando a origem do tempo em  $p$ , definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\} \\ \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\} \end{cases}$$

- Para  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  tal que  $Z^s(p) \neq 0$  definimos  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$ , para  $t \in I$ , onde  $Z^s$  é o campo vetorial deslizante dado por  $Z^s(p)$ .

- Para  $p \in \partial \Sigma^c \cup \partial \Sigma^s \cup \partial \Sigma^e$ , tal que as definições de trajetórias para pontos em  $\Sigma$  em ambos os lados de  $p$  podem ser estendidas para  $p$  e coincidem, a trajetória por  $p$  é esta trajetória estendida.
- Para os pontos  $p$  que não se enquadram nos itens anteriores, definimos  $\varphi_Z(t, p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definição:** A órbita local de um ponto  $p \in U$  é o conjunto  $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I\}$ .

**Definição:** As singularidades do Sistema de Filippov  $Z = (X, Y)_f$  são:

- $p \in \Sigma^\pm$  tal que  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$ ;
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  tal que  $Z^s(p) = 0$ ;
- $p \in \partial \Sigma^c \cup \partial \Sigma^s \cup \partial \Sigma^e$ , isto é, os pontos de tangência de  $Z = (X, Y)_f$ , ( $X_f(p) = 0$  ou  $Y_f(p) = 0$ ).

**Exemplo:** Sejam  $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ,  $f(x, y) = y$  e

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (-y, x), & \text{se } y > 0 \\ Y(x, y) = (-x + a, y - b), & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

com  $a \in [-1, 1]$  e  $b \in [-1, 1]$ . Encontre  $\Sigma^c, \Sigma^s, \Sigma^e$  para os seguintes casos:

- 1)  $a > 0, b > 0$ ;      2)  $a > 0, b < 0$ ;      3)  $a < 0, b > 0$ ;      4)  $a < 0, b < 0$ .

**Resolução:** Observando o sistema temos que:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} -y, & \text{se } y > 0 \\ -x + a, & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \begin{cases} y, & \text{se } y > 0 \\ x - b, & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

sendo assim, vamos analisar o sistema quando  $y > 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 0x(t) - 1y(t) \\ y'(t) = 1x(t) + 0y(t) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora encontraremos o fluxo do sistema neste caso. Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , vamos determinar o polinômio característico da matriz  $A$  e encontrar os seus autovalores. Temos:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

Logo, como o autovalores são complexos conjugados podemos considerar um único autovetor, pois o outro será múltiplo deste, ou seja, quando  $\lambda = i$  temos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_1 i + w_2 = 0, \\ -w_1 + w_2 i = 0, \end{cases} \Rightarrow w = \begin{bmatrix} w_2 i \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Considerando  $w_1 = 1$  e  $w_2 = 1$ , obtemos:

$$w = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto o fluxo é:

$$\alpha(t) = c_1 e^{0t} [\cos(1t)(0, 1) - \text{sen}(1t)(1, 0)] + c_2 e^{0t} [\text{sen}(1t)(0, 1) + \cos(1t)(1, 0)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha(t) &= c_1[(0, \cos(t)) - (\sin(t), 0)] + c_2[(0, \sin(t)) + (\cos(t), 0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha(t) = c_1(-\sin(t), \cos(t)) + c_2(\cos, \sin(t)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha(t) = (-c_1\sin(t) + c_2\cos(t), c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) \end{aligned}$$

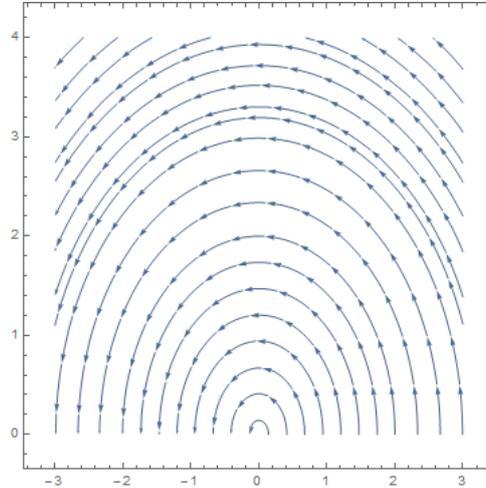


Figura 1: Retrato de fase do fluxo  $\alpha(t)$ .

Vamos analisar o sistema quando  $y < 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = -x + a \\ y' = y - b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -x(t) + a \\ y'(t) = y(t) - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -1x(t) + 0y(t) + a \\ y'(t) = 0x(t) - 1y(t) - b \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = a + c_1e^{-t} \\ y(t) = b + c_2e^t \end{cases}$$

logo, o fluxo do sistema é:

$$\beta(t) = (a + c_1e^{-t}, b + c_2e^t)$$

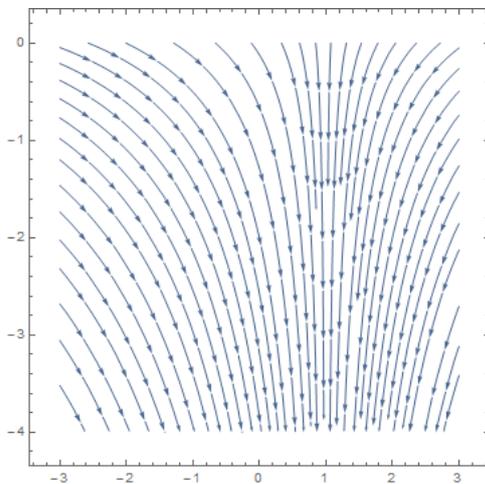


Figura 2: Retrato de fase do fluxo  $\beta(t)$  quando  $a = 1$  e  $b = 1$ .

