

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes: Teoria Local e Global.

Matheus Manzatto de Castro RA:156735

ORIENTADOR: Ricardo Miranda Martins

CAMPINAS
2016

Sumário

1	Introdução	2
2	Justificativa	2
3	Objetivos	3
4	Método	3
4.1	Sistemas Dinâmicos Lineares Definidos por Partes em Dimensão 2	3
4.2	Pontos Singulares	4
4.2.1	Caso Suave	4
4.2.2	Caso Não-Suave	4
4.3	Órbitas	5
4.4	Fluxo de um sistema de equações diferenciais	6
4.5	Ideias Básicas da Teoria Qualitativa	6
4.6	Retrato de Fase	7
4.6.1	Retratos de Fase de Sistemas Dinâmicos Lineares de Dimensão 2	9
4.7	Outros Espaços de Dimensão 2	12
4.7.1	Toro (\mathbb{T}^2)	12
4.7.2	Esfera (\mathbb{S}^2)	18
5	Perspectivas de Continuidade	19
6	Outras Atividades de Interesse Universitário	20
7	Apoio	20
8	Agradecimentos	20
9	Referências Bibliográficas	20

1 Introdução

Muitos fenômenos físicos são descritos por um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, porém grande parte dessas equações não possuem uma solução explícita, uma vez que não podem ser descritas por funções elementares. É nesse momento que aparece a necessidade da criação de uma teoria qualitativa que consegue analisar tais equações de forma eficiente sem que elas sejam resolvidas explicitamente.

Com o passar do tempo, foi descoberta a existência de fenômenos que para serem descritos era necessário que seu sistema de equações diferenciais fosse definido por partes, ou seja, a equação que rege este evento muda a partir de uma certa condição. Tendo em vista o estudo destes sistemas foi criada uma ampla teoria em volta dos Sistemas Dinâmicos Definidos Por Partes.

Dentro do âmbito desses sistemas existem os chamados Sistemas Dinâmicos Lineares Por Partes (SDLP), possuindo uma dinâmica muito rica e interessante.

Com o intuito do estudo dos SDLP em dimensão 2, primeiramente foram compreendidos tópicos da teoria clássica de Sistemas Dinâmicos (onde os sistemas são suaves), dentre os quais podem ser citados: pontos de singularidade, fluxo de um sistema de equações diferenciais, retrato de fase, ideias básicas da teoria qualitativa, análise de órbitas, ciclos limites, algumas técnicas mais avançadas de resolução de EDO's, bifurcações, introdução ao conceito de variedades, comportamento de campos vetoriais e sistemas de equações diferenciais definidos no toro e na esfera. Após a fixação desses conceitos início-se a análise dos SDLP.

No que se diz respeito ao estudo dos SLDP, se consistiu na análise dos retratos de fase em \mathbb{R}^2 , na dinâmica do campo deslizante e na avaliação de equações diferenciais muito simples definidas por partes na esfera.

Além disso no âmbito contínuo foi demonstrado o comportamento da dinâmica de campos polinomiais de primeira ordem divergentes e Hamiltonianos no toro.

2 Justificativa

Um dos ramos da matemática que vem se desenvolvendo muito nos últimos anos é a teoria por trás dos Sistemas Dinâmicos Não-Suaves (SDNS), porém existem vários inconvenientes provenientes da tentativa de desenvolvimento dessa teoria. Uma maneira de se conseguir melhores resultados é restringindo as funções utilizadas por funções lineares, entrando assim na classe dos SDLP. Ao fazer isso temos como maior vantagem o fato de que a solução de cada parte do sistema pode ser encontrada analiticamente, algo que muitas vezes não ocorre no caso geral.

A aplicação que será retirada deste projeto é o estudo da dinâmica em variedades compactas de dimensão 2 (esfera e toro), considerando as arestas da triangulação, gerando assim alguns exemplos da ocorrência de casos muito peculiares.

3 Objetivos

O objetivo do projeto é possibilitar que o aluno tenha contato com a teoria dos SDNS, a partir dos SDLP em dimensão 2, abrangendo os tópicos referentes a:

1. Existência e estimativa da quantidade máxima de Ciclos Limites.
2. Existência, localização e estabilidade de Ciclos Homoclínicos e Heteroclínicos.
3. Dinâmica da Região de Deslize.
4. Relações entre o número de regiões de costura, deslize estável e instável para sistemas lineares por partes definidos em poliedros (e/ou quocientes de poliedros), de modo que as arestas sejam regiões de descontinuidade.

Os itens (1), (2) e (3) são decorrentes da abordagem clássica dos SDNS e o item (4) é um caso especial de um trabalho desenvolvido pelo orientador.

4 Método

Foram utilizados os métodos tradicionais de matemática. O aluno estudou as referências [1], [2], [3] e utilizou o *software Mathematica 10.3* para fazer simulações computacionais.

4.1 Sistemas Dinâmicos Lineares Definidos por Partes em Dimensão 2

Nesta subseção serão definidos os SDLP em dimensão 2, a fim de mostrar qual estrutura matemática o projeto se propõe a entender.

Definição 1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto não vazio, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua. Denomina-se a equações da forma*

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \text{ onde } y = y(t)$$

de Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem.

Notação 1. *Sejam A, B subconjuntos de \mathbb{R}^2 não vazios e y , e seja $y : A \mapsto B$ onde y é derivável no interior de A com relação a t . Neste caso utiliza-se a seguinte notação:*

$$\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$$

Definição 2. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $f_i : A \mapsto \mathbb{R}$ e $y_i = y_i(t)$ uma função contínua. Denomina-se o sistema de equação da forma*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = f_{n-1}(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

de Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

Notação 2. Sejam A_i, B_i subconjuntos de \mathbb{R}^n e seja y um vetor da forma $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, onde $y_i : A_i \mapsto B_i$ sendo y_i derivável no interior de A_i com relação a t , para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Nesse caso utiliza-se a seguinte notação:

$$\dot{y} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right)$$

Definição 3. (SDLP em dimensão 2) Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja $f : U \mapsto \mathbb{R}$, onde f é uma função suave que tem 0 como valor regular. Chama-se $B = f^{-1}(0)$ a variedade de descontinuidade, dessa forma define-se $B_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > 0\}$ e $B_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) < 0\}$.

Assim defini-se o SDLP como

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases}$$

onde

$$X(x, y) = \begin{cases} a_1x + b_1y + e_1, & (x, y) \in B_+ \\ a_2x + b_2y + e_2, & (x, y) \in B_- \end{cases}$$

$$Y(x, y) = \begin{cases} c_1x + d_1y + e_3, & (x, y) \in B_+ \\ c_2x + d_2y + e_4, & (x, y) \in B_- \end{cases}$$

sendo $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, e_3$ e e_4 constantes reais.

