

Relatório Científico de Progresso
Iniciação Científica

O Problema do Centro-Foco, Integrais Abelianas e o 16º
Problema de Hilbert

ALUNO: Matheus Manzatto de Castro
ORIENTADOR: Ricardo Miranda Martins
Processo FAPESP: 2016/09269-0

Assinaturas:

Matheus Manzatto de Castro

Matheus Manzatto de Castro

Ricardo Miranda Martins



Sumário

1	Introdução	3
2	Objetivo do Projeto	4
3	Plano de Trabalho	4
4	Problema do Centro-Foco	5
4.1	Preliminares	5
4.2	Integrabilidade de Darboux	13
4.2.1	Curvas Invariantes	13
4.2.2	O método de Darboux	15
4.3	Integrabilidade Liouvilliana	19
4.3.1	Corpos Diferenciais e Extensões Liouvillianas	19
4.3.2	Equação de Ricatti	26
4.4	Simetria	27
4.4.1	Sistema de Liénard	28
4.4.2	Centros das equações polinomiais de Liénard	35
4.5	Sistema de Cherkas	38
4.6	Monodromia	44
4.7	O problema do Centro-Foco tangente	47
5	O 16° Problema de Hilbert	47
5.1	A versão fraca do 16° Problema de Hilbert	48
5.1.1	Estudo da Função Período	67
5.2	Método Baseado nas Equações de Picard-Fuchs	68
5.3	Método do <i>Averaging</i>	73
5.4	16° Problema Fraco de Hilbert com $n = 2$	85
6	Participação em Eventos	85
7	Agradecimentos	85
8	Conclusão	85
9	Referências Bibliográficas	87
A	Teorema de Hartman-Grobman	89

A.1	Definições	89
A.2	Resultados conhecidos	90
A.3	Demonstração do Teorema de Hartman-Grobman	90

1 Introdução

A teoria desenvolvida em volta dos sistemas dinâmicos possui como objetivo estudar sistemas que evoluem com o decorrer de algum parâmetro e uma condição. Sendo assim, uma estrutura interessante para ser estudada por essa teoria são equações diferenciais ordinárias (EDO), uma vez que as soluções de uma EDO evoluem com o decorrer do parâmetro de solução (chamado usualmente de tempo).

Mais especificamente, o alvo de estudo desse projeto são os sistemas de equações diferenciais planares, ou seja, um sistema da forma $\dot{y} = F(y)$, sendo $y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Note que as soluções desse sistema são curvas parametrizadas em \mathbb{R}^2 , portanto há o interesse de saber como essas soluções se organizam e quais suas dinâmicas no plano.

Seja um sistema de equações diferenciais planares

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.0.1)$$

onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ao trabalhar um pouco com esse sistema é possível concluir que os únicos pontos que influenciam de maneira significativa na dinâmica do sistema (1.0.1) são os chamados pontos singulares (conjunto dos pontos z pertencentes a \mathbb{R}^2 tais que $P(z) = Q(z) = 0$) tal conclusão é proveniente da análise do Teorema do Fluxo Tubular.

No caso em que os pontos singulares são um conjunto de pontos isolados, esse problema foi praticamente resolvido. Utilizando o teorema de Hartman-Grobman, é possível concluir que se os pontos singulares do sistema (1.0.1) forem ditos hiperbólicos, i.e, os autovalores do jacobiano do campo vetorial aplicado na singularidade têm parte real diferente de zero, então o sistema é localmente conjugado a seu jacobiano ao redor da singularidade. Sendo assim, é possível reduzir o comportamento de um sistema não-linear para um linear. Uma vez que a teoria está completa para o caso linear o problema em questão está resolvido para o caso hiperbólico.

Porém, quando os autovalores do Jacobiano do campo vetorial aplicados na singularidade são imaginários puros, apenas consegue-se provar que a dinâmica em volta dessas singularidades será um Foco ou um Centro, restando determinar qual destes é o caso, e o problema do Centro-Foco vem justamente tentar responder essa questão.

Além do problema do Centro-Foco, será discutido o 16° problema de Hilbert. Dado um sistema como (1.0.1), porém restringindo P e Q a polinômios de grau n , a segunda parte do 16° Problema de Hilbert nos pergunta qual o número máximo de ciclos limites para cada n correspondente.

Atualmente esse problema está em aberto, porém existe uma versão mais fraca dessa questão na qual o campo vetorial do sistema (1.0.1) é restrito para um campo Hamiltoniano. Nesse caso é possível resolver o impasse fazendo uso da teoria em torno das Integrais Abelianas. O projeto se propõe a demonstrar essa versão mais fraca do 16° Problema de Hilbert.

2 Objetivo do Projeto

O projeto tem como objetivo demonstrar alguns teoremas a respeito do problema do Centro-Foco, abordando tópicos a respeito de: centros, ciclos limites, integrabilidade de Darboux, integrabilidade Liouvilliana, simetria, sistema de Cherkas, monodromia e o problema do centro-foco tangente.

Além de trabalhar de maneira semelhante para o entendimento do 16° Problema de Hilbert, abordando tópicos como: forma fraca do 16° problema de Hilbert, integrais Abelianas e o número estimado de zeros de uma integral Abeliana.

Dessa forma, o projeto ambiciona que o aluno compreenda a importância do problema do centro-foco, tomando como exemplo o caso dos sistemas polinomiais e, além disso, que o mesmo aprenda a relação entre ciclos limites e zeros de integrais Abelianas, principalmente no caso em que estas integrais são funções de Melnikov (método do *Averaging*).

3 Plano de Trabalho

A forma de trabalho no projeto foi o avançar na referência [1] por parte do aluno, sendo que existem hiatos entre os capítulos para consultar referências adicionais, a fim de que haja maior compreensão do capítulo abordado. Na maioria das vezes as referências utilizadas foram [1], [4] e [8].

Semanalmente, o orientador e o aluno fizeram uma reunião com a finalidade de checar a evolução do aluno perante o conteúdo, vendo dessa forma se o progresso obtido estava dentro do esperado, e além disso discutir e sanar as eventuais dúvidas que o aluno teve durante o processo.

Uma vez que o aluno já participou de uma iniciação científica passada com o mesmo orientador, foi estabelecido que não era necessário fazer um estudo de termos básicos da teoria de sistemas dinâmicos pois o orientando já possuía alguma experiência com o assunto.

Sendo assim, foram estudados os tópicos: centros, ciclos limites, integrabilidade de Darboux, integrabilidade Liouvilliana, simetria, sistema de Cherkas, monodromia, problema do centro-foco tangente, integrais Abelianas, ciclos limites, métodos para estimar a quantidade de zeros de uma integral abeliana e tópicos referentes à versão fraca do 16° problema de Hilbert

Tais tópicos foram encontrados e desenvolvidos de acordo com a referência [1], com a finalidade de aumentar o conhecimento e familiaridade do aluno; na questão de Integrabilidade de Darboux foi utilizado amplamente o capítulo 5 da referência [4] e, para o mesmo propósito, porém com um enfoque em curvas algébricas, foi usada a referência [8] e para o melhor entendimento do método do *Averaging* foram estudadas as referências [3] e [15]. Além disso, foram lidos alguns artigos a respeito de temas correlatos com os tópicos citados acima.

4 Problema do Centro-Foco

4.1 Preliminares

Nessa subseção serão definidos e apresentados conceitos da teoria de sistemas dinâmicos e alguns dos teoremas mais importantes. Tais definições têm como base as referências [1], [2] e [9]. Além disso a grande maioria das demonstrações feitas nesse relatório são baseadas nas referências [1], [3] e [4].

Definição 4.1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto não vazio, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Denominam-se equações da forma*

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \text{ onde } y = y(t),$$

de Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem.

Notação 4.1. *Sejam A, B subconjuntos de \mathbb{R}^2 não vazios, e $y : A \rightarrow B$, onde y é derivável no interior de A com relação a t . Neste caso utiliza-se a seguinte notação:*

$$\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}.$$

Definição 4.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $y_i = y_i(t)$ funções contínuas. Denomina-se o sistema de equações da forma*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

de Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

Notação 4.2. *Sejam A_i, B_i subconjuntos de \mathbb{R}^n e seja y um vetor da forma $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, onde $y_i : A_i \rightarrow B_i$ é derivável no interior de A_i com relação a t , para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Nesse caso utiliza-se a seguinte notação:*

$$\dot{y} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right).$$

Definição 4.3. *Seja y um vetor da forma $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $f(y_1, \dots, y_n) = (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n))$. Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\dot{y} = f(y), \tag{4.1.1}$$

caso exista uma n -upla $y^ = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$, satisfazendo $f(y^*) = 0$, y^* é dito um ponto singular relacionado ao sistema (4.1.1).*

Notação 4.3. A solução de um sistema definido como

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y), \\ y(s_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

é denotada como $y(t) = \varphi(t, s_0, x_0)$, i.e. $\varphi : I_{(s_0, x_0)} \rightarrow A$ sendo satisfeitos:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(t, s_0, x_0) = f(t, \varphi(t, s_0, x_0)), \\ \varphi(s_0, s_0, x_0) = x_0. \end{cases}$$

Em especial, $\varphi(t, x_0) := \varphi(t, 0, x_0)$.

Definição 4.4. Dada uma equação diferencial como (4.1.2), o conjunto

$$\gamma(s_0, x_0) := \{y \in A : y = \varphi(t, s_0, x_0) \text{ e } t \in I_{(s_0, x_0)}\},$$

é chamado de órbita da solução $\varphi(t, s_0, x_0)$.

Definição 4.5. Uma órbita é chamada de ciclo limite se for uma órbita periódica isolada.

Definição 4.6. Considere a equação diferencial, ou sistema de equações diferenciais

$$\dot{y} = f(y),$$

onde $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitz em um subconjunto aberto A de \mathbb{R}^n . Suponha que para todo $y \in A$, a solução $\varphi(t, y)$ é definida em todo \mathbb{R} . O fluxo da equação diferencial (4.1.1) é definido como $\Phi : \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo que $\Phi(t, y) = \varphi(t, y)$.

Definição 4.7. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não vazio e $\Phi : \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um fluxo associado a um sistema de equações diferenciais.

Dados os pontos $y_0, y_1 \in A$, o ponto y_0 é chamado de α -limite do ponto y_1 se existe uma sequência $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(s_n, y_1) = y_0$.

Chama-se o ponto y_0 de ω -limite do ponto y_1 se existe uma sequência $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(s_n, y_1) = y_0$.

Definição 4.8. Considere os dois sistemas de equações diferenciais $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$, com $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente Lipschitz definida em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente Lipschitz definida em $V \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\Phi(s, x)$ e $\Psi(s, y)$ os seus respectivos fluxos.

Os fluxos são ditos \mathcal{C}^k -conjugados se existe um difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ (chamado de conjugação), tal que $\Psi(s, h(x)) = h(\Phi(s, x))$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in U$.

Os fluxos são chamados de equivalentes se existe um homeomorfismo crescente $h : U \rightarrow V$ (chamado de equivalência), tal que se γ é uma órbita do primeiro sistema então $h(\gamma)$ é uma órbita do segundo e em adicional h preserva a orientação da órbita.

Definição 4.9. Considere dois fluxos conjugados (respectivamente equivalentes), tais fluxos são chamados de linearmente conjugados (linearmente equivalentes) se existe h um isomorfismo linear satisfazendo as condições da Definição 4.10. Se h for apenas um homeomorfismo, os fluxos são batizados de topologicamente conjugados (topologicamente equivalentes).

Definição 4.10. *Seja F campo vetorial de classe C^r definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação diferencial $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$, S aberto, chama-se seção transversal local se $f'(s)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $F(f(s))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = f(S)$.*

Se $f : S \rightarrow \Sigma$ é homeomorfismo, então Σ é chamado de seção transversal.

Teorema 4.1. *(Teorema de Hartman-Grobman) Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $X : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores de classe C^1 e $x^* \in A$ uma singularidade hiperbólica (autovalores do Jacobiano de X aplicados no ponto x^* com parte real diferente de 0). Então X e $J(x^*)$ são topologicamente equivalentes numa vizinhança de x^* , sendo J o jacobiano do campo X .*

Demonstração. Demonstração feita no Apêndice A. □

Definição 4.11. *Uma função $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função de ordem se é contínua, positiva e o limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ existe.*

Definição 4.12. *Seja $f(t, \varepsilon)$ uma função que tem a imagem sendo \mathbb{R}^n , e seu domínio caracterizado pelos (t, ε) , tais que $\varepsilon \geq 0$ e $t \in I_\varepsilon$, onde I_ε é um intervalo real dependente de ε .*

Interprete a expressão para $\varepsilon \downarrow 0$, como sendo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o enunciado em questão é válido para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Dessa forma os símbolos de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$ e $o(\cdot)$, são definidos por:

1. *É dito que $f(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se existem constantes $\varepsilon_0 > 0$ e $K > 0$ satisfazendo:*

$$\|f(t, \varepsilon)\| \leq K|\delta(\varepsilon)|,$$

$$\forall t \in I_\varepsilon, \text{ e } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

2. *É dito que $\|f(t, \varepsilon)\| = o(\delta(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|f(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} = 0,$$

uniformemente para $t \in I_\varepsilon$. Isto é, para cada $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que, se $t \in I_\varepsilon$ e $0 < \varepsilon < \beta$, então:

$$\frac{\|f(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} < \alpha$$

3. *É dito que $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} \rightarrow 0$$

Nesse relatório sempre será omitida a expressão para $\varepsilon \downarrow 0$, uma vez que as funções de ordem utilizadas sempre estarão definidas para uma vizinhança da origem.

Definição 4.13. $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, é dita analítica em U , se para todo $x \in U$, existe uma vizinhança $U_x \subset U$ de x , tal que

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (y-x)^{(k)}, \quad \forall y \in U_x,$$

onde $f^{(k)}$ é a k -ésima derivada de f e $(y-x)^{(k)} = (y-x, y-x, \dots, y-x)$. De forma que a convergência dessa série é uniforme em U_x .

Teorema 4.2. (Teorema do Fluxo Tubular) Seja F um campo vetorial de classe C^r definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$ ponto regular ($F(p) \neq 0$) e $f : S \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal de F em p ($f(0) = p$), então existe um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta de \mathbb{R}^n centrada na origem, tal que

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$.
2. h é uma C^r -conjugação entre $F|_V$ e o campo constante $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G(t, x) = (1, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $x \in B$.

A demonstração do Teorema 4.2 pode ser encontrada na referência [13].

Teorema 4.3. Seja

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.1.3)$$

um sistema de equações diferenciais planares onde P e Q são de classe C^1 e $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se (x_0, y_0) é uma singularidade não hiperbólica, então a dinâmica do sistema numa vizinhança suficientemente próxima desse ponto configura um centro ou um foco.

Demonstração. Primeiramente note que pode-se supor, sem perda de generalidade, que (x_0, y_0) é igual à origem, uma vez que pode-se fazer a mudança de variáveis $x \mapsto x - x_0$ e $y \mapsto y - y_0$. Sendo assim, considere $x_0 = y_0 = 0$.

Uma vez que P e Q são de classe C^1 , então existem a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ tais que

$$P(x, y) = ax + by + \mathcal{O}(x^2 + y^2),$$

$$Q(x, y) = cx + dy + \mathcal{O}(x^2 + y^2),$$

onde \mathcal{O} é o símbolo de Landau.

Note que o Jacobiano do campo planar na origem é

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

como $(0, 0)$ é uma singularidade não hiperbólica, segue que o polinômio característico de J deve possuir raízes imaginárias puras, sendo assim existe $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que it_0 e $-it_0$ são os autovalores de J . Uma vez que J possui autovalores diferentes, tem-se a garantia

de que J é diagonalizável sobre o espaço vetorial complexo, sendo assim existe $u \in \mathbb{C}^2$ tal que u é autovetor associado ao autovalor it_0 . Note que

$$\begin{aligned}(A - it_0I)u &= 0 \\ \overline{(A - it_0I)u} &= \bar{0} \\ \overline{(A - it_0I)\bar{u}} &= \bar{0} \\ (\bar{A} - \bar{i}t_0\bar{I})\bar{u} &= 0 \\ (A - \bar{i}t_0I)\bar{u} &= 0 \\ (A + it_0I)\bar{u} &= 0.\end{aligned}$$

Logo \bar{u} é autovetor associado ao autovalor $-it_0$. Como $u \in \mathbb{C}^2$, $\exists u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Defina

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Será demonstrado que U é uma matriz invertível. Suponha por redução ao absurdo que U não seja invertível, então suas colunas devem ser linearmente dependentes logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

sendo assim, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + i\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. Por outro lado tem-se que $Ju = it_0u$ e segue que

$$Ju = \begin{bmatrix} (au_1 + bu_2) + i\lambda(au_1 + bu_2) \\ (cu_1 + du_2) + i\lambda(cu_1 + du_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda t_0 u_1 + it_0 u_1 \\ -\lambda t_0 u_2 + it_0 u_2 \end{bmatrix}.$$

comparando as partes reais chega-se a conclusão que $au_1 + bu_2 = -\lambda t_0 u_1$ e $cu_1 + du_2 = -\lambda t_0 u_2$ logo

$$\begin{aligned}J \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= -\lambda t_0 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ (J + \lambda t_0 I) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

sendo assim as únicas possibilidades para λ são $\pm i$, resultando em um absurdo pois $\lambda \in \mathbb{R}$, dessa forma U é uma matriz invertível.

$$\text{Será demonstrado que } J = U \begin{bmatrix} 0 & t_0 \\ -t_0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1}.$$

Uma vez que u é autovalor tem-se que

$$\begin{aligned} Ju &= it_0 u \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{bmatrix} &= it_0 \begin{bmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} (au_1 + bu_2) + i(av_1 + bv_2) \\ (cu_1 + du_2) + i(cv_1 + dv_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -t_0 v_1 + it_0 u_1 \\ -t_0 v_2 + it_0 u_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

consequentemente retira-se as seguintes igualdades

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 = -t_0 v_1, \\ av_1 + bv_2 = t_0 u_1, \\ cu_1 + du_2 = -t_0 v_2, \\ cv_1 + dv_2 = t_0 u_2, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

note que

$$\begin{aligned} JU &= \begin{bmatrix} au_1 + bu_2 & av_1 + bv_2 \\ cu_1 + du_2 & cv_1 + dv_2 \end{bmatrix} \\ \stackrel{(4.1.4)}{\Rightarrow} JU &= \begin{bmatrix} -t_0 v_1 & t_0 u_1 \\ -t_0 v_2 & t_0 u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t_0 \\ -t_0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} 0 & t_0 \\ -t_0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo assim, mostramos que $J = U \begin{bmatrix} 0 & t_0 \\ -t_0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1}$. Fazendo a seguinte mudança de variável no sistema (4.1.3)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{t_0} U^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

consegue-se que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2 + y^2),$$

ou seja, o sistema (4.1.3) é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mathcal{O}(x^2, y^2), \\ \dot{y} = -x + \mathcal{O}(x^2, y^2). \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Passando o sistema (4.1.5) para coordenadas polares, i.e. $x \mapsto r \cos(\theta)$ e $y \mapsto r \sin(\theta)$, obtém-se que

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta), \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r} (\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta)). \end{cases}$$

Sendo assim

$$\begin{cases} \dot{r} = \mathcal{O}(r^2), \\ \dot{\theta} = 1 + \mathcal{O}(r), \end{cases}$$

uma vez que $\dot{\theta} - 1 = \mathcal{O}(r)$, temos pela definição do símbolo de Landau que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|\dot{\theta} - 1| < C|r|$ e tomando $r < \frac{1}{4C}$ temos que a derivada de θ é positiva em todo ponto de $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1/4C\}$. Uma vez que o ângulo θ é estritamente crescente em V , temos que o retrato de fase desse sistema só pode configurar um foco ou um centro.

Como esse sistema foi proveniente de mudanças de variáveis do sistema (4.1.3), a demonstração do teorema se torna concluída. \square

O resultado demonstrado acima é o principal motivo do problema do Centro-Foco existir, uma vez que com a demonstração desse resultado a pergunta natural a ser feita é quais as condições para afirmar se um sistema descrito como no Teorema 4.3 possui um foco ou um centro próximo à singularidade em questão.

Definição 4.14. *Um sistema Hamiltoniano é um sistema da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

onde $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Um campo $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dito Hamiltoniano se o sistema $\dot{y} = X(y)$ é Hamiltoniano.

Lema 4.1. *Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (4.1.6)$$

onde $y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, então as soluções do sistema Hamiltoniano (4.1.6) estão contidas nas curvas de nível de H .

Demonstração. Seja $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ uma solução da equação diferencial (4.1.6), uma vez que γ é solução tem-se que

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{\gamma}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

note que

$$\begin{aligned} \frac{dH(\gamma(t))}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \gamma_1'(t) + \frac{\partial H}{\partial y} \gamma_2'(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, integrando os 2 lados da expressão acima de 0 até t encontra-se que $H(\gamma(t)) = C$, onde C é uma constante de \mathbb{R}^2 , demonstrando o lema. \square

Teorema 4.4. *Seja*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

um sistema de equações diferenciais com singularidades isoladas, onde $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e os autovalores do jacobiano de H aplicados em uma singularidade são ambos diferentes de 0. Então, no retrato de fase do sistema só existem centros ou selas.

Demonstração. Seja y^* um ponto singular do sistema. Como y^* é um ponto isolado, pelos Teoremas 4.1 e 4.3 tem-se que existe uma vizinhança V de y^* tal que a dinâmica em V deve ser um nó, um nó degenerado, um foco, um centro ou uma sela. Suponha por redução ao absurdo que em torno de y^* exista um foco, sem perda de generalidade suponha esse foco estável (se for instável basta tomar o tempo negativo) e considere γ_1 e γ_2 duas órbitas do sistema. Como a dinâmica em V é um foco estável segue que y^* é o ω -limite de todo ponto das órbitas γ_1 e γ_2 .

Dessa forma existem as sequências $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \gamma_1$ e $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \gamma_2$, tais que $s_n \rightarrow y^*$ e $r_n \rightarrow y^*$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pelo Lema 4.1, consegue-se a existência de K_1 e K_2 pertencentes aos reais tais que $H(s_i) = K_1$ e $H(r_i) = K_2$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e utilizando a continuidade de H obtêm-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H(s_n) &= H\left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\right) \\ K_1 &= H(y^*) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H(r_n) &= H\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) \\ K_2 &= H(y^*), \end{aligned}$$

a implicação imediata destes resultados é que $K_1 = K_2$, ou seja, todas as órbitas em V estão na mesma curva de nível.

Uma vez que y^* é uma singularidade isolada, então existe $\rho \in \mathbb{R}$, tal que y^* é a única singularidade do conjunto $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - y^*\| < \rho\}$, porém tome $x_0 \in V \cap V_0$. Existe uma órbita que passa por x_0 , implicando que $H(x_0) = K_1$, como x_0 é um ponto genérico de $V \cap V_0$ consegue-se que todos os pontos estão na mesma curva de nível, implicando que as derivadas parciais de H em x_0 são 0, ocasionando assim um absurdo pois contraria o fato de y^* ser um ponto singular isolado.

Dessa maneira tem-se que o retrato de fase em torno de y^* não pode ser um foco.

Supondo agora que o retrato de fase é um nó ou um nó degenerado a demonstração segue de forma análoga, gerando o mesmo absurdo. Dessa forma conclui-se que a dinâmica do sistema em torno de uma vizinhança de y^* deve ser um centro ou uma sela. \square

4.2 Integrabilidade de Darboux

Nessa subseção será mostrada uma ferramenta muito interessante para descobrir se um sistema como (4.1.3) é um centro ou foco.

Seja X um campo polinomial vetorial

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.2.1)$$

além disso, assuma P, Q polinômios de grau no máximo d . Identifica-se o campo vetorial como a equação diferencial de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Por conta da maneira como foi escrito o campo X em (4.2.1), dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, utiliza-se a seguinte notação

$$X(f) = X \cdot \nabla f = P(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Para essa subseção, sempre que for falado em X , considere o campo (4.2.1) ou o sistema (4.2.2).

4.2.1 Curvas Invariantes

Definição 4.15. *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Se $X(f)/f$ é um polinômio de no máximo grau $d - 1$, dizemos que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante de X e $L_f = X(f)/f$ é seu cofator.*

Proposição 4.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$, com f e g relativamente primos no anel $\mathbb{C}[x, y]$. Então, $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante sobre X (referente a (4.2.1)), se, e somente se, $f = 0$ e $g = 0$ são curvas invariantes algébricas, com cofatores L_f e L_g respectivamente. Mais ainda, $L_{fg} = L_f + L_g$*

Demonstração. Note que

$$X(fg) = g(X(f)) + f(X(g)),$$

assuma que $fg = 0$ é um curva algébrica invariante com cofator L_{fg} . É claro que $X(fg) = L_{fg}fg$, além disso pela relação acima conclui-se que $L_{fg}fg = g(X(f)) + f(X(g))$. Uma vez que f e g são relativamente primos, consegue-se que f divide $X(f)$; de maneira análoga, g divide $X(g)$. Uma vez que $\text{grau}(\partial f/\partial y) \leq \text{grau}(f) - 1$ e $\text{grau}(\partial f/\partial x) \leq \text{grau}(f) - 1$, segue que

$$\text{grau} \left(\frac{X(f)}{f} \right) = \text{grau}(X(f)) - \text{grau}(f) \leq d + \text{grau}(f) - 1 - \text{grau}(f) \leq d - 1.$$

Fazendo o mesmo procedimento para g , conclui-se assim que f e g são curvas algébricas invariantes. Uma vez que $L_f = X(f)/f$ e $L_g = X(g)/g$, obtém-se da relação anterior que $L_{fg} = L_f + L_g$.

A volta do teorema é análoga. \square

Corolário 4.1. *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ e $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$ a fatoração em fatores irredutíveis. Então, para o campo vetorial X , $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $L_f \Leftrightarrow f_i = 0$ é uma curva invariante para cada $i = 1, 2, \dots, r$ com cofator L_{f_i} . Mais ainda, $L_f = n_1 L_{f_1} + \dots + n_r L_{f_r}$.*

Demonstração. Basta aplicar a proposição 4.1 e indução na quantidade de termos da fatoração de f para chegar ao resultado esperado. \square

Definição 4.16. *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. $e = \exp(g/f)$ é chamado de fator exponencial do campo vetorial X de grau d se $X(e)/e$ é um polinômio de grau no máximo $d - 1$. Esse polinômio é chamado de cofator do fator exponencial e , é denotado por L_e . O quociente g/f é denominado coeficiente exponencial de X .*

Proposição 4.2. *Se $e = \exp(g/f)$ é um fator exponencial do campo vetorial X , então f é uma curva algébrica invariante e g satisfaz a equação*

$$X(g) = gL_f + fL_e,$$

onde L_f é o cofator de f .

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} L_e &= \frac{X(e)}{e} \\ \exp(g/f)L_e &= X(\exp(g/f)) \\ \exp(g/f)L_e &= P \frac{\partial(\exp(g/f))}{\partial x} + Q \frac{\partial(\exp(g/f))}{\partial y} \\ f^2 \exp(g/f)L_e &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} f - g \frac{\partial f}{\partial x} \right) P \exp(g/f) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} f - g \frac{\partial f}{\partial y} \right) Q \exp(g/f) \\ f^2 L_e &= fX(g) - gX(f) \\ X(g) &= fL_e + gL_f. \end{aligned}$$

Uma vez que $\text{mdc}(f, g) = 1$, segue da igualdade anterior que g divide $X(g)$, com efeito

$$\text{grau} \left(\frac{X(g)}{X} \right) = \text{grau}(X(g)) - \text{grau}(g) \leq d + \text{grau}(g) - 1 - \text{grau}(g) \leq d - 1,$$

concluindo assim a demonstração da proposição. \square

4.2.2 O método de Darboux

O uso principal das curvas invariantes é a construção de primeiras integrais e fatores integrantes, veremos nessa subseção que a existência de fatores integrantes ou integrais primeiras implica que seu sistema possui um centro mediante ao problema do Centro-Foco.

Definição 4.17. *Seja P/Q uma função racional em x e y , com P e Q coprimos, então o grau de P/Q é o máximo dos graus de P e Q .*

Definição 4.18. *Uma função é dita de Darboux se ela pode ser escrita na forma*

$$e^{g/h} \prod_{i=1}^r f_i^{l_i},$$

onde f_i , g e h são polinômios, l_i são números complexos e $r \in \mathbb{N}$.

Definição 4.19. *Seja U um aberto de \mathbb{C}^2 . Uma função não constante $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de integral primeira do campo vetorial X em U se, e somente se, $X|_U(H) = 0$. Quando H é a restrição de uma função racional (respectivamente Darboux) em U , então H é uma integral primeira racional (Darboux).*

Definição 4.20. *Uma função não nula $R : U \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de fator integrante do campo vetorial X em U se, e somente se, $X(R) = -\operatorname{div} X \cdot R$ em U , onde div é o divergente do campo vetorial.*

Proposição 4.3. *Considere um sistema de equações diferenciais definido como (4.2.2) (porém P, Q não precisam ser polinômios), se o sistema possuir um fator integrante R em U , então toda singularidade de (4.2.2) em U é um centro ou uma sela.*

Demonstração. Uma vez que R é um fator integrante de (4.2.2), tem-se que

$$\begin{aligned} X(R) &= -\operatorname{div} X \cdot R \\ P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} R - \frac{\partial Q}{\partial y} R \\ P \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} R &= -Q \frac{\partial R}{\partial y} - R \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial PR}{\partial x} &= \frac{\partial Q(-R)}{\partial y}, \end{aligned}$$

logo existe uma função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\frac{\partial H}{\partial y} = PR$ e $\frac{\partial H}{\partial x} = -QR$.

Note que as soluções de (4.2.2) estão contidas nas curvas de nível de H . Para ver isso, seja $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ uma solução da equação diferencial (4.2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\gamma(t))) &= \nabla H(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{d\gamma_2}{dt} \\ &= -Q(\gamma(t))R(\gamma(t))P(\gamma(t)) + P(\gamma(t))R(\gamma(t))Q(\gamma(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, integrando $\frac{dH(\gamma)}{dt}(t)$, em t , tem-se que $H(\gamma(t)) = C, \forall t \in \mathbb{R}$, para algum $C \in \mathbb{R}$.