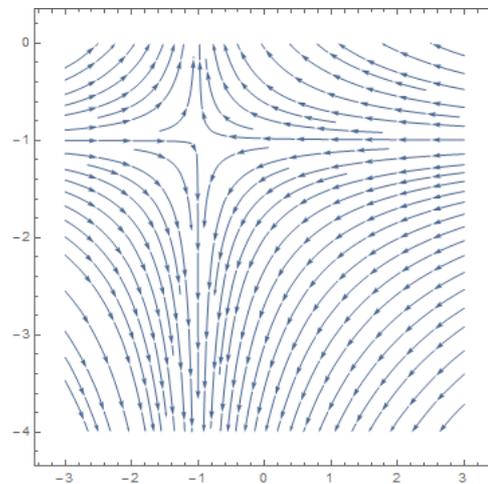


Figura 3: Retrato de fase do fluxo  $\beta(t)$  quando  $a = -1$  e  $b = -1$ .

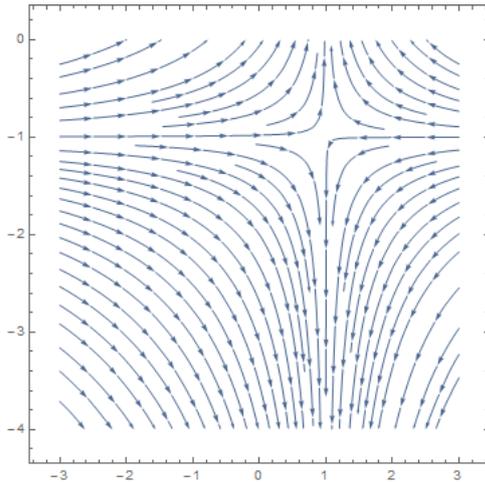


Figura 4: Retrato de fase do fluxo  $\beta(t)$  quando  $a = 1$  e  $b = -1$ .

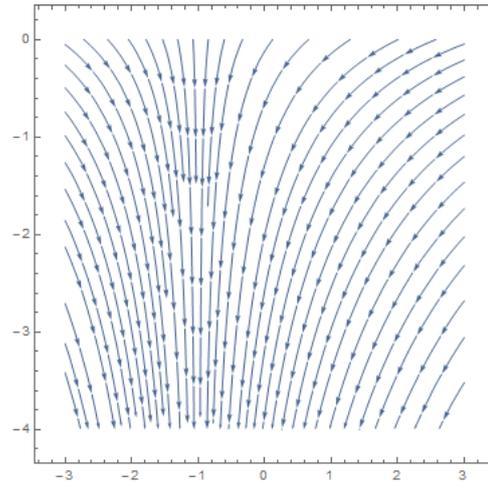


Figura 5: Retrato de fase do fluxo  $\beta(t)$  quando  $a = -1$  e  $b = 1$ .

Sabemos que a variedade de descontinuidade para esse sistema é  $f(x, y) = 0$ , ou seja,  $y = 0$ . Para determinar as regiões devemos calcular  $X_f(x, y)$  e  $Y_f(x, y)$ . Portanto,

$$X_f(x, 0) = X(x, y) \cdot \text{grad}(f)(x, 0) = (-y, x) \cdot (0, 1) = x$$

$$Y_f(x, 0) = Y(x, y) \cdot \text{grad}(f)(x, 0) = (-x + a, y - b) \cdot (0, 1) = y, \text{ como } y = 0 \Rightarrow Y_f(x, 0) = -b$$

Análise da região de cada caso:

1)  $a > 0, b > 0$ :

Temos que  $X_f(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) = x \cdot (-b) = -xb$ . Sendo assim, se  $x < 0$  temos  $X_f(x, 0) < 0$ ,  $Y_f(x, 0) < 0$  e  $(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) > 0$ , ou seja, possui região de costura  $\Sigma^c$ . Agora, se  $x > 0$  temos  $X_f(x, 0) > 0$ ,  $Y_f(x, 0) < 0$  e  $X(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) < 0$ , ou seja, possui região de escape  $\Sigma^e$ .

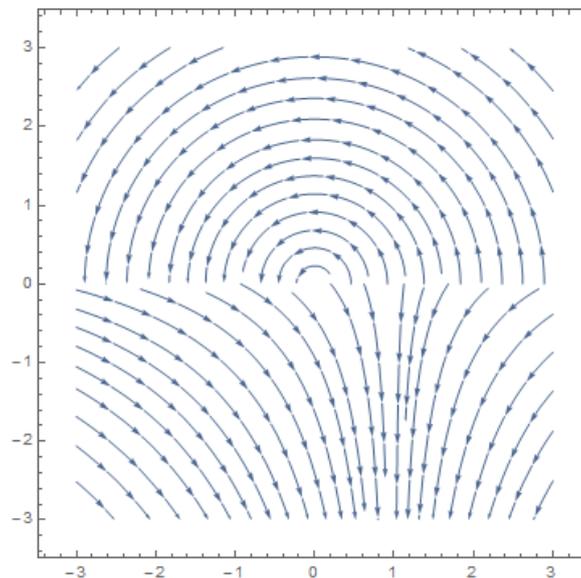


Figura 6: Retrato de fase do sistema quando  $a = 1$  e  $b = 1$ .