4.2 Pontos Singulares

Na teoria dos Sistemas Dinâmicos os pontos singulares possuem grande importância, existindo vários teoremas que relacionando propriedades do ponto singular com o comportamento das órbitas e do retrato de fase (essas propriedades serão mencionadas mais a frente).

4.2.1 Caso Suave

Definição 4. Seja y um vetor da forma $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, onde $f(y_1, \dots, y_n) = (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n))$. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{y} = f(y), \tag{1}$$

caso exista uma n -upla $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ satisfazendo $f(y^*) = 0$, y^* é dito um ponto singular relacionado ao sistema (1).

4.2.2 Caso Não-Suave

Definição 5. Sejam X e Y campos vetoriais definidos em um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ e, sem perda de generalidade, assumamos que $\vec{0} \in U$. Considere $f : U \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^k (i.e. $f \in C^k(U, \mathbb{R})$) com $k > 1$, que possui 0 como valor regular,

então $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de dimensão $n - 1$ em U que divide o aberto U em 2 conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{x \in U; f(x) > 0\} \quad e \quad \Sigma^- = \{x \in U; f(x) < 0\}$$

Um sistema de Filippov é um campo vetorial suave por parte definido da seguinte forma:

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & x \in \Sigma^+ \\ Y(x), & x \in \Sigma^- \end{cases} \quad (2)$$

Definição 6. Considere um sistema como (2). Desta forma, definimos as seguintes regiões:

- Região de Costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$
- Região de Deslize: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$
- Região de Escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$

onde $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$

Definição 7. Considere um sistema de Filippov como (2). O campo vetorial deslizante ($Z^s(p)$) é definido por

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}$$

Definição 8. As singularidades do Sistema de Filippov (2) são:

1. $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, respectivamente.
2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^c$, tal que $Z^s(p) = 0$.
3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$, tal que p é um ponto que satisfaz $X(p) \cdot \text{grad}(f)(p) = 0$, nesse caso p é chamado de ponto de tangência singular.

4.3 Órbitas

Seja y um vetor da forma $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, onde $f(y_1, \dots, y_n) = (f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n))$, sendo f_i uma função ao menos \mathcal{C}^0 . Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{y} = f(y), \quad (3)$$

adicionando condições iniciais ao sistema obtém-se

$$\dot{y} = f(y), \quad y(s_0) = x_0 \quad (4)$$

onde $s_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$.

O teorema de existência e unicidade garante a existência de uma única função que resolve (4).

Notação 3. A solução de um sistema definida como (4) é denotada como $y(t) = \phi(t; s_0, x_0)$, i. e. $\phi : I_{(s_0, x_0)} \mapsto A$ sendo satisfeitos:

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t; s_0, x_0)}{dt} = f(t, \phi(t; s_0, x_0)) \\ \phi(s_0; s_0, x_0) = x_0 \end{cases}$$

Outro resultado interessante que se obtém é o fato das funções $\phi(t; s_0, x_0)$ e $\phi(t; s_0, x_1)$ não se interceptarem em nenhum ponto, desde que $x_0 \neq x_1$, e $x_1, x_0 \in A$.

Definição 9. Dada uma equação diferencial como (4). O conjunto

$$\gamma(s_0, x_0) := \{y \in A : y = \phi(t; s_0, x_0) \text{ e } t \in I_{(s_0, x_0)}\}$$

é chamado de órbita da solução $\phi(t; s_0, x_0)$.

4.4 Fluxo de um sistema de equações diferenciais

Definição 10. Considere a equação diferencial ou sistemas de equações diferenciais

$$\dot{y} = f(y), \tag{5}$$

onde $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitz em um subconjunto aberto A de \mathbb{R}^n . Suponha que para todo $y \in A$, a solução $\phi(t; 0, y)$ é definida em todo \mathbb{R} . O fluxo da equação diferencial (5) é definido como $\Phi : \mathbb{R} \times A \mapsto \mathbb{R}^n$ sendo que $\Phi(t, y) = \phi(t; 0, y)$.

É possível provar que o fluxo de um sistema como (5) apresenta as seguintes propriedades:

- Para todo $y \in A$, $\Phi(0, y) = y$.
- Para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e $y \in A$, $\Phi(s + t, y) = \Phi(s, \Phi(t, y))$.
- Φ é uma função contínua.

4.5 Ideias Básicas da Teoria Qualitativa

A teoria qualitativa é importante para a análise de sistemas dinâmicos em que não é possível conseguir uma solução explícita, sendo utilizada para a retirada das informações desejadas da solução. Nesta subseção serão apresentadas definições básicas e decorrentes deste ramo dos Sistemas Dinâmicos.

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não vazio e $\Phi : \mathbb{R} \times A \mapsto \mathbb{R}^n$ um fluxo associado a um sistema de equações diferenciais.

Considere agora um conjunto de pontos $E \subset A$. É dito que E é positivamente invariante sobre o fluxo se $\forall y \in E$ ocorre $\Phi(t, y) \in E, \forall t > 0$. Por outro lado, caso ocorra que $\forall y \in E$ implica $\Phi(t, y) \in E, \forall t \leq 0$, define-se E como negativamente invariante sobre o fluxo. E é dito invariante sobre o fluxo se ele for positivamente e negativamente invariante.

Um conjunto invariante é chamado de estável se, para toda vizinhança W de E , existe uma vizinhança V de E tal que, $\forall y \in V$ e $t > 0$ implica que $\Phi(t, y) \in W$. Caso esta condição não ocorra E é dito instável.

Dados os pontos $y_0, y_1 \in A$, o ponto y_0 é chamado de α -limite do ponto y_1 , se existe um sequência $\{s_n\}_{n=0}^{+\infty}$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(s_n, y_1) = y_0$.

Chama-se o ponto y_0 de ω -limite do ponto y_1 , se existe um sequência $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(s_n, y_1) = y_0$.

Dessa forma os conjuntos α -limite e ω -limite do ponto y_1 são denotados respectivamente, por $\alpha(y_1)$ e $\omega(y_1)$.

Considere agora $\gamma(y_1)$, a órbita que passa através do ponto y_1 . O α -limite da órbita $\gamma(y_1)$ é o conjunto α -limite do ponto y_1 . Pode-se provar que essa definição não depende do ponto y_1 da órbita. Consequentemente, os conjuntos α - e ω -limite são escritos como $\alpha(\gamma)$ e $\omega(\gamma)$

Dado um conjunto invariante E , a variedade estável de E , denotada por $W^s(E)$, é o conjunto de pontos no espaço de fase A que o conjunto ω -limite está contido em E . Da mesma forma define-se como a variedade instável de E , denotada por $W^u(E)$, o conjunto de pontos no espaço de fase A que o conjunto α -limite está contido em E .

O conjunto E é chamado de assintoticamente estável se a variedade $W^s(E)$ é a vizinhança de E e descrita como assintoticamente instável se a variedade $W^u(E)$ é a vizinhança de E .

