



PAULO RAIMUNDO STERING MALTA

EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITE ALGÉBRICOS PARA EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS POLINOMIAIS PLANARES

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

PAULO RAIMUNDO STERING MALTA

EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITE ALGÉBRICOS PARA EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS POLINOMIAIS PLANARES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Ricardo Miranda Martins

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO PAULO RAIMUNDO STERING MALTA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO MIRANDA MARTINS.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, appearing to be "Ricardo", is written over a horizontal line. The signature is stylized and cursive.

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M298e Malta, Paulo Raimundo Stering, 1990-
Existência de ciclos limite algébricos para equações diferenciais polinomiais planares / Paulo Raimundo Stering Malta. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ciclos limite algébricos. 2. Equações diferenciais projetivas. 3. Equações diferenciais polinomiais. I. Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Existence of algebraic limit cycles for polynomial planar differential equations

Palavras-chave em inglês:

Algebraic limit cycles

Projective differential equations

Polynomial differential equations

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Ricardo Miranda Martins [Orientador]

Regilene Delazari dos Santos Oliveira

Maurício Firmino Silva Lima

Data de defesa: 23-02-2015

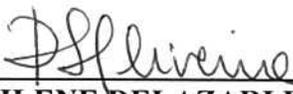
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de fevereiro de 2015 e aprovada

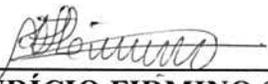
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS



Prof.(a). Dr(a). REGILENE DELAZARI DOS SANTOS OLIVEIRA



Prof.(a). Dr(a). MAURÍCIO FIRMINO SILVA LIMA

Abstract

In this work we present algebraic limit cycles for quadratic and cubic systems. For quadratic systems we show all the families of systems that have algebraic limit cycles of degree 4 and some of degree 5 and 6. We conclude that all these systems have a unique limit cycle, and it is algebraic. To obtain these results, we make use of projective techniques. Finally we will show that there are polynomial systems of differential equations of arbitrary degrees that have algebraic limit cycles of degree 3.

Keywords: Algebraic limit cycles; Projective differential equations; Polynomial differential equations.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos ciclos limite algébricos para sistemas quadráticos e cúbicos. Para sistemas quadráticos mostraremos todas as famílias de sistemas que possuem ciclos limite algébricos de grau 4 e algumas de grau 5 e 6. Concluiremos que todos estes sistemas possuem um único ciclo limite, neste caso o algébrico. Para estes resultados utilizaremos técnicas projetivas. Finalmente mostraremos que existem equações diferenciais polinomiais de grau arbitrário que possuem ciclos limite algébricos de grau 3.

Palavras-chave: Ciclos limite algébricos; Equações diferenciais projetivas; Equações diferenciais polinomiais

Sumário

Agradecimentos	xiii
Introdução	1
1 Introdução às equações diferenciais planares	3
1.1 Equações diferenciais polinomiais planares	3
1.2 Singularidades	4
1.3 Curvas invariantes e ciclos limite	6
1.4 Integrais primeiras e sistemas hamiltonianos	7
2 Equações diferenciais no plano projetivo complexo	9
2.1 Construção do plano projetivo complexo	9
2.2 Curvas algébricas projetivas	10
2.2.1 Pontos múltiplos	10
2.2.2 O gênero de uma curva	12
2.2.3 Índice de intersecção	13
2.3 Equações diferenciais projetivas	15
2.4 Relações entre objetos afins e projetivos	16
2.5 Estrutura das curvas algébricas que possuem pontos duplos	17
3 Ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos	21
3.1 Introdução	21
3.2 Ciclos limite algébricos de grau 3 para sistemas quadráticos	22
3.3 Ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos	23
3.4 Alguns resultados sobre singularidades e pontos múltiplos	25
3.5 Alguns resultados sobre sistemas quadráticos	29
3.6 Prova do Teorema 3.4	32
3.6.1 A curva $F = 0$ possui um ponto triplo p	32
3.6.2 A curva $F = 0$ possui três pontos duplos p_1, p_2, p_3	32
3.6.3 A curva $F = 0$ possui dois pontos duplos p_1, p_2	35
3.6.4 A curva $F = 0$ possui um ponto duplo p	39

4	Alguns resultados acerca de sistemas cúbicos	49
4.1	Ciclos limite algébricos de grau 5 e 6 para sistemas quadráticos	49
4.2	Unicidade de ciclos limite para sistemas quadráticos	52
4.3	Ciclos limite algébricos para sistemas cúbicos	58
4.4	Ciclos limite algébricos de grau ≥ 3	62
4.5	Sistemas cúbicos com dois ciclos limite algébricos	69
	Referências	71

“Vencer a si mesmo é a maior de todas as vitórias.”

(Daisaku Ikeda)

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais e a toda minha família, através da educação a mim proporcionada foi possível manter minha carreira através dos estudos e galgar as etapas que me permitiram chegar até a conclusão deste trabalho.

Quanto a minha formação gostaria de agradecer imensamente ao Laboratório de Ensino de Matemática e a todos os seus membros, em especial Elinalva Vergasta. Todas as experiências proporcionadas, desde monitor no meu primeiro ano, oficinas e exposições realizadas foram únicas, cuja recíproca do público permitiu constatar o quanto a matemática é bela e humana.

Aos meus amigos durante a trajetória da Unicamp, gostaria de agradecer aos meus colegas conterrâneos Julianna, João e Campello por todo o suporte proporcionado nesta estadia aqui em Campinas, sem vocês o estudo não teria o mesmo sabor do que ao ambiente que vocês proporcionaram aqui na cidade. Aos meus colegas de turma, gostaria de agradecer a Henrique, Ana Cláudia, Maria Angélica, Débora e Ana Raquel, os estudos em comum para as disciplinas e exame de qualificação não seriam interessantes com a ausência de vocês. E sem deixar de mencionar, gostaria de agradecer aos meus colegas das salas do predinho que ocupei: Manuela, Elisa, Lucas e Wanderson, sem vocês não teria um ambiente de estudo descontraído para me aprofundar na Matemática. Finalmente gostaria de agradecer aos meus colegas do grupo de sistemas dinâmicos: Thais, Kamilla, Anna Paula e Otávio. Com vocês pude por em prática discutir ideias matemáticas para solução de problemas, ponto primordial para se fazer pesquisa em Matemática.

Aos meus orientadores durante a minha trajetória acadêmica gostaria de agradecer a Ricardo Miranda pela disponibilidade e paciência durante o trabalho realizado por nós no mestrado, nos momentos mais difíceis seus conselhos foram cruciais para a manutenção dos estudos, o que me permitiu concluir esta etapa. Aos orientadores da graduação, gostaria de agradecer a Andreas Brunner, José Fernandes e Paulo Varandas por terem me proporcionado o conhecimento necessário para chegar até este estágio.

Gostaria de agradecer também aos membros da BSGI de Salvador e de Campinas por todo o convívio neste ano de prática, e em particular aos membros do Bloco Vela Branca, Barão Geraldo e Independência. Através desta filosofia de vida foi proporcionado a mim vencer todos os desafios e cumprir esta etapa.

Finalmente gostaria de agradecer à Unicamp por toda estrutura que proporcionou minha formação, à Capes e ao CNPq pelo suporte financeiro proporcionado para a manutenção dos meus estudos na universidade.

Introdução

Em 1900 foi realizado em Paris o segundo Congresso Internacional de Matemáticos. O objetivo desse congresso era estabelecer pontos de encontro para a comunicação e grupos de discussão. Neste congresso, Hilbert propôs uma lista de 24 problemas para serem resolvidos ao longo do século XX. Um dos problemas mais interessantes sugeridos por Hilbert está relacionado com ciclos limite, este problema é conhecido na literatura como o 16º problema de Hilbert e envolve dois questionamentos: posição relativa e número de ciclos limite. Smale, nos *Problemas matemáticos para o próximo século* (1998), reformulou a segunda parte do problema de Hilbert como segue:

Considere a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

onde P e Q são polinômios. Existe um limitante k para no número de ciclos limite da forma $k \leq d^q$, onde d é o máximo entre os graus de P e Q , e q é uma constante universal?

É bem sabido que não existem ciclos limite para sistemas lineares, mas o Problema de Hilbert está insolúvel mesmo para *sistemas quadráticos*. Este fato traz um sistemático estudo para sistemas quadráticos que podem ter ciclos limite e pode ser encontrado uma *Classificação Russa* e uma *Classificação Chinesa*. De acordo com a última, sistemas quadráticos que podem ter ciclos limite são classificados conforme

$$\dot{x} = \delta x - y + \ell x^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax + by)$$

nas três seguintes famílias: (I) se $a = b = 0$; (II) se $a \neq 0$ e $b = 0$; (III) se $b \neq 0$.