2)  $a > 0, b < 0$ :

Temos que  $X_f(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) = x \cdot (-b) = -xb$ . Sendo assim, se  $x < 0$  temos  $X_f(x, 0) < 0$ ,  $Y_f(x, 0) > 0$  e  $(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) < 0$ , ou seja, possui região de deslize  $\Sigma^s$ . Agora, se  $x > 0$  temos  $X_f(x, 0) > 0$ ,  $Y_f(x, 0) > 0$  e  $X(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) > 0$ , ou seja, possui região de costura  $\Sigma^c$ .

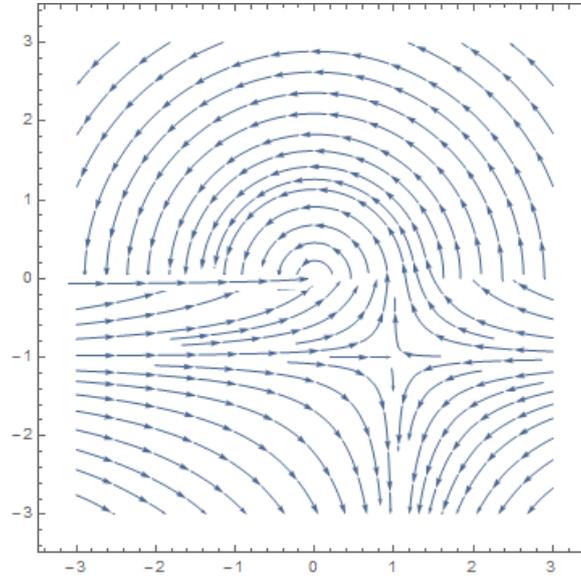


Figura 7: Retrato de fase do sistema quando  $a = 1$  e  $b = -1$ .

3)  $a < 0, b > 0$ :

Temos que  $X_f(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) = x \cdot (-b) = -xb$ . Sendo assim, se  $x < 0$  temos  $X_f(x, 0) < 0$ ,  $Y_f(x, 0) < 0$  e  $(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) > 0$ , ou seja, possui região de costura  $\Sigma^c$ . Agora se  $x > 0$  temos,  $X_f(x, 0) > 0$ ,  $Y_f(x, 0) < 0$  e  $X(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) < 0$ , ou seja, possui região de escape  $\Sigma^e$ .

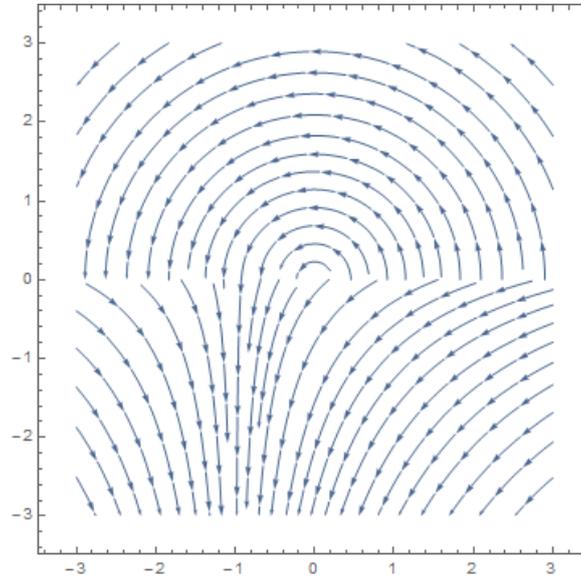


Figura 8: Retrato de fase do sistema quando  $a = -1$  e  $b = 1$ .

4)  $a < 0, b < 0$ :

Temos que  $X_f(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) = x \cdot (-b) = -xb$ . Sendo assim, se  $x < 0$  temos  $X_f(x, 0) < 0$ ,  $Y_f(x, 0) > 0$  e  $(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) < 0$ , ou seja, possui região de deslize  $\Sigma^s$ . Agora, se  $x > 0$  temos  $X_f(x, 0) > 0$ ,  $Y_f(x, 0) > 0$  e  $X(x, 0) \cdot Y_f(x, 0) > 0$ , ou seja, possui região de costura  $\Sigma^c$ .

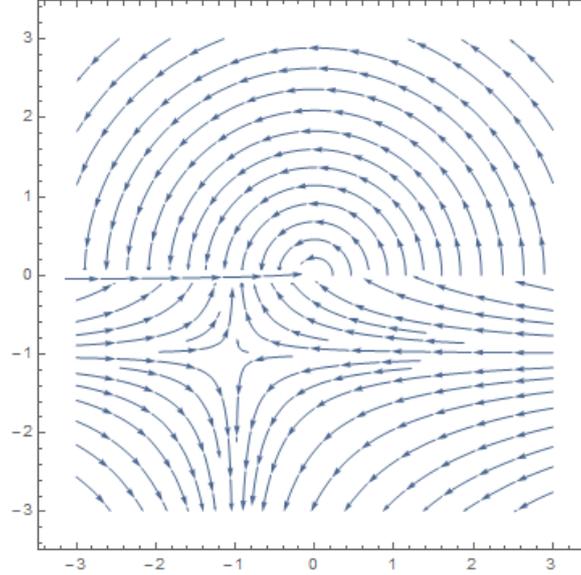


Figura 9: Retrato de fase do sistema quando  $a = -1$  e  $b = -1$ .