Utilizando os mesmos passos descritos na demonstração do Teorema 4.4, conclui-se que toda singularidade de (4.2.2) em U é um centro ou uma sela. \square

Proposição 4.4. *Considere um sistema de equações diferenciais definido como (4.2.2) (porém P, Q não precisam ser polinômios), se o sistema possuir uma integral primeira H em U , então toda singularidade de (4.2.2) em U é um centro ou uma sela.*

Demonstração. Note que, como H é uma integral primeira, para todo $(x, y) \in U$

$$\begin{aligned} X(H) &= 0 \\ P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} &= 0 \\ (P, Q) \cdot \nabla H &= 0, \end{aligned}$$

segue que (P, Q) é perpendicular a ∇H , implicando que existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ tal que

$$P = \frac{\partial \lambda H}{\partial y}, \quad Q = -\frac{\partial \lambda H}{\partial x},$$

implicando pelo mesmo motivo da demonstração anterior que as singularidades em U são apenas centros ou selas. \square

Corolário 4.2. *Se R é o fator integrante de X em U , então X possui uma integral primeira H em U .*

Demonstração. Como visto na demonstração da Proposição 4.3, existe uma função $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial H}{\partial y} = PR$ e $\frac{\partial H}{\partial x} = -QR$. Note que para $(x, y) \in U$,

$$X(H) = -PQR + QPR = 0,$$

logo H é uma integral primeira. \square

É possível provar também que dada uma integral primeira H de X , existe um fator integrante R tal que R satisfaz:

$$RP = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad RQ = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Proposição 4.5. *Seja X um campo vetorial. Se X admite p curvas algébricas invariantes independentes $f_i = 0$, para $i = 1, \dots, p$ e q fatores exponenciais independentes e_j , para $j = 1, \dots, q$, então ocorrem as seguintes consequências.*

1. *Existem λ_i, ρ_j , não todos zero, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i L_{f_i} + \sum_{j=1}^q \rho_j L_{e_j} = 0$ se, e somente se, a função $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}$ é uma integral primeira do campo vetorial X .*

2. Existem λ_i, ρ_j , não todos zero, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i L_{f_i} + \sum_{j=1}^q \rho_j L_{e_j} = -\operatorname{div}(X)$ se, e somente se, a função $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}$ é um fator integrante do campo vetorial X .

Demonstração. 1) Basta ver que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \lambda_i L_{f_i} + \sum_{j=1}^q \rho_j L_{e_j} = 0 \\ \Leftrightarrow & L_{f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}} + L_{e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}} = 0 \\ \Leftrightarrow & L_{f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q})}{f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}} = 0 \\ \Leftrightarrow & X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}) = 0, \end{aligned}$$

provando assim o item 1).

2) Fazendo as seguintes manipulações algébricas

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \lambda_i L_{f_i} + \sum_{j=1}^q \rho_j L_{e_j} = -\operatorname{div}(X) \\ \Leftrightarrow & L_{f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}} + L_{e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}} = -\operatorname{div}(X) \\ \Leftrightarrow & L_{f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}} = -\operatorname{div}(X) \\ \Leftrightarrow & \frac{X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q})}{f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}} = -\operatorname{div}(X) \\ \Leftrightarrow & X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}) = -\operatorname{div}(X) \cdot (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \dots e_q^{\rho_q}), \end{aligned}$$

prova-se o item 2) e, conseqüentemente, a proposição. \square

Definição 4.21. *Sejam X um espaço vetorial de grau d e $S \subset \mathbb{C}^2$ um conjunto finito de pontos (possivelmente vazio). O espaço de cofatores restritos com respeito a S , Σ_S , é definido por*

$$\Sigma_S = \left(\bigcap_{p \in S} m_p \right) \cap \mathbb{C}_{d-1}[x, y],$$

sendo que m_p é o ideal maximal de $\mathbb{C}[x, y]$ correspondente ao ponto p .

Se S possui s pontos, então a dimensão de Σ_S é dada por

$$\sigma := \dim \mathbb{C}_{d-1}[x, y] - s = \frac{d(d+1)}{2} - s.$$

Teorema 4.5. *Seja X um campo vetorial de grau d . Assuma que X possui p curvas algébricas invariantes distintas $f_i = 0$, $i = 1, \dots, p$, e q fatores exponenciais $e_i = \exp(g_i/h_i)$, $i = 1, \dots, q$ onde cada h_i é igual a f_k para algum k . Suponha, mais ainda, que existem s pontos críticos p_1, \dots, p_s , os quais são independentes com respeito a $\mathbb{C}_{d-1}[x, y]$, e $f_j(p_k) \neq 0$ para $j = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, s$. Então ocorrem:*

1. Se $p + q \geq \sigma + 2$, então X possui uma integral primeira racional.
2. Se $p + q \geq \sigma + 1$, então X possui uma integral primeira de Darboux.
3. Se $p + q \geq \sigma$ e $\text{div}(X)$ se anula nos pontos p_i , então X tem ou uma integral primeira de Darboux ou um fator integrante.

Demonstração. 1) Uma vez que a dimensão de Σ_S é σ segue que existem $\alpha_3, \dots, \alpha_{p+q}$ e $\beta_3, \dots, \beta_{p+q}$ pertencentes aos complexos tais que

$$\begin{cases} L_1 + \alpha_3 L_3 + \dots + \alpha_{p+q} L_{p+q} = 0, \\ L_2 + \beta_3 L_3 + \dots + \beta_{p+q} L_{p+q} = 0, \end{cases}$$

onde

$$L_n = \begin{cases} X(f_n)/f_n, & \text{se } n \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ X(e_{p+q-n+1})/e_{p+q-n+1}, & \text{se } n \in \{p+1, \dots, p+q\}. \end{cases}$$

Segue da Proposição 4.5 que existem funções $M_1 = G_1 G_3^{\alpha_3} \dots G_{p+q}^{\alpha_{p+q}}$ e $M_2 = G_2 G_3^{\beta_3} \dots G_{p+q}^{\beta_{p+q}}$ que formam uma integral primeira, sendo G_i o polinômio definido pela curva algébrica invariante ou pelo fator exponencial cujo cofator é L_i . Dessa forma, tomando os logaritmos de M_1 e M_2 , encontra-se funções H_1 e H_2 tais que

$$H_1 = \ln(G_1 G_3^{\alpha_3} \dots G_{p+q}^{\alpha_{p+q}}) = \ln(G_1) + \alpha_3 \ln(G_3) + \dots + \alpha_{p+q} \ln(G_{p+q})$$

$$H_2 = \ln(G_2 G_3^{\beta_3} \dots G_{p+q}^{\beta_{p+q}}) = \ln(G_2) + \beta_3 \ln(G_3) + \dots + \beta_{p+q} \ln(G_{p+q}),$$

note que H_1 e H_2 são integrais primeiras. De fato,

$$X(H_1) = X\left(\ln\left(G_1 G_3^{\alpha_3} \dots G_{p+q}^{\alpha_{p+q}}\right)\right) = \frac{X(G_1 G_3^{\alpha_3} \dots G_{p+q}^{\alpha_{p+q}})}{G_1 G_3^{\alpha_3} \dots G_{p+q}^{\alpha_{p+q}}} = L_1 + \alpha_3 L_3 + \dots + \alpha_{p+q} L_{p+q} = 0$$

$$X(H_2) = X\left(\ln\left(G_2 G_3^{\beta_3} \dots G_{p+q}^{\beta_{p+q}}\right)\right) = \frac{X(G_2 G_3^{\beta_3} \dots G_{p+q}^{\beta_{p+q}})}{G_2 G_3^{\beta_3} \dots G_{p+q}^{\beta_{p+q}}} = L_2 + \beta_3 L_3 + \dots + \beta_{p+q} L_{p+q} = 0,$$

de cada integral primeira provém um fator integrante R_i tal que

$$R_i P = \frac{\partial H_i}{\partial y},$$

$$R_i Q = -\frac{\partial H_i}{\partial x},$$

obtendo assim

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\partial H_1 / \partial x}{\partial H_2 / \partial x}.$$

Consequentemente, como cada G_l é um polinômio ou uma exponencial de um polinômio quociente, segue que as funções $\partial H_i / \partial x$ são racionais para $i = 1, 2$. Da última igualdade conclui-se que R_1/R_2 é racional e, para acabar a demonstração basta, mostrar que R_1/R_2 é uma integral primeira. De fato:

$$X \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \frac{X(R_1)R_2 - X(R_2)R_1}{R_2^2} = \frac{-\operatorname{div}(X)R_1R_2 + \operatorname{div}(X)R_1R_2}{R_2^2} = 0,$$

concluindo assim a demonstração de 1).

2) De maneira análoga, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+q} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_{p+q} L_{p+q} = 0,$$

onde

$$L_n = \begin{cases} X(f_n)/f_n, & \text{se } n \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ X(e_{p+q-n+1})/e_{p+q-n+1}, & \text{se } n \in \{p+1, \dots, p+q\}, \end{cases}$$

Então, aplicando a Proposição 4.5, tem-se que existe uma integral primeira de Darboux, pois cada f_i é um polinômio e cada e_i uma exponencial de função racional.

3) Se o conjunto $\{L_1, \dots, L_{p+q}\}$ for linearmente dependente, repetindo a demonstração anterior conclui-se que o sistema possui uma integral primeira de Darboux. Caso $\{L_1, \dots, L_{p+q}\}$ seja linearmente independente, então $\{L_1, \dots, L_{p+q}, -\operatorname{div}(X)\}$ são linearmente dependentes, dessa forma existem $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_{p+q} L_{p+q} = -\operatorname{div}(X),$$

onde

$$L_n = \begin{cases} X(f_n)/f_n, & \text{se } n \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ X(e_{p+q-n+1})/e_{p+q-n+1}, & \text{se } n \in \{p+1, \dots, p+q\}. \end{cases}$$

Utilizando a Proposição 4.5, conclui-se que existe um fator integrante. Termina-se assim a demonstração. \square

4.3 Integrabilidade Liouvilliana

Com os resultados anteriores foi possível ver que uma maneira de tentar resolver o problema do Centro-Foco é tentar descobrir se seu sistema possui uma integral primeira ou um fator integrante.

Encontrar tais fatores integrantes e integrais primeiras é um trabalho difícil, porém existe um resultado que auxilia na busca. Nesta subseção será exposto que é possível mostrar que o sistema (4.2.1) tem uma integral primeira em uma extensão do corpo $\mathbb{C}(x, y)$ se, e somente se, seu sistema possui uma integral primeira de Darboux.

4.3.1 Corpos Diferenciais e Extensões Liouvillianas

Neste capítulo sempre será assumido que os corpos são de característica 0.

Definição 4.22. *Sejam K um corpo e Δ um conjunto não vazio de operadores, chamados derivadores, tal que se $\delta \in \Delta$, então*

$$\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y), \quad \delta(xy) = y\delta(x) + x\delta(y), \quad \forall x, y \in K$$

chama-se o par (K, Δ) de corpo diferencial.

Definição 4.23. Uma extensão $(K, \Delta) \subset (K', \Delta')$ é chamada de extensão diferencial de corpos se forem satisfeitas: $K \subset K'$ e $\delta' \in \Delta'$ implica que $\delta'|_K \in \Delta$.

Pelo fato de existir essa compatibilidade dos conjuntos dos derivadores pode-se deixar de lado a notação (K, Δ) e utilizar apenas K , usando Δ apenas quando necessário.

Definição 4.24. Uma extensão de corpos diferenciais $k \subset K$ é chamada de Liouvilliana se pode ser escrita como uma torre de extensões diferenciais

$$k = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K,$$

sendo que para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, uma das seguintes condições é satisfeita:

1. K_{i+1} é uma extensão finita algébrica de K_i .
2. $K_{i+1} = K_i(t)$ para algum t tal que $\delta t/t \in K_i$, para todo $\delta \in \Delta$.
3. $K_{i+1} = K_i(t)$ para algum t tal que $\delta t \in K_i$, para todo $\delta \in \Delta$.

A fim de tentar conseguir propriedades novas para o sistema (4.2.2), as extensões feitas sempre começarão no corpo $K_0 = \mathbb{C}[x, y]$ e o conjunto de derivadores será $\Delta = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$.

Definição 4.25. O sistema (4.2.2) possui uma integral primeira Liouvilliana se existe uma função ϕ em alguma extensão de $\mathbb{C}(x, y)$ tal que $X(\phi) = 0$, onde X é o campo (4.2.1), e tal que $\partial\phi/\partial x$ ou $\partial\phi/\partial y$ são não nulos.

Proposição 4.6. Se o sistema (4.2.2) possuir uma integral primeira de Liouville, então ele possui um fator integrante da forma

$$\exp\left(-\int U dx + V dy\right), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

Onde U e V são funções racionais.

Demonstração. Assuma sem perda de generalidade que $\text{mdc}(P, Q) = 1$. Por hipótese, existe ϕ em alguma extensão de corpos Liouvilliana K de $\mathbb{C}(x, y)$ com $X(\phi) = 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{Q}{-P} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= h \frac{\partial \phi}{\partial x} = Q, \quad h \frac{\partial \phi}{\partial y} = -P, \end{aligned}$$

para algum $h \in K$. Sendo assim, define-se

$$A = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad B = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y},$$

logo, tem-se $A, B \in K$ satisfazendo

$$PA + QB = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (4.3.1)$$

com efeito

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + h \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \\ &= P \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= PA + QB. \end{aligned}$$

Será mostrado que, se a equação acima é satisfeita por A e B em K_{i+1} , então ela é satisfeita em K_i . A conclusão da proposição segue diretamente no caso $i = 0$, colocando apenas $U = A$ e $V = B$.

Para o caso geral será considerado cada tipo de expansão (referente à Definição 4.24) separadamente, sendo que para os tipos 2 e 3 pode-se assumir sem perda de generalidade que as extensões são transcendentais, caso não sejam a demonstração é igual para as extensões do tipo 1.

Extensões do tipo 1:

Sejam \tilde{K}_{i+1} o fecho normal de K_{i+1} , Σ o conjunto dos automorfismos de K_{i+1} fixando K_i e N igual à cardinalidade do conjunto Σ (sabe-se da teoria de corpos que neste caso esse valor sempre será finito). Uma vez que $\sigma(k) = k, \forall \sigma \in \Sigma$ e $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \in K_i$, tem-se que

$$P \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(A) + Q \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(B) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(PA + QB) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = N \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial \sigma(A)}{\partial y} = \frac{\partial \sigma(B)}{\partial x}$$

para todo σ em Σ . Sendo assim, define-se

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(A), \quad \bar{B} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(B),$$

obtendo dessa forma as seguintes igualdades,

$$P\bar{A} + Q\bar{B} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial x},$$

Perceba agora que \bar{A} e $\bar{B} \in K_i$. Para mostrar que $\bar{A} \in K_i$, basta provar que $\sigma(\bar{A}) = \bar{A}$, para todo $\sigma \in \Sigma$, sendo assim

$$\sigma(\bar{A}) = \sigma \left(\frac{1}{N} \sum_{\varphi \in \Sigma} \varphi(A) \right) = \frac{1}{N} \sum_{\varphi \in \Sigma} \sigma \circ \varphi(A) = \frac{1}{N} \sum_{\psi \in \Sigma} \psi(A) = \bar{A}$$

a passagem da terceira igualdade ocorre, pois, como Σ é grupo, para todo $\psi \in \Sigma$, tem-se $\sigma^{-1} \circ \psi \in \Sigma$, logo $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \psi = \psi$, esse resultado aliado à finitude do grupo justificam a passagem. Implicando $\bar{A} \in K_i$ e analogamente, tem-se que $\bar{B} \in K_i$.

Extensões do tipo 2:

Para este caso assuma que $K_{i+1}(t) = K_i(t)$ com t um elemento transcendental de K_i , e $\delta t/t \in K_i$ sendo $\delta \in \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$.

Tem-se que $A = a(t)$ e $B = b(t)$, sendo a e b funções racionais com coeficientes em K_i . Como t é transcendental, pode-se expandir $a(t)$ e $b(t)$ formalmente como série de Laurent com respeito a t . Sendo assim

$$a(t) = \bar{A} + \sum_{i \neq 0} a_i t^i, \quad b(t) = \bar{B} + \sum_{i \neq 0} b_i t^i$$

onde \bar{A}, \bar{B}, a_i e $b_i \in K_i$. Derivando A em y e B em x , consegue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\partial a(t)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} + \sum_{i \neq 0} \left(\frac{\partial a_i}{\partial y} + i a_i p \right) t^i, \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial b(t)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} + \sum_{i \neq 0} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x} + i b_i q \right) t^i, \end{aligned}$$

sendo que $p, q \in K_i$, satisfazendo

$$p = \frac{1}{t} \frac{\partial t}{\partial y}, \quad q = \frac{1}{t} \frac{\partial t}{\partial x},$$

cuja existência é justificada pelo tipo de extensão utilizada. Substituindo $A = a(t)$ e $B = b(t)$ nas respectivas séries de Laurent nas duas igualdades de (4.3.1), e comparando os termos com potência t^0 , tem-se que

$$P\bar{A} + Q\bar{B} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial x}.$$

Extensões do tipo 3:

Para este caso está sendo assumido $K_{i+1}(t) = K_i(t)$ com t um elemento transcendental de K_i , e $\delta t \in K_i$, além de $\delta \in \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$.

Tome $A = a(t)$ e $B = b(t)$ e novamente, consegue-se expandindo A e B como série de Laurent em t

$$A = a(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i,$$

$$B = b(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i t^i,$$

onde $a_i, b_i \in K_i$, derivando A em y e B em x tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\partial a(t)}{\partial y} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial a_{i-1}}{\partial y} + i a_i p \right) t^{i-1}, \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial b(t)}{\partial x} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial b_{i-1}}{\partial x} + i b_i q \right) t^{i-1}, \end{aligned}$$

onde $p, q \in K_i$, satisfazendo

$$p = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad e \quad q = \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Substituindo as expansões de $A = a(t)$ e $B = b(t)$ nas duas igualdades de (4.3.1), e comparando os termos com coeficiente t^{-1} , tem-se que

$$\frac{\partial a_{-1}}{\partial y} = \frac{\partial b_{-1}}{\partial x}, \quad P a_{-1} + Q b_{-1} = 0,$$

sendo assim,

$$\frac{a_{-1}}{b_{-1}} = \frac{-Q}{P}.$$

Logo, existe $h \in K_i$ tal que

$$a_{-1} h = -Q, \quad b_{-1} h = P.$$

Definindo $\bar{A} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}$ e $\bar{B} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y}$, tem-se que

$$\begin{aligned} P \bar{A} + Q \bar{B} &= P \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= -a_{-1} \frac{\partial h}{\partial x} + b_{-1} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= -a_{-1} \frac{\partial h}{\partial x} + h \left(-\frac{\partial a_{-1}}{\partial y} + \frac{\partial b_{-1}}{\partial x} \right) + b_{-1} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= - \left(a_{-1} \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial a_{-1}}{\partial y} \right) + \left(b_{-1} \frac{\partial h}{\partial y} - h \frac{\partial b_{-1}}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial(h a_{-1})}{\partial x} + \frac{\partial(h b_{-1})}{\partial y} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \end{aligned}$$

e é evidente que $\frac{\partial \bar{A}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial x}$.

Implicando que para os 3 tipos de extensões acima $\exp(-\int \bar{A}dx + \bar{V}dy)$ é fator integrante. Pois verifica-se a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} P \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp \left(- \int \bar{A}dx + \bar{B}dy \right) \right) + Q \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp \left(- \int \bar{A}dx + \bar{B}dy \right) \right) &= \\ = -(PA + QB) \exp \left(- \int \bar{A}dx + \bar{B}dy \right) &= - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \exp \left(- \int \bar{A}dx + \bar{B}dy \right). \end{aligned}$$

Conseqüentemente pode-se repetir o passo indutivo descrito acima para encontrar soluções de $U, V \in K_0$, satisfazendo as propriedades requeridas. □

Proposição 4.7. *Se o sistema (4.2.2) tem um fator integrante da forma*

$$\exp \left(- \int Udx + Vdy \right), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

onde U e V são funções racionais de x e y , então existe um fator integrante da forma

$$\exp(g/f) \prod f_i^{l_i},$$

onde f_i , f e g são polinômios em x e y .

Demonstração. Como $U, V \in \mathcal{C}(x, y)$, seus numeradores e denominadores podem ser visto como polinômios em x com coeficientes em $\mathbb{C}(y)$.

Seja K uma extensão algébrica de $\mathbb{C}(y)$, o qual é um corpo de decomposição dos numeradores e denominadores de U e V , considerados como polinômios de x sobre $\mathbb{C}(y)$. Reescrevendo U e V em função de suas frações parciais

$$U = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(x - \beta_i)^j} + \sum_{i=0}^N \gamma_i x^i, \quad V = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\bar{\alpha}_{i,j}}{(x - \bar{\beta}_i)^j} + \sum_{i=0}^N \bar{\gamma}_i x^i,$$

onde $\alpha_{i,j}$, $\bar{\alpha}_{i,j}$, β_i , $\bar{\beta}_i$, γ_i e $\bar{\gamma}_i$ são elementos de K . Além disso $\alpha_{i,j}$, $\bar{\alpha}_{i,j}$, β_i , $\bar{\beta}_i$, γ_i e $\bar{\gamma}_i$ são 0 para todos os valores que não estão definidos previamente pela expansão em frações parciais.

Aplicando a condição que $U_y = V_x$, tem-se que

$$\begin{aligned} U_y &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\alpha'_{i,j}}{(x - \beta_i)^j} + \frac{j\beta_i \alpha_{i,j}}{(x - \beta_i)^{j+1}} \right) + \sum_{i=0}^N \gamma'_i x^i \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\alpha'_{i,j}}{(x - \beta_i)^j} + \frac{j\beta'_i \alpha_{i,j}}{(x - \beta_i)^{j+1}} \right) + \sum_{i=0}^N \gamma'_i x^i \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{n_i} \frac{\alpha'_{i,j+1} + j\beta'_i \alpha_{i,j}}{(x - \beta_i)^{j+1}} + \sum_{i=0}^N \gamma'_i x^i, \end{aligned}$$

e

$$V_x = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \frac{-j\bar{\alpha}_{i,j}}{(x - \beta_i)^{j+1}} + \sum_{i=0}^N i\bar{\gamma}_i x^{i-1},$$

comparando os termos das séries e usando a unicidade da expansão em frações parciais, pode-se concluir que

$$\gamma'_i = \bar{\gamma}_{i+1}(i+1), \quad \alpha'_{i,j+1} + j\beta'_j \alpha_{i,j} + j\bar{\alpha}_{i,j} = 0, \quad (4.3.2)$$

em particular $\alpha_{i,1} = 0$.

Considere a seguinte função ϕ

$$\phi(x, y) = \sum_i \alpha_{i,1} \log(x - \beta_i) + \sum_{i,j,j>1} \frac{\alpha_{i,j}}{(x - \beta_i)^{j-1}} \left(\frac{-1}{j-1} \right) + \sum_i \frac{\gamma_i x^{i+1}}{i+1} + \int \bar{\gamma}_0 dy,$$

será mostrado que ϕ é a integral $\int U dx + V dy$. Fazendo os cálculos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_i \alpha_i 1 \frac{-\beta'_i}{x - \beta_i} + \sum_{i,j,j>1} \frac{-1}{j-1} \left(\frac{\alpha'_{ij}}{(x - \beta_i)^{j-1}} - \frac{(j-1)\alpha_{ij}}{(x - \beta_i)^j} \right) + \sum_i \frac{\gamma'_i x^{i+1}}{i+1}.$$

Utilizando (4.3.2) tem-se que $\frac{\partial \phi}{\partial y} = V$. Fazendo o processo análogo para $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, tem-se que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = U$.

O que implica que $\phi(x, y) = \int U dx + V dy$.

Seja Σ o grupo dos automorfismos de K fixando $\mathbb{C}(y)$, e seja N igual à cardinalidade de Σ . Defina

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\phi),$$

note que

$$\sigma(\alpha_{i,1}(\ln(x - \beta_i))) = \alpha_{i,1} \ln(x - \sigma(\beta_i)),$$

e

$$\sigma \left(\int \bar{\gamma}_0 dy \right) = \int \sigma(\bar{\gamma}_0) dy,$$

uma vez que σ preserva a estrutura algébrica de K , obtêm-se a primeira expressão apenas abrindo \ln em série de Taylor e após isso aplicando σ , e a segunda através da escrita de $\int \bar{\gamma}_0 dy$ como soma de Riemann e, após isso, aplicando σ no somatório.

Mais ainda, note que uma vez que σ fixa os elementos de $\mathbb{C}(x, y)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) &= \sigma(V) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\sigma(\phi)) = \sigma(V) = V, \\ \sigma \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) &= \sigma(U) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(\phi)) = \sigma(U) = U, \end{aligned}$$

consequentemente

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = V, \text{ e } \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = U,$$

sendo que $\bar{\phi}$ pode ser escrito por,

$$\bar{\phi} = \sum l_i \ln(R_i(x, y)) + R(x, y) + \int S(y) dy,$$

onde R_i , R e S são funções racionais. Pode-se avaliar o último termo via expansão de S em frações parciais como

$$\int S(y) dy = \sum \alpha_i \ln(S_i(y)) + S_0(y),$$

onde S_i é um polinômio em y e $S_0 \in \mathbb{C}(y)$. Tomando a exponencial de $-\phi$ consegue-se o fator integrante desejado

$$\exp(-\bar{\phi}) = \exp(-R(x, y) - S_0(y)) \prod_i R_i^{-l_i}(x, y) \prod_j S_j^{-k_j}(y).$$

Demonstrando assim o teorema. □

Teorema 4.6. (Teorema de Singer) *O sistema (4.2.2) possui uma integral primeira Liouvillianiana se, e somente se, tem um fator integrante de Darboux.*

Demonstração. (\Leftarrow) A volta do teorema é trivial, uma vez que se D é nosso fator integrante de Darboux, então $\delta D/D$ é uma função racional, sendo assim pode-se adicionar D ao nosso corpo por uma extensão do tipo 2 (referente à Definição 4.24).

(\Rightarrow) Segue imediatamente das proposições 4.6 e 4.7. □

4.3.2 Equação de Ricatti

Como mencionado anteriormente, pode-se utilizar os fatores integrantes e integrais primeiras para garantir que seu sistema configura um centro. Será mostrado agora um exemplo não trivial. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x), \\ \dot{y} = -\lambda y + d_1 x^2 + d_2 xy + y^2, \end{cases} \quad (4.3.3)$$

sendo $\lambda > 0$ tal que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

É possível verificar que (4.3.1) possui a seguinte integral primeira

$$\phi = x^\lambda \frac{(y - \alpha x)F_1(x) + x(1 - x)F_1'(x)}{(\lambda - y + (\alpha - \lambda)x)F_2(x) - x(1 - x)F_2'(x)}, \quad (4.3.4)$$

onde $F_1(x) = F(a, b; c; x)$ e $F_2(x) = F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; x)$, sendo que $F(a, b; c; x)$ é uma função hipergeométrica de Gauss:

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n,$$

com

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)\dots(a+n-1), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$

e similarmente para $(b)_n$ e $(c)_n$. Além disso, α é definido como a raiz de $\alpha^2 - (\lambda - d_2)\alpha + d_1 = 0$, $c = \lambda + 1$ e a e b como raízes de $A^2 - (1 + 2\alpha + d_2)A + \alpha(\lambda + 1) = 0$.

Consequentemente, se o sistema (4.3.1) possuir uma singularidade não hiperbólica a dinâmica em torno dessa singularidade deve ser um centro.

4.4 Simetria

Uma ideia natural para tentar distinguir quais sistemas possuem centro e quais possuem foco seria analisar se a região em torno da singularidade em questão possui algum tipo de simetria em seu retrato de fase. Caso haja a confirmação de tal fato, temos a garantia de que a dinâmica próxima a essa singularidade será caracterizada por um centro.

A fim de entender melhor como funcionaria esse tipo de artifício, será definido o conceito de campo reversível e sua aplicação no sistema de Liénard.

Definição 4.26. *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^∞ . ϕ é chamada de involução se $\phi^2 = Id$.*

Definição 4.27. *Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial e $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma involução com $\dim \text{Fix}(\phi) = 1$. Se*

$$D\phi(x)X(x) = -X(\phi(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$, X é chamado de ϕ -reversível. Onde $\dim \text{Fix}(\phi)$ é a dimensão do subespaço vetorial formado pelos pontos fixos de ϕ e $D\phi(x)$ é o Jacobiano de ϕ aplicado em x , se existir uma involução linear $R : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ com $\dim \text{Fix}(R) = 1$, satisfazendo

$$R(X(x)) = -X(R(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$, então X é nomeado de reversível.

Proposição 4.8. *Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma solução de (4.2.2) que passa pelo ponto p . Se o campo vetorial de (4.2.2) for reversível, tem-se que $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(t) = R(\gamma(-t))$ também é solução de (4.2.2) e passa por $R(p)$.*

Demonstração. Considere $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ e $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Além disso veja que

$$\begin{aligned} X(\alpha(t)) &= X(R(\gamma(-t))) \\ &= -R(X(\gamma(-t))) \\ &= -R\left(\frac{d\gamma}{dt}(-t)\right) \\ &= \frac{d\alpha}{dt}(t), \end{aligned}$$

logo α é solução de (4.2.2) e, com efeito, se $\gamma(t_0) = p$, segue que $\alpha(-t_0) = R(\gamma(t_0)) = R(p)$, concluindo assim a demonstração. \square

Seja $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma involução linear tal que $\dim \text{Fix}(R) = 1$. Note que tem-se como corolário da proposição 7 que, se uma órbita γ possui 2 pontos pertencentes a $\text{Fix}(R)$, γ deve necessariamente ser uma órbita periódica.