A dificuldade de tal problema fez necessário a imposição de mais hipóteses, levando a considerar os ciclos limite que estão inclusos em curvas algébricas. O estudo do grau de ciclos limite algébricos está diretamente relacionado ao estudo do grau de curvas algébricas invariantes. O problema de encontrar um limite superior para a última é conhecido como *Problema de Poincaré*.

Neste trabalho vamos mostrar que não é possível obter ciclos limite algébricos de grau 3 para sistemas quadráticos e existem apenas quatro famílias destes sistemas que possuem ciclos limite algébricos de grau 4. Através dos resultados anteriores, aplicando-se transformações racionais convenientes, obteremos sistemas quadráticos que possuem ciclos limite algébricos de grau 5 e 6 e da mesma maneira aplicando-se transformações de Poincaré convenientes obteremos sistemas cúbicos com ciclos limite algébricos de grau 4, 5 e 6. Desta maneira, este trabalho se organiza do seguinte modo

Capítulo 1: Apresentaremos a teoria acerca das equações diferenciais polinomiais planares necessária para a compressão do texto. Além disso, será discutido as definições acerca de curvas algébricas invariantes.

Capítulo 2: Neste capítulo será construído o plano projetivo complexo. Apresentaremos noções de multiplicidade, gênero e índice de intersecção neste ambiente. Através das ferramentas apresentadas serão construídas relações entre equações diferenciais projetivas e equações diferenciais no plano afim e finalmente serão apresentados lemas técnicos que caracterizam curvas algébricas que possuem pontos duplos.

Capítulo 3: Inicialmente mostraremos que não é possível obter sistemas quadráticos que possuem ciclos limite algébricos de grau 3. Através de técnicas projetivas apresentaremos neste capítulo uma prova de que existem apenas quatro famílias de sistemas quadráticos que possuem ciclos limite algébricos de grau 4.

Capítulo 4: Aplicando-se transformações racionais convenientes a partir dos resultados obtidos no capítulo anterior obteremos sistemas quadráticos que possuem ciclos limite algébricos de grau 5 e 6. Para todos os sistemas quadráticos obtidos provaremos que estes sistemas possuem um único ciclo limite. De maneira semelhante, aplicando-se transformações de Poincaré convenientes a partir dos resultados anteriores obteremos sistemas cúbicos que possuem ciclos limite algébricos de grau 4, 5 e 6. Em seguida provaremos que é possível obter equações diferenciais polinomiais de grau arbitrário que possuem ciclos limite algébricos de grau 3. Finalmente, exibiremos um sistema cúbico que possui como curva algébrica invariante dois ciclos limite algébricos.

Capítulo 1

Introdução às equações diferenciais planares

Neste capítulo introduziremos as noções básicas acerca de equações diferenciais polinomiais planares. Alguns teoremas de suma importância à teoria também serão citados e finalmente serão discutidas as curvas invariantes, objeto principal para a meta deste trabalho que é a busca de ciclos limite algébricos para sistemas quadráticos.

1.1 Equações diferenciais polinomiais planares

Dada uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, x) de um aberto U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, dizemos que

$$\dot{x} = f(t, x)$$

é a *equação diferencial ordinária* em \mathbb{R}^n definida por f , em que o ponto indica a derivada com respeito a variável t . Quando $f(t, x)$ independe de t , dizemos que a equação diferencial é autônoma, e escrevemos $\dot{x} = f(x)$. Neste trabalho, consideraremos equações diferenciais planares autônomas definidas por polinômios, isto é, em \mathbb{R}^2 . Mais precisamente, dados $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ coprimos, isto é, pertencentes ao anel de polinômios reais nas variáveis x e y , a *equação diferencial planar associada* a P, Q é dado por

$$\dot{x} = P(x, y) = \sum_{i=1}^m P_i(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) = \sum_{i=1}^m Q_i(x, y), \quad (1.1)$$

em que $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ e P_i e Q_i são as componentes homogêneas de grau i . Quando $m = 1$, o sistema é dito linear, quando $m = 2, 3$ o sistema é dito quadrático e cúbico respectivamente. Uma vez que $\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q}$, podemos considerar o sistema (1.1) através da *forma diferencial*

$$\omega = Qdx - Pdy,$$

ou através do *campo vetorial*

$$\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}.$$

Definição 1.1. Um fluxo em \mathbb{C}^2 ao longo de um tempo $t \in \mathbb{R}$ é definido por:

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (t, z) &\mapsto \phi^t(z), \end{aligned}$$

tal que:

$$i) \phi^0(z) = z$$

$$ii) \phi^t(\phi^s(z)) = \phi^{t+s}(z)$$

para todo z em \mathbb{C}^2 e $t, s \in \mathbb{R}$.

O sistema (1.1) define um fluxo $\phi^t(x, y)$ em \mathbb{C}^2 . É sabido que este fluxo é uma função suave definida para todo (x, y) em alguma vizinhança da posição inicial e tempo inicial.

Definição 1.2. Uma solução de (1.1) através do ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ é definida por $(x(t), y(t)) = \{\phi^t(x_0, y_0), t \in \mathbb{R}\}$. O conjunto de todas as soluções é dito retrato de fase.

O problema de encontrar a solução de uma equação diferencial quando uma condição inicial $x(t_0) = x_0$ é dada é conhecido como *Problema de Cauchy*. Neste sentido, o seguinte teorema vem em auxílio:

Teorema 1.3 (Existência e unicidade). Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ centrado em t_0 , para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Definição 1.4. O conjunto α – limite (respectivamente ω – limite) de um ponto (x_0, y_0) através de ϕ^t é definido por:

$$\begin{aligned} \alpha_\infty &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; \phi^{t_n}(x_0, y_0) \rightarrow (x, y) \text{ para algum } t_n \rightarrow -\infty\} \\ \omega_\infty &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; \phi^{t_n}(x_0, y_0) \rightarrow (x, y) \text{ para algum } t_n \rightarrow \infty\} \end{aligned}$$

Para fluxos no plano, o teorema de Poincaré-Bendixon é um importante resultado de um ponto de vista topológico, que não pode ser generalizado para dimensões maiores. De acordo com o teorema, existem três tipos de conjuntos limite compactos: singularidades, órbitas periódicas fechadas e a união de singularidades e trajetórias conectando-as. O segundo são os ciclos limite, e o último é referido como *órbitas heteroclínicas* quando eles conectam pontos distintos e *órbitas homoclínicas* quando eles conectam um ponto a si mesmo.

1.2 Singularidades

Definição 1.5. Uma singularidade ou ponto crítico para o sistema (1.1) é um ponto (x_0, y_0) tal que $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Uma singularidade é em particular uma solução, onde $\phi^t(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Denotaremos por $D\mathcal{X}$ a matriz jacobiana associada ao campo de vetores \mathcal{X} . O fluxo do sistema (1.1) em uma vizinhança de uma singularidade (x_0, y_0) é classificado de acordo com os autovalores da matriz $D\mathcal{X}(x_0, y_0)$. Observe que, como o sistema (1.1) é real, se (x_0, y_0) é uma singularidade complexa, então seu conjugado (\bar{x}_0, \bar{y}_0) é uma singularidade também. Mais ainda, se (x_0, y_0) é uma singularidade real de um sistema real com autovalores associados não-reais λ e μ , então $\mu = \bar{\lambda}$.

Definição 1.6. *Seja $p = (x_0, y_0)$ uma singularidade do sistema (1.1). Sejam λ e μ os autovalores de $D\mathcal{X}(p)$.*

- i) Se $\lambda = \mu = 0$, então p é dito degenerado. Além disso, se $D\mathcal{X}(p) \neq 0$, dizemos que p é um ponto nilpotente.*
- ii) Se $\lambda\mu = 0$, mas $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, então p é dito degenerado elementar.*
- iii) Caso contrário, p é dito não-degenerado.*

a) Quando $D\mathcal{X}(p)$ pode ser diagonalizada, para p real é dito:

- * um foco, se $\lambda = \bar{\mu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*
- * uma sela, se $\lambda\mu < 0$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
- * um nó, se $\lambda\mu > 0$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Para p complexo, é dito:

- * um nó ressonante, se $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{Q}$.*
- * um nó não-ressonante, se $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}$.*

b) Quando $D\mathcal{X}(p)$ não pode ser diagonalizada, p é dito singularidade logarítmica.

Além das classificações de singularidades acima temos mais uma particular, conforme a definição a seguir.

Definição 1.7. *Uma singularidade O de (1.1) é um centro se possui uma vizinhança \mathcal{U} tal que para todo $p \in \mathcal{U} \setminus \{O\}$ satisfaz $P^2(p) + Q^2(p) \neq 0$, e a solução passando através de p é fechada, circundando O .*

O comportamento dos sistemas lineares são bem conhecidos na teoria das equações ordinárias. Através do teorema de Hartman-Grobman é possível construir localmente uma conjugação do sistema com o campo linear dado por sua derivada, tendo como hipótese que os autovalores da sua derivada tenham parte real não nula.