Por fim, o ciclo limite de uma equação diferencial como (4) é uma órbita periódica isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas de (4). O ciclo limite é chamado de estável (instável) e é assintoticamente estável (instável).

4.6 Retrato de Fase

O retrato de fase é uma representação gráfica de um sistema dinâmico, sendo extremamente importante no caso da dimensão 2, pois torna possível uma análise visual de conceitos como: pontos singulares atratores e repulsores, além de ciclos limites. Podemos também dizer que o retrato de fase é uma representação geométrica do fluxo do sistema de equações diferenciais.

Os pontos singulares possuem grande importância para o retrato de fase, uma vez que apenas sabe-se quais são os pontos de singularidade do sistema em questão consegue-se fazer um esboço dessa representação.

Exemplo 1. *Desenhe o retrato de fase do sistema:*

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + x(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases} \quad (6)$$

Resolvendo o sistema (6) obtém-se as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{7}} \left[4C_1 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 e^{\frac{t}{2}} \left[\sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right] \right] \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{7}} \left[-2C_2 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_1 e^{\frac{t}{2}} \left[\sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right] \right] \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

Utilizando o software *Mathematica 10.3* vemos que o retrato de fase do sistema corresponde à Figura 1.

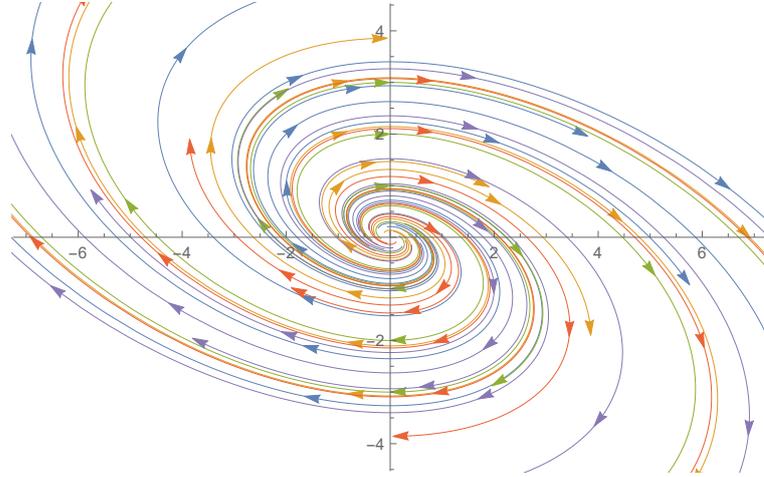


Figura 1: Retrato de Fase obtido com o software *Mathematica 10.3* correspondente à equação (6).

Um fato interessante para se notar é que nesta figura somente a origem é um ponto de singularidade. Apenas observando o retrato de fase consegue-se notar que esta singularidade é repulsora, uma vez que vemos que todos os pontos se afastam da origem à medida que t aumenta.

Exemplo 2. Desenhe o retrato de fase do sistema de Filippov:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x, y) \\ \dot{y}(t) = Y(x, y) \end{cases}$$

onde

$$X(x, y) = \begin{cases} 2y(t) + x(t), & y > 0 \\ 1, & y < 0 \end{cases}$$

$$Y(x, y) = \begin{cases} -x(t), & y > 0 \\ 1, & y < 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se as seguintes soluções:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{7}} \left[4C_1 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 e^{\frac{t}{2}} \left[\sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right] \right], & y > 0 \\ t + C_3, & y < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{7}} \left[-2C_2 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_1 e^{\frac{t}{2}} \left[\sqrt{7} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right] \right], & y > 0 \\ t + C_4, & y < 0 \end{cases}$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4 são constantes reais. Utilizando o software *Mathematica 10.3* observa-se que o retrato de fase do sistema corresponde à Figura 2.

Apenas analisando o retrato de fase pode-se concluir que a semirreta $r_0 = \{(t, 0) : t < 0\}$ apresenta uma região de costura e a semirreta $r_1 = \{(t, 0) : t \geq 0\}$ é uma região de deslize estável.

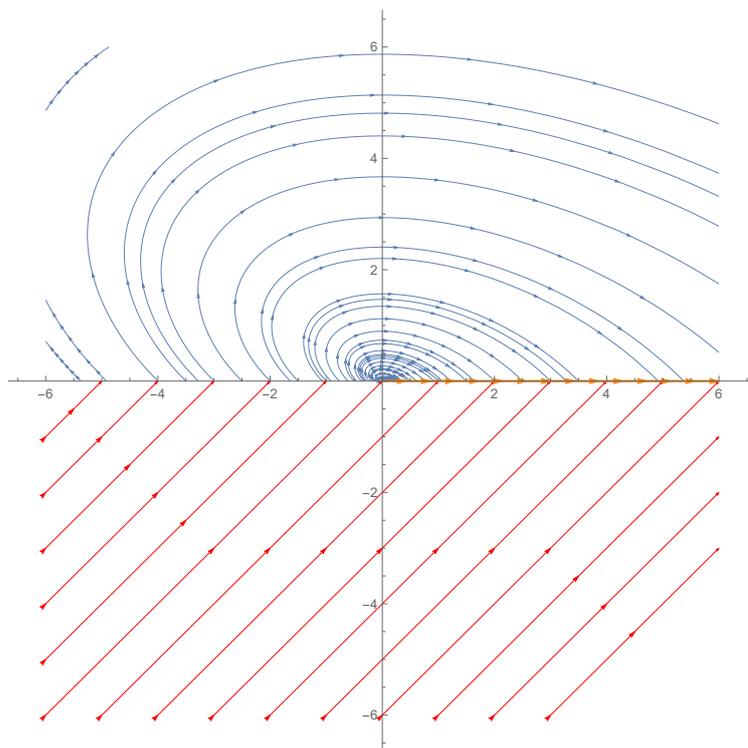


Figura 2: Retrato de Fase obtido com o *software Mathematica 10.3* correspondente à equação do Exemplo 2.