Com efeito, tem-se que o sistema (4.2.2) tem simetria com respeito ao eixo x se forem satisfeitas as seguintes igualdades para a involução $R(x, y) = (x, -y)$:

$$\begin{aligned} R(X(x, y)) &= -X(R(x, y)) \\ \begin{bmatrix} P(x, y) \\ -Q(x, y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P(x, -y) \\ -Q(x, -y) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P(x, -y) \\ Q(x, -y) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

analogamente, o sistema (4.2.2) terá simetria no eixo y caso sejam satisfeitas as igualdades para $R(x, y) = (-x, y)$:

$$\begin{aligned} R(X(x, y)) &= -X(R(x, y)) \\ \begin{bmatrix} -P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P(-x, y) \\ -Q(-x, y) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P(-x, y) \\ -Q(-x, y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.1. *É facilmente verificado que o sistema de Kukle,*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3. \end{cases}$$

tem simetria no eixo x se $a_2 = a_5 = a_7 = 0$, e simetria no eixo y se $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0$.

4.4.1 Sistema de Liénard

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - yf(x), \end{cases} \quad (4.4.1)$$

onde f e g são polinômios em x . Note que o sistema (4.4.1) provém da EDO de segunda ordem

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (4.4.2)$$

o qual generaliza a equação do oscilador de Van de Pol.

Notoriamente, as singularidades de (4.4.1) devem pertencer ao eixo x . Sem perda de generalidade, pode-se assumir que existe a origem é uma singularidade de (4.4.1), caso

não seja essa condição é contornada fazendo uma mudança de variável conveniente (uma simples translação no eixo x).

Além disso, como o interesse desse projeto é o estudo do Centro-Foco, precisa-se impor condições a f, g para que exista um foco ou um centro não degenerado na origem.

Seja $J(x, y)$ o Jacobiano do campo relacionado ao sistema (4.4.1), sendo assim tem-se que

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x) - yf'(x) & -f(x) \end{bmatrix}$$

aplicando $(0,0)$ em $J(x, y)$,

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -f(0) \end{bmatrix}$$

dessa forma o polinômio característico de $J(0, 0)$ é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda f(0) + g'(0)$, sendo assim, para que as soluções do polinômio característico não pertençam aos reais é necessário fazer as restrições $g'(0) > 0$ e $f(0)^2 < 4g'(0)$.

Para entender melhor o comportamento de (4.4.2), será feita uma série de mudanças de variáveis a fim de tentar encontrar alguma simetria em tal sistema.

Denote F e G por

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi, \quad G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi.$$

Fazendo a mudança de variável $y \mapsto y + F(x)$ encontra-se (será mudado o sistema de y para w para que não haja confusão nos cálculos).

$$\begin{aligned} w &= y + F(x) \\ \Rightarrow \dot{w} &= \dot{y} + f(x) \end{aligned}$$

e além disso, $y = w - F(x)$.

Sendo assim, o sistema (4.4.2) fica na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = w - F(x), \\ \dot{w} = -g(x). \end{cases} \quad (4.4.3)$$

É importante perceber que se o sistema (4.4.3) possuir um centro em torno de $(0, 0)$, então o sistema (4.4.1) também possui um centro em torno da origem. Com efeito, se $(x(t), w(t))$ é solução periódica de (4.4.1) com condição inicial $(x(0), w(0)) = (x_0, w_0)$ próxima a $(0, 0)$, é evidente que apenas por meio da mudança de variáveis, tem-se que $\gamma(t) = (x(t), w(t) - F(x(t)))$ é solução de (4.4.2), como $x(t)$ e $w(t)$ são periódicas então $\gamma(t)$ também é periódica. Mais ainda, $\gamma(0) = (x(0), w(0) - F(x(0))) = (x_0, w_0 - F(x_0))$. Note que a função $h(x, w) = (x, w - F(x))$ satisfaz $h(0, 0) = (0, 0)$, e

$$\det(h'(0, 0)) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -f(0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \neq 0,$$

utilizando o Teorema da Função Inversa tem-se que $h(x, w)$ é um difeomorfismo entre duas vizinhanças de $(0, 0)$, mostrando que se existe um centro na origem de (4.4.3), então ele também existe perante o sistema (4.4.1).

Será feita agora uma transformação mais efetiva, a fim de retirar $-g(x)$ do segundo termo. Devido às condições impostas em g , é claro que a seguinte função u é bem definida, analítica e invertível numa vizinhança suficientemente próxima da origem:

$$u(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{2G(x)}$$

Fazendo a mudança de variável $x \mapsto u(x)$, consegue-se que (utilizaremos o mesmo artifício, porém agora trocando x por z)

$$\begin{aligned} z &= u(x) \\ \Rightarrow u^{-1}(z) &= x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{d}{dt}u(x) \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sgn}(x)\sqrt{2G(x)}\right) \\ \dot{z} &= \operatorname{sgn}(x)\dot{x}G'(x)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2G(x)}} \\ \dot{z} &= \operatorname{sgn}(x)\dot{x}g(x)\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{G(x)}} \\ \dot{z} &= \dot{x}g(x)\frac{1}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{2G(x)}} \\ \dot{z} &= (w - F(x))g(x)\frac{1}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{2G(x)}} \\ \Rightarrow \dot{z} &= (w - F(u^{-1}(z)))\frac{g(u^{-1}(z))}{z}, \end{aligned}$$

sendo assim, o sistema (4.4.3) fica da forma

$$\begin{cases} \dot{z} = (w - F(u^{-1}(z)))\frac{g(u^{-1}(z))}{z}, \\ \dot{w} = -g(u^{-1}(z)). \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Porém, note que, como $g(u^{-1}(z))$ é analítica numa vizinhança da origem, pode-se fazer a expansão em série de Taylor.

$$\begin{aligned}
g(u^{-1}(z)) &= g(u^{-1}(0)) + \left((g \circ u^{-1})'(0) \right) z + \mathcal{O}(z^2) \\
&= g(0) + \left((u^{-1})'(0) g'(u^{-1}(0)) \right) z + \mathcal{O}(z^2) \\
&= g(0) + \left(\frac{1}{u'(u^{-1}(0))} g'(u^{-1}(0)) \right) z + \mathcal{O}(z^2) \\
&= \left(\frac{1}{u'(0)} g'(0) \right) z + \mathcal{O}(z^2).
\end{aligned}$$

Uma vez que $g(x)$ é um polinômio que se anula na origem, segue que $g(x) = g'(0)x + \frac{g''(x)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.

Note que, como a derivada de u existe e é contínua, pois u é analítica, calculando a derivada de u no ponto 0,

$$\begin{aligned}
u'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} u'(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{(2G(x))^{1/2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(0)x + (g''(0)/2)x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{(g'(0)x^2 + (2g''(0)/3)x^3 + \mathcal{O}(x^4))^{1/2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(0)x + (g''(0)/2)x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{(g'(0)x^2 + (2g''(0)/3)x^3 + \mathcal{O}(x^4))^{1/2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(0)}{\sqrt{g'(0)}} \frac{1 + (g''(0)/2g(0))x + \mathcal{O}(x^2)}{(1 + (2g''(0)/3g'(0))x + \mathcal{O}(x^2))^{1/2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(0)}{\sqrt{g'(0)}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + (g''(0)/2g(0))x + \mathcal{O}(x^2)}{(1 + (2g''(0)/3g'(0))x + \mathcal{O}(x^2))^{1/2}} \\
&= \sqrt{g'(0)}.
\end{aligned}$$

Conclui-se dessa forma que

$$\begin{aligned}
g(u^{-1}(z)) &= \sqrt{g'(0)}z + \mathcal{O}(z^2) \\
\Rightarrow \frac{g(u^{-1}(z))}{z} &= \sqrt{g'(0)} + \mathcal{O}(z).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{g(u^{-1}(z))}{z}$ é uma função contínua, existe uma vizinhança de 0 contida em \mathbb{R} em torno da origem tal que $\frac{g(u^{-1}(z))}{z} > 0$.

Novamente perceba que se for concluído que (4.4.4) possui um centro na origem, então o sistema (4.4.3) também possuirá. Para ver isso, seja $(z(t), w(t))$ uma solução periódica de (4.4.4) com condição inicial (z_0, w_0) próximo a origem, pela mudança de variáveis imposta $\gamma(t) = (u^{-1}(z(t)), w(t))$ resolve (4.4.3) e claramente é periódica. Por outro lado, $\gamma(0) = (u^{-1}(z_0), w_0)$; uma vez que a função $h(z, w) = (u^{-1}(z), w)$ satisfaz $h(0, 0) = (0, 0)$ e

$$\det(h'(0, 0)) = \det \left(\begin{bmatrix} \sqrt{g'(0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \sqrt{g'(0)} \neq 0,$$

tem-se novamente que h é um difeomorfismo entre vizinhanças da origem, mostrando que existir um centro na origem de (4.4.4) implica um centro na origem de (4.4.3).

Tomando a interseção das vizinhanças tais que o sistema (4.4.4) possui um centro e $\frac{g(u^{-1}(z))}{z} > 0$ e multiplicando o campo do sistema (4.4.4) por $\frac{z}{g(u^{-1}(z))}$, encontra-se o seguinte sistema associado:

$$\begin{cases} \dot{z} = w - F(u^{-1}(z)), \\ \dot{w} = -z. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

uma vez que $F(u^{-1}(z))$ é uma função analítica, escrevendo sua série de Taylor como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$, o sistema (4.4.5) terá simetria sobre o eixo z , se e somente se, $a_{2n+1} = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Será mostrado que o fato de existir um centro em torno da origem no sistema (4.4.5) implica na existência de um centro em torno da origem no sistema (4.4.4).

Seja $V \subset \mathbb{R}$ uma vizinhança da origem tal que $\frac{g(u^{-1}(z))}{z} > 0$, como 0 é um centro do sistema (4.4.5), implica da estabilidade da origem que existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^2$ de 0 tal que toda solução $\psi(t) = (z(t), w(t))$ de (4.4.5) que satisfaz $(z(0), w(0)) \in W$ implica $(z(t), w(t)) \in V \times V, \forall t \in \mathbb{R}$. Define-se a seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = \frac{g(u^{-1}(z(\tau(t))))}{z(\tau(t))}, \\ \tau(0) = 0. \end{cases}$$

Seja $\tau(s)$ a solução da equação acima. Primeiramente, é fato que 0 não é singularidade da equação acima, uma vez que $\frac{g(u^{-1}(z))}{z} > 0$ numa vizinhança da origem.

Considere agora $\gamma(t) = \psi(\tau(t)) = (z(\tau(t)), w(\tau(t)))$, será concluído que γ é solução de (4.4.4), veja que

$$\gamma(0) = \psi(\tau(0)) = (z(\tau(0)), w(\tau(0))) = (z(0), w(0)),$$

e além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt}(t) &= \left(\frac{dz(\tau)}{dt}(t), \frac{dw(\tau)}{dt}(t) \right) \\ &= \left(\frac{dz}{dt}(\tau(t)) \frac{d\tau}{dt}(t), \frac{dw}{dt}(\tau(t)) \frac{d\tau}{dt}(t) \right) \\ &= \left((w(\tau(t)) - F(u^{-1}(z(\tau(t)))) \frac{g(u^{-1}(z(\tau(t))))}{z(\tau(t))}, -z(\tau(t)) \frac{g(u^{-1}(z(\tau(t))))}{z(\tau(t))} \right) \\ &= \left((w(\tau(t)) - F(u^{-1}(z(\tau(t)))) \frac{g(u^{-1}(z(\tau(t))))}{z(\tau(t))}, -g(u^{-1}(z(\tau(t)))) \right). \end{aligned}$$

Segue que $\gamma(t)$ é uma solução do sistema (4.4.4) com condição inicial $(z(0), w(0))$.

Seja (ω_-, ω_+) o intervalo maximal de definição da solução $\tau(s)$, será concluído, que $\tau(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \omega_+$. Tem-se então duas possibilidades, $\omega_+ < \infty$ ou $\omega_+ = \infty$.

Caso $\omega_+ < \infty$, o resultado é imediato, uma vez que $\frac{d\tau}{ds}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, implicando que $\tau(s)$ é crescente, além disso uma vez que é sabido que $|\tau(s)| \rightarrow \infty$, quando $s \rightarrow \omega_+$, segue da crescência de $\tau(s) \rightarrow \infty$, quando $s \rightarrow \omega_+$.

Quando $\omega_+ = \infty$, supõe-se por redução ao absurdo que $\tau(s)$ não tende para ∞ quando $s \rightarrow \infty$; esse resultado, aliado com a crescência de τ , implica que $\tau(s)$ é limitada, segue que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau(s) = t_0$. Dessa forma

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \psi(\tau(s)) = \psi(\lim_{s \rightarrow \infty} \tau(s)) = \psi(t_0) = (z(t_0), w(t_0)),$$

mas percebe que, se $\varphi(t, (x_0, y_0))$ é o fluxo de (4.4.4), tem-se que da unicidade de solução que $\varphi(t, (z(0), w(0))) = \gamma(t), \forall t \in (\omega_-, \infty)$. Será concluído que $z(t_0)$ é uma singularidade. Basta notar que

$$\varphi(t, z(t_0)) = \varphi(t, \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(t, \varphi(s, (z(0), w(0)))) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(t+s, (z(0), w(0))) = \psi(t_0),$$

segue que o fluxo do sistema (4.4.4) no ponto com condição inicial $\psi(t_0)$ é igual a $\psi(t_0)$ para todo t , logo $\psi(t_0)$ é singularidade de (4.4.4), o que é um absurdo, uma vez que $\psi(t_0)$ é um ponto regular do sistema (4.4.5) (pois é um ponto que pertence a uma órbita periódica), e por construção $\frac{g(u^{-1}(z(t_0)))}{z(t_0)} > 0$, implicando que o campo $X(z, w) = \left((w - F(u^{-1}(z))) \frac{g(u^{-1}(z))}{z}, g(u^{-1}(z)) \right) = \left((w - F(u^{-1}(z))) \frac{g(u^{-1}(z))}{z}, z \frac{g(u^{-1}(z))}{z} \right)$, associado ao sistema (4.4.4), ao ser aplicado em $\psi(t_0)$ deve ter pelo menos uma de suas entradas diferente de 0, mostrando que $\psi(t_0)$ não é singularidade de (4.4.4).

Conclui-se então que $\tau(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \omega^+$. Será mostrado agora que γ é solução periódica de (4.4.4).

Ora, como $\gamma(t)$ é solução do sistema (4.4.4) com condição inicial $(z(0), w(0))$, uma vez que que $\psi(t) = (z(t), w(t))$ é periódica, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\psi(0) = \psi(\alpha)$. Como τ é crescente e ilimitada existe $\beta \in \mathbb{R}$ de forma que $\tau(\beta) = \alpha$, sendo assim,

$$\gamma(0) = \psi(\tau(0)) = \psi(0) = \psi(\alpha) = \psi(\tau(\beta)) = \gamma(\beta),$$

portanto, γ é solução periódica de (4.4.4).

Logo, para toda solução periódica de (4.4.5) com condição inicial numa vizinhança da origem, é possível associar uma solução periódica de (4.4.4) com a mesma condição inicial, conclui-se assim que o fato de (4.4.5) ter um centro implica que (4.4.4) também possui um centro.

Portanto, o sistema (4.4.1) possui um centro na origem se, e somente se, todos os a_{2n+1} (recorde que $F(u^{-1}(z)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$) se anularem.

Esse resultado é dado de maneira mais compacta pelo seguinte teorema.

Teorema 4.7. *O sistema (4.4.1) tem um centro na origem $\Leftrightarrow F(x) = \Phi(G(x))$, para alguma função analítica Φ , com $\Phi(0) = 0$.*

Demonstração. O argumento acima mostra que (4.4.1) tem um centro se, e somente se, $F(u^{-1}(z)) = \phi(z^2)$, para alguma função analítica ϕ , tomando $z = u(x)$, resulta que $F(x) = \phi(u(x)^2)$. Mas como $u(x)^2 = 2G(x)$, tomando $\Phi(x) = \phi(2x)$, consegue-se que $F(x) = \Phi(G(x))$. \square

Considere agora uma função $z(x)$ definida na vizinhança da origem, tal que $z(x) = u^{-1}(-u(x))$. Pode-se descrever $z(x)$ como a única função analítica que satisfaz

$$G(x) = G(z), \quad (z(0) = 0, z'(0) < 0).$$

O fato da equação definir uma única função analítica $z(x)$ segue das condições impostas para a função g , expandindo G em série de Taylor e reordenando os termos é obtido

$$G(x) - G(z) = (x - z) \left(\frac{1}{2} g'(0)(x + z) + o(x, z) \right) = 0.$$

Note que a expressão acima possui dois ramos analíticos na origem, $z = x$ e $z = -x + o(x)$. Como $z'(0) < 0$, segue que z só pode ser descrito por $z = -x + o(x)$. Note agora que $2G(u^{-1}) = u^2 = (-u)^2 = 2G(-u^{-1})$, implicando que $G(x) = G(u^{-1}(-u(x)))$. Mais ainda, como a expansão em série de Taylor da função $u^{-1}(-u(x))$ é descrita por:

$$\begin{aligned} u^{-1}(-u(x)) &= u^{-1}(-u(0)) + x \frac{d(u^{-1}(-u))}{dx}(0) + \mathcal{O}(x^2) \\ &= x \left(\frac{du^{-1}}{dx}(0) \frac{d(-u)}{dx}(0) \right) + \mathcal{O}(x^2) \\ &= -x \left(\frac{du^{-1}}{dx}(u(0)) \frac{du}{dx}(0) \right) + \mathcal{O}(x^2) \\ &= -x \left(\frac{du^{-1}(u)}{dx}(0) \right) + \mathcal{O}(x^2) \\ &= -x + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

conclui-se que essa solução deve ser $u^{-1}(-u(x))$.

Por outro lado uma vez que a origem é um centro se e somente se a função $F(u^{-1})$ é par. $F(u^{-1}(x)) - F(u^{-1}(-x))$ se anula em todos os pontos, mas isso é equivalente a dizer que $F(u^{-1}(u(x))) - F(u^{-1}(-u(x))) = F(x) - F(z) = 0$. Dessa forma pode-se caracterizar os centros da equação de Liénard pelo seguinte teorema.

Teorema 4.8. *O sistema (4.4.1) tem um centro na origem se, e somente se, existe uma função $z(x)$ satisfazendo*

$$F(x) = F(z), \quad G(x) = G(z), \quad (z(0) = 0, z'(0) < 0).$$

Note que os mesmos argumentos são válidos caso fossem considerados f e g funções analíticas. Porém perceba que se f e g são polinômios, então a solução $z(x)$ deve corresponder a um fator comum entre as funções $F(x) - F(z)$ e $G(x) - G(z)$ (diferente de $x - z$). Assim, segue o seguinte corolário.

Corolário 4.3. *Se o sistema (4.4.1) com f e g polinômios possui um centro na origem, então é necessário que*

$$\frac{F(x) - F(z)}{x - z} \quad e \quad \frac{G(x) - G(z)}{x - z},$$

se anulem com respeito a x ou z . Essa condição é suficiente se o fator comum dos 2 polinômios se anulem em $x = z = 0$.

4.4.2 Centros das equações polinomiais de Liénard

É interessante notar que o Corolário 4.3 provém uma condição para a existência de um centro, mas não expressa nenhuma informação a respeito de como os sistemas satisfazem tal condição. Será mostrado durante essa subseção que os centros são gerados por simetrias algébricas na variável x .

Considere o subcorpo de $\mathbb{R}(x)$ gerado pelos polinômios F e G , chame tal corpo de \mathcal{F} . Será mostrado que corpo \mathcal{F} compartilha propriedades muito importantes com F e G .

Lema 4.2. *Suponha que exista uma função analítica $z(x)$ com $z(0) = 0$, $z'(0) < 0$ tal que tanto $F(z(x)) = F(x)$ quando $G(z(x)) = G(x)$ numa vizinhança de $x = 0$. Então todos os elementos H do corpo \mathcal{F} gerado por F e G satisfazem $H(z(x)) = H(x)$ se tratados como funções meromorfas em x em torno $x = 0$.*

Demonstração. Primeiramente note que $H(z(x)) = 0$ se, e somente se, $H(x) = 0$, uma vez que H pertence a um corpo que é gerado pelas funções G e F , que possuem essa propriedade. Logo, é necessário apenas verificar se a adição, multiplicação e inversão (de elementos não nulos) de \mathcal{F} preservam tal propriedade, o que é evidente. \square

Nesse momento será necessário recordar o Teorema de Lüroth referente à teoria de corpos. Tal teorema afirma que se K é um corpo e M um corpo intermediário entre K e $K(X)$, para alguma variável X , então existe uma função racional $f(X) \in K(X)$ tal que $M = K(f(x))$.

Note que \mathcal{F} é um subcorpo de $\mathbb{R}(x)$, além de satisfazer $\mathbb{R} \subset \mathcal{F}$, então aplicando o Teorema de Lüroth existe uma função racional $r \in \mathbb{R}(x)$ tal que $\mathcal{F} = \mathbb{R}(r)$. Dessa forma $r = A/B$, com $A, B \in \mathbb{R}[x]$. Perceba que o corpo gerado por r sobre \mathbb{R} também será gerado por

$$\frac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta} = \frac{\alpha A + \beta B}{\gamma A + \delta B}$$

para quaisquer constantes α, β, γ e δ , tais que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Para constatar tal afirmação, defina $C = \alpha A + \beta B$ e $D = \gamma A + \delta B$, considere a matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

segue que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A + \beta B \\ \gamma A + \delta B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

uma vez que Λ é invertível, existe uma matriz

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix},$$

tal que $\Lambda \cdot D = I$, conseqüentemente

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Precisa ser mostrado que $\mathbb{R}(A/B) = \mathbb{R}(C/D)$, tome $k \in \mathbb{R}(A/B)$, então

$$k = \frac{a_1 \frac{A}{B} + b_1}{a_2 \frac{A}{B} + b_2}, \text{ sendo que } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow k = \frac{a_1 A + b_1 B}{a_2 A + b_2 B}$$

$$\Rightarrow k = \frac{a_1(d_1 C + d_2 D) + b_1(d_3 C + d_4 D)}{a_2(d_1 C + d_2 D) + b_2(d_3 C + d_4 D)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{(a_1 d_1 + b_1 d_3) \frac{C}{D} + (a_1 d_2 + b_1 d_4)}{(a_2 d_1 + b_2 d_3) \frac{C}{D} + (a_2 d_2 + b_2 d_4)},$$

logo $k \in \mathbb{R}(C/D)$, o que implica que $\mathbb{R}(A/B) \subset \mathbb{R}(C/D)$. Fazendo o mesmo processo, porém para $k \in \mathbb{R}(C/D)$, conclui-se que $\mathbb{R}(C/D) \subset \mathbb{R}(A/B)$, implicando que $\mathbb{R}(C/D) = \mathbb{R}(A/B)$.

Escolhendo essas constantes a fim de garantir que o grau do denominador seja menor que o do numerador, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que o grau de B é menor que o grau de A . Além disso, considere que A e B não têm fatores em comum e B é mônico.

Uma vez que $F, G \in \mathcal{F}$, é fato que

$$F = \frac{F_1(A, B)}{F_2(A, B)}, \quad G = \frac{G_1(A, B)}{G_2(A, B)},$$

onde F_i e G_i são polinômios escolhidos de forma que não possuem fatores comuns visto como polinômios em A e B .

Será mostrado agora que $B = 1$.

Para provar esse fato, deve-se primeiro fatorar F_1 e F_2 sobre $\mathbb{C}[A, B]$, obtendo

$$F_1(A, B) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i A + \mu_i B), \quad F_2(A, B) = \prod_{i=r+1}^{r+s} (\lambda_i A + \mu_i B).$$

Note que se $\lambda_i A + \mu_i B$ e $\lambda_{r+i} A + \mu_{r+i} B$ possuírem um fator comum como polinômios em x , então eles necessariamente são múltiplos um do outro, pois A e B não possuem fator comum em x (tanto em \mathbb{R} quanto em \mathbb{C}) por hipótese. Entretanto, lembre que F_1 e F_2 não possuem fatores em comum como polinômios em A e B , dessa forma eles não podem possuir fator comum como polinômios em x .

Uma vez que F é um polinômio tem-se que analisando F como função racional, seu denominador deve ser uma constante. Uma vez que foi concluído que $F_1(A(x), B(x))$ e $F_2(A(x), B(x))$ não possuem fatores em comum tem-se que

$$\prod_{i=r+1}^{r+s} (\lambda_i A + \mu_i B) = k \in \mathbb{R}.$$

Como A tem um grau maior que B , isso pode ocorrer somente quando $\lambda_i = 0$ para todo $i = r + 1, \dots, s$, conclui-se assim que B deve ser um polinômio constante, aliando com o fato de B ser mônico, implica $B = 1$. Note que repetindo essa ideia para G obtém-se a mesma conclusão.

Dessa forma, foi mostrado que tanto F quanto G são polinômios de algum polinômio $A \in \mathcal{F}$. Com base nisso é possível mostrar as seguintes propriedades sobre A .

Teorema 4.9. *O sistema (4.4.1) com $g(0) = 0$ e $g'(0) > 0$ tem um centro não degenerado na origem se, e somente se, $F(x)$ e $G(x)$ são ambos polinômios de um polinômio $A(x)$ com $A'(0) = 0$ e $A''(0) \neq 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.8, existe um centro na origem de (4.4.1), sendo assim $\exists z(x)$ com $z(0) = 0$ e $z'(0) < 0$ tal que $F(z(x)) = F(x)$ e $G(z(x)) = G(x)$. Utilizando o Lema 4.2 e os desenvolvimentos acima, se A é o polinômio gerador do corpo \mathcal{F} , então A deve satisfazer $A(z(x)) = A(x)$, sendo assim, se $A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ tem-se que

$$\begin{aligned} A(z(x)) &= A(x) \\ \sum_{i=0}^n a_i (z(x))^i &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ \sum_{i=0}^n a_i (-|z'(0)|x + \mathcal{O}(x^2))^i &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ a_0 - a_1 x + \mathcal{O}(x^2) &= a_0 + a_1 x + \mathcal{O}(x^2). \\ \Rightarrow a_1 (|z'(0)| + 1)x + \mathcal{O}(x^2) &= 0 \\ \Rightarrow a_1 &= 0, \end{aligned}$$

portanto o termo linear de $A(x)$ deve se anular; além disso, uma vez que $G(x)$ é um polinômio em A e $G''(0) > 0$, conclui-se que o termo quadrático de A não se anula.

Para provar a implicação contrária, assume-se que F e G são polinômios de um polinômio A com termo quadrático não nulo, mas sem termo linear. Por essas condições impostas para A , é possível encontrar uma função analítica satisfazendo $A(z(x)) = A(x)$, sendo que $z(0) = 0$ e $z'(0) < 0$. Tal construção é feita definindo uma série Taylor da forma $-|a_1|x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$, e descobrindo os valores de a_i de forma recursiva. Claramente F e G devem satisfazer as condições do Teorema 4.8, e como consequência da aplicação desse teorema, conclui-se que existe um centro na origem. \square

Corolário 4.4. *O sistema (4.4.1) tem um centro não degenerado no ponto $x = p$ se, e somente se, $g(p) = 0$, $g'(p) > 0$ e F e G são ambos polinômios de um polinômio que satisfaz $A'(p) = 0$ com $A''(p) \neq 0$.*

Com base nesses resultados é possível provar a seguinte teorema.

Teorema 4.10. *Se o sistema (4.4.1) possui um centro não degenerado na origem, então a origem possui uma simetria generalizada.*

4.5 Sistema de Cherkas

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2, \end{cases} \quad (4.5.1)$$

sendo P_0 , P_1 e P_2 são polinômios.

Fazendo a transformação de variável $y \mapsto y \exp\left(\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right)$, facilmente se verifica que o sistema (4.5.1), se transforma no seguinte sistema de Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = g(x) + f(x)y, \end{cases} \quad (4.5.2)$$

onde $g(x) = P_0(x) \exp\left(-2 \int_0^x P_2(\xi)d\xi\right)$ e $f(x) = P_1(x) \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right)$.

Sabendo da existência dessa transformação e do seguinte teorema:

Teorema 4.11. *Seja $(k, ')$ um corpo diferencial de característica zero com extensão diferencial $(K, ')$ com o mesmo corpo de constantes e tal que k é algebricamente fechado em K . Assuma que K é uma extensão algébrica finita de $k(t)$, onde t é transcendental sobre k e $k' \in k$. Caso existam $c_1, c_2, \dots, c_n \in k$ linearmente independentes sobre Q satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \in k$$

Então $u_1, \dots, u_n \in k$ e $v = ct + d$, com $c, d \in k$.

é possível provar o seguinte resultado a respeito do sistema de Cherkas.

Teorema 4.12. *Um sistema da forma (4.5.1) com $P_0 = 0$ e $P_0'(0) < 0$, com um centro na origem, satisfaz pelo menos uma das seguintes condições (possivelmente todas):*

1. *O sistema é algebricamente reduzível pela transformação $(x, y) \mapsto (x, y^2)$ e, além disso, possui simetria com respeito ao eixo x .*
2. *O sistema é algebricamente reversível na origem. De fato, é algebricamente reduzível por uma transformação $(x, y) \mapsto (r(x), y)$ para algum polinômio $r(x)$ sobre \mathbb{R} .*
3. *O sistema tem uma integral primeira de Darboux.*

Demonstração. A demonstração será dividida em 4 passos.

Passo 1:

Fazendo a mudança de variáveis

$$y \mapsto Y \exp\left(\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right).$$

então

$$\dot{y} = \dot{Y} \exp\left(\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right) + Y \exp\left(\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right) \left(\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right) \dot{x}$$

$$\dot{Y} = P_0(x) \exp\left(-2 \int_0^x P_2(\xi) d\xi\right) + Y P_1(x) \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi) d\xi\right).$$

Para ver que tal mudança de variável preserva centros basta repetir o procedimento que foi amplamente discutido e elaborado durante o estudo das mudanças de variáveis do sistema (4.4.1).