Teorema 1.8 (Hartman-Grobman). *Seja \mathcal{X} um campo de vetores num aberto $U \in \mathbb{R}^n$ e $p \in U$ uma singularidade de \mathcal{X} . Suponha que p seja hiperbólica, isto é, os autovalores da matriz $D\mathcal{X}(p)$ têm parte real não nula. Então, \mathcal{X} é localmente conjugado a $D\mathcal{X}(p)$, no sentido que existem vizinhanças U da origem, V que contém p e um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que $h(e^{tD\mathcal{X}(p)}x) = \phi^t(h(x))$ sempre que x e $\phi^t(x)$ pertencem a U .*

1.3 Curvas invariantes e ciclos limite

Definição 1.9. Um conjunto Ω é dito invariante por (1.1) se $\phi^t(\Omega) \subseteq \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde ϕ é o fluxo definido por (1.1). Quando o conjunto invariante é uma curva dizemos que esta é uma curva invariante.

Uma vez que soluções de equações diferenciais planares são pontos ou componentes de dimensão 1, as curvas invariantes desempenham um papel muito importante no estudo delas. Qualquer singularidade ou solução de uma equação diferencial são conjuntos invariantes para o fluxo, mas a recíproca não é verdadeira. Uma curva invariante pode não ser uma solução de uma equação diferencial, mas esta é formada por soluções.

As tangentes às trajetórias de uma equação diferencial polinomial planar são definidas em quase todo ponto. Assim, se $f(x, y) = 0$ é a equação de uma curva invariante, suas tangentes devem coincidir com as tangentes das trajetórias. Em outras palavras, o gradiente de f , $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ e (P, Q) devem ser ortogonais ao longo da curva $f = 0$, isto é:

$$\dot{f} = \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{f=0} = 0 \quad (1.2)$$

Uma curva invariante $f(x, y) = 0$ é dita *algébrica* de grau n quando $f(x, y)$ é um polinômio de grau n .

Definição 1.10. A curva $f(x, y) = 0$ de grau n é uma curva algébrica invariante se existe um polinômio $k(x, y)$ de grau máximo $m - 1$ dito cofator tal que

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = kf. \quad (1.3)$$

De fato, esta última definição é consequência de (1.2) quando $f = 0$ é algébrica.

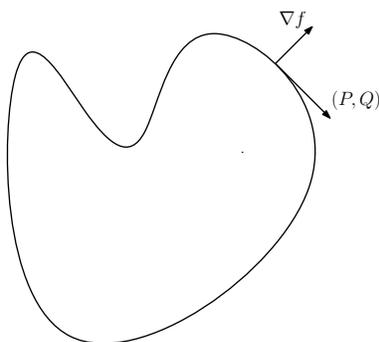


Figura 1.1: Gradiente ortogonal ao fluxo (P, Q) sobre uma curva invariante.

Definição 1.11. Um ciclo limite para o sistema (1.1) é uma órbita periódica isolada no conjunto de todas as soluções periódicas. Quando o ciclo limite está contido no conjunto de zeros de uma curva algébrica invariante é dito ciclo limite algébrico.

Para um exemplo de como um ciclo pode ocorrer, considere a equação diferencial planar em coordenadas polares dada por:

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Temos para $r = 1$ que $\dot{r} = 0$ e seu ângulo varia de forma constante, logo seu raio não varia e portanto é uma órbita fechada. Já para $r < 1$ temos $\dot{r} > 0$, logo a órbita se expande e é atraída pela órbita fechada. Para $r > 1$ temos $\dot{r} < 0$, logo a órbita se contrai e é atraída pela órbita fechada. Desta maneira concluímos que esta órbita fechada é um ciclo limite. A seguir esboçamos seu retrato de fase.

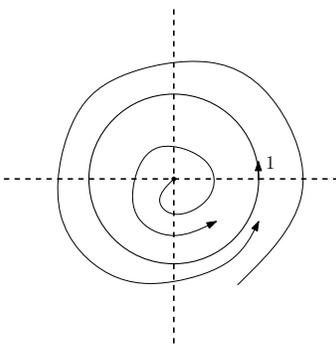


Figura 1.2: Ciclo limite dado por um círculo de raio $r = 1$.

1.4 Integrais primeiras e sistemas hamiltonianos

Definição 1.12. Uma função $H(x, y)$ é dita uma integral primeira para o sistema (1.1) em um aberto $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$ se $H(x, y)$ é uma função não constante em \mathcal{U} tal que é constante em cada solução $(x(t), y(t)) \in \mathcal{U}$ de (1.1). Caso $H(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$, com $h, g \in \mathbb{R}[x, y]$ e $g(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{U}$, dizemos que $H(x, y)$ é uma integral primeira racional.

Em posse de uma integral primeira, todas as soluções de uma equação diferencial planar em \mathcal{U} são conhecidas, uma vez que cada solução é dada por $H(x(t), y(t)) = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Claramente, se $H \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, teremos:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q \equiv 0.$$

Por exemplo, para o sistema linear $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ todas as soluções são órbitas periódicas dadas por circunferências, neste caso $H(x, y) = x^2/2 + y^2/2$ é uma integral primeira racional para este sistema.

Quando (1.1) possui uma integral primeira racional $H = h/g$, então todas as curvas invariantes podem ser definidas por $f_c = 0$, onde $f_c := h - cg$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, logo são algébricas. Neste caso é excluído a existência de ciclos limite.

Definição 1.13. A equação diferencial planar (1.1) é dita um sistema hamiltoniano caso os polinômios P, Q satisfaçam a seguinte relação

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Se um sistema é hamiltoniano, então existe uma função estado $H(x, y)$ que satisfaz

$$\frac{\partial H}{\partial y} = P(x, y), \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -Q(x, y).$$

Neste caso, o sistema se torna

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Mais ainda, a função $H(x, y)$ é uma integral primeira para o sistema, pois

$$\frac{dH}{dt} = \dot{x} \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Logo a função $H(x, y)$ é constante ao longo das trajetórias, isto significa que o retrato de fase é dado pela família de curvas $H(x(t), y(t)) = h$, onde $h \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Equações diferenciais no plano projetivo complexo

Neste capítulo introduziremos um novo ambiente, o plano projetivo complexo. Para este ambiente definiremos as curvas algébricas que nele moram e alguns teoremas que concernem a teoria de curvas algébricas, como o teorema de Bézout. Finalmente introduziremos as equações diferenciais projetivas e suas relações com o plano afim.

2.1 Construção do plano projetivo complexo

Considere duas retas paralelas r e r' , ou então a hipérbole $xy = 1$ e os eixos coordenados. Em todos estes casos essas curvas não se intersectam a uma distância finita no plano euclidiano. Porém, com uma nova estrutura, podemos dar sentido a intersecção de retas no infinito, através do plano projetivo complexo.

O plano projetivo complexo é construído através da relação de equivalência $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \sim$, onde $(X_0, Y_0, Z_0) \sim (X_1, Y_1, Z_1)$ se $(X_0, Y_0, Z_0) = (\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1)$, para $(X_0, Y_0, Z_0), (X_1, Y_1, Z_1) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ e $\lambda \neq 0$. Assim, os pontos em $\mathbb{C}P^2$ são classes $(X_0 : Y_0 : Z_0)$. Dados os conjuntos

$$\mathcal{U}_X = \{(X : Y : Z) \in \mathbb{C}P^2 ; X \neq 0\},$$

$$\mathcal{U}_Y = \{(X : Y : Z) \in \mathbb{C}P^2 ; Y \neq 0\},$$

$$\mathcal{U}_Z = \{(X : Y : Z) \in \mathbb{C}P^2 ; Z \neq 0\},$$

defina os difeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi_X : \quad \mathcal{U}_X &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (X : Y : Z) &\mapsto \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_Y : \quad \mathcal{U}_Y &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (X : Y : Z) &\mapsto \left(\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_Z : \quad \mathcal{U}_Z &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (X : Y : Z) &\mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \end{aligned}$$

desta maneira teremos um atlas diferenciável e assim $\mathbb{C}P^2$ possuirá estrutura de variedade diferenciável.

Para introduzir uma topologia à $\mathbb{C}P^2$, considere a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}P^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto (X : Y : Z), \end{aligned}$$

dizemos que um conjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}P^2$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ com sua topologia usual. Esta é a topologia identificação de $\mathbb{C}P^2$, a qual é a maior topologia tal que π é contínua.

Observe que os conjuntos $\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_Y, \mathcal{U}_Z$ são abertos e densos em $\mathbb{C}P^2$. Além disso, seja $\mathbb{A}^2 = \{(X : Y : 1); X, Y \in \mathbb{C}\}$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{C}P^2 \\ (X, Y) &\mapsto (X : Y : 1), \end{aligned}$$

temos que φ é um homeomorfismo. Desta maneira podemos considerar o plano afim \mathbb{C}^2 como contido em $\mathbb{C}P^2$, identificando-o com \mathbb{A}^2 .