4.6.1 Retratos de Fase de Sistemas Dinâmicos Lineares de Dimensão 2

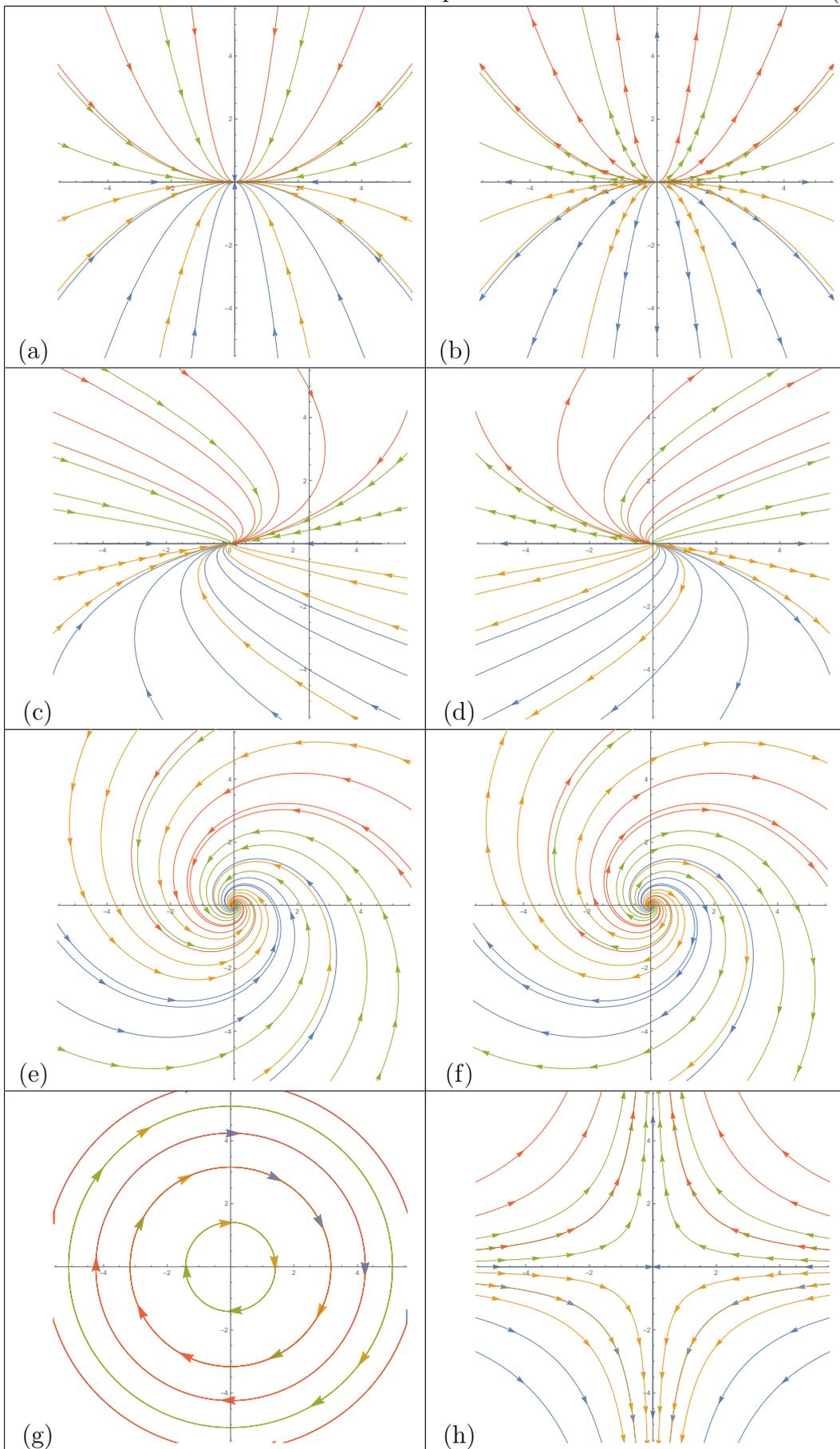
Seja $\dot{y} = f(y)$ um sistema dinâmico linear, i.e.

$$\dot{y} = Ay + C \tag{7}$$

onde A é uma matriz 2×2 e C é uma matriz 2×1 . Sem perda de generalidade podemos considerar C tendo em suas entradas 0, uma vez que a componente C apenas translada o retrato de fase do sistema (7).

O Retrato de Fase da equação acima tem ampla relação com seus autovalores. Na Tabela 1 foram desenhadas todas as estruturas possíveis para os retratos de fase provenientes da equação (7), ou seja, dado um retrato de fase linear ele corresponderá a algum gráfico da tabela, a menos de rotações e escalonamento de eixos.

Tabela 1: Possíveis estruturas para os retratos de fase do sistema (7)



Nos próximos parágrafos serão comentadas informações a respeito da Tabela 1.

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz A .

Tem-se que (a) se origina de um sistema dinâmico tal que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_-$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sendo chamado retrato de fase de um nó estável. Em contrapartida, (b) se origina quando os autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, possuindo o nome de retrato de fase de um nó instável.

A imagem (c) é gerada quando $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_-$ e $\lambda_1 = \lambda_2$. Este caso é conhecido como retrato de fase de um nó estável degenerado. Por outro lado se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, conforme o caso (d), este é batizado como retrato de fase de um nó instável degenerado.

Uma vez que λ_1, λ_2 possuam parte imaginária diferente de zero e $\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) \in \mathbb{R}_-$, é gerada a imagem (e), sendo este caso chamado de retrato de fase de um foco estável. Porém, se λ_1, λ_2 possuem parte imaginária diferente de zero e $\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) \in \mathbb{R}_+$, encontra-se o caso (f), sendo denominado retrato de fase de um foco instável.

Consegue-se o caso (g) quando λ_1, λ_2 sejam imaginários puros, são intitulado retrato de fase de centro.

Finalmente, o caso (h) ocorre quando $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, sendo chamado de retrato de fase de uma sela.

Também é possível fazer a mesma análise descrita acima, porém utilizando o traço e o determinante da matriz A . A Figura 3 representa esses casos.

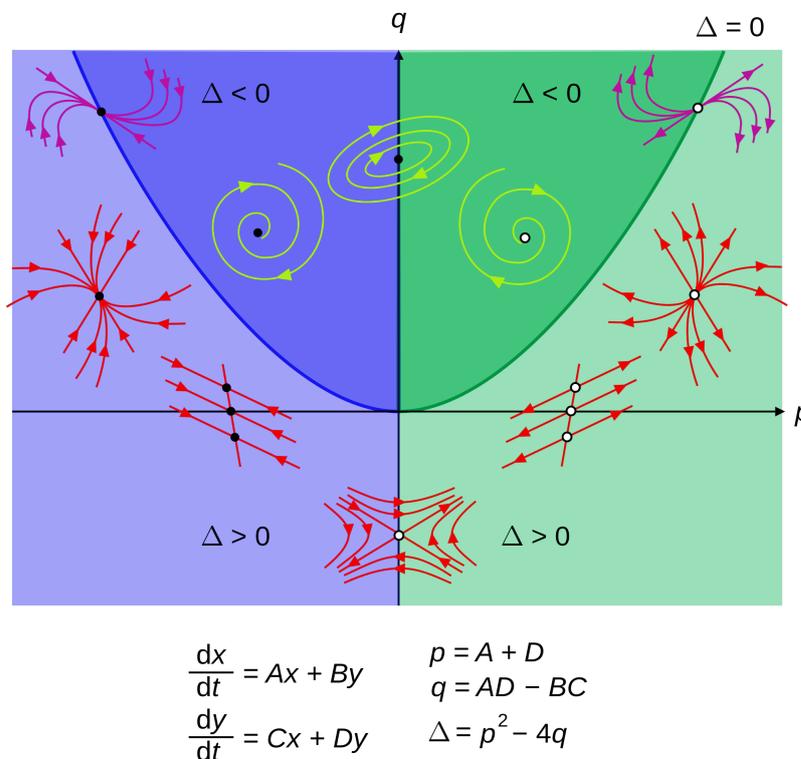


Figura 3: Diagrama Traço-Determinante da equação (7), retirado de [4].