## 4 Ciclos Limite

**Definição:** Uma órbita periódica regular é uma órbita regular  $\gamma = \{\varphi_Z(t, p); t \in \mathbb{R}\}$  que pertence a  $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ , onde  $\overline{\Sigma^c}$  é o fecho de  $\Sigma^c$ , e satisfaz  $\varphi_Z(T + t, p) = \varphi_Z(t, p)$ , para algum  $T > 0$ . Neste caso,  $T$  é chamado de período de  $\gamma$ .

**Definição:**  $\gamma$  é uma órbita de costura se é uma órbita periódica regular e  $\emptyset \neq \gamma \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$ . Caso  $\gamma \subset \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ , dizemos que  $\gamma$  é uma órbita periódica padrão.

**Definição:** Uma órbita periódica deslizante é uma órbita periódica de  $Z^s$ .

**Definição:** Dizemos que  $\gamma$  é um ciclo limite se é uma órbita periódica regular e existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma(q)$  não é órbita periódica regular, para todo  $q \in V$ , onde  $\gamma(q)$  é a órbita que passa por  $q$ . Em outras palavras,  $\gamma$  é uma órbita periódica isolada.

**Definição:** Dizemos que  $\gamma$  é um ciclo limite estável se existir uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_Z(t, q), \gamma) = 0$ , para todo  $q \in V$ ; é um ciclo limite instável se existir uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi_Z(t, q), \gamma) = 0$ , para todo  $q \in V$ .

### 4.1 Aplicação de Poincaré

Seja  $S$  uma seção transversal local por um ponto  $x_0$  de uma órbita periódica  $\gamma$  definida pela solução de uma equação diferencial de primeira ordem  $x' = f(x)$  em  $\mathbb{R}^m$ .

A aplicação  $T : W \rightarrow S$  é denominada uma Aplicação de Poincaré, onde está definida localmente numa vizinhança  $W$  em torno de  $x_0$  na seção local  $S$ , de tal modo que, para  $y \in W \subseteq S$ , temos  $T(y) = x(t_1) \in S$ , onde  $x(t)$  é a solução de  $x' = f(x)$  com  $x(0) = y$  e  $t_1 > 0$  é o menor valor de  $t > 0$  no qual a trajetória de  $x(t)$  retorna a  $S$ . Em particular,  $T(x_0) = x_0$  é um ponto fixo de  $T$ .

No caso bidimensional, temos que a seção transversal  $S$  é unidimensional e  $W$  é um intervalo em  $S$  que contém  $x_0$  em seu interior.

Algumas trajetórias em torno de  $\gamma$  têm tendência de se aproximarem de  $\gamma$ . Neste caso dizemos que a trajetória periódica é um ciclo limite atrator. Também podem ocorrer as trajetórias em torno de  $\gamma$  que têm tendência de se afastarem de  $\gamma$ . Neste caso dizemos que a trajetória periódica é um ciclo limite repulsor.

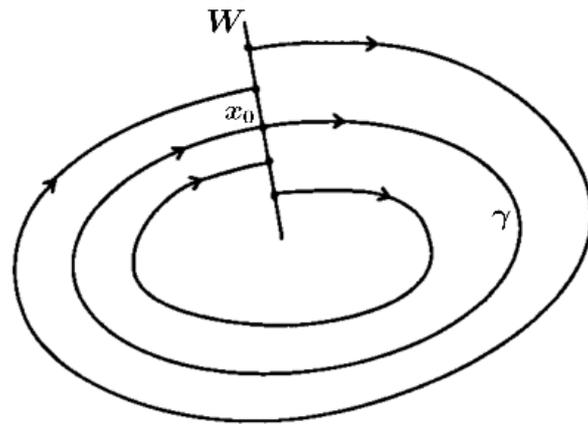


Figura 10: Atratora

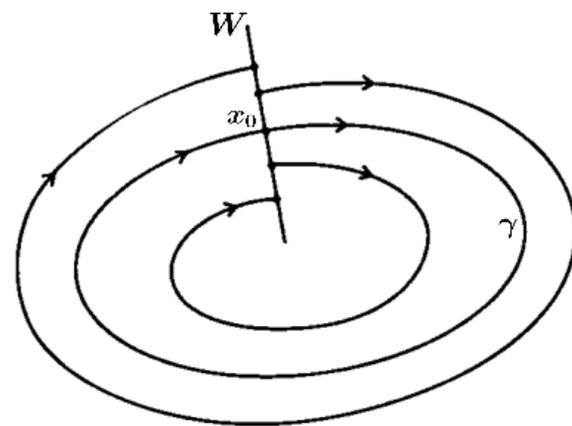


Figura 11: Repulsora

Além desses casos, pode ocorrer o caso em que as trajetórias que estão do lado de fora de  $\gamma$  tendem a se aproximarem de  $\gamma$ , denotando assim o conjunto  $\omega$ -limite, enquanto as trajetórias que estão por dentro de  $\gamma$  tendem a se afastarem de  $\gamma$ , denotado por conjunto  $\alpha$ -limite.