Chamando $Y = y$, apenas por comodidade, tem-se que o sistema (4.5.1) é equivalente a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = g(x) + f(x)y, \end{cases}$$

onde

$$g(x) = P_0(x) \exp\left(-2 \int_0^x P_2(\xi) d\xi\right), \quad f(x) = P_1(x) \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi) d\xi\right).$$

Sendo assim o, sistema de Cherkas muda para um sistema que é polinomial em y , mas com coeficiente em uma extensão de corpos Liouvilliana de $(\mathbb{C}(x, y), d/dx)$ que é gerada pela adição de exponenciais de integrais (do tipo descrito por g e f) a $\mathbb{C}(x, y)$. Por outro lado, a mudança de variáveis proporcionou uma redução, para o grau um, do polinômio em y no segundo termo do sistema de equações diferenciais (4.5.1), tornando possível aplicar o Teorema 4.8.

Passo 2

É facilmente verificável que as condições impostas para P_0 fazem com que seja possível aplicar o Teorema 4.8 em $g(x)$. Dessa forma, (4.5.1) tem um centro na origem, se, e somente se, existe uma função analítica $z(x)$ numa vizinhança da origem satisfazendo $z(0) = 0$ e $z'(0) = -1$, a qual satisfaz simultaneamente

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = \int_0^z f(\xi) d\xi, \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = \int_0^z g(\xi) d\xi,$$

ou de maneira equivalente,

$$f(x)dx = f(z)dz, \quad g(x)dx = g(z)dz.$$

Suponha que $f(x)$ não se anula para todo x , pois nesse caso ocorreria que $P_1 \equiv 0$, tornando o sistema reversível e criando uma simetria no eixo x , resolvendo o problema. Além disso, perante a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (x, y^2) = (\bar{x}, \bar{y})$, o sistema pode ser algebricamente reduzido para

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = 1, \\ \dot{\bar{y}} = 2P_0(\bar{x}) + 2P_2(\bar{x})\bar{y}. \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Sendo assim, supõe-se que f e g não são identicamente nulas (será excluído o caso em que $P_2 \equiv 0$, pois caso isso ocorra P_2 é identicamente nula e pode-se fazer uma análise semelhante à anterior).

Uma vez que $f(x)dx = f(z)dz$ e $g(x)dx = g(z)dz$, tem-se que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(z)}{f(z)},$$

consequentemente

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)} \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right) = \frac{P_0(z)}{P_1(z)} \exp\left(-\int_0^z P_2(\xi)d\xi\right).$$

Uma vez que $z(x)$ é uma função analítica, $z(x)$ pode ser considerado um elemento de $\mathbb{R}\{\{x\}\}$ (corpo das séries formais de Laurent centradas em 0 com coeficientes em \mathbb{R}) que determina um elemento de $\mathbb{C}\{\{x\}\}$. Dessa forma existem dois casos: o primeiro supondo que $z(x)$ é algébrico sobre $\mathbb{C}(x)$ e o segundo se $z(x)$ é transcendental sobre $\mathbb{C}(x)$.

Passo 3: $z(x)$ é algébrico sobre $\mathbb{C}(x)$

Neste caso pode-se aplicar os resultados do Teorema 4.11. Primeiramente note que $\int P_2(x)dx$ é um polinômio não constante (pois supomos $P_2(x)$ não nulo). Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{P_0(x)}{P_1(x)} \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi)d\xi\right) &= \frac{P_0(z)}{P_1(z)} \exp\left(-\int_0^z P_2(\xi)d\xi\right) \\ \Rightarrow \frac{P_0(x)/P_1(x)}{P_0(z)/P_1(z)} \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi)d\xi + \int_0^z P_2(\xi)d\xi\right) &= 1. \end{aligned}$$

Considere as funções

$$\Psi(x) = R_1(x, z(x))e^{R_2(x, z(x))} = 1, \quad (4.5.4)$$

onde

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \frac{P_0(x)/P_1(x)}{P_0(y)/P_1(y)} \in \mathbb{R}(x, y), \\ R_2(x, y) &= \int_0^y P_2(\xi)d\xi - \int_0^x P_2(\xi)d\xi \in \mathbb{R}[x, y]. \end{aligned}$$

Fazendo $\overline{R_1}(x) = R_1(x, z(x))$ e $\overline{R_2}(x) = R_2(x, z(x))$, tem-se que $\overline{R_1}$ e $\overline{R_2}$ pertencem a uma extensão de corpos diferencial $(\mathbb{C}(x)[z(x)], d/dx)$ de $(\mathbb{C}(x), d/dx)$ gerada por $z(x)$.

Em ambos os corpos diferenciais, a operação de derivação será denotado, por $'$. Note que

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{(\overline{R_1})'}{\overline{R_1}} + (\overline{R_2})' = 0.$$

Sendo assim, tomando $k = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{C}(x)[z]$, $R_1(x, z(x))$ como a constante, ao aplicar o Teorema 4.11 conclui-se que $R_2(x, z(x))$ é da forma $cx + d$, para constantes c e d . Substituindo de volta em $(\overline{R_1})'/\overline{R_1} + \overline{R_2}'$, é imediato que c deve se anular. Mais ainda, é claro que se $x = 0$, $R_2(x, z(x))$ se anula, e consequentemente $d = 0$. Chegando à conclusão que $R_1(x, z(x)) = 1$.

Sendo assim, de (4.5.4) consegue-se as seguintes equações:

$$P_0(x)/P_1(x) = P_0(z)/P_1(z), \quad \int_0^x P_2(\xi)d\xi = \int_0^z P_2(\xi)d\xi.$$

Considere o subcorpo F de $\mathbb{R}(x)$ gerado por todas as funções racionais $S(x)$ tais que $S(x) = S(z(x))$. Pelo Teorema de Lüroth esse corpo é isomorfo a $\mathbb{R}(r/s)$, para alguma função $r(x)/s(x)$ com $r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x, y]$. Sem perda de generalidade pode-se supor o grau de r maior que o grau de s , com r e s coprimos.

Consequentemente, pode-se escrever

$$\int_0^x P_2(\xi) d\xi = \phi(r(x)/s(x)),$$

para alguma função racional ϕ sobre \mathbb{R} , em uma variável.

Por outro lado, trabalhando sobre \mathbb{C} a equação acima pode ser expressa por

$$\prod_{i=1}^q (\alpha_i r + \beta_i s) / \prod_{i=1}^q (\gamma_i r + \delta_i s).$$

Assim como feito na subseção 4.4.6, se $(\alpha_i r + \beta_i s)$ compartilham um fator comum com $(\gamma_j r + \delta_j s)$, esses 2 polinômios devem diferir por uma constante multiplicando, sendo assim pode-se assumir que a fração acima não admite simplificações. Como o lado esquerdo da equação $\int_0^x P_2(\xi) d\xi = \phi(r(x)/s(x))$ é um polinômio, $\prod (\gamma_i r + \delta_i s)$ deve ser uma constante, dessa forma o denominador não depende de r e s deve ser uma constante.

Além disso supõe-se, sem perda de generalidade, que $s(x) = 1$ e $r(0) = 0$ (caso não seja, basta fazer uma mudança de variáveis conveniente). Mais ainda, como $\int_0^x P_2(\xi) d\xi = \phi(r(x)/s(x))$, tem-se que ϕ deve ser um polinômio. Por outro lado fazendo uma análise semelhante obtém-se que

$$P_0(x)/P_1(x) = \phi_0(r/s)/\phi_1(r/s) = \phi_0(r)/\phi_1(r),$$

para alguns polinômios em uma variável ψ_0 e ψ_1 sobre \mathbb{R} com $\gcd(\psi_1, \psi_0) = 1$. Da igualdade acima tem-se que

$$\frac{P_0}{\psi_0(r(x))} = \frac{P_1(x)}{\psi_1(r(x))} = K(x),$$

sendo $K(x)$ uma função racional em x sobre \mathbb{R} . Então

$$P_0(x) = K(x)\psi_0(r(x)), \quad P_1(x) = K(x)\psi_1(r(x)),$$

o que implica que $K(x)$ é um polinômio sobre \mathbb{R} .

Tratando P_1 como $P_1(x) = K(x)\psi_1(r(x))$ e substituindo em $f(x) = P_1(x) \exp(-\int_0^x P_2(\xi) d\xi)$, obtém-se

$$f(x) = K(x)\psi_1(r(x)) \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi) d\xi\right).$$

Substituindo esse resultado em $f(x)dx = f(z)dz$;

$$K(x)\psi_1(r(x)) \exp\left(-\int_0^x P_2(\xi) d\xi\right) dx = K(z)\psi_1(r(z)) \exp\left(-\int_0^z P_2(\xi) d\xi\right) dz,$$

mas como $r(x) = r(z(x))$, e usando que $\int_0^x P_2(\xi) d\xi = \int_0^z P_2(\xi) d\xi$, consegue-se que

$$K(x)dx = K(z)dz,$$

entretanto como $r(x) = r(z)$, tem-se que $r'(x)dx = r'(z)dz$

$$\Rightarrow \frac{K(x)}{r'(x)} = \frac{K(z)}{r'(z)}.$$

Dessa forma $K(z)/r'(z)$ está no corpo F . Implicando que $K(x) = r'(x)\chi(r(x))$ para algum função racional χ sobre \mathbb{R} , constatando-se pela igualdade anterior que K deve ser um polinômio (por comparação entre os graus de r e r'). Uma vez que $r(x) = r(z)$ com $z'(0) = -1$, segue que $r'(0) = 0$. Entretanto, da expressão $P_0(x) = K(x)\psi_0(r(x))$ e usando que $K(x) = r'(x)\chi(r(x))$, tem-se que $P_0'(0) = r''(0)\chi(0)\psi_0(0)$ e $r''(0) \neq 0$. Sem perda de generalidade, pode-se escolher r de modo que $r''(0) = 1$.

Colocando todas as informações juntas, existem polinômios A_0, A_1 e A_2 tais que

$$P_0(x) = A_0(r(x))r'(x), \quad P_1(x) = A_1(r(x))r'(x), \quad P_2(r(x)) = A_2(r(x))r'(x),$$

com $A_i = \chi_i\psi_i$ para $i = 0, 1$ e $A_2 = \phi'$. O sistema é algebricamente reduzível. De fato, o mapa $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (r(x), y)$ reduz (4.5.1) para o sistema

$$\dot{\bar{x}} = \bar{y}, \quad \dot{\bar{y}} = A_0(\bar{x}) + A_1(\bar{x})\bar{y} + A_2(\bar{x})\bar{y}^2.$$

Esse sistema é não singular na origem desde que as condições em P_0 impliquem que $A_0(0) < 0$.

Passo 4: $z(x)$ é transcendental sobre $\mathbb{C}(x)$

Nesse caso, note que ainda é mantida a igualdade $g(x)/f(x) = g(z)/f(z)$. Diferenciando essa equação obtém-se

$$(g/f)'(x)dx = (g/f)'(z)dz,$$

onde $'$ significa diferenciabilidade com respeito a z . Isso nos dá:

$$\left[\frac{1}{f} \left(\frac{g}{f} \right)' \right] (x) = \left[\frac{1}{f} \left(\frac{g}{f} \right)' \right] (z),$$

o que implica

$$\left[\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{P_0}{P_1} \right) - \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)' \right] (x) = \left[\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{P_0}{P_1} \right) - \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)' \right] (z).$$

Uma vez que essa equação algébrica entre z e x , e tanto x quando z são transcendentais sobre \mathbb{C} , então os 2 lados da igualdade devem ser identicamente iguais a uma contante c . Em particular, a fração P_0/P_1 deve ser um polinômio.

Considere a seguinte igualdade em $\mathbb{R}(x)$:

$$P_2P_0P_1 + P_0P_1' - P_1P_0' = cP_1^3.$$

Para $k \in \mathbb{C}$ define-se

$$C_k = y + k(P_0/P_1).$$

A fim de encontrar curvas invariantes, serão estudadas as curvas $C_k = 0$. Lembre que a curva $C_k = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema diferencial (4.5.1) se, e somente se, $DC_k/C_k \in \mathbb{C}[x, y]$, onde D é o operador

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (P_0 + P_1 y + P_2 y^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Será determinado, uma condição para a constante k de forma que tal condição seja satisfeita. Note que

$$DC_k = k(P_0/P_1)'y + P_0 + P_1 + P_2 y^2,$$

utilizando que $P_2 P_0 P_1 + P_0 P_1' - P_1 P_0' = c P_1^3$, segue que

$$(P_0/P_1)' = (P_0' P_1 - P_0 P_1')/P_1^2 = P_2 P_0/P_1 - c P_1,$$

dessa forma

$$DC_k = P_2 y^2 + k(P_0 P_2/P_1 - c P_1) y + P_0 + P_1 y,$$

sendo assim, é preciso encontrar polinômios $A_k(x)$ e $B_k(x)$ tais que

$$DC_k = C_k(A_k y + B_k) = (y + k P_0/P_1)(A_k y + B_k),$$

conclui-se das duas equações acima que

$$A_k = P_2, \quad e \quad B_k = P_1/k,$$

e

$$-ck P_1 + P_1 = P_1/k,$$

ocasionando

$$ck^2 - k + 1 = 0.$$

Dependendo do valor de c a equação pode ter uma ou duas soluções distintas. Se $c = 1/4$ existe apenas a solução $k = 2$, por outro lado se $c \neq 1/4$ existem duas soluções distintas k_1 e k_2 . Portanto

$$DC_k = C_k(P_2 y + P_1/k),$$

onde $k = 2$ no caso $c = 1/4$ e $k = k_j$, $j = 1, 2$ se $c \neq 1/4$.

Antes de considerar cada um dos dois casos observe que o sistema (4.4.1) admite

$$C = \exp \left(\int_0^x P_2(\xi) d\xi \right)$$

como um fator exponencial, ou seja, $DC/C \in \mathbb{C}[x, y]$. De fato, tem-se que

$$DC = C(P_2 y).$$

Considere os dois casos possíveis. Primeiro seja $c \neq 1/4$. Neste caso pode-se construir uma integral primeira de Darboux com as funções C , C_{k_1} e C_{k_2} , da seguinte forma:

$$(y + k_1(P_0/P_1))^{r_1} (y + k_2(P_0/P_1))^{r_2} \exp \left(r_3 \int_0^x P_2(\xi) d\xi \right).$$

É imediatamente verificado que se tomarmos $r_1 = 1$, $r_2 = -k_2/k_1$ e $r_3 = -1 + k_2/k_1$, então tem-se que a combinação linear dos cofatores correspondentes são dados por

$$r_1(P_2y + P_1/k_1) + r_2(P_2y + P_1/k_2) + r_3P_2y = 0.$$

No caso que $c = 1/4$, tem-se apenas uma curva algébrica, isto é, $C_2 = 0$. Relembre que ainda existe o fator exponencial C . Considere a expressão

$$\tilde{C} = \exp(P_0/(P_1y + 2P_0)),$$

então \tilde{C} é outra integral de Darboux e é um fato exponencial. Sendo assim

$$D\tilde{C} = \tilde{C}(-P_1/4).$$

No caso pode-se construir uma primeira integral de Darboux usando a curva $C_2 = y + 2(P_0/P_1)(x)$ e os dois fatores exponenciais C e \tilde{C} definidos acima. Essa integral primeira é da forma

$$(C_2)^{r_1} C^{r_2} (\tilde{C})^{r_3}.$$

É fácil ver que para $r_1 = 2$, $r_2 = -1$ e $r_3 = 1$ obtemos a seguinte combinação linear de cofatores:

$$r_1(-P_1/4) + r_2(P_2y) + r_3(P_2y + P_1/2) = 0.$$

Sendo que essa integral é bem definida e holomorfa numa região da origem, portanto tem-se um centro na origem. \square

4.6 Monodromia

O conceito de monodromia está relacionado com a forma que os objetos dependem de seus parâmetros e de que forma eles são localmente constantes em algum sentido, tentando entender como uma mudança de parâmetros influencia em um caminho não trivial. A relação desse conceito com o problema do Centro-Foco é tentar estender informações da dinâmica local do sistema para a dinâmica global. Por exemplo, tentar transformar uma integral primeira válida apenas numa vizinhança da origem para uma integral primeira global.

Definição 4.28. *Dado um sistema definido como (4.2.2), um ponto singular y^* é dito monodrômico se não existem órbitas tendendo a, ou deixando y^* com um ângulo bem definido.*

Dessa forma, o retrato de fase numa vizinhança de um ponto singular monodrômico deve ser um foco ou um centro.

Considere agora a equação de Abel

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y^3, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.6.1)$$

sendo p e q polinômios e $a, b \in \mathbb{R}$.

Seja $y(x, c)$ uma solução de (4.6.1) que satisfaz $y(a, c) = c$. Os teoremas de dependência contínua de parâmetros e de existência e unicidade de solução, garantem que $y(x, c)$ é bem definida e analítica, em ambos os argumentos para c suficientemente pequeno.

Se $y(b, c) = c$, então $y(x, c)$ é denominada solução periódica. Sendo assim, se $y(b, c) \equiv c$, para todo c suficientemente próximo de 0, então é dito que o sistema possui um centro entre a e b . Note que as constantes a e b não são importantes, pode-se supor sem perda de generalidade que $a = 0$ e $b = 1$ fazendo uma simples mudança de variável.

Observe o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + M(x, y), \\ \dot{y} = x + N(x, y), \end{cases} \quad (4.6.2)$$

onde M e N são polinômios homogêneos de grau n . Fazendo a mudança de variável $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, pelas mesmas manipulações algébricas da demonstração do Teorema 4.3, conclui-se que o sistema (4.6.2) se torna

$$\begin{cases} \dot{r} = r^n A(\theta), \\ \dot{\theta} = 1 + B(\theta)r^{n-1}. \end{cases} \quad (4.6.3)$$

sendo que

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \cos(\theta)M(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)N(\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ B(\theta) &= \cos(\theta)N(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)M(\cos(\theta), \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se que na região $R = \{(r, \theta) : 1 + B(\theta)r^{n-1} > 0\}$, o sistema (4.6.2) é equivalente à equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{A(\theta)r^n}{1 + B(\theta)r^{n-1}}, \quad (4.6.4)$$

sendo assim, fazendo a transformação $r \mapsto y$ com

$$y = \frac{y^{n-1}}{1 + B(\theta)y^{n-1}},$$

a equação diferencial (4.6.4) se torna

$$\frac{dy}{d\theta} = -(n-1)A(\theta)B(\theta)y^3 + [(n-1)A(\theta) - B'(\theta)]y^2.$$

Conseqüentemente, conclui-se que o sistema (4.6.2) tem uma relação intrínseca com a equação (4.6.1), se forem considerados p e q como polinômios trigonométricos com $a = 0$ e $b = 2\pi$. Além disso, depois de tais manipulações fica claro que as definições de solução periódica e de centro do sistema (4.6.2) coincidem com as definições feitas para a equação (4.6.1).

Sendo assim, o análogo do problema do centro-foco nesse caso é entender sobre quais condições a equação (4.6.1) possui um centro.

Como visto antes, será assumido sempre que $a = 0$ e $b = 1$. Defina P e Q por

$$P(x) = \int_0^x p(\xi)d\xi, \quad Q(x) = \int_0^x q(\xi)d\xi,$$

uma vez que foi visto que a solução $y(x, c)$ é analítica na variável c , existe série de Taylor tal que $y(x, c) = \sum \alpha_i(x)c^i$. Dessa forma, o problema do centro-foco se resume a verificar se

$$c = y(0, c) = y(1, c) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(1)c^i$$

para todo c suficientemente pequeno.

Apesar de parecer muito simples de ser feito do ponto de vista teórico, do ponto de vista prático esse método é extremamente complicado. A fim de tentar contornar essas complicações, o problema do Centro-Foco foi simplificado, dando origem ao problema modelo.

O problema modelo tenta responder quais condições devem existir na equação

$$\frac{dy}{dt} = dx = p(x)y^2 + \varepsilon q(x)y^3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.6.5)$$

para que exista um centro para todo ε suficientemente pequeno.

Sabe-se da teoria de equações diferenciais que a seguinte sequência converge para uma solução da equação diferencial (4.6.5), se $y(0) = c$:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= c \\ \phi_2(x) &= c + \int_0^x p(x)\phi_1^2(x) + \varepsilon q(x)\phi_1^3(x) dx = c + c^2P(x) + \varepsilon Q(x)c^3 \\ &\vdots \\ \phi_i(x) &= c + \int_0^x p(x)\phi_{i-1}^2 + \varepsilon q(x)\phi_{i-1}^3(x) dx. \end{aligned}$$

Uma vez que tem-se como objetivo concluir que $y(0, c) = y(1, c)$, desenvolvendo os termos da sequência, consegue-se concluir que o sistema (4.6.5) possui um centro para todo ε suficientemente pequeno se, e somente se, forem satisfeitos

$$P(1) = P(0) = 0, \quad \int_0^1 P(x)^n q(x) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sendo assim, o problema se resume a encontrar quais funções P e Q satisfazem essas equações.

Uma condição simples, que garante um centro, é tentar concluir que P e Q são ambos polinômios de um polinômio A tal que $A(0) = A(1)$. É possível mostrar que essa condição garante simetria do sistema.

4.7 O problema do Centro-Foco tangente

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon P, \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon Q. \end{cases} \quad (4.7.1)$$

Onde o Hamiltoniano, H , é um polinômio de grau $n+1$ e a perturbação dos termos, P e Q são polinômios de grau m . Suponha ainda que o Hamiltoniano H tenha um ponto de Morse na origem, ou seja, $\partial H/\partial x = \partial H/\partial y = 0$ em $(0,0)$ e a matriz das derivadas segundas de H é positiva definida. Então pode-se escrever $H = H(0,0) + X^2 + Y^2$ para alguma mudança de variável conveniente e, dessa forma, o sistema (4.7.1) possui claramente um centro na origem para $\varepsilon = 0$. Sem perda de generalidade pode-se supor $H(0,0) = 0$. As curvas $X^2 + Y^2 = c$, para c próximo de 0, nos dão uma família de curvas fechadas tendendo para zero, chamadas de ciclos de anulação.

A origem do sistema é chamada de um centro tangente se

$$\oint_{\gamma_c} Pdy - Qdx \equiv 0$$

para γ_c um ciclo de anulação de $X^2 + Y^2 = c$ e c suficientemente pequeno.

O problema do centro-foco tangente pergunta sobre quais condições de P e Q o sistema (4.7.1) possui um centro tangente.

A resposta para essa questão é muito simples, para que exista o centro tangente P e Q devem satisfazer a equação

$$Pdy + Qdx = dA + BdH,$$

para A e B polinômios nas variáveis x e y . Nesse caso a 1-forma $Pdy - Qdx$ é chamada de relativamente exata.

5 O 16° Problema de Hilbert

Considere o sistema de equações diferenciais planares

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (5.0.1)$$

onde P_n e Q_n são polinômios em x, y e o grau máximo de P e Q é n . A segunda parte do 16° problema de Hilbert faz a seguinte pergunta:

Dado um inteiro n , qual é o número máximo de ciclos limites do sistema (5.0.1) para todos os possíveis P_n e Q_n ? E o que pode-se dizer sobre as posições relativas de tais ciclos limites?

Geralmente, o número máximo de ciclos limites é escrito como $H(n)$ e é chamado de número de Hilbert. Descobrir a quantidade e entender a disposição dos ciclos limites seria uma ferramenta importante para entender a dinâmica do sistema em questão.

Apesar dos esforços em volta desse problema, infelizmente essa questão continua em aberto até mesmo para o caso $n = 2$.

5.1 A versão fraca do 16° Problema de Hilbert

Seja $H = H(x, y)$ um polinômio em x, y de grau $m \geq 2$. As curvas de nível $\gamma_h \subset \{(x, y) : H(x, y) = h\}$ formam uma família contínua de ovais para $h_1 < h < h_2$. Considere a 1- forma polinomial $\omega = f(x, y)dy - g(x, y)dx$, onde $\max(\deg(f), \deg(g)) = n \geq 2$. Sendo assim, a versão fraca do 16° Problema de Hilbert é descrita por:

Dados os inteiros m e n , qual é o número máximo de zeros da integral Abeliiana?

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \omega$$

Será mostrado agora qual a relação desse problema com o 16° Problema de Hilbert.

Considere o seguinte sistema Hamiltoniano, com $H(x, y)$ um polinômio de grau m , tal que o sistema possui um centro na origem :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

e seu sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (5.1.2)$$

onde f e g são polinômios em x, y de grau no máximo n , e ε é suficientemente pequeno.

Suponha ainda que a família de ovais, $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$, depende continuamente do parâmetro $h \in (a, b)$. Então define-se a seguinte integral abeliana:

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} f(x, y)dy - g(x, y)dx.$$

Uma vez que o sistema (5.1.2) é Hamiltoniano para $\varepsilon = 0$, tem-se que a dinâmica em volta da origem é um centro. A pergunta natural a ser feita é quais órbitas continuam periódicas para toda perturbação suficientemente pequena ε .

Para responder tal questão, primeiramente relembre o conceito do mapa de retorno de Poincaré.

Proposição 5.1. *(Mapa de Poincaré) Seja F campo vetorial C^r definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Assuma que $\gamma = \{\varphi(t, p); t \in \mathbb{R}\}$ é solução T -periódica de $\dot{x} = F(x)$. Seja Σ seção transversal de F em p . Então existe $\Sigma_0 \subset \Sigma$ vizinhança de p (em Σ) e função $\tau : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , tal que $\tau(p) = T$ e $\pi(q) := \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$. Mais ainda, π é difeomorfismo C^r sobre sua imagem.*

Demonstração. Considere $f : S \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Sigma$, uma secção transversal tal que $f(0) = p$ e $f'(s)(\mathbb{R}^n)$ e $F(f(s))$ geram \mathbb{R}^n para todo s . Sem perda de generalidade, pode-se tomar a função $K : U \rightarrow \mathbb{R}$ tendo 0 como valor regular (isto é, $\nabla K(q) \neq 0$), de forma que $\Sigma = K^{-1}(0)$ (talvez seja necessário diminuir Σ no processo, mas isso não é um problema pois a conclusão do teorema fala apenas da existência de Σ_0).

Note que $\ker(\nabla K(q)) = T_q\Sigma$, onde $T_q\Sigma$ é o espaço tangente a Σ no ponto q . Com efeito, tomando $v \in T_p\Sigma$, existe uma curva $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma = K^{-1}(0)$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$, sendo assim

$$\langle \nabla K(q), v \rangle = \langle \nabla K(\lambda(0)), \lambda'(0) \rangle = \nabla K(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = (K \circ \lambda)'(0) = 0,$$

uma vez que $K(\lambda(t)) = 0$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sendo assim $T_p\Sigma \subset \ker(\nabla K(q))$, uma vez que ambos os espaços vetoriais possuem mesma dimensão tem-se que $T_p\Sigma = \ker(\nabla K(q))$, para todo $q \in \Sigma$.

Além disso, perceba que Σ é seção transversal de F em $p \Leftrightarrow F(p) \notin T_p\Sigma$, o que implica que $\nabla K(p) \cdot F(p) \neq 0$. Sendo assim, defina a função $L : D \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $L(t, x) = K(\varphi(t, x))$, sendo D o domínio do fluxo $\varphi(t, x)$. Observe que

$$L(T, p) = K(\varphi(T, p)) = K(p) = 0$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \nabla K(\varphi(T, p)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(T, p) \right) = \nabla K(p) \cdot F(p) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita na função L no ponto (T, p) , segue que existe $U_0 \subset U$, vizinhança de p , e uma função $\tau : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathbb{C}^r , tal que $\tau(p) = T$ e $L(\tau(x), x) = 0$. Tem-se então que

$$K(\varphi(\tau(x), x)) = 0 \Rightarrow \varphi(\tau(x), x) \in \Sigma, x \in U_0.$$

Derivando $K(\varphi(\tau(x), x))$ em $x = p$ obtém-se que

$$\begin{aligned} \nabla K(\varphi(\tau(p), p)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \tau'(p) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(p), p) \right) &= 0 \\ \nabla K(p) \cdot \left(F(p) \cdot \tau'(p) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \right) &= 0, \end{aligned}$$

dessa forma, $\text{Im} \left(F(p) \cdot \tau'(p) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \right) \subset \ker(\nabla K(p)) \subset T_p\Sigma$. Perceba que apenas isolando $\tau'(p)$ na equação acima, consegue-se que

$$\tau'(p) = \frac{-\nabla K(p) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p)}{\nabla K(p) \cdot F(p)}. \quad (5.1.3)$$

Defina agora $\pi : \Sigma' = \Sigma \cap U_0 \rightarrow \Sigma$, satisfazendo $\pi(q) := \varphi(\tau(q), q)$;

Afirmção 1: π é difeomorfismo local em p .

Relembre que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \cdot F(x) = F(\varphi(t, x))$ (um jeito fácil de ver isso é perceber que o fluxo $\varphi(s, x)$ conjuga a si mesmo para cada s fixo). Sendo assim

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \cdot F(p) = F(p), \quad (5.1.4)$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\pi'(p) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau(p), p) \cdot \tau'(p) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(p), p) \\
&= F(p) \cdot \tau'(p) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \\
\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) &= \pi'(p) - F(p) \cdot \tau'(p)
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Afirmação 1.1: $\ker(\pi'(p)) = \{0\}$.

Seja $v \in T_p \Sigma$ ($\nabla K(p) \cdot v = 0$), tal que $\pi'(p) \cdot v = 0$. Segue de (5.1.5) que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \cdot v = -F(p) \cdot \tau'(p) \cdot v, \tag{5.1.6}$$

além disso, tem-se por (5.1.4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \cdot v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \cdot F(p) \cdot \tau'(p) \cdot v \\
\Rightarrow F(p) \cdot \tau'(p) \cdot v &= -v,
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

juntando (5.1.6) com (5.1.7) tem-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p) \cdot v = v,$$

perceba que por (5.1.3) e o resultado acima, consegue-se

$$\begin{aligned}
\tau'(p) \cdot v &= \frac{-\nabla K(p) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, p)}{\nabla K(p) \cdot F(p)} \cdot v \\
&= -\frac{\nabla K(p) \cdot v}{\nabla K(p) \cdot F(p)} = 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $v \in \ker(\nabla K(p))$. Utilizando esse resultado, em (5.1.6) obtém-se que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, p) \cdot v = -F(p) \cdot \tau'(p) \cdot v = 0,$$

uma vez que é sabido que $\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, p)$ é um isomorfismo, tem-se que $v = 0$. Concluindo que o núcleo de $\pi'(p)$ é apenas o ponto 0.