2.2 Curvas algébricas projetivas

Definição 2.1. *Uma curva algébrica projetiva é o conjunto das classes de equivalência de polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x, y, z]$ tais que $F \sim G$ se, e somente se, $F = \lambda G$, $\lambda \neq 0$. O grau da curva é o grau do polinômio que o define.*

Uma curva real $f(x, y) = 0$ de grau n em coordenadas projetivas (X, Y, Z) é dada por $F(X, Y, Z) := Z^n f(X/Z, Y/Z) = 0$, um polinômio homogêneo em X, Y, Z . Reciprocamente, dada uma curva algébrica projetiva $F(X, Y, Z) = 0$, sua curva afim correspondente é dada por $F_*(X, Y) = F(X, Y, 1)$, caso $Z = 0$ tomamos ou $F(1, Y, Z)$ ou $F(X, 1, Z)$, uma vez que em coordenadas projetivas nem todos os pontos podem ser nulos. Dizemos que a reta $Z = 0$ é a *reta no infinito*.

Proposição 2.2 (Fórmula de Euler). *Seja F uma curva algébrica projetiva de grau n . Então:*

$$X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z} = nF.$$

2.2.1 Pontos múltiplos

Seja $f(x, y) = 0$ uma curva afim. Pelo teorema da função implícita temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

que determina o declive da reta tangente à curva. Quando ambas as derivadas parciais são zero sobre um ponto da curva dizemos que este ponto é um *ponto múltiplo*, caso contrário é dito um *ponto simples*.

Para o cálculo da multiplicidade de uma curva afim f em um ponto p , suponha primeiro que $p = (0, 0)$. O polinômio f pode ser escrito na forma $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n$, em que f_i é a componente homogênea de f de grau i , m é o menor grau que possui uma componente homogênea e n é o grau do polinômio f . Neste caso definimos $m = m_p(f)$ a *multiplicidade* de f no ponto p . Usando as regras de derivadas é fácil verificar que p é um ponto simples se, e somente se, $m_p(f) = 1$, e neste caso f_1 é exatamente a reta tangente a f em p . Se $m = 2$, p é dito um ponto *duplo*; se $m = 3$, é dito ponto *triplo* e assim sucessivamente.

Por exemplo, considere as curvas $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$, $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$ e $h(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$. Observe que em todas elas $p = (0, 0)$ é um ponto múltiplo, e em cada caso p é um ponto duplo, triplo e quádruplo respectivamente.

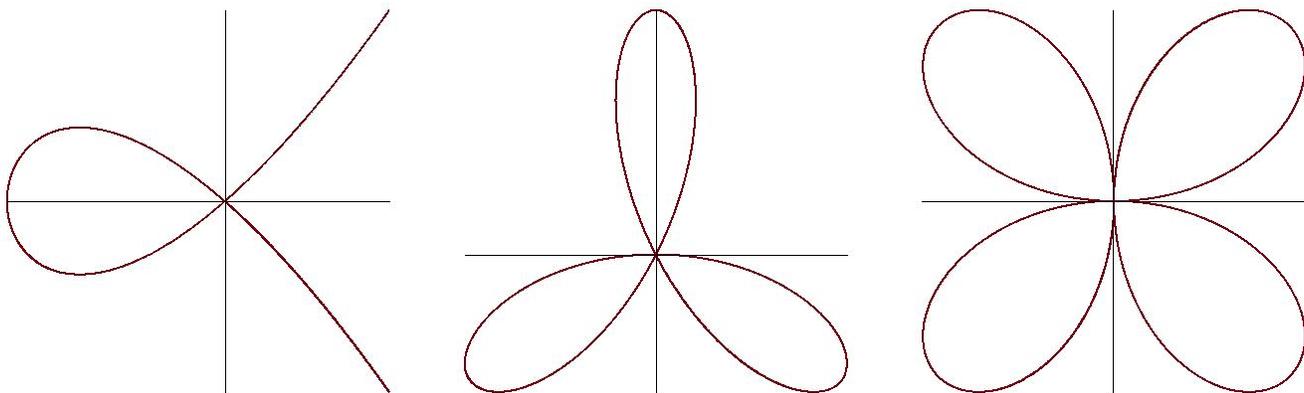


Figura 2.1: Gráficos das curvas f, g e h respectivamente.

Para estender estas definições à um ponto $p = (a, b) \neq (0, 0)$, considere T a translação que leva $(0, 0)$ à p , isto é, $T(x, y) = (x + a, y + b)$ e tome $f \circ T = f(x + a, y + b)$. Definimos $m_p(f) := m_{(0,0)}(f \circ T)$. Observe que se $m_p(f) = 0$, então $p \notin \{f = 0\}$.

Se p é um ponto múltiplo de multiplicidade $m > 0$, temos $f_m = \prod_{i=1}^k L_i^{r_i}$, onde L_i são as diferentes linhas retas.

Definição 2.3. As retas L_i são ditas retas tangentes a $f = 0$ no ponto p , r_i é dito a multiplicidade da tangente.

Dizemos que p é um ponto múltiplo ordinário se $r_i = 1$, para $i \in \{1, \dots, k\}$, caso contrário é dito ponto múltiplo não-ordinário.

As definições acima podem ser passadas para curvas algébricas projetivas. Mais precisamente, se $F = 0$ é uma curva algébrica projetiva e $P = (X_0 : Y_0 : Z_0) \in \mathbb{C}P^2$, definimos a multiplicidade de F no ponto P por $m_P(F) = m_{P_*}(F_*)$, onde $P_* = (X_0/Z_0, Y_0/Z_0)$ e $F_* = F(X, Y, 1)$.

Quando o ambiente é o plano projetivo as curvas algébricas obtêm propriedades interessantes, como veremos adiante o Teorema de Bézout garantirá que duas curvas algébricas irredutíveis sempre se tocam em mn pontos distintos, em que m e n são os seus respectivos graus. Até o momento temos a seguinte proposição, cuja prova pode ser vista em Fulton [14] e mais adiante nos permitirá classificar quais casos analisar para a existência de curvas algébricas invariantes.

Teorema 2.4. *Seja $F(X, Y, Z) = 0$ uma curva algébrica irredutível em $\mathbb{C}P^2$ de grau n , então:*

$$\sum_{p \in F; m_p > 1} \frac{m_p(m_p - 1)}{2} \leq \frac{(n - 1)(n - 2)}{2},$$

onde m_p é a multiplicidade do ponto p .

2.2.2 O gênero de uma curva

Em topologia temos a classificação de superfícies de Riemann compactas, que é expressa unicamente através de um único número g dito *gênero*, que conta quantos “buracos” a superfície possui, ou seja, o número de somas conexas por toros da superfície. Em geometria algébrica há um análogo para curvas algébricas e intuitivamente o mesmo dito acima ocorre para curvas não-singulares, ou seja, que não possuem pontos múltiplos.

Para curvas algébricas mais gerais existem diversas definições, para nossas necessidades daremos a seguinte definição:

Definição 2.5. *Sejam $f(x, y) = 0$ uma curva algébrica plana apenas com pontos ordinários e n o grau de f . O gênero de f é definido por*

$$g = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - \sum_p \frac{m_p(m_p - 1)}{2}, \quad (2.1)$$

onde a soma percorre todos os pontos múltiplos de f .

A definição é análoga para curvas algébricas projetivas aplicando-se a mesma equação (2.1), levando em consideração que a curva não possua pontos múltiplos não-ordinários.

Observe que em virtude do Teorema 2.4 o gênero de uma curva projetiva é sempre um inteiro não negativo. O mesmo vale para curvas afins, apesar de não podermos fazer uso do Teorema 2.4 neste caso.

A definição acima não se aplica para curvas com pontos múltiplos não-ordinários. Para este caso é necessário o uso de transformações quadráticas, quais preservam o gênero da curva, mas após passos sucessivos de aplicações eliminam os pontos múltiplos não-ordinários.

Definição 2.6. *Sejam $p = (0 : 0 : 1)$, $p' = (0 : 1 : 0)$ e $p'' = (1 : 0 : 0)$. Uma transformação quadrática padrão é uma aplicação $Q : \mathbb{C}P^2 \setminus \{p, p', p''\} \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definida por: $Q(X : Y : Z) = (YZ : XZ : XY)$.*

Observe que $Q \circ Q = Id$, pois

$$Q(Q(X : Y : Z)) = (XZXY : YZXY : YZXZ) = (X : Y : Z).$$

Se T é uma mudança de coordenadas projetiva, dizemos que $Q \circ T$ é uma *transformação quadrática*. Para o cálculo do gênero de uma curva qualquer, ao nosso auxílio vem o seguinte teorema. Para maiores detalhes, veja Fulton [14].