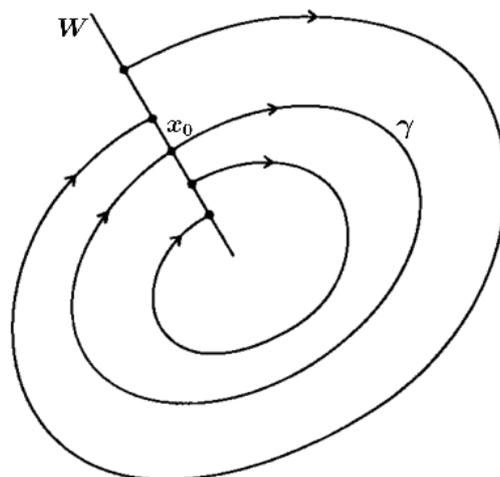


Figura 12: Semi-atratora

## 5 Ciclos Limites em Sistemas Descontínuos por Partes

Nesta seção consideramos sistemas diferenciais planares lineares por partes em duas zonas, com o objetivo de estudar a existência de ciclos limites.

### 5.1 Três Ciclos Limites em Sistemas Descontínuos Por Partes com Duas Zonas no Plano

Vamos considerar o sistema diferencial linear por partes com duas zonas no plano a seguir,

$$X' = \begin{cases} A^- X, & x < 1 \\ A^+ X, & x \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

com

$$A^- = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ \frac{377}{1000} & -\frac{13}{10} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ = \begin{pmatrix} \frac{19}{500} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{19}{500} \end{pmatrix}$$

onde  $X'$  indica a derivada em relação a variável independente  $t$  (tempo). O ponto  $(0,0)$  é um foco virtual instável para  $X' = A^+ X$  e um foco real estável para  $X' = A^- X$ .

**Teorema:** O sistema diferencial linear por partes com duas zonas no plano (1) tem 3 ciclos limites que cercam o seu único ponto de equilíbrio localizado na origem.

#### Análise do Sistema (1)

O fluxo do sistema (1) entra no semiplano  $x > 1$  pela semirreta  $\{(1, y) : y < \frac{1}{5}\}$ , e sai pela semirreta  $\{(1, y) : y > \frac{19}{50}\}$ . Portanto, se o sistema (1) tem um cruzamento de órbitas periódicas este deve estar em torno do segmento  $\{(1, y) : \frac{1}{5} \leq y \leq \frac{19}{50}\}$ , que é chamado de região deslizante.

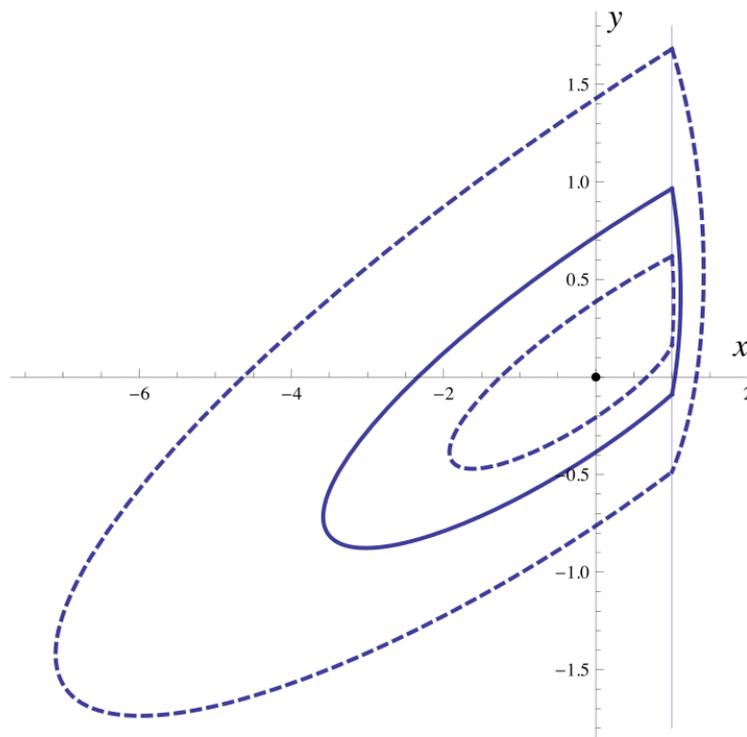


Figura 13: Os três ciclos limites em torno da origem e com estabilidades diferentes. [4]

Para facilitar as expressões nesta análise, iremos fazer uma reescala no tempo para cada zona, ou seja, multiplicar cada matriz por uma constante adequada. Portanto, multiplicaremos 10 para a zona  $x > 1$  e  $\frac{4}{3}$  para a zona  $x < 1$ . Considerando então:

$$A^- = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \\ \frac{377}{750} & -\frac{26}{15} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ = \begin{pmatrix} \frac{19}{50} & -1 \\ 1 & \frac{19}{50} \end{pmatrix}$$

a solução do sistema  $X' = A^+X$  que passa pelo ponto  $(1, \mathbf{y})$  no tempo  $t = 0$  é:

$$x^+(t) = e^{\frac{19t}{50}} (\cos(t) - \mathbf{y} \operatorname{sen}(t))$$

$$y^+(t) = e^{\frac{19t}{50}} (\mathbf{y} \cos(t) + \operatorname{sen}(t))$$

e a solução do sistema  $X' = A^-X$  que passa pelo ponto  $(1, \mathbf{y})$  no tempo  $t = 0$  é:

$$x^-(t) = \frac{1}{15} e^{-\frac{t}{5}} (15 \cos(t) + (23 - 100\mathbf{y}) \operatorname{sen}(t))$$

$$y^-(t) = \frac{1}{750} e^{-\frac{t}{5}} (750\mathbf{y} \cos(t) + (377 - 1150\mathbf{y}) \operatorname{sen}(t))$$