Utilizando o Teorema da Função Inversa, segue que existe $\Sigma_0 \subset \Sigma'$ tal que $\pi|_{\Sigma_0}$ é difeomorfismo local. \square

Será agora construído, uma seção transversal σ ao sistema (5.1.1) que corta os ovais $\{\gamma_h\}_{h_1 < h < h_2}$, e além disso, para cada ponto $x_\sigma \in \sigma$ existe uma função $\tau(x, \varepsilon)$ analítica, tal que o valor $\tau(x, \varepsilon)$ corresponde localmente ao tempo necessário a órbita que começa em x e tem perturbação ε , retornar à σ .

Para mostrar a existência de tal função antes será necessário demonstrar alguns teoremas a respeito da regularidade das soluções de EDO's analíticas.

Lema 5.1. (Fórmula de Faà di Bruno) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe \mathcal{C}^∞ , então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio P_n com coeficientes não negativos satisfazendo,

$$\frac{d^n f(g)}{dx^n}(x) = P_n(f'(g(x)), \dots, f^{(n)}(g(x)), g'(x), \dots, g^{(n)}(x))$$

Demonstração. A prova é feita por indução

Caso $n = 1$.

Tomando $P_1(x, y) = xy$, tem-se que

$$\frac{df(g)}{dx}(x) = f'(g(x))g'(x) = P_1(f'(g(x)), g(x)).$$

Supondo válido para n . Então existe um polinômio P_n com coeficientes positivos tal que

$$\frac{d^n f(g)}{dx^n}(x) = P_n(f'(g(x)), \dots, f^{(n)}(g(x)), g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x))$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} f(g)}{dx^{n+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n f(g)}{dx^n} \right) \\ &= \frac{d}{dx} P_n(f'(g(x)), \dots, f^{(n)}(g(x)), g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_n}{\partial x_i} \frac{df^{(i)}}{dt} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial P_n}{\partial x_i} \frac{dg^{(i)}}{dt}, \end{aligned}$$

uma vez que os coeficiente de P_n são positivos, os coeficiente das derivadas parciais de P_n também são positivos, sendo assim, pela última igualdade é possível definir um polinômio P_{n+1} satisfazendo as propriedades requeridas. □

Notação 5.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, função de classe \mathcal{C}^∞ , denotamos $\partial^k f(x)$, como sendo o vetor

$$\partial^k f(x) := \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_{i_1}} \dots \partial x_n^{k_{i_n}}}(x) \right)_{k_{i_1} + \dots + k_{i_n} = k}.$$

Além disso quando for escrito $|\partial^k f|$, tal expressão deve ser entendida como

$$\left| \partial^k f(x) \right| := \left(\left| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_{i_1}} \dots \partial x_n^{k_{i_n}}}(x) \right| \right)_{k_{i_1} + \dots + k_{i_n} = k},$$

enquanto $\|\partial^k f(x)\|$ corresponde a norma do vetor $\partial^k f(x)$.

Lema 5.2. (Fórmula de Faà di Bruno II) Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, funções de classe \mathcal{C}^∞ , sendo que $g = (g_1, \dots, g_n)$, então para todo $k \in \mathbb{N}$, existe um polinômio P_k com coeficientes não negativos satisfazendo, satisfazendo

$$\frac{d^k f(g)}{dx^k}(x) = P_k(\partial f(g(x)), \dots, \partial^k f(g(x)), g'_1(x), \dots, g_1^{(k)}(x), \dots, g'_n(x), \dots, g_n^{(k)}(x)).$$

É importante notar que $\partial^k f(g(x))$, significa $\partial^k f$ aplicado no ponto $g(x)$.

A demonstração desse lema também é feita por indução e é análoga a anterior, porém um pouco mais trabalhosa.

Lema 5.3. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é analítica, então para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existem $r, C \in \mathbb{R}_+$, tais que

$$\left| f^{(n)}(x) \right|_{op} \leq Cr^{-n}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

sendo que,

$$\left| f^{(n)}(x) \right|_{op} = \sup \left\{ \left\| f^{(n)}(x) \frac{(y)^n}{\|y\|^n} \right\| ; \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

Demonstração. Como f é analítica, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança U_x , satisfazendo

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot (y-x)^{(n)}, \quad \forall y \in U_x,$$

de forma que a convergência dessa série é uniforme em U_x .

Uma vez que U_x é vizinhança de x , existe $r > 0$, tal que $B(x, 2r) \subset U_x$, e conseqüentemente $\overline{B(x, r)} \subset U_x$.

Sendo assim, para todo $z \in \overline{B(x, 1)}$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot (rz)^{(n)}$$

converge de maneira uniforme, o que implica que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} f^{(n)}(x) (rz)^{(n)} \right\|$$

converge para 0 de maneira uniforme.

Como toda seqüência de funções que converge uniformemente para 0 é uniformemente limitada, concluí-se a existência de $C \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left\| f^{(n)}(x) (rz)^{(n)} \right\| &< C, \quad \forall z \in \overline{B(x, 1)} \\ \frac{r^n}{n!} \left\| f^{(n)}(x) (z)^{(n)} \right\| &< C, \quad \forall z \in \overline{B(x, 1)} \\ \Rightarrow \left\| f^{(n)}(x) (z)^{(n)} \right\| &< Cr^{-n}n!, \quad \forall z \in \overline{B(x, 1)} \\ \Rightarrow \left\| f^{(n)}(x) \frac{(y)^{(n)}}{\|y\|^n} \right\| &< Cr^{-n}n!, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \Rightarrow \left| f^{(n)}(x) \right|_{op} &< Cr^{-n}n!. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. *Suponha $a > 0$ e $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica próxima à origem e $y(t)$ a única solução da EDO*

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0,$$

então y também é analítica numa vizinhança da origem.

Demonstração. Sabe-se do Teorema de Dependência Diferencial das Soluções de Equações Diferenciais que a função y é de classe \mathcal{C}^∞ , logo pode-se definir a seguinte função

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

será mostrado duas propriedades sobre u :

1. u está bem definida, *i.e.*; existe uma vizinhança da origem, tal que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

converge de maneira uniforme.

2. $u(t)$ resolve a EDO, $x' = f(x)$, $x(0) = 0$.

Prova de 1)

Uma vez que $y^{(n+1)} = \frac{d^n y'}{dt^n} = \frac{d^n f(y)}{dt^n}$, pelo Lema 5.1, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio P_n com coeficientes não negativos, satisfazendo

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{d^n f(y)}{dt^n} \\ &= P_n(f' \circ y, \dots, f^{(n)} \circ y, y', \dots, y^{(n)}), \end{aligned}$$

por indução, escrevendo cada $y^{(i)}$ na forma da última expressão, pode-se encontrar um polinômio Q_n , com coeficientes não negativos satisfazendo

$$y^{(n+1)} = Q_n(f' \circ y, \dots, f^{(n)} \circ y),$$

sendo assim,

$$y^{n+1}(0) = Q_n(f'(0), \dots, f^{(n)}(0)). \quad (5.1.8)$$

Uma vez que f é analítica, pelo Lema 5.3 existem $r, C \in \mathbb{R}$, tais que

$$|f^{(n)}(0)| < Cr^{-n}n!. \quad (5.1.9)$$

Defina a seguinte a função $g : (-r/2, r/2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{rC}{r-x},$$

e a EDO

$$z' = g(z), \quad z(0) = 0,$$

facilmente verificam-se que a função $z(t) = r - r\sqrt{1 - \frac{2Ct}{r}}$ resolve a EDO acima e z é analítica numa vizinhança da origem.

Além disso apenas aplicando as regras de derivação

$$g^{(n)}(0) = Cr^{-n}n!. \quad (5.1.10)$$

Uma vez que o polinômio Q_n tem apenas coeficientes não negativos, aliado com a existência dos resultado (5.1.8), (5.1.9) e (5.1.10), consegue-se a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |y^{(n+1)}(0)| &= |Q_n(f'(0), \dots, f^{(n)}(0))| \\ &\leq Q_n(|f'(0)|, \dots, |f^{(n)}(0)|) \\ &\leq Q_n(g'(0), \dots, g^{(n)}(0)) \\ &= z^{n+1}(0) \end{aligned}$$

como z é analítica numa vizinhança da origem, segue que existem K e $s \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} |z^{(n)}(0)| &\leq Ks^{-n}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ \Rightarrow |y^{(n)}(0)| &\leq Ks^{-n}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo $u(t)$ está definida para todo $t \in (-s/2, s/2)$ e a série converge de maneira uniforme, com efeito

$$|u(t)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} t^i \right| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} s^i \left(\frac{t}{s}\right)^i \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{y^{(i)}(0)}{i!} s^i \right| \left| \frac{t}{s} \right|^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} K \left(\frac{1}{2}\right)^i \leq 2K,$$

além disso, como

$$\left| \frac{y^{(i)}(0)}{i!} t^i \right| \leq K \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad \forall t \in \left(\frac{-s}{2}, \frac{s}{2}\right), \text{ e } \forall i \in \mathbb{N},$$

utilizando o teste M de Weierstrass consegue-se $u(t)$ convergem de maneira uniforme. Provando 1.

Prova de 2) Perceba que

$$\begin{aligned} (f \circ u)^{(n)}(0) &= P_n(f' \circ u(0), \dots, f^{(n)} \circ u'(0), \dots, u^{(n)}(0)) \\ &= P_n(f' \circ y(0), \dots, f^{(n)}(y(0)), y'(0), \dots, y^{(n)}(0)) \\ &= (f \circ y)^{(n)}(0) \\ &= (y')^{(n)}(0) \\ &= y^{(n+1)}(0) \\ &= u^{(n+1)}(0) \\ &= (u')^{(n)}(0), \end{aligned}$$

como u' e $f(u)$ são analíticas numa vizinhança da origem, e todas suas derivadas são iguais na origem, segue da analiticidade que $u' = f(u(t))$ próximo a 0. Do Teorema de Existência e Unicidade de Solução de Equações Diferenciais, tem-se que $y = u$ numa vizinhança de 0, o que implica que y é analítica próximo a origem. \square

Teorema 5.2. *Suponha $a > 0$ e $f : B(0, a) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função analítica próxima à origem e y a única solução da EDO*

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0,$$

então y também é analítica numa vizinhança da origem.

Demonstração. A prova será essencialmente uma adaptação do Teorema 2.1, sabe-se do Teorema de Dependência Diferencial das Soluções de Equações Diferenciais que a função que a função $y = (y_1, \dots, y_n)$ é de classe \mathcal{C}^∞ , logo para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pode-se definir a seguinte função

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_i^{(j)}(0)}{j!} t^j,$$

novamente será mostrado duas proposições sobre cada u_i :

1. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, u_i está bem definida, *i.e.*; existe uma vizinhança da origem, tal que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_i^{(j)}(0)}{j!} t^j$, convergem de maneira uniforme.
2. $u = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ resolve a EDO, $x' = f(x)$, $x(0) = 0$.

Prova de 1)

Uma vez que $y_i^{(k+1)} = \frac{d^k y_i'}{dt^k} = \frac{d^k f_i(y)}{dt^k}$, pelo Lema 5.2, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe um polinômio P_k com coeficientes não negativos satisfazendo

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} &= \frac{d^k f_i(y)}{dt^k} \\ &= P_k(\partial f_i \circ y, \dots, \partial^k f_i \circ y, y_1', \dots, y_1^{(k)}, \dots, y_n', \dots, y_n^{(k)}), \end{aligned}$$

mais uma vez, por indução, escrevendo cada $y_i^{(j)}$ na forma da última expressão, pode-se encontrar um polinômio Q_n , com coeficientes não negativos satisfazendo

$$y_i^{(k+1)} = Q_n(\partial f_i \circ y, \dots, \partial^k f_i^{(n)} \circ y). \quad (5.1.11)$$

Uma vez que f é analítica, pelo Lema 5.3 existem $r, C \in \mathbb{R}_+$, tais que

$$\left| f^{(n)}(0) \right|_{op} < Cr^{-n} n!. \quad (5.1.12)$$

Defina a seguinte a função $g : (-r/2, r/2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{rC}{r - x_1 - x_2 - \dots - x_n}, \dots, \frac{rC}{r - x_1 - \dots - x_n} \right)$$

e a EDO

$$z' = g(z), \quad z(0) = 0,$$

facilmente verificam-se que a função

$$z(t) = \left(r - r\sqrt{1 - \frac{2n Ct}{r}}, \dots, r - r\sqrt{1 - \frac{2n Ct}{r}} \right),$$

resolve a EDO acima e $z = (z_1, \dots, z_n)$ é analítica numa vizinhança da origem.

Além disso, apenas aplicando as regras de derivações para todo $i_1 + i_2 + \dots + i_n = k$ tem-se que

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(0) = Cr^{-k}k! \quad (5.1.13)$$

Uma vez que o polinômio Q_n tem apenas coeficientes não negativos, aliado com a existência dos resultado (5.1.11), (5.1.12) e (5.1.13), consegue-se a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |y_i^{(k+1)}(0)| &= \left| Q_n \left(\partial f_i(0), \dots, \partial^k f_i(0) \right) \right| \\ &\leq Q_n \left(|\partial f_i(0)|, \dots, |\partial^k f_i(0)| \right) \\ &\leq Q_n(\partial g(0), \dots, \partial g^k(0)) \\ &= z_i^{(k+1)}(0) \end{aligned}$$

uma, vez que cada $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ são analíticas numa vizinhança da origem, segue que existem K e $s \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \left| z_i^{(k)}(0) \right| &\leq Ks^{-k}k!, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \\ \Rightarrow \left| y_i^{(k)}(0) \right|_{op} &\leq Ks^{-k}k!, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo $u_i(t)$ está definida para todo $t \in (-s/2, s/2)$ e a série converge de maneira uniforme, com efeito

$$|u_i(t)| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_i^{(j)}(0)}{j!} t^j \right| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_i^{(j)}(0)}{j!} s^j \left(\frac{t}{s} \right)^j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{y_i^{(j)}(0)}{j!} s^j \right| \left| \frac{t}{s} \right|^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} K \left(\frac{1}{2} \right)^j \leq 2K,$$

além disso, como

$$\left| \frac{y_i^{(i)}(0)}{i!} t^i \right| \leq K \left(\frac{1}{2} \right)^i, \quad \forall t \in \left(\frac{-s}{2}, \frac{s}{2} \right), \text{ e } \forall i \in \mathbb{N},$$

o teste M de Weierstrass, mostra que cada $u_i(t)$ convergem de maneira uniforme.

Além disso, tal resultado implica que $u = (u_1, \dots, u_n)$ é analítica, pois cada projeção é analítica. Provando 1.

Prova de 2) Perceba que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
(f_i \circ u)^{(j)}(0) &= P_j \left(\partial f_i \circ u(0), \dots, \partial^j f_i \circ u(0), u'_1(0), \dots, u_1^{(n)}(0), \dots, u'_n(0), \dots, u_n^{(j)}(0) \right) \\
&= P_j \left(\partial f_i \circ y(0), \dots, \partial^j f_i \circ y(0), y'_1(0), \dots, y_1^{(n)}(0), \dots, y'_n(0), \dots, y_n^{(j)}(0) \right) \\
&= (f_i \circ y)^{(j)}(0) \\
&= (y'_i)^{(j)}(0) \\
&= y_i^{(j+1)}(0) \\
&= u_i^{(j+1)}(0) \\
&= (u'_i)^j(0),
\end{aligned}$$

como cada u'_i e $f_i(u)$ são analíticas numa vizinhança da origem, e todas suas derivadas são iguais na origem, implicando pela analiticidade que $u' = f(u(t))$ próximo a 0. Do Teorema de Existência e Unicidade de Solução de Equações Diferenciais, tem-se que $y = u$, numa vizinhança de 0, o que implica que y é analítica próximo a origem. \square

Corolário 5.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é analítica, então as soluções de $x' = f(x)$ são analíticas*

Demonstração. Seja $y : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução maximal do sistema

$$x' = f(x), \quad x(0) = y(0).$$

Tome $t_0 \in (\omega_-, \omega_+)$, note que $\gamma : (\omega_- - t_0, \omega_+ - t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\gamma(t) = y(t + t_0) - y(t_0)$, resolve a EDO

$$z' = f(z + y(t_0)), \quad z(0) = 0,$$

com efeito,

$$\gamma'(t) = y'(t + t_0) = f(y(t + t_0)) = f(y(t + t_0) - y(t_0) + y(t_0)) = f(\gamma(t) + y(t_0))$$

e

$$\gamma(0) = y(t_0) - y(t_0) = 0$$

Aplicando o Teorema 5.2, γ é analítica próxima a origem, o que implica que y é analítica em uma vizinhança de t_0 .

Como t_0 é arbitrário a demonstração se torna concluída. \square

Também é possível ser provado que se $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ é analítica, então as soluções do sistema

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0,$$

também dependem analiticamente do parâmetro ε e da condição inicial x_0 , i.e., o fluxo $\varphi(t, x_0, \varepsilon)$ da equação diferencial acima é analítica (ver [16]).

Considere agora a seguinte EDO.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \end{cases} \quad (5.1.14)$$

notoriamente a origem é uma singularidade do sistema (5.1.14). Lembre que $H(x, y) = (a/2)x^2 + by^2 + cxy + \mathcal{O}(x^3 + y^3)$, sendo assim, o Jacobiano aplicado na origem do campo associado ao sistema (5.1.8) é dado por

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix},$$

logo os autovalores de $J(0, 0)$ são:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2} \right)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2} \right),$$

aplicando o teorema de Hartman-Grobmann, tem-se que localmente existe uma sela ou um nó. Tome a seção σ , como sendo a imagem de uma variedade estável ou instável de (5.1.14). Logo, $\sigma = \{\gamma(t); t \in (\omega_-, \omega_+)\}$, sendo γ uma solução instável ou estável em relação à origem do sistema (5.1.14) e (ω_-, ω_+) o intervalo maximal de definição de γ . É importante notar que do Corolário 5.1 γ é uma função analítica.

Afirmção 1. σ é seção transversal de (5.1.1).

Basta notar que para todo $t \in (\omega_-, \omega_+)$, tem-se

$$\left\langle \gamma'(t), \left(-\frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)), \frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)) \right) \right\rangle = -\frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t)) \frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)) + \frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t)) = 0.$$

Construção de $\tau(x, \varepsilon)$.

Considere o ponto $x \in \sigma$, de forma que $\varphi(t, x, 0)$ é solução periódica de (5.1.1) e $\varphi(t, x, \varepsilon)$ o fluxo de (5.1.2), portanto existe $T \in \mathbb{R}$, satisfazendo $\varphi(0, x, 0) = \varphi(T, x, 0)$. Note que, da teoria de variedades, σ pode ser vista localmente como imagem inversa do valor regular 0 de uma função $K : U \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x \in \text{Int}(U)$ e $K^{-1}(0) \subset \sigma$, sendo K analítica.

Considere a função $G(t, x, \varepsilon) = K(\varphi(t, x, \varepsilon))$, note que $G(T, x, 0) = 0$, e além disso

$$\frac{\partial G}{\partial t}(T, x, 0) = \nabla K(x) \cdot F(x, 0) \neq 0.$$

Tal valor é diferente de zero pois, como mostrado na demonstração do teorema do mapa de retorno de Poincaré, tem-se que $F(p, 0) \notin T_p\sigma = \ker(\nabla K(p))$. Sendo assim, pelo Teorema da Função Implícita, conclui-se que existem as vizinhanças V_x e W_0 de x e 0 respectivamente e uma única função analítica $\tau : V_x \times W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$K(\varphi(\tau(y, \mu), y, \mu)) = 0,$$

o que implica que $\varphi(\tau(y, \mu), y, \mu) \in \sigma$, para todo $y \in V_x$ e $\mu \in W_0$.

Notação 5.2. Se f é função analítica então f é chamada de função de classe \mathcal{C}^ω .

Será mostrado agora que σ e $H(\sigma)$ são \mathcal{C}^ω -difeomorfos. Note que σ e (w_-, w_+) são obviamente \mathcal{C}^ω -difeomorfos, uma vez que a solução γ de (5.1.8) faz esse papel. Defina $f : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow H(\sigma)$, satisfazendo $f(t) = H(\gamma(t))$. Note que claramente f é função \mathcal{C}^ω . Será concluído que f é injetiva. Suponha que existam $t_1, t_2 \in (\omega_-, \omega_+)$ satisfazendo $f(t_1) = f(t_2)$, então pelo Teorema de Rolle existe $t_3 \in (t_1, t_2)$ satisfazendo $f'(t_3) = 0$, sendo assim

$$\begin{aligned} 0 &= f'(t_3) \\ &= \frac{d}{dt}H(\gamma(t_3)) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t_3))\gamma'_1(t_3) + \frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t_3))\gamma'_2(t_3) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t_3))\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t_3))\right)^2, \end{aligned}$$

o que implica que $\gamma(t_3)$ é uma singularidade de (5.1.14) e conseqüentemente singularidade de (5.1.1), o que é um absurdo.

Sendo assim, f é injetiva. A inversibilidade de f vem de $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in (\omega_-, \omega_+)$, como mostrado acima. Utilizando o Teorema da Função Inversa, f é \mathcal{C}^ω -difeomorfismo local, aliado com o fato de ser injetiva, tem-se que f é difeomorfismo de classe \mathcal{C}^ω entre (ω_-, ω_+) e $H(\sigma)$, pela transitividade tem-se o mesmo resultado para σ e $H(\sigma)$. Logo é possível chamar cada ponto de σ como o número real da curva de nível correspondente sem ambigüidade.

Dessa forma escolhe-se valores da função H para parametrizar σ e denota-se $\gamma(h, \varepsilon)$ como sendo a órbita perturbada do sistema (5.1.1), começando no ponto h em σ . Identifica-se a próxima interseção da curva em questão com a reta σ de $P(h, \varepsilon)$ com σ . Define-se então $d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h$ como a função deslocamento. A Figura 1 representa tal procedimento.

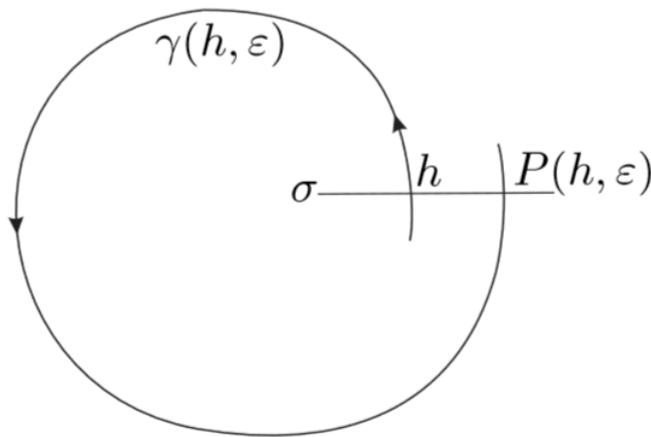


Figura 1: Função deslocamento, retirada da referência [1].

O objetivo é encontrar quais órbitas possuem $d(h, \varepsilon) \equiv 0$ para ε suficientemente pequeno.

Antes de responder tais questões serão mostrados dois lemas muito importantes

para o estudo da função $d(h, \varepsilon)$, o primeiro é referente ao comportamento das parametrizações de $\gamma(h, \varepsilon)$ e o segundo permitirá derivar em h funções do tipo $\int_{\gamma_h} f dx - g dy$.

Lema 5.4. *Sejam $\{\gamma_h\}$ uma família de órbitas periódicas referentes ao sistema (5.1.1) e $\{\gamma(h, \varepsilon)\}$ a perturbação dessas órbitas referente ao sistema (5.1.2). Logo tomando $\varphi(t)$ órbita tal que $Im(\varphi) = \gamma_h$ e $\varphi_\varepsilon(t)$ é órbita que satisfaz $Im(\varphi_\varepsilon) = \gamma(h, \varepsilon)$, onde $Im(f)$ é definido como a imagem da função f , então existe uma função ϕ de classe C^ω tal que*

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t) + \varepsilon\phi(t).$$

Demonstração. Do Corolário 5.1 conclui-se, uma vez que H , f , e g são polinômios, a solução $\psi(t, (x_0, y_0), \varepsilon)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g(x, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \end{cases}$$

é de classe C^ω , sendo assim uma função $\bar{\phi}$ de classe C^ω satisfazendo

$$\psi(t, (x_0, y_0), \varepsilon) = \psi(t, (x_0, y_0), 0) + \varepsilon\bar{\phi}(t).$$

Sendo assim, tomando $(x_0, y_0) = (\bar{x}, \bar{y})$, existe $\phi(t)$ de classe C^ω , satisfazendo

$$\psi(t, (\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) = \psi(t, (\bar{x}, \bar{y}), 0) + \varepsilon\phi(t)$$

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t) + \varepsilon\phi(t).$$

O que termina a demonstração. □

Lema 5.5. *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 , então se $F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(t, x) dx$, tem-se que*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + g'(t)f(t, g(t)) - h'(t)f(t, h(t)).$$

Demonstração. Primeiramente, tem-se que

$$\begin{aligned} F(t + \varepsilon) - F(t) &= \int_{h(t+\varepsilon)}^{g(t+\varepsilon)} f(t + \varepsilon, x) dx - \int_{h(t)}^{g(t)} f(t, x) dx \\ &= \int_{h(t)}^{g(t)} f(t + \varepsilon, x) - f(t, x) dx + \int_{g(t)}^{g(t+\varepsilon)} f(t + \varepsilon, x) dx + \int_{h(t+\varepsilon)}^{h(t)} f(t + \varepsilon, x) dx. \end{aligned}$$

Primeiro será mostrado que dada uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, um compacto K e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in K$ e $s \in (t - \delta, t + \delta)$, $|\phi(s, x) - \phi(t, x)| < \varepsilon$.

Para ver isso, suponha o contrário, logo: para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in K$ e $t_n \in [t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}]$, tal que

$$|\phi(t_n, x_n) - \phi(t, x_n)| > n,$$

como K é compacto, então a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, então existe $x_0 \in K$, tais que $x_{n_k} \rightarrow x_0$, quando $k \rightarrow \infty$, portanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |\phi(t_{n_k}, x_{n_k}) - \phi(t, x_{n_k})| &> \lim_{k \rightarrow \infty} n_k \\ 0 = |\phi(t, x_0) - \phi(t, x_0)| &> \infty, \end{aligned}$$

o que resulta num absurdo.

Do teorema do valor médio tem-se que, para todo $\delta > 0$, existe $t^* \in (t, t + \delta)$ tal que

$$f(t + \delta, x) - f(t, x) = \delta \frac{df(t^*, x)}{dt},$$

por outro lado, dado $t \in \mathbb{R}$, existem $a, b \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\sup_{t \in B(t, 1)} f(t) \leq a, \quad b \leq \inf_{t \in B(t, 1)} g(t) \quad \text{e} \quad b < a,$$

uma vez que df/dt é contínua, para todo $\eta > 0$ existe $1 > \tilde{\delta} > 0$ tal que, $\forall x \in [b, a]$ e $\forall s \in [t - s, t + s]$

$$\left| \frac{\partial f(s, x)}{\partial t} - \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| < \frac{\eta}{|b - a|},$$

sendo assim, dado $\eta > 0$, segue que para todo $0 < \varepsilon < \tilde{\delta}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{h(t)}^{g(t)} f(t + \varepsilon, x) - f(t, x) dx - \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx \right| &= \left| \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{f(t + \varepsilon, x) - f(t, x)}{\varepsilon} dx - \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx \right| \\ &= \left| \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\varepsilon \frac{\partial f(t^*, x)}{\partial t}}{\varepsilon} dx - \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx \right| \\ &\leq \int_{h(t)}^{g(t)} \left| \frac{\partial f(t^*, x)}{\partial t} - \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| dx \\ &\leq \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\eta}{|a - b|} \\ &\leq \frac{|g(t) - h(t)|}{|a - b|} \eta \\ &\leq \eta, \end{aligned}$$

conclui-se assim que $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_{h(t)}^{g(t)} f(t + \varepsilon, x) - f(t, x) dx \rightarrow \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx$.

Ainda mais, observe que

$$(g(t + \varepsilon) - g(t))m_\varepsilon \leq \int_{g(t)}^{g(t+\varepsilon)} f(t + \varepsilon, x)dx \leq (g(t + \varepsilon) - g(t))M_\varepsilon, \quad \text{se } g(t + \varepsilon) > g(t),$$

e

$$(g(t) - g(t + \varepsilon))m_\varepsilon \leq \int_{g(t+\varepsilon)}^{g(t)} f(t + \varepsilon, x)dx \leq (g(t + \varepsilon) - g(t))M_\varepsilon, \quad \text{se } g(t + \varepsilon) < g(t),$$

onde $m_\varepsilon = \inf\{f(t+\varepsilon, x), x \in [g(t), g(t+\varepsilon)]\}$ e $M_\varepsilon = \sup\{f(t+\varepsilon, x), x \in [g(t), g(t+\varepsilon)]\}$.

Segue que

$$\frac{g(t + \varepsilon) - g(t)}{\varepsilon}m_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{g(t)}^{g(t+\varepsilon)} f(t + \varepsilon, x)dx \leq \frac{g(t + \varepsilon) - g(t)}{\varepsilon}M_\varepsilon, \quad \text{se } g(t + \varepsilon) > g(t),$$

e

$$\frac{g(t) - g(t + \varepsilon)}{\varepsilon}m_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{g(t+\varepsilon)}^{g(t)} f(t + \varepsilon, x)dx \leq \frac{g(t + \varepsilon) - g(t)}{\varepsilon}M_\varepsilon, \quad \text{se } g(t + \varepsilon) < g(t),$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se que $m_\varepsilon \rightarrow f(t, g(t))$ e $M_\varepsilon \rightarrow f(t, g(t))$, logo,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{g(t)}^{g(t+\varepsilon)} f(t + \varepsilon, x)dx \rightarrow g'(t)f(t, g(t)), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

utilizando uma análise análoga, conclui-se que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{h(t+\varepsilon)}^{h(t)} f(t + \varepsilon, x)dx \rightarrow -h'(t)f(t, h(t)), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} \int_{h(t)}^{g(t)} f(t, x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(t + \varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} = \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + g'(t)f(t, g(t)) - h'(t)f(t, h(t)).$$

□

Teorema 5.3. (Poincaré - Pontryagin) Tem-se que

$$d(h, \varepsilon) = \varepsilon(I(h) + \varepsilon\phi(h, \varepsilon)), \quad \text{para } \varepsilon \rightarrow 0,$$

onde $\phi(h, \varepsilon)$ é uma função de classe \mathcal{C}^ω e uniformemente limitada para (h, ε) em uma região compacta próxima a $(h, 0)$, $h \in (a, b)$.