Teorema 2.7. *Através de uma sequência finita de transformações quadráticas, qualquer curva algébrica projetiva pode ser transformada em uma curva cujos pontos múltiplos são apenas ordinários.*

Para o cálculo do gênero uma curva, suponha que $p_0 = (X_0 : Y_0 : Z_0)$ seja um ponto múltiplo de uma curva algébrica dada, aplicando uma transformação quadrática, a curva é aplicada em outra e p_0 é aplicado no conjunto de r_1 pontos $p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,r_1}$. Assim dizemos que a curva possui r_1 pontos na *primeira vizinhança* de p_0 . Através de no máximo r_1 transformações quadráticas novas obtemos r_2 pontos da segunda vizinhança de $p_0 : p_{2,1}, p_{2,2}, \dots, p_{2,r_2}$. Sucessivamente o processo é aplicado até os pontos de alguma vizinhança serem todos ordinários, e neste caso dizemos que o ponto múltiplo da curva dada em p_0 está *resolvido*. O ponto múltiplo p_0 é dito *explícito* e p_{k,r_k} , $k > 0$, são ditos *implícitos*. Assim, aplicando a equação (2.1) à curva obtida calcula-se o gênero da curva.

2.2.3 Índice de intersecção

Para o cálculo do número de intersecções entre duas curvas introduziremos as ferramentas à seguir.

Definição 2.8. *O anel local em $p \in \mathbb{C}^2$ é definido por*

$$\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^2) = \{f/g; f, g \in \mathbb{C}[x, y] \text{ e } g(p) \neq 0\}.$$

Seja $p = (X_0 : Y_0 : Z_0) \in \mathbb{C}P^2$. Uma vez que nem todas as coordenadas de p podem ser nulas podemos considerar $Z_0 \neq 0$, fazendo a mudança de variáveis $x_0 = X_0/Z_0$ e $y_0 = Y_0/Z_0$, p é dado por suas coordenadas locais (x_0, y_0) e podemos definir o anel local em p , \mathcal{O}_p .

Definição 2.9. *Sejam F_1, \dots, F_n curvas algébricas em $\mathbb{C}P^2$ definidas em coordenadas locais por $F_{1*} = 0, \dots, F_{n*} = 0$. O índice de intersecção das curvas em p é definido por:*

- i) $I_p(F_1, \dots, F_n) = 0$, se $p \notin F_1 \cap \dots \cap F_n$;
- ii) $I_p(F_1, \dots, F_n) = \infty$, se $F_{i*} = hg_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, onde h é um polinômio que zera em p ;
- iii) $I_p(F_1, \dots, F_n) = \dim_{\mathbb{C}}[\mathcal{O}_p/(F_{1*}, \dots, F_{n*})]$ caso contrário, onde (F_{1*}, \dots, F_{n*}) é o ideal definido pelos polinômios F_{1*}, \dots, F_{n*} .

Pela inclusão de ideais $(F_{i*}, F_{j*}) \subseteq (F_{1*}, \dots, F_{n*})$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, temos a seguinte relação entre o índice de intersecção de n curvas e o índice de intersecção de cada par

$$I_p(F_1, \dots, F_n) \leq \min_{i,j} \{I_p(F_i, F_j)\}. \quad (2.2)$$

Definição 2.10. *Sejam F, G duas curvas algébricas projetivas e $p \in F, G$. Dizemos que F e G cortam-se estritamente em p se F e G não têm componentes em comum tais que zerem em p . Dizemos que F e G cortam-se transversalmente em p se p é um ponto simples de F e G tal que as tangentes a F e a G em p são distintas.*

Tais definições dadas não são arbitrárias, através delas existe uma única maneira de calcular o índice de intersecção de duas curvas satisfazendo as propriedades do seguinte teorema. Para detalhes, veja [14].

Teorema 2.11. *O índice de intersecção de $F = 0$ e $G = 0$ em p , $I_p(F, G)$, é único para todo $p \in \mathbb{C}P^2$ e satisfaz as seguintes condições:*

- i) $I_p(F, G)$ é um inteiro não negativo para todo F, G e p quando F e G cortam-se estritamente. $I_p(F, G) = \infty$ se F e G não cortam-se estritamente;*
- ii) $I_p(F, G) = 0$ se, e somente se, p não é um ponto comum a F e G . $I_p(F, G)$ somente depende dos fatores de F e G que zeram em p ;*
- iii) Se T é uma mudança de coordenadas tal que $T(p) = q$, então $I_q(T(F), T(G)) = I_p(F, G)$;*
- iv) $I_p(F, G) = I_p(G, F)$;*
- v) $I_p(F, G) \geq m_p(F)m_p(G)$, verificando a igualdade se, e somente se, F e G não têm tangentes comuns em p ;*
- vi) Se $F = \prod_{i=1}^r F_i^{r_i}$ e $G = \prod_{j=1}^s G_j^{s_j}$, então o índice de intersecção pode ser calculado como $I_p(F, G) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s r_i s_j I_p(F_i, G_j)$;*
- vii) $I_p(F, G) = I_p(F, G + AF)$, para todo polinômio homogêneo A nas variáveis X, Y, Z .*

Para três curvas algébricas projetivas temos o seguinte lema.

Lema 2.12. *Sejam A, B, C, C' polinômios homogêneos em três variáveis. Então*

$$I_p(A, B, CC') \leq I_p(A, B, C) + I_p(A, B, C').$$

O seguinte resultado, devido a Darboux, permite no contexto das equações diferenciais projetivas contar o número de singularidades que tal sistema possui e além disso obter condições para que tal sistema possua uma integral primeira racional. Sua prova pode ser vista em [5].

Teorema 2.13 (Lema de Darboux). *Sejam A, A', B, B', C, C' polinômios homogêneos em $\mathbb{C}P^2$ nas variáveis X, Y, Z de graus l, l', m, m', n, n' , respectivamente. Suponha que A, B, C e A', B', C' são dois conjuntos de polinômios coprimos que verificam $AA' + BB' + CC' \equiv 0$. Então para $\lambda = l + l' = m + m' = n + n'$ tem-se:*

$$i) \sum_p I_p(A, B, C) + \sum_p I_p(A', B', C') \geq \frac{lmn+l'm'n'}{\lambda};$$

$$ii) \text{ Se } A \cap B \cap C \cap A' \cap B' \cap C' = \emptyset, \text{ então } \sum_p I_p(A, B, C) + \sum_p I_p(A', B', C') = \frac{lmn+l'm'n'}{\lambda}.$$

Através das ferramentas introduzidas estamos em condições de citar o importantíssimo teorema de Bézout, que diz exatamente em quantos pontos duas curvas algébricas projetivas se intersectam. Sua prova pode ser vista em Fulton [14].

Teorema 2.14 (Bézout). *Sejam $F = 0$ e $G = 0$ duas curvas algébricas em $\mathbb{C}P^2$ de graus m e n respectivamente, sem componentes em comum. Então $\sum_p I_p(F, G) = mn$.*

2.3 Equações diferenciais projetivas

Sejam \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} polinômios homogêneos de grau $m + 1$ nas variáveis X , Y e Z . A 1-forma

$$\omega = \mathcal{P}dX + \mathcal{Q}dY + \mathcal{R}dZ$$

é dita *projetiva* se $X\mathcal{P} + Y\mathcal{Q} + Z\mathcal{R} = 0$, isto é,

$$\mathcal{P} = MZ - NY, \quad \mathcal{Q} = NX - LZ, \quad \mathcal{R} = LY - MX,$$

para alguns polinômios homogêneos L , M e N de grau m . Assim

$$\omega = L(YdZ - ZdY) + M(ZdX - XdZ) + N(XdY - YdX).$$

Desta maneira $\omega = 0$ define uma equação diferencial, dada por

$$\dot{X} = \mathcal{P} = MZ - NY, \quad \dot{Y} = \mathcal{Q} = NX - LZ, \quad \dot{Z} = \mathcal{R} = LY - MX. \quad (2.3)$$

Lema 2.15. *Definindo $\bar{L} = L + AX$, $\bar{M} = M + AY$, $\bar{N} = N + AZ$, para A um polinômio homogêneo de grau $m - 1$, então (2.3) permanece invariante.*

Seja $F = 0$ uma curva algébrica projetiva de grau n . Dizemos que $F = 0$ é uma curva algébrica invariante irreduzível para (2.3) se

$$\frac{\partial F}{\partial X}L + \frac{\partial F}{\partial Y}M + \frac{\partial F}{\partial Z}N = KF,$$

onde K é um polinômio de grau $m - 1$. Aplicando a fórmula de Euler obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial X} \left(L - \frac{KX}{n} \right) + \frac{\partial F}{\partial Y} \left(M - \frac{KY}{n} \right) + \frac{\partial F}{\partial Z} \left(N - \frac{KZ}{n} \right) = 0.$$

As *singularidades* para (2.3) são os pontos nos quais a tangente não está determinada. Esses pontos verificam

$$\mathcal{P} = MZ - NY = 0, \quad \mathcal{Q} = NX - LZ = 0, \quad \mathcal{R} = LY - MX = 0.$$