Suponha que pelo ponto  $(1, \mathbf{y})$  com  $\mathbf{y} < \frac{19}{50}$  passa uma solução periódica  $(x^+(t), y^+(t)) \cup (x^-(t), y^-(t))$ . Então, se  $t^+ > 0$  é o menor tempo tal que  $x^+(-t^+) = 1$ , e  $t^- > 0$  é o menor tempo tal que  $x^-(t^-) = 1$ , temos que  $y^+(-t^+) = y^-(t^-) < \frac{1}{5}$ . Logo, uma solução periódica do sistema (1) é caracterizada por uma solução  $(t^+, t^-, \mathbf{y})$  do sistema (2):

$$\begin{aligned} f_1(t^+, t^-, \mathbf{y}) &= x^+(-t^+) - 1 = 0 \\ f_2(t^+, t^-, \mathbf{y}) &= x^-(t^-) - 1 = 0 \\ f_3(t^+, t^-, \mathbf{y}) &= y^+(-t^+) - y^-(t^-) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Devemos mostrar que existem três soluções isoladas  $(t_k^+, t_k^-, \mathbf{y}_k)$ , para  $k = 1, 2, 3$  do sistema (2), que são aproximadamente:

$$\begin{aligned} t_1^+ &= 1.48664\dots, \\ t_1^- &= 3.45108\dots, \\ \mathbf{y}_1 &= 1.68120\dots, \\ t_2^+ &= 0.85668\dots, \\ t_2^- &= 3.78234\dots, \\ \mathbf{y}_2 &= 0.96580\dots, \\ t_3^+ &= 0.39178\dots, \\ t_3^- &= 4.66507\dots, \\ \mathbf{y}_3 &= 0.61885\dots \end{aligned}$$

Estas três soluções vão corresponder as órbitas periódicas isoladas so sistema (1), isto é, aos ciclos limites daquele sistema.

As estabilidades destes ciclos limites podem ser deduzidas através da introdução de uma seção transversal do fluxo, no nosso caso a reta  $x = 1$ , e calculando a derivada no ponto fixo da Aplicação de Poincaré. Denotando por  $\lambda$  este valor, que deve ser positivo, teremos um ciclo limite estável quando  $0 < \lambda < 1$ , e instável quando  $\lambda > 1$ .

Uma expressão para calcular  $\lambda$  é dada por:

$$\lambda_k = \frac{(1 - 5\mathbf{y}_k)(19 - 50y_k)}{(1 - 5y_k)(19 - 50\mathbf{y}_k)} \exp\left(\frac{-2t_k^-}{5} + \frac{19t_k^+}{25}\right)$$

onde  $y_k$  corresponde ao ponto mais baixo de cruzamento da órbita periódica, ou seja,  $y_k = y^+(-t_k^+) = y^-(-t_k^-)$ . Obtemos:

$$\begin{aligned}y_1 &= -0.48606\dots \\y_2 &= -0.08891\dots \\y_3 &= 0.16383\dots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1.11847\dots \\ \lambda_2 &= 0.89617\dots \\ \lambda_3 &= 2.18401\dots\end{aligned}$$

Concluimos assim que, a primeira e a terceira órbita periódica são instáveis, enquanto que a segunda é estável.

Para mostrar a existência das três soluções isoladas do sistema (2) dadas acima, devemos utilizar o Teorema de Newton-Kantorovich.

**Teorema de Newton-Kantorovich:** Dada uma função  $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um convexo  $C_0 \subset C$ , assumamos que  $f$  é  $C_1$  em  $C_0$  e que os seguintes pressupostos valem:

- a)  $|Df(z) - Df(z')| \leq \eta|z - z'|$  para todo  $z, z' \in C_0$ ;
- b)  $|Df(z_0)^{-1}f(z_0)| \leq \alpha$ ;
- c)  $|Df(z_0)^{-1}| \leq \beta$ ,

para algum  $z_0 \in C_0$ . Considere

$$h = \alpha\beta\eta \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2h}}{h}\alpha$$

Se  $h \leq \frac{1}{2}$  e  $\overline{B_r(x_0)} \subset C_0$ , então a sequência  $\{z_k\}$  definida por

$$z_{k+1} = z_k - Df(z_k)^{-1}f(z_k) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

está contida em  $B_{r_1}(z_0)$  e converge para o único zero de  $f(z)$  contido em  $C_0 \cap B_{r_2}(z_0)$ .

A demonstração da existência dos três ciclos limites se encontra na referência [4].