4.7 Outros Espaços de Dimensão 2

4.7.1 Toro (\mathbb{T}^2)

Outro espaço interessante para se desenvolver a teoria de sistemas dinâmicos é o toro. Uma maneira de trabalhar nesse espaço é através de sua parametrização

$$\begin{aligned}x &= \sin(\theta), \\y &= (1 + \cos(\theta)) \cos(\phi), \\z &= (1 + \cos(\theta)) \sin(\phi),\end{aligned}$$

onde $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$.

Porém definir funções, campos vetoriais e fazer cálculos utilizando esta parametrização é uma tarefa árdua, uma vez que a parametrização é complicada.

Uma melhor maneira de se trabalhar com toro é definindo a seguinte relação de equivalência sobre \mathbb{R}^2 :

Seja \sim uma relação de equivalência sobre \mathbb{R}^2 tal que dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, temos que $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^2$.

Desta forma é possível identificar o toro como \mathbb{R}^2 / \sim . Durante o projeto será utilizada a segunda construção do toro.

Por conta da relação de equivalência pode-se apenas definir um campo vetorial $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ que satisfaça as seguintes relações:

- $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $f(x, y) = f(x + 2n\pi, y), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Sendo assim, define-se campo polinomial no toro de grau n como $F_n : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$

$$F_n(x, y) = \begin{bmatrix} P_n(x, y) \\ Q_n(x, y) \end{bmatrix}$$

onde,

$$P_n(x, y) = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{m+k=j} a_{mk}(x, y) + b_{mk}(x, y) + c_{mk}(x, y) + d_{mk}(x, y) \right],$$

$$Q_n(x, y) = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{m+k=j} \bar{a}_{mk}(x, y) + \bar{b}_{mk}(x, y) + \bar{c}_{mk}(x, y) + \bar{d}_{mk}(x, y) \right],$$

sendo que,

$$a_{mk}(x, y) = p_{mk} \cos(mx) \cos(ky),$$

$$\begin{aligned}
b_{mk}(x, y) &= q_{mk} \sin(mx) \cos(ky), \\
c_{mk}(x, y) &= r_{mk} \cos(mx) \sin(ky), \\
d_{mk}(x, y) &= s_{mk} \cos(mx) \cos(ky), \\
\bar{a}_{mk}(x, y) &= \bar{p}_{mk} \cos(mx) \cos(ky), \\
\bar{b}_{mk}(x, y) &= \bar{q}_{mk} \sin(mx) \cos(ky), \\
\bar{c}_{mk}(x, y) &= \bar{r}_{mk} \cos(mx) \sin(ky), \\
\bar{d}_{mk}(x, y) &= \bar{s}_{mk} \cos(mx) \cos(ky),
\end{aligned}$$

tal que $p_{mk}, q_{mk}, r_{mk}, s_{mk}, \bar{p}_{mk}, \bar{q}_{mk}, \bar{r}_{mk}, \bar{s}_{mk} \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1$ temos que $F_1(x, y)$ é definido por

$$F_1(x, y) = \begin{bmatrix} P_1(x, y) \\ Q_1(x, y) \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) &= c + a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x) + b_1 \sin(y) + b_2 \cos(y), \\
Q_1(x, y) &= \bar{c} + \bar{a}_1 \sin(x) + \bar{a}_2 \cos(x) + \bar{b}_1 \sin(y) + \bar{b}_2 \cos(y).
\end{aligned}$$

sendo que $c, a_1, a_2, b_1, b_2, \bar{c}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \mathbb{R}$.

Uma pergunta natural são quais propriedades podemos retirar desses campos definidos no toro.

4.7.1.1 Campo Divergente Polinomial de Primeira Ordem

Seja $X : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ um campo gradiente polinomial de primeira ordem. Pela equação (8) tem-se que X é escrito da seguinte forma:

$$X(x, y) = \begin{bmatrix} a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x) - c \\ b_1 \sin(y) + b_2 \cos(y) - d \end{bmatrix}$$

onde $c, d, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = X(x, y), \quad (9)$$

onde $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e onde $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal que $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Nesta situação foi possível provar o seguinte teorema:

Teorema 1. *Sejam $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ um campo divergente polinomial de primeira ordem e o sistema $\dot{y} = F(y)$, com 4 pontos de singularidade. Então o retrato de fase de F possui 2 selas e 2 nós (um instável e um estável).*

Exemplo 3. Retrato de fase do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x) - \cos(x) - 1 \\ 2 \sin(y) - \cos(y) - 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Uma vez que o sistema possui 4 soluções, calculando os pontos singulares encontram-se os pares, $(\pi, \pi), (\pi, 2 \arctan \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{\pi}{2}, 2 \arctan \frac{1}{2})$, cujos respectivos autovalores da matriz Jacobiana são $-1, -2; -1, 2; 1, -2$ e $1, 2$. Sendo assim os pontos $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $(\frac{\pi}{2}, 2 \arctan \frac{1}{2})$ são pontos de sela, (π, π) é um nó estável e $(\frac{\pi}{2}, 2 \arctan \frac{1}{2})$ um nó instável.

Por outro lado observa-se que as variedades instáveis e estáveis da sela são paralelas aos eixos x ou y . Fazendo o retrato de fase observa-se ainda que a imagem também satisfaz o que a teoria nos garante.