Para determinar o número de singularidades de uma equação diferencial projetiva temos o seguinte corolário do Teorema 2.13:

Corolário 2.16. *O número de singularidades da equação diferencial (2.3) onde L , M , N são polinômios coprimos de grau m , é $m^2 + m + 1$, contadas as multiplicidades.*

Demonstração. Tome $A = MZ - NY$, $B = NX - LZ$, $C = LY - MX$, $A' = X$, $B' = Y$ e $C' = Z$, logo $AA' + BB' + CC' = 0$. Uma vez que não existem pontos comuns às curvas $A' = 0$, $B' = 0$ e $C' = 0$ temos que

$$\sum_p I_p(A', B', C') = 0.$$

Aplicando o Teorema 2.13 ii) obtemos

$$\sum_p I_p(A, B, C) = \frac{(m+1)^3 + 1}{m+2} = m^2 + m + 1.$$

■

2.4 Relações entre objetos afins e projetivos

Da mesma maneira que podemos restringir uma curva algébrica projetiva para o plano afim, podemos fazer o mesmo para a equação diferencial (2.3) e suas curvas algébricas invariantes irredutíveis, obtendo uma curva algébrica invariante afim e uma equação diferencial no plano afim. O resultado é dado através do seguinte lema:

Lema 2.17. *Seja (2.3) uma equação diferencial com L , M e N de grau m . Seja $F = 0$ uma curva algébrica invariante irredutível de grau n para (2.3) com cofator K . Então, a restrição da equação diferencial projetiva ao plano afim é*

$$[(L(X, Y, 1) - XN(X, Y, 1)]dY - [M(X, Y, 1) - YN(X, Y, 1)]dX = 0,$$

a qual tem grau $m + 1$ e $F(X, Y, 1) = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $\tilde{K}(X, Y, 1) = K(X, Y, 1) - nN(X, Y, 1)$ de grau máximo m , sempre que $Z = 0$ não é uma reta invariante.

Demonstração. Uma vez que $F = 0$ é uma curva algébrica invariante temos

$$\frac{\partial F}{\partial X}L + \frac{\partial F}{\partial Y}M + \frac{\partial F}{\partial Z}N = KF.$$

Por outro lado, pela fórmula de Euler, temos para $Z \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{1}{Z} \left(nF - X \frac{\partial F}{\partial X} - Y \frac{\partial F}{\partial Y} \right).$$

Combinando as duas igualdades teremos para $Z = 1$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(L - XN) + \frac{\partial F}{\partial Y}(M - YN) = F(K - nN).$$

Assim $F(X, Y, 1) = 0$ é uma curva algébrica invariante para a equação diferencial

$$[L(X, Y, 1) - XN(X, Y, 1)]dY - [M(X, Y, 1) - YN(X, Y, 1)]dX = 0,$$

com cofator $\tilde{K}(X, Y, 1) = K(X, Y, 1) - nN(X, Y, 1)$.

A reta $Z = 0$ é invariante para (2.3) se, e somente se, $N = ZA$, para algum polinômio A de grau $m - 1$. Quando isto não acontece $N(X, Y, 1)$ é um polinômio de grau m . ■

Da mesma maneira que podemos estender uma curva afim para o plano projetivo, podemos fazer o mesmo para a equação diferencial (1.1). Escrevendo-a como $Pdy - Qdx = 0$ e usando as coordenadas projetivas $x = X/Z$, $y = Y/Z$, definimos os polinômios

$$\begin{aligned} L &= Z^m P(X/Z, Y/Z), \\ M &= Z^m Q(X/Z, Y/Z). \end{aligned}$$

Desta maneira, obtemos a equação diferencial projetiva

$$L(YdZ - ZdY) + M(ZdX - XdZ) = 0.$$

Note que, neste caso, temos $N \equiv 0$.

É claro que qualquer singularidade $p = (x_0, y_0)$ da equação diferencial afim (1.1) se torna uma singularidade $p = (X_0 : Y_0 : 1)$ para a equação diferencial projetiva. Os pontos satisfazendo $yP_m - xQ_m = 0$ são ditas *singularidades infinitas*. Eles são singularidades para equação diferencial projetiva que, de um ponto de vista afim, moram na linha do infinito, isto é, em $Z = 0$, eles são da forma $p = (X_0 : Y_0 : 0)$.

Definição 2.18. Dizemos que o sistema (1.1) tem infinito degenerado se a linha do infinito $Z = 0$ é formada por singularidades ou equivalentemente $yP_m - xQ_m \equiv 0$.

Se $f = 0$ é uma curva algébrica invariante para a equação diferencial afim com cofator k , então a curva projetivizada $F = 0$ definida por $F = Z^n f(X/Z, Y/Z)$ tem cofator $K = Z^{m-1}k(X/Z, Y/Z)$.

2.5 Estrutura das curvas algébricas que possuem pontos duplos

Dizemos que um ponto duplo p de $F = 0$ é um *nó* se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 1$, neste caso existem dois ramos e suas tangentes L_1 e L_2 são diferentes. Dizemos que um nó é *simples* se $I_p(L_i, F) = 3$ para $i \in \{1, 2\}$.

Seja p um ponto duplo não ordinário de $F = 0$, isto é, p tem uma única tangente com multiplicidade dois. Então dizemos que p é um *cúspide* se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 2$. Neste caso existe uma tangente no ponto múltiplo, porém o sentido da tangente não é contínua. A curva, formada por um único ramo está em ambos os lados da tangente. Dizemos que p é um *tacnó* se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 3$. Neste caso dois ramos cortam-se com a mesma tangente. Finalmente, dizemos que p é um *cúspide rhamptoid* se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$. A única diferença geométrica entre um cúspide é que, localmente, a curva está em um único lado da tangente.

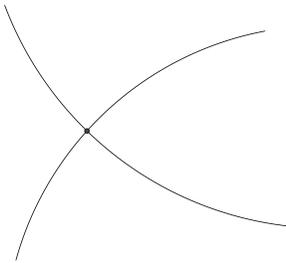


Figura 2.2: Nó

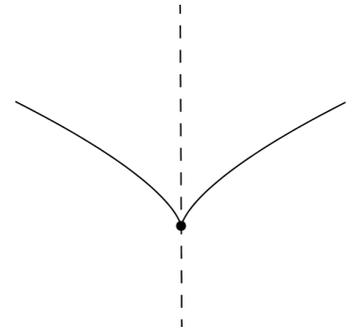


Figura 2.3: Cúspide

Observação 2.19. Um fato muito importante e útil para calcular o gênero de uma curva projetiva é que se a curva tem um tacnó ou um cúspide rhamptoid, então ela tem um nó ou um cúspide na primeira vizinhança, respectivamente. Nós ou cúspides não têm pontos múltiplos implícitos.

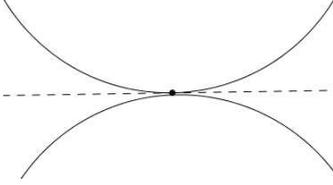


Figura 2.4: Tacnó

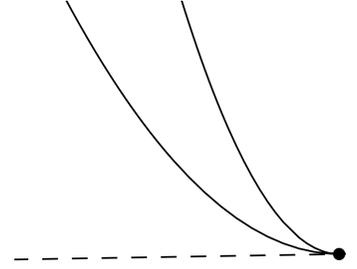


Figura 2.5: Cúspide rhampoid

O próximo resultado nos dá uma caracterização técnica de curvas que possuem pontos duplos.

Proposição 2.20. *Seja $F = 0$ uma curva algébrica de grau 4 tendo um ponto duplo p . Fazendo uma projetivização e tomando as coordenadas locais em p , a curva pode ser escrita como $f := f_2 + f_3 + f_4 = 0$ com $f_2 = xy$, se as tangentes são diferentes ou $f_2 = x^2$, se as tangentes são as mesmas. Então:*

- i) p é um nó se $f_2 = xy$;
- ii) p é um cúspide se $f_2 = x^2$ e $x \nmid f_3$;
- iii) p é um tacnó se $f_2 = x^2$, $f_3 = xg_2$ e $x \nmid (f_4 - \frac{1}{4}g_2^2)$;
- iv) p é um cúspide rhampoid se $f_2 = x^2$, $f_3 = xg_2$, $x \mid (f_4 - \frac{1}{4}g_2^2)$ e $x^2 \nmid (f_4 - \frac{1}{4}g_2^2)$;
- v) $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 5$ se $f_2 = x^2$, $f_3 = xg_2$ e $x^2 \mid (f_4 - \frac{1}{4}g_2^2)$.