## 5.2 Mais de Três Ciclos Limites em Sistemas Descontínuos Por Partes com Duas Zonas no Plano

Vamos considerar o seguinte sistema:

$$X' = \begin{cases} G^- X, & H(X, p) < 0 \\ G^+ X, & H(X, p) \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $X'$  indica a derivada em relação a variável independente  $t$  (tempo),  $p$  é um vetor de parâmetros,  $X = (x, p)$  e

$$G^\pm = \begin{pmatrix} g_{11}^\pm & g_{12}^\pm \\ g_{21}^\pm & g_{22}^\pm \end{pmatrix} \quad (4)$$

satisfazendo as seguintes condições:

$$H_1) \quad g_{12}^\pm < 0;$$

$$H_2) \quad G^- \text{ tem autovalores complexos com a parte real negativa e } G^+ \text{ tem autovalores complexos com a parte real positiva;}$$

$H_3$ ) A função  $H$  é pelo menos contínua.

O caso que iremos considerar ocorre quando as matrizes  $G^-$  e  $G^+$  são definidas, respectivamente, por

$$A^- = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \\ \frac{377}{750} & -\frac{26}{15} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ = \begin{pmatrix} \frac{19}{50} & -1 \\ 1 & \frac{19}{50} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Vamos agora identificar a função  $H$ . Dado um número inteiro  $m \geq 1$ , considere os conjuntos:

$$\mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_{2m-1}) \in \mathbb{R}^{2m-1}\},$$

$$\mathcal{Y} = \{(y_1, \dots, y_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m} : y_{2j} \neq y_{2j-1}, j = 1, \dots, m\},$$

$$\mathcal{B} = \{(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m : \beta_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, m\}.$$

Para  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $p = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \beta) \in \mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{B}$ , seja  $(X, p) \mapsto H(X, p) = x - h(y, p)$  uma função, onde

$$(y, p) \mapsto h(y, p) = x^1 + \sum_{k=1}^m a_k (v(y - y_{2k-1}) - \beta_k v(y - y_{2k})) \quad (6)$$

com

$$a_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{2k} - y_{2k-1}},$$

para  $k = 1, \dots, m$  e  $s \in \mathbb{R} \mapsto v(s) = su(s)$ ,

$$s \in \mathbb{R} \mapsto u(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases}$$

Uma vez que  $p \in \mathcal{M}$  fixado, nós definimos o conjunto  $L_p = \{X \in \mathbb{R}^2 : H(X, p) = 0\}$ .

Um membro do tipo (3) com função  $H$  definida como anteriormente, será denotada por  $(G^-, G^+, H)_m$ .

**Teorema:** Existem os parâmetros para  $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4, \beta_1, \beta_2) \in \mathcal{M}$  tais que  $(A^-, A^+, H)_2$  tem  $n(p)$ , com  $3 < n(p) \leq 7$ , ciclos limites não deslizantes alinhados na origem. Mais precisamente, para:

a)  $p_4 = (1, 2, 2, 3, 4, y_3, y_4, 0, \beta_2), n(p_4) = 4;$

b)  $p_5 = (1, 2, 2, 3, 4, y_3, y_4, 1, \beta_2), n(p_5) = 5;$

c)  $p_6 = (1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 1, 0), n(p_6) = 6;$

d)  $p_7 = (1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 1, 1), n(p_7) = 7.$

Além disso, o conjunto dos ciclos limites para  $p_j$  é o subconjunto dos ciclos limites para  $p_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, 6$ .

**Análise para  $(A^-, A^+, H)_2$**

Para um  $p \in \mathcal{M}$  fixado e dado a condição inicial  $X_0 = (x_0, y_0) = (h(y_0, p), y_0)$ . As soluções de  $X' = A^- X$  será denotada por

$$(t, X_0) \mapsto X^-(t, X_0) = (x^-(t, X_0), y^-(t, X_0))$$

e para as soluções de  $X' = A^+X$  será denotado por

$$(t, X_0) \mapsto X^+(t, X_0) = (x^-(t, X_0), y^+(t, X_0))$$

Calculando temos:

$$\begin{aligned} x^-(t, X_0) &= \frac{1}{15}e^{-\frac{t}{5}}(15x_0\cos(t) + (23x_0 - 100y_0)\sen(t)) \\ y^-(t, X_0) &= \frac{1}{750}e^{-\frac{t}{5}}(750y_0\cos(t) + (377x_0 - 1150y_0)\sen(t)) \\ x^+(t, X_0) &= e^{\frac{19t}{50}}(x_0\cos(t) - y_0\sen(t)) \\ y^+(t, X_0) &= e^{\frac{19t}{50}}(y_0\cos(t) + x_0\sen(t)) \end{aligned}$$

Temos que a função  $H$  para  $(A^-, A^+, H)_2$  é da seguinte forma para o parâmetro  $p_7$ :

$$H(X, p_7) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } y < 3 \\ x - y + 2, & \text{se } 3 \leq y < 4 \\ x - 2, & \text{se } 4 \leq y < 5 \\ x - y + 3, & \text{se } 5 \leq y < 6 \\ x - 3, & \text{se } y > 6 \end{cases}$$

Além disso, a origem é um foco estável real para  $X' = A^-X$  e um foco instável virtual para  $X' = A^+X$ .

Analisando o conjunto  $L_p$  para  $(A^-, A^+, H)_2$ , podemos determinar as regiões de costura e de deslize, exceto nos pontos onde (6) não é diferenciável. Para  $p_4, p_5, p_6, p_7 \in \mathcal{M}$  a região de deslize é  $S = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{5} < y < \frac{19}{50}\}$  e os outros pontos são do tipo costura.