Demonstração. Seja φ_ε uma parametrização de $\gamma(h, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} d(h, \varepsilon) &= P(h, \varepsilon) - h \\ &= H(\varphi_\varepsilon(b)) - H(\varphi_\varepsilon(a)) \\ &= \int_{\gamma(h, \varepsilon)} dH \\ &= \int_{\gamma(h, \varepsilon)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt, \end{aligned}$$

do sistema (5.0.1) tira-se que

$$\begin{aligned}
d(h, \varepsilon) &= \int_{\gamma(h, \varepsilon)} \frac{\partial H}{\partial x} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, y) \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, y) \right) dt \\
&= \varepsilon \int_{\gamma(h, \varepsilon)} \frac{\partial H}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y} g(x, y) dt \\
&= \varepsilon \int_{\gamma(h, \varepsilon)} f(x, y) \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon g(x, y) \right) + g(x, y) \left(-\frac{dx}{dt} + \varepsilon f(x, y) \right) dt \\
&= \varepsilon \int_{\gamma(h, \varepsilon)} f(x, y) \frac{dy}{dt} - g(x, y) \frac{dx}{dt} dt \\
&= \varepsilon \int_{\gamma(h, \varepsilon)} f dy - g dx
\end{aligned}$$

perceba que uma vez que γ_h é compacto, segue que $\gamma(h, \varepsilon) \rightarrow \gamma_h$ de maneira uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Defina $F(h, \varepsilon) := \int_{\gamma(h, \varepsilon)} f dy - g dx$, será mostrado que F é de classe \mathcal{C}^ω . Lembre que pela construção de d feita anteriormente, existe um \mathcal{C}^ω -difeomorfismo entre σ e $H(\sigma)$ de forma que, para todo $h \in H(\sigma)$, tem-se $H(\mu(h)) = h$.

Seja $\varphi(t, h, \varepsilon)$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g(x, y), \\ (x(0), y(0)) = \mu(h), \end{cases}$$

uma vez que μ e as soluções do sistema acima são de classe \mathcal{C}^ω , é evidente que $\varphi(t, h, \varepsilon)$ é de classe \mathcal{C}^ω .

Foi visto que durante a construção do seguimento σ que para cada x fixo existe um mapa τ de classe \mathcal{C}^ω tal que $\tau(y, \varepsilon)$ corresponde ao tempo de primeiro retorno da solução para a transversal sigma, para y suficientemente próximo de x e ε suficientemente pequeno. Sendo assim, dado um ponto (h, ε) , com ε suficientemente pequeno, tem-se que

$$F(h, \varepsilon) = \int_{\gamma(h, \varepsilon)} f dy - g dx = \int_0^{\tau(\mu(h), \varepsilon)} f(\varphi(t, h, \varepsilon)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, h, \varepsilon) - g(\varphi(t, h, \varepsilon)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, h, \varepsilon) dt$$

utilizando o Lema 5.5, tem-se claramente que F é função \mathcal{C}^ω , logo existe uma função ϕ de classe \mathcal{C}^ω (pois F' será analítica), satisfazendo

$$\begin{aligned}
F(h, \varepsilon) &= F(h, 0) + \varepsilon \phi(h, \varepsilon) \\
&= I(h) + \varepsilon \phi(h, \varepsilon), \quad \forall -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0,
\end{aligned}$$

juntando os dois resultados acima,

$$\begin{aligned}
d(h, \varepsilon) &= \varepsilon(F(h, \varepsilon)) \\
&= \varepsilon(I(h) + \varepsilon \phi(\varepsilon, h)), \quad \forall -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

A existência dos compactos cuja função ϕ é uniformemente limitada é garantida pela construção da função τ , para todo ponto $(h, 0)$ existe uma vizinhança $V_h \times W_0$, tal que $\tau(\mu(h), \varepsilon)$ está bem definida, sendo assim é possível encontrar uma vizinhança compacta de $(h, 0)$ que está contida em $V_h \times W_0$ e conseqüentemente ϕ está bem definida e é limitada pela continuidade no compacto em questão.

O que completa a demonstração. □

Note que as manipulações feitas em todos os passos não dependem da escolha da transversal σ .

Será utilizada a seguinte notação: $X_{H,\varepsilon}$ corresponde ao sistema perturbado (5.1.1) e $X_H = X_{H,0}$.

Definição 5.1. *Se existir $h^* \in (a, b)$ e $\varepsilon^* > 0$ tal que $X_{H,\varepsilon}$ possui um ciclo limite Γ_ε com $0 < |\varepsilon| < \varepsilon^*$, e Γ_ε tende para γ_{h^*} quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então é dito que Γ_ε bifurca para γ_{h^*} . Refere-se ao ciclo limite Γ_ε de $X_{H,\varepsilon}$ como bifurcado do conjunto de ovais $\bigcup_{h \in (a,b)} \gamma_h$ se existe $h \in (a, b)$ tal que Γ_ε bifurca de γ_h .*

Sendo assim, é possível mostrar o seguinte teorema, que conecta a versão fraca do 16° problema de Hilbert com o 16° problema de Hilbert.

Teorema 5.4. *Suponha que $I(h)$ não é identicamente nulo para $h \in (a, b)$, então as seguintes sentenças são satisfeitas:*

1. *Se $X_{H,\varepsilon}$ tem um ciclo limite bifurcando de γ_{h^*} , então $I(h^*) = 0$.*
2. *Se existe $h^* \in (a, b)$ tal que $I(h^*) = 0$ e $I'(h^*) \neq 0$, então $X_{H,\varepsilon}$ tem um único ciclo limite bifurcando de γ_{h^*} .*
3. *Se existe $h^* \in (a, b)$ tal que $I(h^*) = I'(h^*) = \dots = I^{(k-1)}(h^*) = 0$, e $I^{(k)}(h^*) \neq 0$, então $X_{H,\varepsilon}$ tem no máximo k ciclos limites bifurcando do mesmo γ_{h^*} , contando as multiplicidades de cada ciclo.*
4. *O número (contando as multiplicidades) de ciclos limites de $X_{H,\varepsilon}$ bifurcando do conjunto de ovais $\bigcup_{h \in (a,b)} \gamma_h$ de X_H é limitado pelo número de zeros isolados (contando as multiplicidades) da integral abeliana $I(h)$, para $h \in (a, b)$.*

Demonstração. **1)** Suponha a existência de Γ_ε ciclo limite de $X_{H,\varepsilon}$, segue do Teorema de Poincaré-Pontryagin, que existe $\varepsilon^* > 0$ e $h_\varepsilon \rightarrow h^*$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, satisfazendo

$$d(h_\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon I(h) + \varepsilon^2 \phi(h_\varepsilon, \varepsilon) \equiv 0, \quad 0 < |\varepsilon| < \varepsilon^*.$$

Dessa forma, dividindo por ε os dois lados da igualdade obtém-se

$$I(h_\varepsilon) + \varepsilon \phi(h, \varepsilon) \equiv 0, \quad 0 < |\varepsilon| < \varepsilon^*.$$

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se que $I(h^*) = 0$.

2) Suponha que exista $h^* \in (a, b)$ de forma que $I(h^*) = 0$ e $I'(h^*) \neq 0$. Defina

$$\tilde{d}(h, \varepsilon) = \frac{d(h, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 0,$$

utilizando o Teorema de Poincaré-Pontryagin

$$\tilde{d}(h, \varepsilon) = I(h) + \varepsilon\phi(h, \varepsilon),$$

sendo ϕ de classe C^∞ e uniformemente limitado, numa vizinhança compacta de $(h^*, 0)$.

Uma vez que

$$\tilde{d}(h^*, 0) = 0, \text{ e } \frac{\tilde{d}}{dh}(h^*, 0) = I'(h^*) \neq 0,$$

aplicando o Teorema da Função Implícita na função \tilde{d} no ponto $(h^*, 0)$, conclui-se que existem vizinhanças $V \subset \mathbb{R}$ e $W \subset \mathbb{R}$, de 0 e h^* respectivamente, e uma única função diferenciável $\xi : V \rightarrow W$, satisfazendo $\xi(0) = h^*$, tal que

$$d(\xi(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \in V,$$

uma vez que ξ é a única função com essa propriedade segue que existe um único ciclo limite bifurcando de γ_h^* . Uma vez que ξ é única, tem-se a existência de apenas um ciclo limite.

3) Considere $h^* \in (a, b)$ de forma que $I(h^*) = I'(h^*) = \dots = I^{(k-1)}(h^*) = 0$, e $I^{(k)}(h^*) \neq 0$. Precisa ser mostrado que existem $\delta > 0$ e $\eta > 0$, tais que para todo $(h, \varepsilon) \in U = \{|h - h^*| < \eta, |\varepsilon| < \delta\}$, a função $d(h, \varepsilon)$ tem no máximo k zeros em h . Suponhamos por redução ao absurdo que existem sequências $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tais que $\varepsilon_n > 0$ e $\eta_n > 0$ quando $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\eta_n \rightarrow 0$, de forma que para todo ε_n , $d(h, \varepsilon_n)/\varepsilon_n$ tem ao menos $k + 1$ raízes, contando as multiplicidades, com $h \in A = \{h; |h - h^*| < \eta_n\}$.

Segue que existem $h_{1,n}, h_{2,n}, \dots, h_{k+1,n} \in A$, caso para algum i , $h_{i,n}$ possua multiplicidade maior do que um, ele pode ser considerado mais de uma vez nessa lista, além disso supõe-se que $h_1 \leq \dots \leq h_{k+1}$, note que tal relação é verificada por hipótese.

$$\frac{d(h_{1,n}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \dots = \frac{d(h_{k+1,n}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 0,$$

utilizando o Teorema de Rolle, existem $h_{1,n}^{(1)} \leq \dots \leq h_{k,n}^{(1)}$, tal que $h_{i,n} \leq h_{i,n}^{(1)} \leq h_{i+1,n}$,

$$\frac{d}{dh} \frac{d(h_{1,n}^{(1)}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \dots = \frac{d}{dh} \frac{d(h_{k,n}^{(1)}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 0,$$

continuando esse processo conseguimos encontrar $h_{1,n}^{(i)}, \dots, h_{k+1-i,n}^{(i)}$, satisfazendo

$$\frac{d^i}{dh^i} \frac{d(h_{1,n}^{(i)}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \dots = \frac{d^i}{dh^i} \frac{d(h_{k+1-i,n}^{(i)}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 0.$$

Note que para $i = k$, tem-se a existência de $h_1^{(k)}$ de forma que

$$\frac{d^k}{dh^k} \frac{d(h_{1,n}^{(k)}, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 0,$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, tem-se $h_{1,n}^{(k)} \rightarrow h^*$, note que

$$\frac{d^k I}{dh^k}(h_{1,n}^{(k)}) + \varepsilon_n \frac{\partial^k \phi}{\partial h^k}(h_{1,n}^{(k)}, \varepsilon_n) = 0,$$

fazendo $n \rightarrow \infty$ obtém-se que $I^{(k)}(h) = 0$ o que é um absurdo.

4) Segue imediatamente da aplicação conjunta das sentenças (1), (2) e (3). \square

Note que o Teorema de Poincaré-Pontryagin diz que a função $d(h, \varepsilon)$ é \mathcal{C}^∞ , sendo assim, pode-se expressar $d(h, \varepsilon)$ pela seguinte série:

$$d(h, \varepsilon) = \varepsilon I_1(h) + \varepsilon^2 I_2(h) + \dots + \varepsilon^j I_j(h) + \mathcal{O}(\varepsilon^{j+1}),$$

note que pelos teoremas anteriores conclui-se que $I_1(h) \equiv I(h)$, para ε suficientemente pequeno. Sendo assim, uma pergunta natural seria: “Existe alguma fórmula fechada para $I_k(h)$ de forma que $I_k(h)$ não dependa das soluções da equação diferencial?”

Para responder, tal pergunta denota-se

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy, \quad \omega = f dy - g dx,$$

consequentemente, pode-se escrever as equações (5.1.1) e (5.1.2) em uma forma mais compacta, sendo caracterizadas por $dH = 0$ e $dH - \varepsilon\omega = 0$. Assim como antes, assume-se que $\deg(H) = n + 1$, $\max(\deg(f, h)) = n$ e $\gamma_h = H^{-1}(h)$.

Segue dos teoremas passados e do fato que $dH - \varepsilon\omega = 0$ sobre a curva $\gamma(h, \varepsilon)$ que

$$\begin{aligned} d(h, \varepsilon) &= \int_{\gamma(h, \varepsilon)} dH \\ &= \int_{\gamma(h, \varepsilon)} \varepsilon\omega \\ &= \varepsilon \int_{\gamma(h, \varepsilon)} f dy - g dx, \end{aligned}$$

Fazendo os mesmos passos da demonstração do Teorema Poincaré-Pontryagin, tem-se que existe uma função ϕ de classe \mathcal{C}^ω tal que

$$\begin{aligned} d(h, \varepsilon) &= \varepsilon \int_{\gamma_h} f dy - g dx + \varepsilon^2 \phi(h, \varepsilon) \\ &= \varepsilon \int_{\gamma_h} \omega + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Será dito que um polinômio H satisfaz a condição (*) se, e somente se, para toda 1-forma polinomial ω ocorre:

$$\int_{\gamma} \omega \Leftrightarrow \text{existem polinômios } q \text{ e } R \text{ tal que } \omega = qdH + dR \quad (*)$$

Se H satisfaz a condição (*) então pode-se provar o seguinte teorema que caracteriza a aproximação da n -ésima ordem de d .

Teorema 5.5. *Assuma que H satisfaz a condição (*) e $I_j(h) \equiv 0$ (referente a (5.1.2)), para $j = 1, 2, \dots, k$. Então existem $q_1, q_2, \dots, q_k; R_1, \dots, R_k$ tais que $\omega = q_1 dH + dR_1$, $q_1 \omega = q_2 dH + dR_2, \dots, q_{k-1} \omega = q_k dH + dR_k$ e*

$$I_{k+1}(h) = \int_{\gamma_h} q_k \omega.$$

5.1.1 Estudo da Função Período

Será a mesma notação anterior para os ovais $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$, sendo H uma função Hamiltoniana de um sistema Hamiltoniano planar. Cada γ_h é uma órbita periódica do sistema, sendo assim, tem-se uma função período $T(h)$ que associa cada número h ao respectivo período de γ_h , com $h \in (a, b)$. Se a função T for constante para todo h , diz-se que a família $\{\gamma_h\}_{h \in (a,b)}$ possui período isócrono. Se um centro é rodeado por uma família $\{\gamma_h\}$ de período isócrono, então o centro do sistema é chamado de centro isócrono. Se a função período é crescente ou decrescente, a função período é chamada de monótona. Caso contrário, a função período tem pontos críticos.

Seja p um centro do campo de vetores planar suave X na família de órbitas periódicas D . É possível caracterizar os centros isócronos pela seguinte equivalência:

1. p é um centro isócrono.
2. Existe uma mudança de variáveis suave na vizinhança de p que lineariza X .
3. Existe um campo de vetores transversal U , que comuta com X , isto é, $[X, U] = (DU)X - (DX)U = 0$.
4. Existe um campo de vetores U , e uma função escala μ tal que $[X, U] = \mu X$ e

$$\int_0^{T_r} \mu(x(t), y(t)) dt = 0$$

onde $\gamma = \{\varphi(t) = (x(t), y(t)), t \in [0, T_r]\}$ é qualquer órbita de X em D , e T_r é seu período. Nesse caso U é chamado de normalizador de X .

Para sistemas perturbados, tem-se o seguinte teorema que tenta caracterizar a função período neste caso.

Teorema 5.6. *Suponha que o campo de vetores X tem um centro isócrono de período T_0 em D . Considere o campo U transversal a X , tal que $[X, U] = 0$. Seja $\gamma(t) := \{\varphi(t, \psi(h)), t \in [0, T_0]\}$ o conjunto das orbitas de X em D parametrizado pelo fluxo de U . Considere a família de campo de vetores $X_\varepsilon = X + \varepsilon Y$ tendo também um centro, escreva Y como $Y = aX + bU$ e seja $\gamma_\varepsilon(h)$ uma órbita fechada de X_ε passando por $\psi(h)$. As seguintes sentenças ocorrem:*

1. A função período associada a $\gamma_\varepsilon(h)$ é

$$T_{\gamma_\varepsilon}(h) = T_0 + \varepsilon T_1(h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

sendo que

$$T_1(h) = - \int_0^{T_0} a(\varphi(t; \varphi(h))) dt.$$

2. A derivada de T_1 com respeito a h é:

$$T_1'(h) = - \int_0^{T_0} \nabla a(x) \cdot U(x)|_{\{x=\varphi(t; \psi(h))\}} dt.$$

3. Se h^* é um zero simples de $T_1'(h)$, então para um ε pequeno existe um período crítico de X_ε próximo de h^* que tende para h^* quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.2 Método Baseado nas Equações de Picard-Fuchs

Um problema muito comum no estudo de integrais Abelianas é encontrar uma cota superior para o seu respectivo número de raízes, nesta subseção será apresentado via exemplo, uma forma de encontrar essa cota superior por meio das equações de Picard-Fuchs.

Considere o seguinte Hamiltoniano elíptico de grau 3:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x, \quad (5.2.1)$$

e a família de ovais associada

$$\{\gamma_h\} = \left\{ (x, y) : H(x, y) = h, -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3} \right\}. \quad (5.2.2)$$

Denote o campo Hamiltoniano correspondente por X_H . Fazendo uma análise sobre as curvas de nível de $H(x, y) = h$, é possível ver que quando $h \rightarrow -2/3$ o oval γ_h se degenera para o centro de X_H em $(-1, 0)$, enquanto se $h \rightarrow 2/3$, γ_h tende a uma órbita homoclínica que tem como α - e w -limite $(-1, 0)$ (ver [1]). Além disso, considere o seguinte sistema perturbado de X_h :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \varepsilon(\alpha + x)y, \end{cases} \quad (5.2.3)$$

onde α é uma constante e ε é um parâmetro pequeno. Define-se a seguinte família de integrais:

$$I_0(h) = \oint_{\gamma_h} x^j y dx, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (5.2.4)$$

perceba que para $j = 0$, o Teorema de Green garante que I_0 é igual à área da região delimitada pela curva fechada γ_h , sendo assim $I_0(h) > 0, \forall h \in (-2/3, 2/3)$.

Note que se $(x, y) \in H^{-1}(h)$, então $H(x, y) = h = H(x, -y)$, implicando que $(x, -y) \in H^{-1}(h)$; dessa forma os caminhos em γ_h possuem simetria no eixo x . Sejam $a(h)$, $b(h)$, os pontos onde γ_h toca o eixo x . Sendo que $a(h) < b(h)$. Nesse sentido, conclui-se que

$$\begin{aligned} I_j(h) &= \oint_{\gamma_h} x^j y dx \\ &= 2 \int_{a(h)}^{b(h)} x^j y(h, x) dx \\ &= 2 \int_{a(h)}^{b(h)} x^j \sqrt{2h + \frac{2x^3}{3} - 2x} dx \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

e

$$I'_j(h) = \frac{d}{dh} \oint_{\gamma_h} x^j y dx,$$

utilizando o Lema 5.5,

$$\begin{aligned}
I'_j(h) &= \oint_{\gamma_h} \frac{\partial x^j y(h, x)}{\partial h} dx \\
&= 2 \int_{a(h)}^{b(h)} \frac{\partial}{\partial h} \left(x^j \sqrt{2h + \frac{2x^3}{3} - 2x} \right) dx + b'(h)b(h)y(h, b(h)) + a'(h)a(h)y(h, a(h)) \\
&= 2 \int_{a(h)}^{b(h)} x^j \frac{1}{\sqrt{2h + \frac{2x^3}{3} - 2x}} dx \\
&= 2 \int_{a(h)}^{b(h)} \frac{x^j}{y(h, x)} dx \\
&= \oint_{\gamma_h} \frac{x^j}{y} dx, \tag{5.2.6}
\end{aligned}$$

sendo que $y(h, x) \geq 0$ é obtido através da equação $H(x, y) = h$, além disso percebe-se que a igualdade da terceira linha ocorre uma vez que, por construção, $y(h, b(h)) = y(h, a(h)) = 0$.

Seja I a integral Abeliana referente ao sistema (5.2.3). Tem-se que

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} (\alpha + x)y dx = \alpha I_0(h) + I_1(h).$$

O objetivo dessa subseção é concluir que $I(h)$ possui no máximo uma raiz para $h \in (-2/3, 2/3)$.

Para fazer isso, primeiramente deve-se calcular o limite $\lim_{h \rightarrow -2/3} \frac{I_1(h)}{I_0(h)}$. Note que para $h = -2/3$, a equação $x^3/3 + x = -2/3$, tem como raízes $x = -1$ e $x = 2$, sendo que -1 tem multiplicidade dois. Isso significa que quando $h \rightarrow -2/3$, $a(h) \rightarrow -1$ e $b(h) \rightarrow -1$.

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta > 0$ tal que para todo $h \in (-2/3, -2/3 + \delta)$, $|a(h) + 1| < \varepsilon$ e $|b(h) + 1| < \varepsilon$, logo, se $a(h) \leq x \leq b(h)$, implica que $|x + 1| < \varepsilon$. Note que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{I_1(h)}{I_0(h)} + 1 \right| &= \left| \frac{I_1(h) + I_0(h)}{I_0(h)} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{a(h)}^{b(h)} (x + 1)y(h, x) dx}{\int_{a(h)}^{b(h)} y(h, x) dx} \right| \\
&\leq \left| \frac{\int_{a(h)}^{b(h)} \varepsilon y(h, x) dx}{\int_{a(h)}^{b(h)} y(h, x) dx} \right| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

perceba que tal majoramento é possível pois $y(h, x) \geq 0$, então $\frac{I_1(h)}{I_0(h)} \rightarrow -1$, quando $h \rightarrow -2/3$.

Baseando-se em tal resultado define-se então a função

$$P(h) = \begin{cases} \frac{I_1(h)}{I_0(h)}, & \text{se } h \in (-2/3, 2/3]; \\ -1, & \text{se } h = -2/3. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

note que isso nos permite caracterizar a função $I(h)$ por

$$I(x) = I_0(h) (\alpha - P(h)).$$

Será provado que $P'(h) > 0$, implicando que $I(h)$ possui no máximo um zero.

Teorema 5.7. $I_0(h)$ e $I_1(h)$ satisfazem a equação de Picard-Fuchs

$$(9h^2 - 4) \frac{d}{dh} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}h & 7 \\ 5 & \frac{21}{2}h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Uma vez que, sobre γ_h , $y^2 = (2/3)x^3 - 2x + 2h$, tem-se que sobre γ_h ,

$$ydy = (x^2 - 1)dx, \quad (5.2.8)$$

segue que

$$\begin{aligned} I_j(h) &= \int_{\gamma_h} x^j y \\ &= \int_{\gamma_h} \frac{x^j y^2}{y} dx \\ &= \int_{\gamma_h} \frac{x^j (2h + (2/3)x^3 - 2x)}{y} dx \\ &= 2h \int_{\gamma_h} \frac{x^j}{y} dx + \frac{2}{3} \int_{\gamma_h} \frac{x^{j+3}}{y} dx - 2 \int_{\gamma_h} \frac{x^{j+1}}{y} dx \\ &\stackrel{(5.2.6)}{=} 2h I'_j(h) - 2I'_{j+1}(h) + \frac{2}{3} I'_{j+3}(h). \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{j+1} (I'_{j+1}(h) - I'_{j+3}(h)) &= \frac{1}{j+1} \left(\int_{\gamma_h} \frac{x^{j+1}}{y} dx - \int_{\gamma_h} \frac{x^{j+3}}{y} dx \right) \\ &= \frac{1}{j+1} \left(\int_{\gamma_h} \frac{x^{j+1}(1-x^2)}{y} dx \right) \\ &\stackrel{(5.2.8)}{=} \frac{-1}{j+1} \int_{\gamma_h} x^{j+1} dy \\ &= \int \int_{\text{Int}(\gamma_h)} -x^{j+1} dx dy \\ &= \int_{\gamma_h} x^{j+1} y dx \\ &= I_j(h), \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

sendo assim, $I'_{j+3}(h) = (j+1)I_j(h) - I_{j+1}(h)'$, substituindo esse resultado em (5.2.9), obtém-se que

$$(2j+5)I_j(h) = 6hI'_j(h) - 4I'_{j+1}(h),$$

tomando $j = 0, 1$, consegue-se o sistema

$$\begin{cases} 5I_0(h) = 6hI'_0(h) - 4I'_1(h), \\ 7I_1(h) = 6hI'_1(h) - 4I'_2(h). \end{cases} \quad (5.2.11)$$

Utilizando (5.2.8), obtém-se $y^2 dy = (x^2 - 1)y dx$ sobre γ_h , segue que

$$I_2 - I_0 = \int_{\gamma_h} (x^2 - 1)y dx = \int_{\gamma_h} y^2 dy = \int \int_{\text{Int}(\gamma_h)} 0 dx dy = 0,$$

portanto $I_0 = I_2$, segue que o sistema (5.2.11) se resume a

$$\begin{cases} 5I_0(h) = 6hI'_0(h) - 4I'_1(h), \\ 7I_1(h) = 6hI'_1(h) - 4I'_0(h). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear acima, considerando $I'_0(h)$ e $I'_1(h)$ como as variáveis, tem-se que

$$(9h^2 - 4) \frac{d}{dh} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}h & 7 \\ 5 & \frac{21}{2}h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

Completando a demonstração. □

Teorema 5.8. *A função $P(h)$, definida em (5.2.7), é estritamente crescente para $h \in (-2/3, 2/3)$.*

Demonstração. Primeiramente note que

$$P'(h) = \frac{d}{dh} \left(\frac{I_1(h)}{I_0(h)} \right) = \frac{I'_1(h)I_0(h) - I'_0(h)I_1(h)}{I_0(h)^2} = \frac{I'_1(h)}{I_0(h)} - \frac{I'_0(h)}{I_0(h)} P(h).$$

Utilizando o Teorema 5.7, transforma-se essa igualdade na equação de Ricatti

$$(9h^2 - 4)P' = -7P^2 + 3hP + 5,$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{h} = 9h^2 - 4, \\ \dot{P} = -7P^2 + 3hP + 5. \end{cases} \quad (5.2.12)$$

Defina o campo de vetores associado a (5.2.12) por $F(h, P) = (9h^2 - 4, -7P^2 + 3hP + 5)$.

Veja que para $h = \pm 2/3$, $9h^2 - 4 = 0$. Segue de uma simples análise das soluções de (5.2.12) que as retas $\{h = \pm 2/3\}$ são invariantes. É fácil verificar que as singularidades do sistema são os pontos $S_- = (-2/3, -1)$, $N_- = (2/3, -5/7)$, $S_+ = (2/3, 1)$ e $N_+ = (-2/3, 5/7)$ e, utilizando o Teorema de Hartman-Grobman, conclui-se que S_- e S_+ configuram uma sela, N_- é um nó instável e N_+ é um nó estável. Considere a curvas,

$$Q_+(h) = \left(h, \frac{3h + \sqrt{9h^2 + 140}}{17} \right) \text{ e } Q_-(h) = \left(h, \frac{3h - \sqrt{9h^2 + 140}}{17} \right), \quad -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}.$$

Esboçando um retrato de fase para o sistema (5.2.11), obtemos a Figura 2.

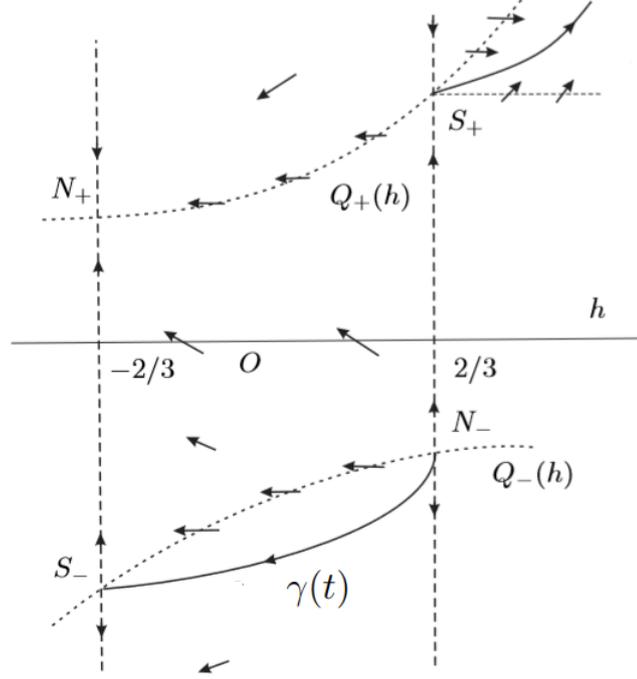


Figura 2: Retrato de fase correspondente à equação (5.2.12), retirado da referência [1].