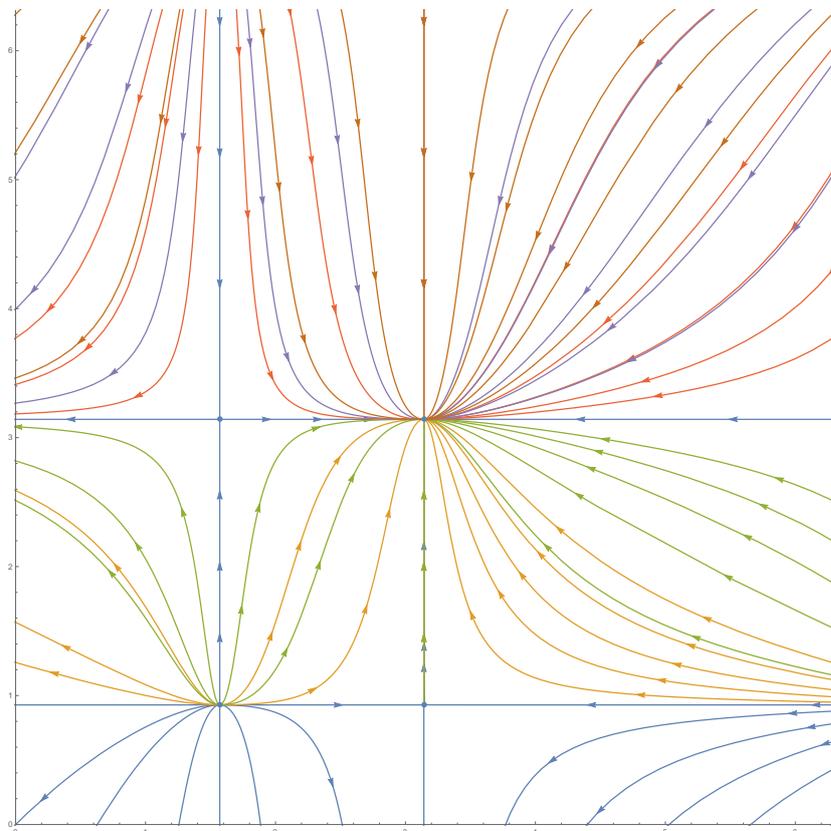


Figura 4: Retrato de Fase do sistema (10) utilizando o *software Mathematica 10.3*

4.7.1.2 Campo Hamiltoniano Polinomial de Primeira Ordem

Seja $Y(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ um campo polinomial de primeira ordem Hamiltoniano, pela equação (8) tem-se que Y deve ser escrito da seguinte forma:

$$Y(x, y) = \begin{bmatrix} a_1 \sin(y) + a_2 \cos(y) - c \\ b_1 \sin(x) + b_2 \cos(x) - d \end{bmatrix}$$

onde $c, d, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$.

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = Y(x, y), \quad (11)$$

onde $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tais que $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Teorema 2. *Sejam $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$, um campo Hamiltoniano polinomial de primeira ordem e o sistema $\dot{y} = F(y)$, com 4 pontos de singularidade. Então o retrato de fase de F , possui 2 centros e 2 selas.*

Exemplo 4. *Retrato de fase do sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin(y) - \cos(y) - 1 \\ 2 \sin(x) - \cos(x) - 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

O sistema possui 4 soluções, calculando os pontos singulares encontram-se os pares, (π, π) , $(\pi, \frac{\pi}{3})$, $(\arctan \frac{4}{3}, \pi)$, $(\arctan \frac{4}{3}, \frac{\pi}{3})$, os respectivos autovalores da matriz Jacobiana são $(\sqrt[4]{12}, -\sqrt[4]{12})$, $(i\sqrt[4]{12}, -i\sqrt[4]{12})$, $(i\sqrt[4]{12}, -i\sqrt[4]{12})$ e $(\sqrt[4]{12}, -\sqrt[4]{12})$, sendo assim os pontos (π, π) e $(2\pi - 2 \arctan 3, \frac{\pi}{3})$ são pontos de sela, $(\pi, \frac{\pi}{3})$ e $(\arctan \frac{4}{3}, \frac{\pi}{3})$ são pontos de centro.

Fazendo o retrato de fase vemos que a imagem satisfaz o que a teoria nos garante.

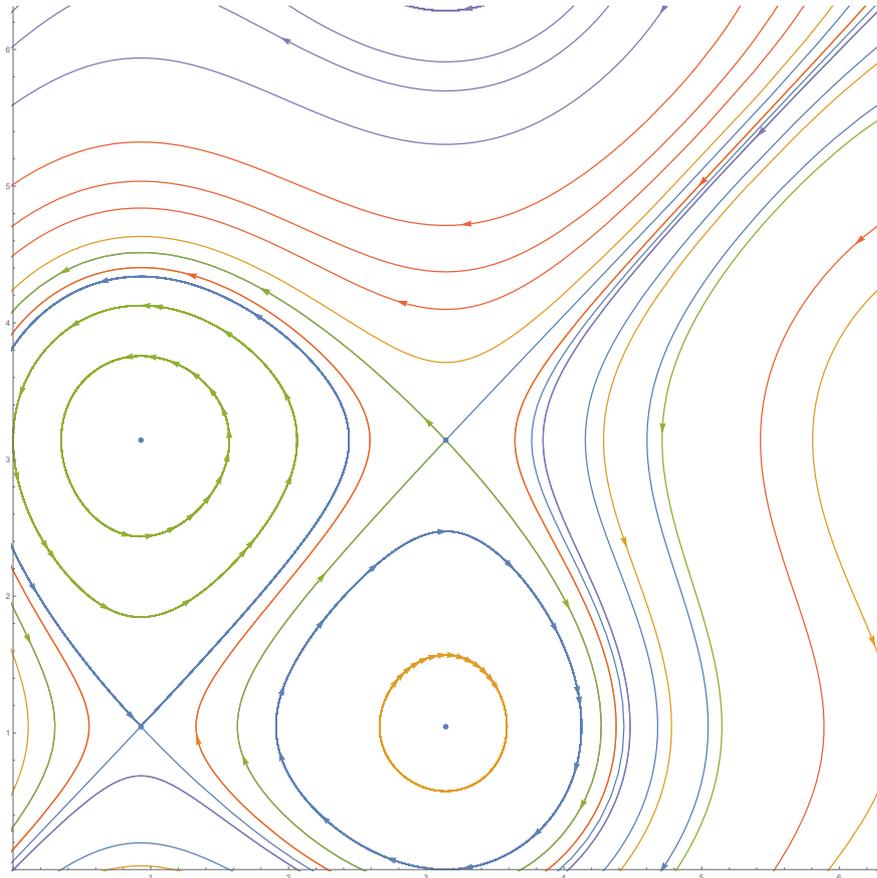


Figura 5: Retrato de Fase do sistema (12) utilizando o *software Mathematica 10.3*

4.7.1.3 Campos Hamiltoniados Polinomiais de Ordens Superiores

Seja $Z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ um campo Hamiltoniano polinomial. Neste caso pode-se encontrar o seguinte resultado:

Teorema 3. *Seja $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ um campo Hamiltoniano polinomial e considere o sistema $\dot{y} = F(y)$. Então se a razão entre os termos independentes de F pertencer aos racionais, as órbitas do sistema que não são homoclínicas ou singularidades são periódicas; caso contrário tais órbitas tem as homoclínicas como α - ou ω - limite.*

Exemplo 5. *Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$, no sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(y) - \cos(y) + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \sin(x) + 2 \cos(x) + 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