Demonstração. i) Uma vez que p é um nó, temos $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 1$. Logo, pelo Teorema 2.11 v) e por (2.2) segue que as duas tangentes à p são diferentes. Assim $f_2 = xy$.

ii) Uma vez que p é um cúspide, temos $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 2$. Logo, pelo Teorema 2.11 v), as tangentes à p são iguais. Assim, $f_2 = x^2$ e $f = x^2 + f_3 + f_4$. Derivando f com respeito a x e a y segue que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y}$. O índice de intersecção entre $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é maior que dois se, e somente se, x divide $\frac{\partial f_3}{\partial y}$, pelo Teorema 2.11 v). Uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 2$, x não divide $\frac{\partial f_3}{\partial y}$. Assim x não divide f_3 .

iii) Uma vez que p é um tacnó, temos $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 3$. Pelos argumentos utilizados na prova de ii), x divide $\frac{\partial f_3}{\partial y}$. Logo x divide f_3 e podemos escrever $f_3 = xg_2$. Temos $f = x^2 + xg_2 + f_4$, derivando com respeito a x e a y teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + x \frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y}$$

Então:

$$\begin{aligned}
I_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) &= I_p\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, x\frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y}\right) \\
&= I_p\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, x\frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}\right)\right) \\
&= I_p\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\left(f_4 - \frac{1}{4}g_2^2\right) - \frac{1}{2}x\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.11 v), uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 3$, x não divide $\frac{\partial}{\partial y}(f_4 - \frac{1}{4}g_2^2)$, e portanto x não divide $f_4 - \frac{1}{4}g_2^2$.

iv) Uma vez que p é um cúspide rhamloid, temos $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$. Pelos argumentos utilizados na prova de iii), x divide $f_4 - \frac{1}{4}g_2^2$. Portanto $f_4 - \frac{1}{4}g_2^2 = xv_3$, para algum polinômio homogêneo v_3 de grau 3, e então:

$$\begin{aligned}
I_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) &= I_p\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, x\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) \\
&= I_p\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, x\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_4}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_4}{\partial x}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}\right)\right) \\
&= I_p\left(2x + x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x}, -\frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_4}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$, x não divide:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_4}{\partial x} - \frac{1}{2}g_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{1}{4}g_2\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x} - \frac{1}{2}g_2\frac{\partial g_2}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}g_2\frac{\partial v_3}{\partial y} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_2}{\partial y}\left(v_3 + x\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}g_2\frac{\partial v_3}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial(g_2v_3)}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial x}
\end{aligned}$$

Assim, x não divide $\frac{\partial(g_2v_3)}{\partial y}$ e portanto, x não divide v_3g_2 . Em particular, x não divide v_3 , e x^2 não divide $f_4 - \frac{1}{4}g_2^2$.

v) Se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 5$, pelos argumentos utilizados na prova de iv) obtemos que x^2 divide $f_4 - \frac{1}{4}g_2^2$. ■

A seguir daremos uma estimativa inferior para o índice de intersecção entre duas curvas.

Lema 2.21. *Seja p um ponto simples de $G = 0$ e um ponto duplo de $F = 0$ com $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 2$. Sejam $F = 0$ e $G = 0$ tangentes em p . Em coordenadas locais as curvas podem ser escritas como $f := x^2 + f_3 + \dots = 0$, $g = x + g_2 + \dots = 0$.*

- i) Se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 2$, então $I_p(F, G) \geq 3$.
- ii) Se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 3$, temos $f_3 = xh_2$, então $I_p(F, G) \geq 4$;
- iii) Se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 4$ e x divide $h_2 - 2g_2$, então $I_p(F, G) \geq 5$;
- iv) Se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 5$ e x divide $h_2 - 2g_2$, então $I_p(F, G) \geq 6$.

Demonstração. i) Temos que $I_p(f, g) \geq 3$ decorre diretamente da Proposição 2.11 v).

ii) Quando $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 3$, em coordenadas locais:

$$\begin{aligned} I_p(f, g) &= I_p(x^2 + xh_2 + \dots, x + g_2 + \dots) = I_p(x^2 + xh_2 + \dots - x(x + g_2 + \dots), x + g_2 + \dots) \\ &= I_p(x(h_2 - g_2) + \dots, x + g_2 + \dots) \end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.11 v) $I_p(f, g) \geq 4$.

iii) Se $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 4$, teremos:

$$\begin{aligned} I_p(f, g) &= I_p(x^2 + xh_2 + f_4 + \dots, x + g_2 + \dots) \\ &= I_p(x^2 + xh_2 + f_4 + \dots - x(x + g_2) + \dots, x + g_2 + \dots) \\ &= I_p(x(h_2 - g_2) + f_4 + \dots, x + g_2 + \dots) \\ &= I_p(x(h_2 - g_2) + f_4 - (h_2 - g_2)(x + g_2) + \dots, x + g_2 + \dots) \\ &= I_p(f_4 + g_2(h_2 - g_2) + \dots, x + g_2 + \dots) \geq 5 \end{aligned}$$

se x divide $f_4 - g_2(h_2 - g_2) = (f_4 - \frac{1}{4}h_2^2) + (\frac{1}{2}h_2 - g_2)^2$.

iv) O mesmo argumento pode ser usado quando $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 5$, levando em conta que x^2 divide $f_4 - g_2(h_2 - g_2) = (f_4 - \frac{1}{4}h_2^2) + (\frac{1}{2}h_2 - g_2)^2$. ■

Capítulo 3

Ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos

Neste capítulo abordaremos acerca de ciclos limite algébricos para sistemas quadráticos, onde mostraremos que nestes não podem ocorrer ciclos limite algébricos de grau 3. Além disso veremos que existem quatro sistemas quadráticos que possuem ciclos limite algébricos de grau 4 e que estas são as únicas possibilidades para este grau.

3.1 Introdução

Como mencionado na introdução, o 16º problema de Hilbert não possui solução mesmo para sistemas quadráticos. Neste capítulo vamos discorrer acerca da obtenção de ciclos limite algébricos para sistemas quadráticos.

Em 1958, Ch'in Yuan-shün mostra em [7] um sistema quadrático tendo ciclo limite algébrico de grau 2 e ele prova a unicidade deste ciclo limite.

Se um sistema quadrático tem um ciclo limite algébrico de grau 2, então através de uma mudança de variáveis, o ciclo limite torna-se o círculo $\Gamma := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Mais ainda, Γ é o único ciclo limite para o sistema quadrático que pode ser escrito na forma:

$$\dot{x} = -y(ax + by + c) - (x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x(ax + by + c),$$

com $a \neq 0$ e $c^2 > a^2 + b^2$.

O caso de ciclos limite de grau 3 foi estudado mais tarde. Em seus três artigos Evdokimenco prova desde 1970 até 1979 que não existe sistemas quadráticos com ciclos limite de grau 3, veja [10], [11] e [12]. Na próxima seção daremos uma prova simples deste resultado, que foi exposta por Chavarriga, Llibre and Moulin-Ollagnier em [5].

O estudo de ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos começou após a prova de Evdokimenco. Assim, Yablonskii [23] encontrou o primeiro deles em 1966. Em 1973 um segundo ciclo limite algébrico de grau 4 foi encontrado por Filiptsov [13], e um terceiro foi encontrado em

1999 por Chavarriga [2]. Finalmente, em 2004 Jordi Sorolla mostrou em sua tese de doutorado um último ciclo limite algébrico de grau 4, e provou que estas são as únicas possibilidades de ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos, veja [22]. Daremos uma prova deste resultado no final deste capítulo.

3.2 Ciclos limite algébricos de grau 3 para sistemas quadráticos

Através do trabalho de Chavarriga, Llibre e Moulin Ollagnier em [5], apresentaremos uma prova de que sistemas quadráticos não podem ter ciclos limite algébricos de grau 3. Neste caminho, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Seja $f = 0$ uma curva algébrica irredutível de grau $n \geq 1$ sem pontos múltiplos para o sistema (1.1) de grau m . Então $n \leq m + 1$.*

Demonstração. Seja $F = 0$ a projetivização da curva $f = 0$, temos que F é uma curva algébrica irredutível para a equação projetiva advinda de (1.1). Logo existe um cofator K tal que

$$\frac{\partial F}{\partial X}L + \frac{\partial F}{\partial Y}M = KF$$

Observe que temos que $N \equiv 0$. Pela fórmula de Euler obtemos que

$$\frac{\partial F}{\partial X} \left(L - \frac{XK}{n} \right) + \frac{\partial F}{\partial Y} \left(M - \frac{YK}{n} \right) + \frac{\partial F}{\partial Z} \left(-\frac{ZK}{n} \right). \quad (3.1)$$

Neste momento utilizaremos o Teorema 2.13 (Lema de Darboux). Tomemos

$$A = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad C = \frac{\partial F}{\partial Z}, \quad A' = L - \frac{XK}{n}, \quad B' = M - \frac{YK}{n}, \quad C' = -\frac{ZK}{n}$$

e também

$$h = \sum_p I_p(A, B, C), \quad h' = \sum_p I_p(A', B', C').$$

Observe que, por hipótese, h e h' são finitos. Mais ainda, como $A \cap B \cap C = \emptyset$, temos que $h = 0$.