Uma vez que $P(h)$ é solução do sistema $(9h^2 - 4)P' = -7P^2 + 3hP + 5$ e $\eta(t) = -\frac{2}{3} \left(\frac{e^{12t} + 1}{e^{12t} - 1} \right)$ é solução de $h' = 9h^2 - 4$, consegue-se que

$$\gamma(t) = \left(\eta(t), P(\eta(t)) \right)$$

resolve o sistema (5.2.12). De fato,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\eta'(t), (P(\eta))'(t)) \\ &= (\eta'(t), P'(\eta(t))\eta'(t)) \\ &= \left(9\eta(t)^2 - 4, \frac{-7P(\eta(t))^2 + 3\eta(t)P(\eta(t)) + 5}{9\eta(t)^2 - 4} (9\eta(t)^2 - 4) \right) \\ &= (9\eta(t)^2 - 4, -7P(\eta(t))^2 + 3\eta(t)P(\eta(t)) + 5), \end{aligned}$$

o que verifica que $\gamma(t)$ é solução do sistema. Fazendo o limite

$$\lim_{h \rightarrow 2/3} P(h) = \lim_{h \rightarrow 2/3} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} = \frac{\int_{-2}^1 x \sqrt{2h + (2/3)x^3 - 2x}}{\int_{-2}^1 \sqrt{2h + (2/3)x^3 - 2x}} = \frac{(12\sqrt{2}/7)}{12\sqrt{2}/5} = -\frac{5}{7},$$

consegue-se as seguintes informações sobre a curva γ :

$$\gamma(t) \rightarrow (2/3, -5/7), \text{ quando } t \rightarrow -\infty,$$

$$\gamma(t) \rightarrow (-2/3, -1), \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Segue dessa observação e da unicidade da variedade estável da sela referente ao ponto S_- que $\gamma(\mathbb{R}) = \text{Gr}(P)$, o ramo direito da variedade estável de S_- .

Sejam π_1 e π_2 as projeções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , satisfazendo $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$. Tome um ponto $(x, y) \in (-2/3, 2/3) \times \mathbb{R}$, verifica-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1(F(x, y)) > 0, \quad \forall (x, y) \in (-2/3, 2/3) \times \mathbb{R}, \\ \pi_2(F(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \text{ pertencente à curva } Q_+, \text{ ou } Q_-, \\ \pi_2(F(x, y)) > 0, \quad \forall (x, y) \text{ acima da curva } Q_+ \text{ ou abaixo da curva } Q_-, \\ \pi_2(F(x, y)) < 0, \quad \forall (x, y) \text{ abaixo da } Q_+ \text{ e acima da curva } Q_-. \end{array} \right.$$

Será demonstrado agora que a região M definida como os pontos sobre ou acima da curva Q_- é positivamente invariante. De fato, suponha o contrário. Então existem uma solução φ de (5.2.12) tal que $\varphi(0) \in M$ e t_0 tal que $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$; uma vez que $(-2/3, 2/3) \times \mathbb{R}$ é invariante pela unicidade de solução, $\varphi(t_0) \in (-2/3, 2/3) \times \mathbb{R} \setminus M$. Pelo Teorema da Alfândega existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_1) \in Q_-$, defina

$$s := \inf\{t; \varphi(t) \in (-2/3, 2/3) \times \mathbb{R} \setminus M \text{ e } t > 0\},$$

note que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tem-se que $\pi_1(\varphi'(t - \varepsilon)) < 0$ e $\pi_2(\varphi'(t - \varepsilon)) > 0$, e por construção $\varphi(s - \varepsilon) \in (-2/3, 2/3) \times \mathbb{R} \setminus M$, segue que a solução $\varphi(t)$ corta Q_- no tempo s , então a solução $\varphi(t)$ caminha contra o fluxo, o que gera um absurdo, logo M é invariante.

Suponha por redução ao absurdo que existe t_0 tal que, $\gamma(t_0) \in M$, da invariância de tal conjunto, tem-se que $\gamma(t) \in M$ para todo $t > t_0$, porém $\gamma(t) \rightarrow S_-$ quando $t \rightarrow \infty$, o que implica que $\gamma(t)$ caminharia contra a direção do fluxo para pontos suficientemente próximos de S_- . Conclui-se assim que $\gamma(t)$ permanece abaixo da curva Q_- para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\pi_2(\gamma'(t)) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^2$.

Para completar a demonstração basta observar que, tomando $h \in (-2/3, 2/3)$ existe $t \in \mathbb{R}$, tal que $\eta(t) = h$.

$$P'(h) = P'(\eta(t)) = \frac{(P \circ \eta)'(t)}{\eta'(t)} = \frac{\pi_2(\gamma'(t))}{\pi_1(\gamma'(t))} > 0.$$

Logo, $P(h)$ é função crescente. □

Como corolário do fato de $P(h)$ ser função crescente, tem-se que a integral Abeliana $I(h) = I_0(h)(\alpha - P(h))$ referente ao sistema (5.2.3) possui no máximo uma raiz para $h \in (-2/3, 2/3)$, consequentemente tem-se no máximo um ciclo limite que bifurca de tal sistema.

5.3 Método do *Averaging*

Um outro método interessante para se estimar a quantidade de ciclos limites que bifurcam de um centro perturbado é o método do *Averaging*. Tal método pode ser considerado uma alternativa aos métodos que focam em limitar a quantidade de ciclos limites utilizando o majoramento de integrais Abelianas.

Notação 5.3. Seja $f(y, \varepsilon) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ função de classe \mathcal{C}^k , a expansão de f em série de Taylor até o termo de ordem k com resto de Lagrange, será denotado, por

$$f(x, \varepsilon) = f^0(y) + \varepsilon f^1(x) + \dots + \varepsilon^k f^k(x) + \varepsilon^{k+1} f^{[k+1]}(x, \varepsilon),$$

onde

$$f^k(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial f(x, 0)}{\partial \varepsilon^k}$$

e $f^{[k+1]}$ corresponde ao resto de Lagrange.

Definição 5.2. É dito que $\varphi_\varepsilon(t) = O(\delta(\varepsilon))$ em tempo-escala $\delta(\varepsilon)^{-1}$ se a estimativa é válida para $0 < \delta(\varepsilon)t < L$, onde L é uma constante que não depende de ε .

Fazendo uso da notação 5.1, considere o sistema não autônomo perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

sendo, $f^1 : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f^{[2]} : V \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções T -periódicas na variável t , $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $x_0 \in V$.

Define-se a equação promediada associada a equação (5.3.1) como sendo a equação autônoma perturbada:

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z), \\ z(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.3.2)$$

onde $\bar{f}^1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é descrita por

$$\bar{f}^1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f^1(z, s) ds.$$

Fazendo a mudança da variável temporal em (5.3.2), $\tau = \varepsilon t$, tem-se o chamado sistema guiado

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \bar{f}^1(y), \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Note que, se $y(t)$ é solução de (5.3.3), então $y(\varepsilon t)$ é solução de (5.3.2). Com efeito, $y(0) = x_0$ e

$$\frac{dy}{dt}(\varepsilon t) = \varepsilon \frac{dy}{d\tau}(t) = \varepsilon \bar{f}^1(y).$$

Apesar de (5.3.1) e (5.3.2) não possuírem, a princípio, uma relação evidente, será mostrado que, sobre certas condições, as soluções dos respectivos sistemas, $x_\varepsilon(t)$ e $z_\varepsilon(t)$, permanecem próximas em tempo-escala $1/\varepsilon$, i.e;

$$\|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon), \text{ em tempo-escala } \frac{1}{\varepsilon},$$

mais especificamente, existem L , K e $\varepsilon_0 > 0$, tais que

$$\|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)\| < K\varepsilon, \forall 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ e } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Lema 5.6. *Sejam x_ε e z_ε as respectivas soluções dos sistemas (5.3.1) e (5.3.2), então existem um conjunto D e números reais L e $\varepsilon_0 > 0$ tais que*

$$x_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t) \in D, \forall 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon} \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

sendo que $D \subset V$ é aberto e \overline{D} é compacto.

Demonstração. Para ver isso, primeiramente tome qualquer ε_0 satisfazendo $0 < \varepsilon_0 < 1$ e $D \subset V$, tal que D é aberto e \overline{D} é compacto. Será escolhido L dependente de D e ε_0 de forma que a equação acima ocorra.

Uma vez que $\|f^1\|$ e $\|f^{[2]}\|$ são contínuas, segue que existe $M > 0$ tal que

$$\|f^1(x, t)\| < M \text{ e } \|f^{[2]}(x, t, \varepsilon)\| < M \text{ para todos } 0 \leq t \leq T, x \in \overline{D} \text{ e } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

como f^1 e $f^{[2]}$ são T -periódicas, segue que

$$\|f^1(x, t)\| < M \text{ e } \|f^{[2]}(x, t, \varepsilon)\| < M, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, x \in \overline{D} \text{ e } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Uma vez que D é aberto, existe $\delta > 0$, tal que $B(x_0, \delta) \subset D$. Seja

$$s_\varepsilon := \inf\{x_\varepsilon(s); s \in \mathbb{R}^n \setminus B(x, \delta)\},$$

dessa forma, para todos $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e $t \in [0, s_\varepsilon]$, é satisfeito

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x_0\| &= \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0)\| \\ &\leq t \sup_{t \in [0, s_\varepsilon]} \|\dot{x}_\varepsilon(t)\| \\ &< t(\varepsilon M + \varepsilon^2 M) \\ &< 2M\varepsilon t \\ &< 2M\varepsilon_0 t, \end{aligned}$$

essa igualdade torna evidente que $\frac{\delta}{2M\varepsilon_0} \leq s_\varepsilon$. Com efeito, caso contrário, isto é, $s_\varepsilon < \frac{\delta}{2M\varepsilon_0}$, ocorreria que

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x_0\| &< 2M\varepsilon_0 t \\ &< 2M\varepsilon_0 s_\varepsilon \\ &< \delta, \end{aligned}$$

seguinto que $x_\varepsilon(s_\varepsilon) \in B(x_0, \delta)$, contradizendo a maximalidade de s_ε , pois $B(x_0, \delta)$ é aberto. Conclui-se que

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &\in D, 0 \leq t \leq s_\varepsilon \\ x_\varepsilon(t) &\in D, 0 \leq t \leq \frac{\delta}{2M\varepsilon_0} \\ x_\varepsilon(t) &\in D, 0 \leq \varepsilon_0 t \leq \frac{\delta}{2M} \\ x_\varepsilon(t) &\in D, 0 \leq \varepsilon t \leq \frac{\delta}{2M}. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

De maneira análoga, define-se

$$w_\varepsilon := \inf\{z_\varepsilon(s); s \in \mathbb{R}^n \setminus B(x, \delta)\},$$

sendo assim, para todos $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ e $0 \leq t \leq w_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon(t) - x_0\| &= \|z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(0)\| \\ &\leq t \sup_{t \in [0, s_\varepsilon)} \|\dot{z}_\varepsilon(t)\| \\ &< t\varepsilon M \\ &< 2M\varepsilon t \\ &< 2M\varepsilon_0 t. \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo que antes consegue-se que $\frac{\delta}{2M\varepsilon_0} \leq w_\varepsilon$, e conseqüentemente

$$w_\varepsilon(t) \in D, \quad 0 \leq \varepsilon t \leq \frac{\delta}{2M}. \quad (5.3.5)$$

Pelas equações (5.3.4) e (5.3.5), definindo $L = \frac{\delta}{2M}$, conclui-se que

$$x_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t) \in D, \quad \forall 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon} \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

□

Lema 5.7. *Suponha $\varphi : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ tal que $\varphi(x, s)$ é uma função periódica em s com período T , média 0 para todo x fixo, limitada para todo $x \in D \subset V$ aberto com \overline{D} compacto; e com constante de Lipschitz igual a λ_φ em x , para $x \in D$. Suponha que $x_\varepsilon(t)$ pertença a D para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$ e satisfaça $\dot{x} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Então existe uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\left\| \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| \leq c_1,$$

para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$.

Demonstração. Dado $t \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $mT \leq t \leq (m+1)T$, dessa forma

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| &= \left\| \int_0^{mT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds + \int_{mT}^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)T}^{iT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds + \int_{(m-1)T}^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| \\ &= \sum_{i=1}^m \left\| \int_{(i-1)T}^{iT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| + \left\| \int_{mT}^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\|. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Observe que para todo $i \in \{0, 1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{(i-1)T}^{iT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| &= \left\| \int_{(i-1)T}^{iT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds + \int_{(i-1)T}^T \varphi(x_\varepsilon((i-1)T), s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_{(i-1)T}^{iT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) - \varphi(x_\varepsilon((i-1)T), s) ds \right\| \\
&\leq \int_{(i-1)T}^{iT} \|\varphi(x_\varepsilon(s), s) - \varphi(x_\varepsilon((i-1)T), s)\| ds \\
&\leq \int_{(i-1)T}^{iT} \lambda_\varphi \|x_\varepsilon(s) - x_\varepsilon((i-1)T)\| ds \\
&\leq \int_{(i-1)T}^{iT} \lambda_\varphi T \sup_{t \in \overline{D}} \|\dot{x}_\varepsilon(t)\| ds \\
&\leq \lambda_\varphi T^2 K \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

A igualdade da primeira linha é proveniente do fato que $\int_{(i-1)T}^T \varphi(x_\varepsilon((i-1)T), s) ds = 0$ por hipótese; a desigualdade da quarta linha é obtida uma vez que φ é Lipschitz na primeira variável para $x \in D$. Por fim, a desigualdade da quinta linha vem do fato que $\dot{x} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, sendo assim existe $K > 0$ tal que

$$\|\dot{x}(t, \varepsilon)\| < K\varepsilon, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Seja $c_1 = \sup\{\|\phi(x, s)\|; x \in \overline{D} \text{ e } s \in [0, T]\}$, uma vez que φ é periódica $\|\varphi(x, s)\| \leq c_1$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{D}$, segue dessa observação que

$$\int_{mT}^t \varphi(t, \varepsilon) \leq Tc_1 \tag{5.3.8}$$

Juntando (5.3.6), (5.3.7) e (5.3.8), consegue-se

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| &= \sum_{i=1}^m \left\| \int_{(i-1)T}^{iT} \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| + \left\| \int_{mT}^t \varphi(x_\varepsilon(s), s) ds \right\| \\
&\leq mT^2 K \varepsilon + Tc_1 \\
&\leq (mT)TK\varepsilon + Tc_1 \\
&\leq \frac{L}{\varepsilon}TK\varepsilon + Tc_1 \\
&\leq LTK + Tc_1.
\end{aligned}$$

Fazendo $c := LTK + Tc_1$ conclui-se a demonstração. □

Teorema 5.9. *Suponha que f^1 é Lipschitz contínua, $f^{[2]}$ é contínua e ε_0, D e L possuem as propriedades referentes ao Lema 5.6. Então existe uma constante $c > 0$, tal que $\|(x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t))\| < c\varepsilon$ para todos $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$, sendo x_ε e z_ε soluções de (5.3.1) e (5.3.2), respectivamente.*

Demonstração. Defina $E(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)$.

$$\begin{aligned}
\|E(t, \varepsilon)\| &= \|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)\| \\
&= \left\| \int_0^t \varepsilon f^1(x_\varepsilon(s), s) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x_\varepsilon(s), s, \varepsilon) - \varepsilon \bar{f}^1(z_\varepsilon(s)) ds \right\| \\
&= \varepsilon \left\| \int_0^t f^1(x_\varepsilon(s), s) + \varepsilon f^{[2]}(x_\varepsilon(s), s, \varepsilon) - \bar{f}^1(z_\varepsilon(s)) ds \right\| \\
&= \varepsilon \left\| \int_0^t f^1(x_\varepsilon(s), s) - f^1(z_\varepsilon(s), s) + \varepsilon f^{[2]}(x_\varepsilon(s), s, \varepsilon) + f^1(z_\varepsilon(s), s) - \bar{f}^1(z_\varepsilon(s)) ds \right\| \\
&\leq \varepsilon \int_0^t \|f^1(x_\varepsilon, s) - f^1(z_\varepsilon, s)\| ds + \varepsilon^2 \left\| \int_0^t f^{[2]}(x_\varepsilon, s, \varepsilon) ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t f^1(z_\varepsilon, s) - \bar{f}^1(z_\varepsilon) ds \right\| \\
&\leq \varepsilon \lambda \int_0^t \|x_\varepsilon(s) - z_\varepsilon(s)\| ds + \varepsilon^2 c_1 + \varepsilon c_2 \\
&\leq \varepsilon \lambda \int_0^t \|E(s, \varepsilon)\| ds + \varepsilon c_1 + \varepsilon c_2, \tag{5.3.9}
\end{aligned}$$

sendo que c_1 e c_2 são constantes que majoram, respectivamente, ε multiplicado com a segunda integral e a terceira integral (referentes a desigualdade da quinta linha da expressão acima). A existência de tais constantes será discutida abaixo.

Para estimar c_1 , primeiramente tome $K := \sup\{\|f^{[2]}(x, t, \varepsilon)\|\};$ tal que $x \in \bar{D}$, $t \in [0, T]$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ }, segue do fato que $f^{[2]}$ é periódica em t que tal constante majora $\|f^{[2]}\|$, sendo assim,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left\| \int_0^t f^{[2]}(x_\varepsilon, s, \varepsilon) ds \right\| &\leq \varepsilon \int_0^t \|f^{[2]}(x_\varepsilon, s, \varepsilon)\| ds \\
&\leq \varepsilon \int_0^t k \\
&\leq \varepsilon Lt \\
&\leq \varepsilon K \frac{L}{\varepsilon} \leq LK,
\end{aligned}$$

tomando $c_1 := LK$ constata-se o primeiro majoramento.

Para mostrar a existência de c_2 , basta ver que $\varphi(x, s) = f^1(x, s) - \bar{f}^1(x)$ satisfaz as condições do Lema 5.7. De fato, $\varphi(x, s)$ é periódica em s para todo x fixado, pois $f^1(x, s)$ é periódica em s e $\bar{f}^1(x)$ não depende de s ; além disso, para todo x fixo, $\varphi(t, x)$ tem média 0, uma vez que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds = \frac{1}{T} \int_0^T f^1(x, s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T f^1(x, s) ds = 0.$$

Ainda φ é Lipschitz pois f^1 e \bar{f}^1 também 0 são e; D é aberto e \bar{D} é compacto por hipótese. Por fim, note que $dz_\varepsilon/dt = \varepsilon f(z_\varepsilon(t), t)$, sendo assim $\dot{z} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ e, por hipótese, $z_\varepsilon(t) \in 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$. Aplicando o Lema 5.7 conclui-se a existência de c_2 .

Aplicando o Lema de Gronwall em (5.3.9), tem-se que

$$\begin{aligned}\|E(t, \varepsilon)\| &\leq \varepsilon(c_1 + c_2) \exp\left(\int_0^t \varepsilon \lambda ds\right), \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon(c_1 + c_2) \exp(\varepsilon \lambda t), \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon(c_1 + c_2) \exp\left(\varepsilon \lambda \frac{L}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon(c_1 + c_2) \exp(\lambda L), \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Tomando $c = (c_1 + c_2) \exp(\lambda L)$, conclui-se a demonstração. \square

Para demonstrar o resultado principal dessa subseção, antes precisamos demonstrar um lema a respeito das séries de Neumann

Definição 5.3. *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$, um mapa linear contínuo, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

é chamada série de Neumann de T , onde $T^0 = I$, sendo I o mapa identidade.

Lema 5.8. *Suponha que T é um operador limitado no espaço de Banach X . Se a série de Neumann de T converge na norma de operador, então $I - T$ é a inversa da série, isto é $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$; ainda mais, se a norma de operador de T é menor que 1 então sua série de Neumann é convergente.*

Sendo a norma de operador definida por

$$\|T\|_{op} := \sup_{\{x \in X \setminus \{0\}\}} T \left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

Demonstração. Supondo que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ é convergente, tem-se que

$$\begin{aligned}(I - T) \left(\sum_{i=1}^n T^i \right) &= \sum_{i=1}^n T^i - \sum_{i=1}^n T^{i+1} \\ &= I - T^{n+1}\end{aligned}$$

Uma vez que, quando $n \rightarrow \infty$, $\|T^n\|_{op} \rightarrow 0$, implicando que $T^n \rightarrow 0$, logo, $(I - T)(\sum_{i=1}^n T^i) \rightarrow I$, portanto $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

A prova da convergência da série de Neumann caso $\|T\| < 1$ segue do fato de que

para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^n T^i \right\|_{op} &\leq \sum_{i=0}^n \|T^i\|_{op} \\ &\leq \sum_{i=0}^n \|T\|_{op}^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|T\|_{op}^i \\ &\leq \frac{1}{1 - \|T\|_{op}}. \end{aligned}$$

Portanto a série de Neumann é convergente. □

Teorema 5.10. (*Método do Averaging de primeira ordem*). Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon), \quad (5.3.10)$$

com $x \in D$, um aberto de \mathbb{R}^n , $0 \leq t$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, para algum $\varepsilon_0 > 0$. Suponha que:

1. As funções f^1 , $f^{[2]}$, $\frac{\partial f^1}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f^1}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M , independente de ε , em $[0, \infty] \times D$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;
2. f^1 e $f^{[2]}$ são T -periódicas em t , sendo que T não depende de ε .

Se p é um zero simples da função promediada $\bar{f}^1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s) ds$, ou seja, $\bar{f}^1(p) = 0$ e $\det \left(\frac{\partial \bar{f}^1}{\partial z} \right) \neq 0$, então existe uma solução T -periódica $\varphi(t, \varepsilon)$ de (5.3.10) tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \varepsilon) = p$.

Demonstração. Considere a função T -periódica:

$$u(t, x) = \int_0^t f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds, \quad (5.3.11)$$

e defina a transformação

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)). \quad (5.3.12)$$

Será mostrado que $\|u(t, x)\| \leq 2MT$, para todo $0 \leq t$, $y \in D$. Dado $t \in \mathbb{R}$, seja m

$\in \mathbb{N}$, tal que $mT \leq t \leq (m+1)T$:

$$\begin{aligned}
\|u(t, x)\| &= \left\| \int_0^t f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{mT} f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds + \int_{mT}^t f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{mT} f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds \right\| + \left\| \int_{mT}^t f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds \right\| \\
&\leq m \left\| \int_0^T f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds \right\| + \left\| \int_0^{t-mT} f^1(x, s) - \bar{f}^1(x) ds \right\| \\
&\leq \int_0^{t-mT} \|f^1(x, s) - \bar{f}^1(x)\| ds \\
&\leq \int_0^{t-mT} \|f^1(x, s)\| ds + \int_0^{t-mT} \|\bar{f}^1(x)\| ds \\
&\leq (t-mT)M + \frac{t-mT}{T} \int_0^T \|f^1(x, s)\| ds \\
&\leq (t-mT)M + (t-mT)M \\
&\leq 2TM.
\end{aligned}$$

Por outro lado, perceba que derivando a transformação (5.3.12) tem-se

$$\dot{z} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} = \dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon),$$

isolando \dot{z} , consegue-se

$$\left(I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dot{z} = \varepsilon f^1(t, x) + \varepsilon^2 f^{[2]}(t, x, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.3.13)$$

Da definição de u , é claro que $\frac{\partial u}{\partial t} = f^1(z, t) - \bar{f}^1(z)$, baseado nesse resultado, define-se R :

$$R = \varepsilon f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - \varepsilon f^1(z, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon), \quad (5.3.14)$$

note que como u , f^1 e $f^{[2]}$ são periódicas, então R também possui tal propriedade. Segue da definição de R que (5.3.13) pode ser reescrita por

$$\left(I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right) \dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1 + R. \quad (5.3.15)$$

Note que, repetindo o processo de majoração feito em $u(x, t)$, conclui-se que $\frac{\partial u}{\partial z}$, sendo assim, aplicando o Lema 5.8, é possível inverter a matriz do lado da equação (5.3.15) para ε suficientemente pequeno, o que é facilmente obtido diminuindo o tamanho de ε_0 ,

obtendo

$$\begin{aligned} \left(I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \varepsilon^i \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right)^i \\ &= I_n - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

para todos $t \geq 0$, $z \in D$.

Observe que a função f^1 é Lipschitz na variável x , uma vez que $\frac{\partial f^1}{\partial x}$ é limitada por M . Tem-se, pelo, desigualdade do valor médio:

$$\begin{aligned} \|f^1(x_0, t, \varepsilon) - f^1(x_1, t, \varepsilon)\| &\leq \|x_0 - x_1\| \sup_{t \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x_1 - x_0), t, \varepsilon) \right\| \\ &\leq M \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

mostrando que f^1 é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a M .

Note que $R = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Com efeito:

$$\begin{aligned} \|R\| &= \|\varepsilon f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - \varepsilon f^1(z, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon)\| \\ &\leq \varepsilon \|f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - f^1(z, t)\| + \|\varepsilon^2 f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon)\| \\ &\leq \varepsilon M \|u(t, z)\| + \varepsilon^2 \|f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon)\| \\ &\leq 2\varepsilon^2 M^2 T + \varepsilon^2 M \\ &\leq \varepsilon^2 K, \end{aligned}$$

sendo $K = 2M^2 T + M$.

Por outro lado, segue de (5.3.15) juntamente com (5.3.16) que \dot{z} pode ser expresso por

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z) + R - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \bar{f}^1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.3.17)$$

É interessante perceber que o termo de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ também é T -periódico, pois foi obtido pela multiplicação de funções T -periódicas.

Da diferenciabilidade de f^1 com respeito a ε é tirado que

$$f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - f^1(z, t) = \varepsilon \frac{\partial f^1}{\partial \varepsilon}(z, t) u(t, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.3.18)$$

observe que o resto $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ é uma função T -periódica (basta isolar $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ para constatar tal fato). Fazendo o mesmo processo para a função $f^{[2]}$, tem-se que

$$f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon) = f^{[2]}(z, t, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.3.19)$$

sendo $\mathcal{O}(\varepsilon)$ T -periódica, pois $f^{[2]}$ é T periódica.

Agora, defina $\tilde{R}(z, t, \varepsilon)$ pela expressão

$$\tilde{R}(z, t, \varepsilon) = \frac{\partial f^1}{\partial z}(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \bar{f}^1(z) + f^{[2]}(z, t, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.3.20)$$

perceba que, novamente, $\mathcal{O}(\varepsilon)$ é periódica.

Juntando as equações (5.3.18), (5.3.19) e (5.3.14), pode-se reescrever a equação (5.3.17) como

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z) + \varepsilon^2 \tilde{R}(z, t, \varepsilon). \quad (5.3.21)$$

Como $\mathcal{O}(\varepsilon^3) = \varepsilon^2 \mathcal{O}(\varepsilon)$, segue que o símbolo $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ está incorporado a $\varepsilon^2 \tilde{R}(z, t, \varepsilon)$.

Uma vez que u , f^1 e f^2 e o erro $\mathcal{O}(\varepsilon)$ são T -periódicas, assim como suas derivadas, tem-se que \tilde{R} é T -periódica na variável t ; além disso \tilde{R} é de classe \mathcal{C}^1 com respeito a z , uma vez que \bar{f}^1 é \mathcal{C}^1 em z , assim como o fluxo da equação diferencial (5.3.17), implicando o requerido.

Pela definição que foi feita de u , é possível concluir que uma solução T -periódica $z(t)$ de (5.3.21) corresponde a uma solução T -periódica $x(t)$ de (5.3.10). Suponha que $z(t_0) = z(t_0 + T)$, portanto $x(t_0) - \varepsilon u(t_0, z(t_0)) = x(t_0 + T) - \varepsilon u(t_0 + T, z(t_0 + T))$, mas

$$\begin{aligned} u(t_0 + T, z(t_0 + T)) &= \int_0^{t_0+T} f^1(z(t_0 + T), s) - \bar{f}^1(z(t_0 + T)) ds \\ &= \int_0^T f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0)) ds + \int_{t_0}^{t_0+T} f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0)) ds \\ &= \int_0^{t_0} f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0)) ds \\ &= u(t_0, z(t_0)), \end{aligned}$$

sendo assim, fica claro que $x(t_0) = x(t_0 + T)$, implicando que $x(t)$ é T -periódica.

Tome uma solução $z(t)$ de (5.3.21), então $z(t)$ deve satisfazer

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t \bar{f}^1(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t \tilde{R}(z(s), s, \varepsilon) ds. \quad (5.3.22)$$

Note que $z(t)$ é periódica $\Leftrightarrow z(t+T) = z(t)$ para todo $t \geq 0$, o que equivale a dizer que $z(0) = z(T)$, e apesar do campo de (5.3.21) não ser autônomo, ele é periódico, o que possibilita tal resultado. Encontra-se uma relação biunívoca entre as soluções de (5.3.21) e os zeros da equação:

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T \bar{f}^1(z(s)) dx + \varepsilon \int_0^T \tilde{R}(z(s), s) ds = 0 \quad (5.3.23)$$

Apesar da equação acima não depender explicitamente de $z(0)$, o fato de \bar{f}^1 e \tilde{R} serem de classe \mathcal{C}^1 implica pelo Teorema da Dependência Diferencial Perante as Condições Iniciais e Parâmetros, que as soluções de (5.3.21) dependem de maneira diferencial das suas condições iniciais e, portanto, a dependência em $z(0)$ é implícita, podendo ser identificada através da relação que leva $z(0)$ a um ponto $z(t_0)$ da curva. Note que pelas hipóteses do teorema, $f^1(p) = 0$, implicando que $h(p, 0) = 0$.

Será concluído que existe uma vizinhança de $\varepsilon = 0$, tal que a equação (2.2.15) possui uma única solução $z(0)$, e se $\varepsilon \rightarrow 0$, então $z(0) \rightarrow p$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T \bar{f}^1(z(s, x)) ds \Big|_{z(0)=p} \\
&= \int_0^T \frac{\partial \bar{f}^1(z(s, x))}{\partial x} \Big|_{z(0)=p} ds \\
&= \int_0^T \frac{\partial \bar{f}^1}{\partial x} ds \\
&= T \frac{\partial \bar{f}^1}{\partial x},
\end{aligned}$$

note que as hipóteses do teorema dizem que $\det \left(\frac{\partial \bar{f}^1}{\partial x}(p) \right) \neq 0$, o que implica que $\det \left(\frac{\partial h}{\partial x}(p) \right) \neq 0$, $h(p, 0) = 0$ e h é de classe C^1 .

Consequentemente, aplicando o Teorema da Função Implícita, existe um aberto $V \subset D$ de forma que $V \times [0, \varepsilon_0)$ (sendo que ε_0 pode ser diminuído se necessário) contenha o ponto $(p, 0)$ e que, para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, existe uma única função $z(\varepsilon) \in V$ tal que:

$$h(z(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Ainda pelo Teorema da Função Implícita, tem-se que $z(\varepsilon)$ é função diferenciável com relação ao parâmetro ε e, em particular, da sua continuidade obtém-se que $z(\varepsilon) \rightarrow p$ se $\varepsilon \rightarrow 0$.