Portanto, para  $p_4, p_5, p_6, p_7 \in \mathcal{M}$  se  $(A^-, A^+, H)_2$  tem órbitas periódicas não deslizantes, estas devem circular o segmento  $S$ .

Os pontos finais do segmento deslizante são os pontos de tangência do fluxo de  $(A^-, A^+, H)_2$  com  $L_p$  que nos permitem obter o domínio da aplicação de Poincaré. Considere  $X_0 = (x_0, y_0) = (h(y_0, p), y_0)$ , com  $y_0 > \frac{19}{50}$ . Seja  $t^- > 0$  o menor tempo tal que  $X_1 = X^-(t^-, X_0) \in L_p$  e seja  $t^+ > 0$  o menor tempo tal que  $X^+ = (t^+, X_1) \in L_p$ , sendo assim, a aplicação de Poincaré é implicitamente definida por:

$$\begin{aligned} x^-(t^-, X_0) &= h(y^-(t^-, X_0), p) \\ x^+(t^+, X^-(t^-, X_0)) &= h(y^-(t^+, X^-(t^-, X_0)), p) \end{aligned} \tag{7}$$

possibilitando determinar os sete ciclos limites do sistema.

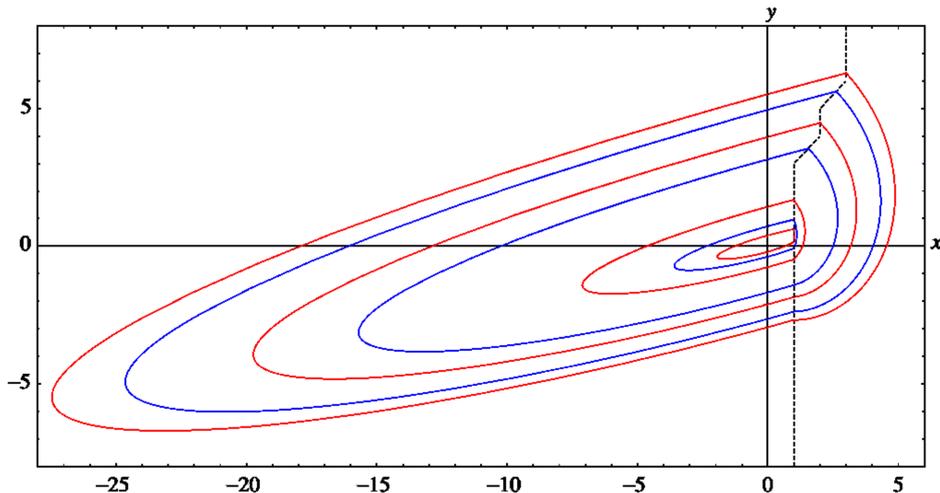


Figura 14: sete ciclos limites de  $(A^-, A^+, H)_2$ . [1]

Devemos mostrar que existem sete soluções isoladas  $P_k = (x_0^k, y_0^k, t_k^-, t_k^+)$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots, 7$  do sistema (7), que são aproximadamente:

$$P_1 = (1, 0.618854, 4.665072, 0.391783)$$

$$P_2 = (1, 0.965799, 3.782341, 0.856683)$$

$$P_3 = (1, 1.681194, 3.451083, 1.486632)$$

$$P_4 = (1.549474, 3.549474, 3.305120, 2.115175)$$

$$P_5 = (2, 4.476594, 3.288089, 2.226178)$$

$$P_6 = (2.621292, 5.621292, 3.277207, 2.307377)$$

$$P_7 = (3, 6.283858, 3.273327, 2.339309)$$

Para mostrar a existência das sete soluções isoladas do sistema (7) dadas acima, devemos utilizar o Teorema de Newton-Kantorovich. A demonstração da existência dos sete ciclos limites se encontra na referência [1].

## 6 Conclusão

Neste projeto estudamos principalmente a existência de ciclos limites em sistemas descontínuos por partes com duas zonas no plano, onde foram analisados dois sistemas. O sistema em que a variedade de descontinuidade é uma reta ainda é um problema em aberto, pois não se sabe se ele possui apenas os três ciclos limites já encontrado ou se possui mais ciclos limites. Já para o sistema em que a variedade de descontinuidade é em formato de escada, temos a prova de que existem  $n$  ciclos limites. A proposta do projeto foi cumprida conforme o planejamento estipulado.

## Referências

- [1] BRAGA.C.D, S. MELLO.F.L, *More Than Three Cycles in Discontinuous Piecewise Differential Systems with Two Zones in the Plane*, International Journal Bifurcation and Chaos, vol. 24, n. 4 (2014) 1450056 (10 pages).
- [2] LLIBRE J., TERUEL A. E, *Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems*, Birkhauser, 2014. 289 p.
- [3] OTÁVIO MARÇAL LEANDRO GOMIDE, *ciclos Limites em Sistemas Dinâmicos Suaves e Não-Suaves*, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2015.
- [4] PONCE.E, LLIBRE.J, *Three Nested Limit Cycles in Discontinuous Piecewise Linear Differential Systems with Two Zones*, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems 19 (2012), 325-335.