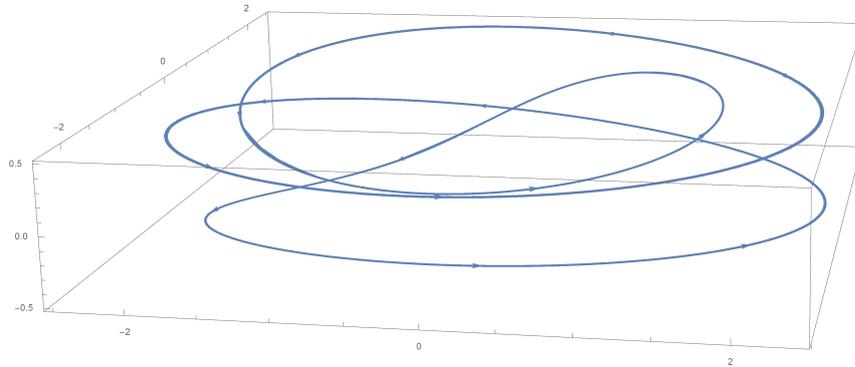


Figura 6: Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$, com o tempo variando de 0 a 50, no sistema (13) utilizando o *software Mathematica 10.3*

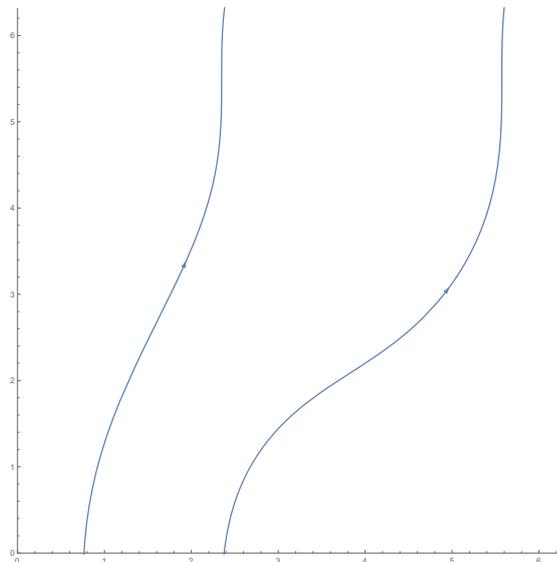


Figura 7: Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$ na relação de equivalência, no sistema (13) utilizando o *software Mathematica 10.3*

Exemplo 6. Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$, no sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(y) - \cos(y) + \sqrt{2} + 0.1 \\ \sqrt{2} \sin(x) + 2 \cos(x) + 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

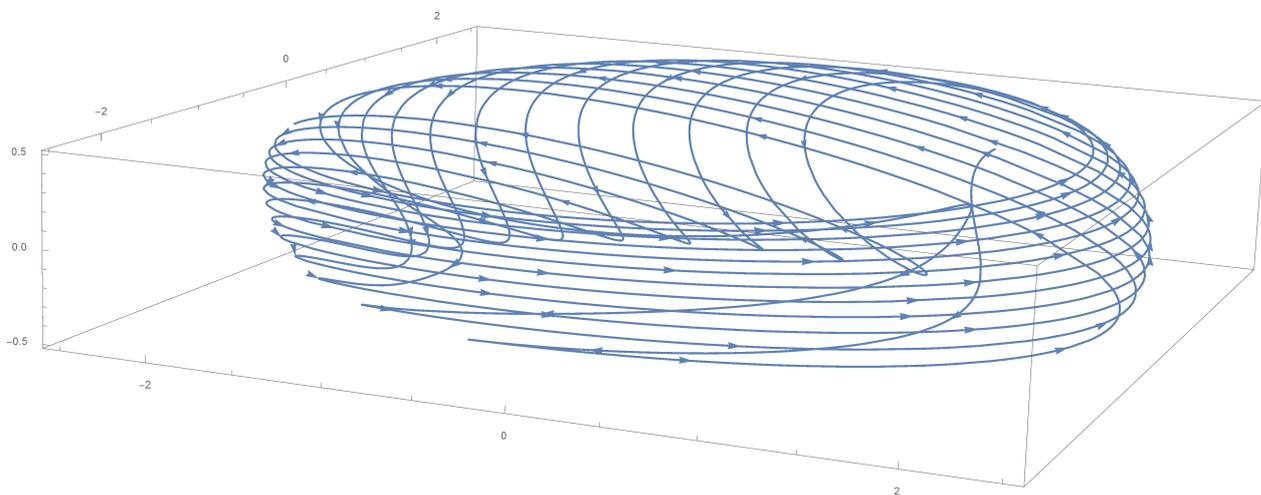


Figura 8: Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$, com o tempo variando de 0 a 50, no sistema (14) utilizando o *software Mathematica 10.3*

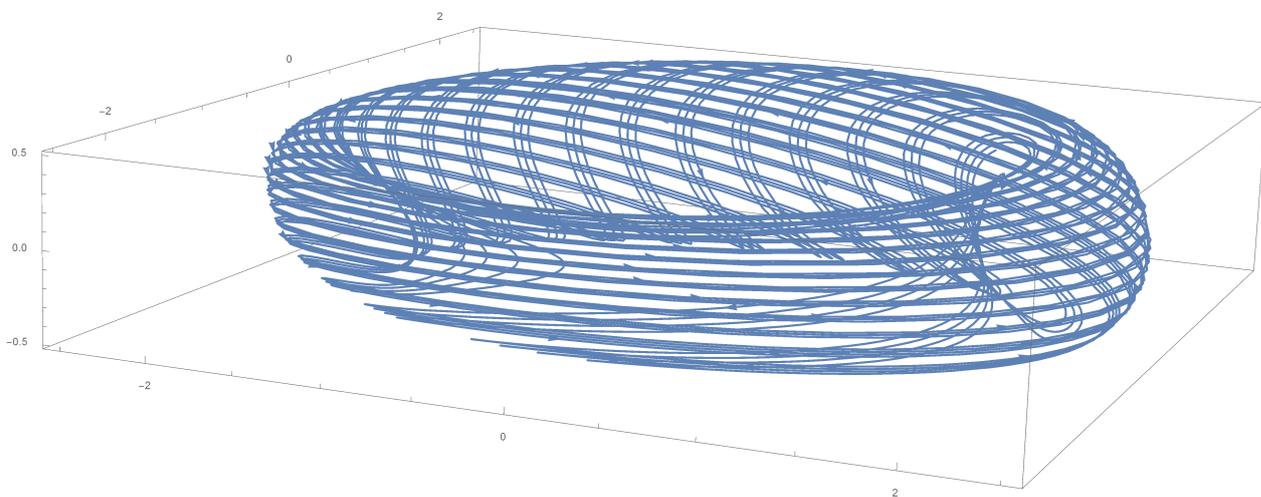


Figura 9: Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$, com o tempo variando de 0 a 200, no sistema (14) utilizando o *software Mathematica 10.3*