Foi concluído anteriormente que cada solução $z(t, \varepsilon)$ de (5.3.21) que passa por $z(\varepsilon)$ é periódica e corresponde a uma solução periódica da equação original (5.3.10), o que conclui a demonstração. \square

Note que perante as condições do teorema anterior tem-se que para toda raiz x_0 , dada função média $\bar{f}^1(x)$, existe uma $\varphi(t, x_0, \varepsilon)$ solução periódica para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ relacionada ao sistema (5.3.10). Reciprocamente, solução periódica $\phi(t, x_0, \varepsilon)$, para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ de (5.3.10) é solução da equação (5.3.23), implicando que

$$0 = \int_0^T \bar{f}^1(\varphi(t, x_0, 0)) ds = \int_0^T \bar{f}^1(x_0) ds = T \bar{f}^1(x_0)$$

logo $\bar{f}^1(x_0) = 0$. Porém, é importante ressaltar que x_0 não é necessariamente um zero simples da função \bar{f}^1 .

Sendo assim, conclui-se que o número mínimo de órbitas periódicas de (5.3.23) é no mínimo igual ao número de zeros simples de $\bar{f}^1(x)$ e no máximo igual ao número total de zeros, contando as multiplicidades.

Uma vez que cada solução periódica de (5.3.23) pode ser uma órbita periódica, tem-se que uma cota superior para o número de ciclos limites é o número de máximo de zeros, contando a multiplicidade, de $\bar{f}^1(x)$.

5.4 16° Problema Fraco de Hilbert com $n = 2$.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon q(x, y). \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Sendo p e q polinômios em x e y de grau 2, H polinômio em x e y de grau 3 e $\varepsilon \in V \subset \mathbb{R}$, onde V é uma vizinhança suficientemente pequena da origem.

Com as técnicas mostradas nesse relatório é possível mostrar o seguinte teorema (ver [1]):

Teorema 5.11. *2 é uma cota superior para a quantidade de ciclos limites do sistema (5.4.1).*

6 Participação em Eventos

No período referente ao segundo semestre de 2016 o aluno compareceu ao evento II Dia Dinâmico, ocorrido na Universidade Federal de São Carlos em Sorocaba, onde viu diversas palestras a respeito da teoria de sistemas dinâmicos. Além disso, durante, primeiro semestre de 2017, houve a participação em uma série de seminários organizados por seu orientador onde foram abordados tópicos sobre sistemas dinâmicos, sendo que o aluno apresentou um seminário a respeito do Teorema de Hartman-Grobman.

7 Agradecimentos

Gostaria de agradecer à FAPESP / UNICAMP pela oportunidade, ao meu orientador pelo suporte e atenção e à minha amiga Bianca Dornelas pela sua ajuda e apoio.

8 Conclusão

Conclui-se do projeto que, dado um sistema como (1.0.1), se ele não estiver nas condições necessárias para a aplicação do teorema de Hartman-Grobman em uma singularidade isolada, tem-se que a dinâmica em torno desse ponto é um centro ou foco. Para distinguir qual é a a dinâmica em questão, não é conhecido um critério geral e, para tentar resolver tal problema são utilizadas diversas ferramentas, tais como integrais primeira, fatores integrantes e simetria do sistema.

Quanto à parte referente ao 16° problema de Hilbert, nota-se que mesmo com um enunciado simples o problema é extremamente difícil de ser respondido. Para tentar solucionar tal questão, um dos métodos que vem sendo utilizado são técnicas que tem o

objetivo de limitar o número de zeros de integrais Abelianas afim de encontrar uma cota superior para os ciclos limites do sistema.

9 Referências Bibliográficas

Referências

- [1] C. CHRISTOPHER, C. LI, *Limit Cycles of Differential Equations*, Centre de Recerca Matemática, Birkhäuser 2007, p. 171.
- [2] J. LLIBRE, A. E. TERUEL, *Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems*, Birkhäuser, 2014, p. 289.
- [3] OTÁVIO MARÇAL LEANDRO GOMIDE, *Ciclos Limites em Sistemas Dinâmicos Suaves e Não-Suaves*, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2015.
- [4] J. LLIBRE, *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations*, Elsevier B.V, 2004, vol 1.
- [5] O. MAKARENKOV, J. S. W. LAMB, *Dynamics and bifurcations of non smooth systems: A survey*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. **241**, 1826-1844, 2012.
- [6] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM, 2011.
- [7] JACKSON ITIKAWA, *O problema do centro-foco para singularidades nilpotentes no plano*, Usp - São Carlos, 2012.
- [8] PAULO RAIMUNDO STERING MALTA, *Existência de Ciclos Limite Algébricos para Equações Diferenciais Polinomiais Planares*, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2015.
- [9] MATHEUS MANZATTO DE CASTRO, *Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes: Teoria Local e Global*, PIBIC, UNICAMP, 2015.
- [10] Y. PAN, X. ZHANG, *Algebraic Aspects of Integrability for Polynomial Differential Systems*, Journal of Applied Analysis and Computations, Volume 3, Number 1, February 2013.
- [11] RICARDO MIRANDA MARTINS, *A Estrutura Hamiltoniana dos Campos Reversíveis em 4D*, UNICAMP, Campinas, 2008.
- [12] A. L. A. DE ARAUJO, A. LEMOS, A. M. ALVES, *Conditions to the existence of center-focus in planar systems and center for Abel equations*, Universidade Federal de Viçosa, 4 de Maio de 2016.
- [13] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, PROJETO EUCLIDES, IMPA, 1979. p.327
- [14] C. J. CHRISTOPHER, *Estimating limit cycle bifurcations from centers*, *Differential equations with symbolic computation*, 23-35, TRENDS MATH., BIRKHAUSER, BASEL, 2005.

- [15] J. A. SANDERS, F. VERHULST, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, APPL. MATH. SCI. 59, SPRINGER, 1985.
- [16] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems* , Third Edition, Springer 2000, p. 555

A Teorema de Hartman-Grobman

Uma vez que a demonstração do importantíssimo Teorema de Hartman-Grobman destoa um pouco do Problema do Centro-Foco, foi preferido colocar essa demonstração separadamente neste apêndice.

A.1 Definições

Definição A.1. *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz e $\varphi(t, x_0)$ a solução maximal do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Definimos o fluxo de f como sendo a função $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, $\Phi(t, x) = \varphi(t, x)$, onde D é o domínio de definição da equação.

Definição A.2. *Sejam $\Phi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Psi : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $F : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Diz-se que F é topologicamente conjugado a G quando existe um homeomorfismo $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$.*

Neste caso, tem-se necessariamente que $I_1(x) = I_2(h(x))$, onde $I_1(x)$ e $I_2(h(x))$ denotam os intervalos máximos das respectivas soluções maximais. O homeomorfismo h chama-se conjugação topológica entre F e G .

Definição A.3. *Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. L é dito hiperbólico se o espaço \mathbb{R}^n possui uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$ tal que:*

- *Ambos E^u e E^s são invariantes por L ;*
- *A restrição $L_u = L|_{E^u}$ é uma expansão, enquanto $L_s = L|_{E^s}$ é uma contração; isto é, $\|L_u^{-1}\| < 1$ e $\|L_s\| < 1$.*

É fácil mostrar que, se o espectro de L não toca o círculo unitário então L é um isomorfismo hiperbólico.

Definição A.4. *O ponto p é chamado de ponto singular de um campo vetorial X se $X(p) = 0$.*

Definição A.5. *Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe C^k , $k \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ têm parte real diferente de zero.*

Serão utilizadas as seguintes notações:

$$a = \max\{\|L_u^{-1}\|, \|L_s\|\} < 1$$

$$\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) = \{\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \phi \text{ é uniformemente contínua e limitada em todo } \mathbb{R}^n\}$$

$$\mathcal{L}_\mu(L) = \{\Lambda = L + \lambda; \lambda \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) \text{ é } \mu\text{-Lipschitz, limitada por } \mu\}$$

$$\mathcal{H} = \{h = I + g; g \in \mathcal{C}_{BU}\},$$

onde $\mu \in \mathbb{R}_+$ e I é a aplicação identidade de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^n . Munindo $\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$ com a norma do supremo

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x)\|; x \in \mathbb{R}^n\},$$

este espaço se torna um espaço de Banach, o que faz $\mathcal{L}_\mu(L)$ e \mathcal{H} se tornarem espaços métricos completos.

A.2 Resultados conhecidos

Teorema A.1. (Teorema da Perturbação do Isomorfismo) *Se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno, então cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ é um Lipeomorfismo, isto é, um homeomorfismo Lipschitz com inversa Lipschitz.*

Teorema A.2. *Sejam P um espaço topológico, Y um espaço métrico completo e $F : P \times Y \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Suponhamos que cada $F_p := F(p, \cdot) : Y \rightarrow Y$ é uma contração com constante de contração k_p limitada por $b < 1$. Então para cada $p \in P$, a aplicação F_p tem único ponto fixo e esse ponto fixo depende continuamente de p .*

Teorema A.3. (Lema de Gronwall) *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta(t) \geq 0$ e $\phi(t)$ são funções reais contínuas que satisfazem*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \text{ para } a \leq t \leq b,$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \text{ para } a \leq t \leq b.$$

Teorema A.4. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Então, se $\phi(t)$ é solução da equação diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é satisfeita a seguinte relação: $\phi(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(\phi(s))dt$.

A.3 Demonstração do Teorema de Hartman-Grobman

Lema A.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto, tal que $0 \in U$. Dados $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 tal que $DF(0) = L$ e $\varepsilon > 0$, então existem $r_1 > r_2 > 0$ e $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 tais que:*

1. $G = F$ em $B_{r_2}(0)$.
2. $G = L$ fora de $B_{r_1}(0)$.
3. A função $\Psi = G - L$ é limitada por ε .
4. Ψ é ε -Lipschitz.
5. Ψ é uniformemente contínua.

Demonstração. Escolhe-se uma função $\alpha : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ satisfazendo:

1. $\alpha(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
2. $\alpha(x) = 1, \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
3. $\alpha(x)$ é monótona crescente em $[-1, -\frac{1}{2}]$ e $\alpha(x)$ é monótona decrescente em $[\frac{1}{2}, 1]$.

Note que, como α é uma função de suporte compacto de classe \mathcal{C}^∞ , existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M = \sup\{|D\alpha(x)|; x \in \mathbb{R}\}$.

Define-se $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(x) = F(x) - Lx$. Observe que ϕ é de classe \mathcal{C}^1 e além disso, $D\phi(0) = 0$. Sendo assim, dado $\tilde{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\varepsilon}{2}\} > 0$ existe $1 \geq r > 0$ tal que

$$x \in B_r(0) \subset U \Rightarrow \|D\phi(x)\| < \tilde{\varepsilon}$$

implicando pela desigualdade do valor médio que, $x \in B_r(0) \Rightarrow \|\phi(x)\| < \tilde{\varepsilon}\|x\|$.

Considere agora $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida por:

$$G(x) = \begin{cases} Lx + \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x), & \text{se } x \in U, \\ Lx, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus U. \end{cases}$$

Dessa forma, tome $r_1 = r$ e $r_2 = \frac{r}{2}$. Será verificado que as condições são satisfeitas:

- 1) Se $x \in B_{r_2}(0)$, temos que $\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) = 1$, implicando que $G(x) = Lx + \phi(x) = F(x)$.
- 2) Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_1}(0)$, consegue-se que $\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) = 0$ e, conseqüentemente, $G(x) = Lx + 0\phi(x) = Lx$.

$$3) \text{ Note que } \Psi(x) = G(x) - Lx = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x), & \text{se } x \in \overline{B_{r_2}(0)}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r_2}(0)}. \end{cases}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\Psi(x)\| &\leq \sup_{x \in \overline{B_{r_1}(0)}} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \|\phi(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in \overline{B_{r_1}(0)}} \|\phi(x)\| \\ &\leq \tilde{\varepsilon}r_1 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

4) A fim de mostrar que Ψ é ε -Lipschitz será calculado, a diferença $\|\Psi(x) - \Psi(y)\|$. Separaremos em 3 casos diferentes.

Considere inicialmente que $x, y \in B_{r_2}(0)$, sendo assim

$$\begin{aligned}
\|\Psi(x) - \Psi(y)\| &= \left\| \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \phi(x) - \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \phi(y) \right\| \\
&= \left\| \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \phi(x) - \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \phi(x) + \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \phi(x) - \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \phi(y) \right\| \\
&\leq \left\| \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) - \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \right\| \|\phi(x)\| + \left\| \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \right\| \|\phi(x) - \phi(y)\| \\
&\leq \frac{1}{r} \sup_{z \in \mathbb{R}} \|D\alpha(z)\| \|x - y\| \sup_{x \in B_{r_1}(0)} \|\phi(x)\| + 1 \sup_{z \in B_{r_2}(0)} \|D\phi(z)\| \|x - y\| \\
&\leq \frac{1}{r} M \tilde{\varepsilon} r \|x - y\| + \tilde{\varepsilon} \|x - y\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\| \\
&\leq \varepsilon \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Suponha agora que $x \in B_{r_1}(0)$ e $y \notin B_{r_1}(0)$, considere a reta $x + t(x - y)$, $t \in [0, 1]$, sabe-se do Teorema da Alfândega que existe $t_0 \in (0, 1]$ tal que $z_0 = x + t_0(y - x) \in \partial B_{r_2}(0)$. Tome a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n = t_0 - t_0/2n$.

$$\begin{aligned}
\|\Psi(x) - \Psi(y)\| &= \|\Psi(x) - \Psi(z_0)\| \\
&= \|\Psi(x) - \Psi(\lim_{n \rightarrow \infty} x + t_n(y - x))\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi(x) - \Psi(x + t_n(y - x))\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \|x - x + t_n(y - x)\| \\
&\leq (\lim_{n \rightarrow \infty} t_n) \varepsilon \|y - x\| \\
&\leq t_0 \varepsilon \|y - x\| \\
&\leq \varepsilon \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, para o caso $x, y \notin B_{r_1}(0)$ a desigualdade é óbvia pois $\|\Psi(x)\| = \|\Psi(y)\| = 0 \Rightarrow \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$.

5) A prova dessa proposição é imediata pois Ψ é uma função contínua de suporte compacto, logo Ψ é uniformemente contínua.

Uma vez que 1), 2), 3), 4) e 5) foram verificados o lema fica demonstrado. \square

Lema A.2. *Seja $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria hiperbólica, se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno, então para cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ existe um único $h = h_\Lambda \in \mathcal{H}$ tal que $h\Lambda = Lh$. Além do mais, este h_Λ é um homeomorfismo que depende continuamente de $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$.*

Demonstração. Pelo Teorema A.1, pode-se tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\delta$ seja um Lipomorfismo. Sendo assim, tomemos $\mu = \min \left\{ \delta, \frac{1-a}{2} \right\}$.

Para demonstrar o teorema será provado algo mais forte; será mostrado que para cada par $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ existe um único $h \in \mathcal{H}$ tal que $h\Lambda = \Lambda'h$. Ainda mais, h é um

homeomorfismo que depende continuamente de $(\Lambda, \Lambda') \in \mathcal{L}_\mu(L) \times \mathcal{L}_\mu(L)$. A fim de não deixar a notação carregada, será denotado, a composição de funções pelo produto, isto é, $g(f) = gf$.

Note que a equação $h\Lambda = \Lambda'h$, para $h \in \mathcal{H}$ e $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ é

$$(I + g)(L + \lambda) = (L + \lambda')(I + g),$$

sendo $g \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$. Pode-se ainda reescrever a equação acima como:

$$g\Lambda - Lg = \lambda'(I + g) - \lambda. \quad (\text{A.3.1})$$

Ou seja, (A.3.1) é equivalente a $g = [Lg + \lambda'(I + g) - \lambda]\Lambda^{-1}$. Uma vez que L é uma isometria hiperbólica, pode-se decompor $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s = E^u \times E^s$, e compondo a função g com as projeções $\pi_u : \mathbb{R}^n \rightarrow E^u$ e $\pi_s : \mathbb{R}^n \rightarrow E^s$ conseguimos as seguintes relações:

$$g_u = [L_u g_u + \lambda'(I + g) - \lambda_u]\Lambda^{-1}, \quad (\text{A.3.2})$$

$$g_s = [L_s g_s + \lambda'(I + g) - \lambda_s]\Lambda^{-1}. \quad (\text{A.3.3})$$

Da mesma forma, (A.3.1) também é equivalente a $g = L^{-1}[g\Lambda + \lambda - \lambda'(I + g)]$, a qual pode ser compostas com as projeções, obtendo-se:

$$g_u = L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + g)], \quad (\text{A.3.4})$$

$$g_s = L_s^{-1}[g_s\Lambda + \lambda_s - \lambda'_s(I + g)]. \quad (\text{A.3.5})$$

Observe que as equações (A.3.4) e (A.3.5) possuem os termos L_s e L_u^{-1} , que definem uma contração, sendo assim podemos construir o operador $K := K_{\Lambda, \Lambda'}$:

$$K : \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$$

$$g = (g_u, g_s) \mapsto (L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + g)], [L_s g_s + \lambda'(I + g) - \lambda_s]\Lambda^{-1}).$$

Será verificado que o operador K está bem definido, ou seja, que $K(\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, dada $f \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$, claramente $K(f)$ é uniformemente contínua pois suas entradas são escritas como composição de funções uniformemente contínuas, sendo assim basta verificar se $K(f)$ é limitada, para isso analisaremos as projeções de $K(f)$ em E^s e E^u separadamente.

$$K(f) = (L_u^{-1}[f_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + f)], [L_s f_s + \lambda'_s(I + f) - \lambda_s]\Lambda^{-1}).$$

Para a projeção de $K(f)$ em E^u temos que:

$$\begin{aligned} \|K(f)_u(x)\| &= \|L_u^{-1}[f_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + f)](x)\| \\ &\leq \|L_u^{-1}\| (\|f_u\Lambda(x)\| + \|\lambda_u(x)\| + \|\lambda'_u(I + f)\|(x)) \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\lambda(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\lambda'(x)\|. \end{aligned}$$

Uma vez que f , λ e λ' são funções limitadas, encontra-se uma cota superior para $K(f)_u(x)$, implicando que tal função é limitada. Por outro lado consegue-se que

$$\begin{aligned}\|K(f)_s(x)\| &= \|[L_s f_s + \lambda'(I + f) - \lambda_s]\Lambda^{-1}(x)\| \\ &\leq \|L_s f_s(\Lambda^{-1}(x))\| + \|\lambda'((I + f)(\Lambda^{-1}(x)))\| + \|\lambda_s(\Lambda^{-1}(x))\| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\lambda'(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\lambda(x)\|.\end{aligned}$$

Utilizando o argumento anterior conclui-se que $K(f)_s$ é função limitada. Portanto $K(f)$ é limitada, logo $K(f) \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$. Será mostrado agora que a função K é uma contração. Tome $\phi, \psi \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$, note que

$$\begin{aligned}\|K(\phi)_u - K(\psi)_u\| &= \|L_u^{-1}[\phi_u \Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + \phi)] - L_u^{-1}[\psi_u \Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + \psi)]\| \\ &\leq \|L_u^{-1}[(\phi_u - \psi_u)\Lambda + \lambda'_u(I + \phi) - \lambda'_u(I + \psi)]\| \\ &\leq \|L_u^{-1}\| [\|\phi - \psi\| + \mu\|\phi - \psi\|] \\ &\leq (a + a\mu)\|\phi - \psi\| \\ &\leq (a + \mu)\|\phi - \psi\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)\|\phi - \psi\|\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|K(\phi)_s - K(\psi)_s\| &= \|[L_s \phi_s + \lambda'(I + \phi) - \lambda_s]\Lambda^{-1} - [L_s \psi_s + \lambda'(I + \psi) - \lambda_s]\Lambda^{-1}\| \\ &\leq \|L_s(\psi - \phi)(\Lambda^{-1})\| + \|\lambda'(I + \phi)(\Lambda^{-1}) - \lambda'(I + \psi)(\Lambda^{-1})\| \\ &\leq \|L_s\| \|\phi - \psi\| + \mu\|\phi - \psi\| \\ &\leq (a + \mu)\|\phi - \psi\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)\|\phi - \psi\|.\end{aligned}$$

Dessa forma será concluído que a aplicação $K_{\Lambda, \Lambda'}$ é uma contração, e aplicando o Teorema A.2 tem-se que para cada Λ, Λ' existe um único ponto fixo $g = g_{\Lambda, \Lambda'}$ que depende continuamente de $(\Lambda, \Lambda') \in \mathcal{L}_\mu(L) \times \mathcal{L}_\mu(L)$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}g &= K(g) \\ (g_u, g_s) &= (L_u^{-1}[g_u \Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + g)], [L_s g_s + \lambda'(I + g) - \lambda_s]\Lambda^{-1}),\end{aligned}$$

uma vez que (A.3.1) é equivalente à ocorrência simultânea de (A.3.3) e (A.3.4), obtém-se que:

$$\begin{aligned}g\lambda - Lg &= \lambda'(I + g) - \lambda \\ \Rightarrow (I + g)(L + \lambda) &= (L + \lambda')(I + g) \\ \Rightarrow (I + g)\Lambda &= \Lambda'(I + g).\end{aligned}$$

Tomando $h = h_{\Lambda, \Lambda'} = I + g_{\Lambda, \Lambda'}$ consegue-se que h é uma função contínua que satisfaz $h\Lambda = \Lambda'h$. Mostremos agora que a inversa de $h_{\Lambda, \Lambda'}$ é $h_{\Lambda', \Lambda}$. Basta notar que

$$h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda} \Lambda' = h_{\Lambda, \Lambda'} \Lambda h_{\Lambda', \Lambda} = \Lambda' h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda},$$

sendo assim $h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda}$ conjuga Λ' com a própria Λ' , mas note que a função identidade também faz essa conjugação, então pela unicidade tem-se que $h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda} = I$, e repetindo o mesmo argumento para o lado oposto concluímos que $h_{\Lambda', \Lambda} h_{\Lambda, \Lambda'} = I$.

Para demonstrar o lema, basta tomar $\Lambda' = L$, sendo assim consegue-se o homeomorfismo $h = h_\Lambda$ que satisfaz $h_\Lambda \Lambda = L h_\Lambda$ e depende continuamente de Λ . \square

Lema A.3. *Se $\Lambda = L + \lambda$ é considerado como um campo vetorial em \mathbb{R}^n , e^L é isomorfismo hiperbólico com respeito a $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$ e $\nu > 0$ é suficientemente pequeno, então para cada $\Lambda_\nu(L)$ existe um único $H = H_\Lambda \in \mathcal{H}$ tal que $H\phi_\Lambda(t, x) = e^{Lt}H(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\phi_\Lambda(x)$ é o fluxo de Λ e H_Λ é um homeomorfismo dependendo continuamente de $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu$.*

Demonstração. Dado o isomorfismo hiperbólico e^L , o Lema A.2 nos garante a existência de $\mu > 0$ tal que para cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$ existe um único $h = h_\Lambda \in H$ tal que $h\Lambda = Lh$, sendo assim, tome $\nu = \min \left\{ \frac{\mu}{e^{2\|L\|} e^{\|e^L\|}}, 1 \right\}$.

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$. Considere a aplicação de tempo 1 do fluxo ϕ , isto é, $\tilde{\phi}(x) = \phi_\Lambda(1, x)$, tal que $x \in \mathbb{R}^n$.

Será mostrado que $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$. Utilizando o Teorema A.4, observa-se que o fluxo $\phi = \phi_\Lambda$ satisfaz a seguinte relação:

$$\phi(t, x) = e^{Lt}x + \int_0^t e^{L(t-s)}\lambda(\phi(s, x))dt,$$

consequentemente

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(1, x) = e^Lx + \int_0^1 e^{L(1-s)}\lambda(\phi(s, x))dt,$$

logo temos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}(x) - e^L(x)\| &= \left\| \int_0^1 e^{L(1-s)}\lambda(\phi(s, x))dt \right\| \\ &\leq e^{\|L\|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\lambda(x)\| \\ &\leq e^{\|L\|}\nu \\ &\leq \mu. \end{aligned}$$

Para mostrar que $\tilde{\phi} - e^L$ é Lipschitz, precisa-se primeiro mostrar que $\phi(t, x)$ é Lipschitziana na segunda variável, $\forall t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \|\phi(t, x) - \phi(t, y)\| &= \left\| e^{Lt}(x - y) + \int_0^t e^{L(t-s)} [\lambda(\phi(s, x)) - \lambda(\phi(s, y))] ds \right\| \\ &\leq e^{\|L\|} \|x - y\| + e^{\|L\|}\nu \int_0^t \|\phi(s, x) - \phi(s, y)\| ds \\ &\leq e^{\|L\|} \|x - y\| + e^{\|L\|}\nu \int_0^t \|\phi(s, x) - \phi(s, y)\| ds \end{aligned}$$

utilizando o lema de Gronwall (veja o Teorema A.3) temos que

$$\begin{aligned}\|\phi(t, x) - \phi(t, y)\| &\leq e^{\|L\|} \|x - y\| e^{t\|e^L\|\nu} \\ &\leq e^{\|L\|} e^{\|e^L\|} \|x - y\|, \text{ para todo } t \in [0, 1],\end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned}\|\tilde{\phi}(x) - e^L x - \tilde{\phi}(y) - e^L y\| &= \left\| \int_0^1 e^{L(1-s)} (\lambda(\phi(s, x)) - \lambda(\phi(s, y))) ds \right\| \\ &\leq \nu e^{\|L\|} \sup_{t \in [0, 1]} \|\phi(s, x) - \phi(s, y)\| \\ &\leq \nu e^{2\|L\|} e^{\|e^L\|} \|x - y\| \\ &\leq \mu \|x - y\|,\end{aligned}$$

dessa forma conclui-se que $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$, e utilizando o Lema A.2 constatamos que existe $h = h_{\tilde{\phi}}$ tal que

$$h \circ \tilde{\phi}(x) = e^L h(x).$$

Define-se $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(x) = \int_0^1 e^{-Ls} h(\phi(s, x)) ds$. Mostraremos que H conjuga ϕ com e^{Lx} . Observe que

$$\begin{aligned}e^{Lt} H(x) &= \int_0^1 e^{L(t-s)} h(\phi(s, x)) ds \\ &= \int_0^1 e^{L(t-s)} h(\phi(s-t, \phi(t, x))) ds \\ &= \int_{-t}^{1-t} e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du \\ &= \int_{-t}^0 e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du + \int_0^{1-t} e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du \\ &= \int_{-t}^0 e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du + \int_0^{1-t} e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du \\ &= \int_{-t}^0 e^{-L(u+1)} e^L h(\phi(u, \phi(t, x))) du + \int_0^{1-t} e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du \\ &= \int_{-t}^0 e^{-L(u+1)} h(\phi(u+1, \phi(t, x))) du + \int_0^{1-t} e^{-Lu} h(\phi(u, \phi(t, x))) du \\ &= \int_0^1 e^{-Lv} h(\phi(v, \phi(t, x))) dv + \int_0^{1-t} e^{-Lv} h(\phi(v, \phi(t, x))) dv \\ &= \int_0^1 e^{-Lx} h(\phi(v, \phi(t, x))) dv \\ &= H(\phi(t, x)).\end{aligned}$$

Basta mostrar agora que H é homeomorfismo, para isso note que, para $t = 1$, a conjugação é satisfeita, sendo assim

$$e^L H(x) = H(\phi(1, x)) = H(\tilde{\phi}(x)),$$

mas h é a única função com essa propriedade, dessa forma conclui-se que $H = h$ e, conseqüentemente, H é homeomorfismo que depende continuamente da função $\lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$. \square

Teorema A.5. (Hartman- Grobman) *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças W de p em Δ e V de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_W$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_V$.*

Demonstração. Primeiramente note que podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = 0$. Pois caso ocorra $p \neq 0$, consideramos o campo $\tilde{X} : \{u - p; u \in \Delta\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\tilde{X}(u) = X(p + u)$, dessa forma tem-se que o fluxo de \tilde{X} é conjugado ao de X por uma translação; se for provado que \tilde{X} é conjugado a $DF(p)$ numa vizinhança suficientemente próxima da origem, então pela transitividade da conjugação demonstramos o teorema.

Sendo assim supõe-se $p = 0$. Como 0 é um ponto singular hiperbólico, então os autovalores de $DX(0)$ possuem parte real diferente de zero, dessa forma $e^{DX(0)t}$ é um isomorfismo hiperbólico. Pelo Lema A.3 temos a existência de $\nu > 0$ tal que, para todo campo de vetores $\Lambda = DX(0) + \lambda$ tal que $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(DX(0))$, existe um homeomorfismo que conjuga o fluxo de Λ com o fluxo da equação linear $DX(0)x$.

Aplicando o Lema A.1 em X e $\nu > 0$, existem $r_1 > r_2 > 0$ e $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 tal que:

1. $G = X$ em $B_{r_2}(0)$.
2. $G = DX(0)$ fora de $B_{r_1}(0)$.
3. A função $\Psi = G - DX(0)$ é limitada por ν .
4. Ψ é ν -Lipschitz.
5. Ψ é uniformemente contínua.

Como $G = DX(0) + \Psi$, então $G \in \mathcal{L}_\nu(DX(0))$. Sejam $\Phi(t, x)$ e $g(t, x)$ os respectivos fluxos dos campos vetoriais X e G . Utilizando o Lema A.3, sabe-se que existe um homeomorfismo H tal que $H(g(t, x)) = e^{DX(0)t}H(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Uma vez que $X|_{B_{r_2}(0)} = G|_{B_{r_2}(0)}$, tem-se pela unicidade de solução da EDO que $\Phi(t, x) = g(t, x)$, $\forall x \in B_{r_2}(0)$ e $(t, x) \in W$, onde W é o domínio de definição das soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = X|_{B_{r_2}(0)}(x), \\ x(0) = x_0, x_0 \in B_{r_2}(0). \end{cases}$$

Como W é aberto, encontra-se uma vizinhança de 0 que satisfaz

$$H(\Phi(t, x)) = e^{DX(0)t}H(x), \forall (t, x) \in W.$$

\square