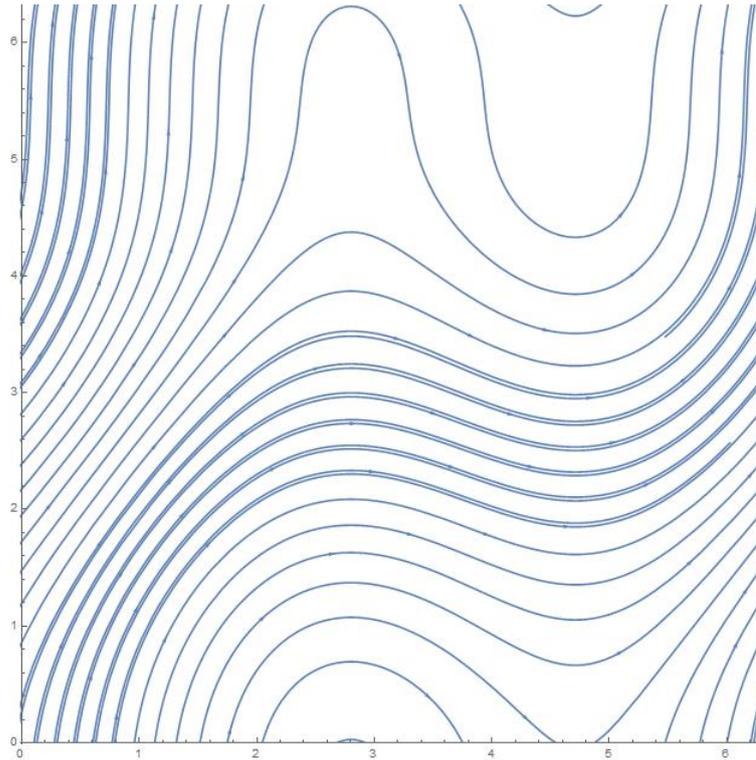


Figura 10: Órbita do ponto $(0.8\pi, 0.2\pi)$ na relação de equivalência, no sistema (14) utilizando o *software Mathematica 10.3*

4.7.2 Esfera (\mathbb{S}^2)

Assim como no toro, é possível desenvolver a teoria de sistemas dinâmicos na esfera pela sua parametrização

$$\begin{aligned} x &= \sin(\phi) \cos(\theta), \\ y &= \sin(\phi) \sin(\theta), \\ z &= \cos(\phi), \end{aligned}$$

onde $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$.

Uma maneira mais interessante de se trabalhar na esfera é pensando na planificação do tetraedro. Isso é permitido uma vez que existe um homeomorfismo entre a esfera e o tetraedro, sendo assim eles são topologicamente equivalentes.

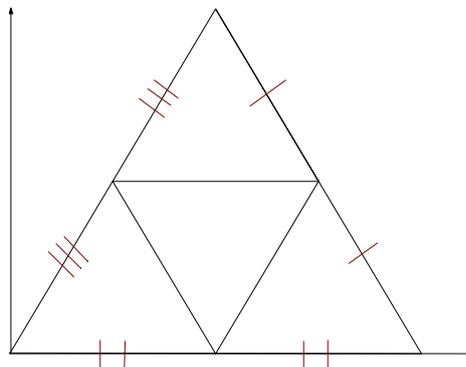


Figura 11: Representação gráfica da planificação do tetraedro com relação de equivalência.

A relação consiste em considerar 2 pontos que estão em arestas distintas que possuam a mesma marcação (de acordo com Figura 11). Caso as distâncias de cada ponto até o ponto médio (do segmento de reta que é a união dos 2 segmentos de retas com mesma marcação) sejam iguais, então esses pontos são equivalentes. Os demais pontos que pertencem ao interior do triângulo externo são todos distintos.

Ou seja, define-se a seguinte relação de equivalência \sim_1 sobre \mathbb{R}^2 . Dados os pontos $u, v \in \mathbb{R}^2$, tal que $u = (u_0, u_1)$ e $v = (v_0, v_1)$ tem-se que $u \sim_1 v$, se e somente se, uma condição dentre as seguintes for satisfeita

- $u_1 = v_1$, e $u_0 + v_0 = 2k$,
- $u - v = (k, k\sqrt{3})$,
- $u - v = (-k, k\sqrt{3})$,

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Sendo assim, a esfera é identificada como \mathbb{R}^2 / \sim_1

Um trabalho que o aluno desenvolveu utilizando essa identificação da esfera é a investigação das regiões de costura e deslize em um sistema dinâmico definido por partes da seguinte maneira

$$x'(t) = \begin{cases} u_1, & (x, y) \in S_1 \\ u_2, & (x, y) \in S_2 \\ u_3, & (x, y) \in S_3 \\ u_4, & (x, y) \in S_4 \end{cases}$$

$$y'(t) = \begin{cases} \theta_1, & (x, y) \in S_1 \\ \theta_2, & (x, y) \in S_2 \\ \theta_3, & (x, y) \in S_3 \\ \theta_4, & (x, y) \in S_4 \end{cases}$$

onde S_i corresponde à face i do tetraedro, $u_i \in \{-1, 0, 1\}$ e $\theta_i \in \mathbb{R}$.

O resultado obtido foi o seguinte teorema:

Teorema 4. *Seja $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{S}^2$ um campo vetorial definido por partes na esfera, com F constante em cada lado do tetraedro. Então, genericamente:*

- *todas as configurações possíveis de regiões de costura e deslizantes são realizáveis;*
- *F não pode ter todas as trajetórias periódicas.*

5 Perspectivas de Continuidade

O aluno junto com seu orientador pretendem continuar a pesquisa sobre o tema de sistemas dinâmicos porém mudando o foco para o problema do centro-foco, integrais Abelianas e o 16° Problema de Hilbert.

6 Outras Atividades de Interesse Universitário

O aluno participou de alguns seminários de sistemas dinâmicos, sendo que em um deles fez uma apresentação sobre aplicações quadráticas e conjunto de Cantor.

7 Apoio

O aluno teve apoio financeiro do CNPq através do programa de bolsas PIBIC para a realização do projeto.

8 Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao PIBIC / CNPq / UNICAMP pela oportunidade, ao meu orientador pelo suporte e atenção e à minha amiga Bianca Dornelas pela sua ajuda e apoio.

9 Referências Bibliográficas

Referências

- [1] J. LLIBRE, A. E. TERUEL, *Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems*, Birkhäuser, 2014. p. 289 .
- [2] OTÁVIO MARÇAL LEANDRO GOMIDE, *Ciclos Limites em Sistemas Dinâmicos Suaves e Não-Suaves*, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2015.
- [3] A. KATOK, B. HAUSSELBLATT, *Introduction on the Modern Theory of Dynamical Systems*, Press Syndicate of the University of Cambridge, Volume 54, 1995, 802 p.
- [4] Phase plane nodes. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Phase_plane_nodes.svg?uselang=pt-br> . Acesso em: 15 jan. 2016
- [5] O. MAKARENKOV, J. S. W. LAMB, *Dynamics and bifurcations of non smooth systems: A survey*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. **241**, 1826-1844, 2012.
- [6] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM, 2011.
- [7] M. E. Broucke, C. Pugh, S. Simic, Structural stability of piecewise smooth systems. *Computational and Applied Mathematics* **20** 51–89 (2001).