Uma vez que A, A', B, B', C e C' satisfazem a equação (3.1), pelo Teorema 2.13 obtemos

$$h + h' = \frac{m^3 + (n-1)^3}{m+n-1} = m^2 + (n-1)(n-m-1). \quad (3.2)$$

Pelo Teorema 2.14 (Bézout), o número de pontos que se intersectam das curvas $A' = 0, B' = 0$ e $C' = 0$ é no máximo m^2 , contando as multiplicidades; isto é, $h' \leq m^2$. Portanto um limitante inferior é como se segue: $0 = h \geq (n-1)(n-m-1)$, e $1 \leq n \leq m+1$. ■

O seguinte resultado é provado em [3], o qual será necessário para a prova que desejamos.

Teorema 3.2. *Seja $f = 0$ uma curva algébrica irredutível de grau n para o sistema (1.1) de grau m com cofator $k \neq 0$. Se m^2 é o número de soluções para o sistema*

$$L - \frac{XK}{n} = 0, \quad M - \frac{YK}{n} = 0, \quad -\frac{ZK}{n} = 0,$$

no plano projetivo, tendo em conta as multiplicidades e os números de intersecção, então o sistema (1.1) tem uma integral primeira racional.

Agora estamos em posse de todos os resultados necessários para provar que sistemas quadráticos não possuem ciclos limite algébricos de grau 3.

Teorema 3.3. *Não existem ciclos limite algébricos de grau 3 para sistemas polinomiais quadráticos reais.*

Demonstração. Seja $f = 0$ uma curva algébrica invariante de grau 3 para um sistema quadrático polinomial real de grau 2. Se a curva cúbica $f = 0$ possui pontos múltiplos, então ela é racional (seu gênero é 0) e portanto não possui nenhum oval. Se $f = 0$ não possui pontos múltiplos, a equação (3.1) na prova da Proposição 3.1 implica que $h' = 2^2 = 4$. De acordo com o Teorema 3.2, o sistema possui uma integral primeira, e portanto não possui nenhum ciclo limite. ■

3.3 Ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos

Nesta seção apresentaremos conforme o teorema abaixo os quatro possíveis ciclos limite algébricos de grau 4 para sistemas quadráticos. Apresentaremos uma prova deste resultado no final do capítulo, que também pode ser vista em [6].

Teorema 3.4. *Através de uma mudança de variáveis os únicos sistemas quadráticos que têm ciclos limite algébricos de grau 4 são:*

a) *Sistema de Yablonskii:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4abcx - (a + b)y + 3(a + b)cx^2 + 4xy, \\ \dot{y} &= (a + b)abx - 4abcy + 4(abc^2 - \frac{3}{2}(a + b)^2 + 4ab)x^2 + 8(a + b)cxy + 8y^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Este sistema possui a curva algébrica invariante irredutível de grau 4:

$$(y - cx^2)^2 + x^2(x - a)(x - b) = 0. \tag{3.4}$$

Para $abc \neq 0$, $a \neq b$, $ab > 0$ e $4c^2(a - b)^2 + (3a - b)(a - 3b) < 0$ a curva (3.4) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

b) Sistema de Filipstov:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 6(1+a)x + 2y - 6(2+a)x^2 + 12xy, \\ \dot{y} &= 15(1+a)y + 3a(1+a)x^2 - 2(9+5a)xy + 16y^2.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Este sistema possui a curva algébrica invariante irredutível de grau 4:

$$3(1+a)(ax^2 + y)^2 + 2y^2(2y - 3(1+a)x) = 0. \quad (3.6)$$

Para $0 < a < \frac{3}{13}$ a curva (3.6) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

c) O sistema:

$$\dot{x} = 5x + 6x^2 + 4(1+a)xy + ay^2, \quad \dot{y} = x + 2y + 4xy + (2+3a)y^2, \quad (3.7)$$

possui a curva algébrica invariante irredutível de grau 4:

$$x^2 + x^3 + x^2y + 2axy^2 + 2axy^3 + a^2y^4 = 0. \quad (3.8)$$

Para $\frac{-71+17\sqrt{17}}{32} < a < 0$ a curva (3.8) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

d) O sistema:

$$\dot{x} = 2(1+2x-2kx^2+6xy), \quad \dot{y} = 8-3k-14kx-2kxy-8x^2, \quad (3.9)$$

possui a curva algébrica invariante irredutível de grau 4:

$$1/4 + x - x^2 + kx^3 + xy + x^2y^2 = 0. \quad (3.10)$$

Para $0 < k < \frac{1}{4}$ a curva (3.10) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

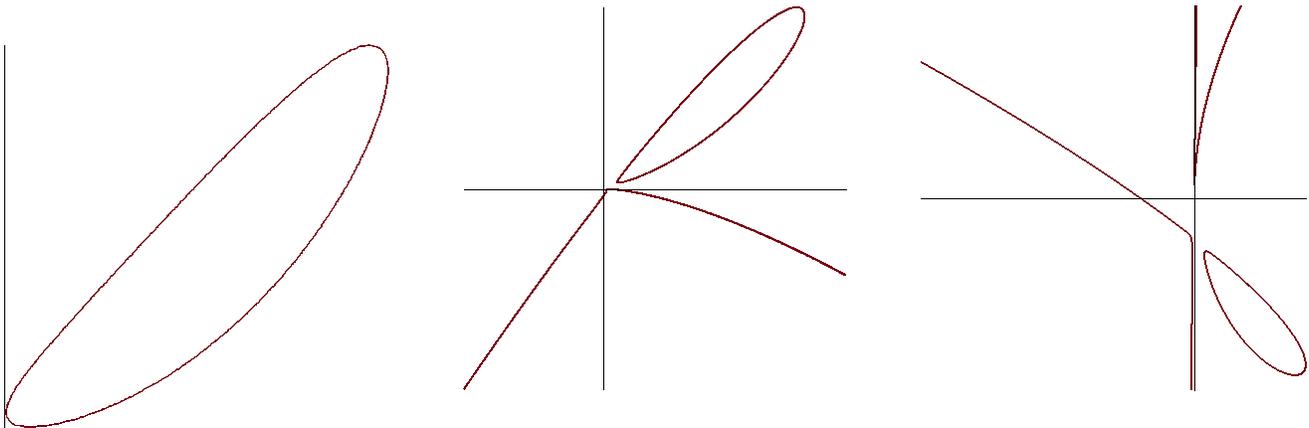


Figura 3.1: curvas invariantes dos sistemas a), b), c), respectivamente, do Teorema 3.4

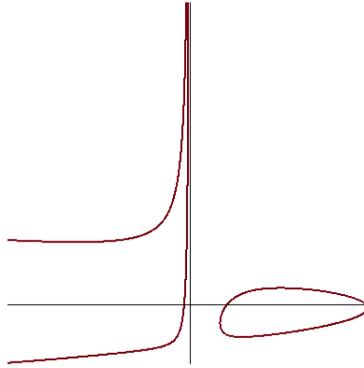


Figura 3.2: curva invariante do sistema d) do Teorema 3.4

Este resultado é obtido usando técnicas projetivas, em particular, a reta no infinito desempenha um papel importante. De um ponto de vista projetivo, e a fim de fazer uma classificação algébrica das curvas que contém ciclos limite, podemos dizer que no caso a) a curva tem dois pontos duplos: um nó em $(0 : 0 : 1)$ e um tacnó em $(0 : 1 : 0)$ que tem tangente real, mas ela é isolada pois os ramos através dela são conjugados complexos. Consequentemente, o gênero da curva é $g = 0$.

Nos casos b) e c) a curva possui um único ponto duplo, um cúspide ramphoid, que é finito e que pode ser colocado em $(0 : 0 : 1)$. O gênero da curva é $g = 1$.

No último caso d) a curva tem um cúspide ramphoid infinito em $(0 : 1 : 0)$. Logo o gênero da curva é $g = 1$ também.

3.4 Alguns resultados sobre singularidades e pontos múltiplos

Através dos trabalhos de Chavarriga, Llibre e Sorolla em [6], nas próximas seções apresentaremos resultados técnicos que auxiliarão na demonstração do teorema principal apresentada no final do capítulo.

Para singularidades sobre retas temos o seguinte lema.

Lema 3.5. *Seja $r = 0$ uma reta, então:*

$$\sum_p I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) \leq m + 1,$$

onde m é o grau do sistema (2.3).

Demonstração. Temos que $I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) \leq \min\{I_p(r, \mathcal{P}), I_p(r, \mathcal{Q}), I_p(r, \mathcal{R})\}$.

Se $\sum_p I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) > m + 1$, então:

$$\sum_p I_p(r, \mathcal{P}) > m + 1, \quad \sum_p I_p(r, \mathcal{Q}) > m + 1, \quad \sum_p I_p(r, \mathcal{R}) > m + 1.$$

Desta maneira como o grau de r é 1 e o grau de \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} é $m + 1$, para valer o Teorema de Bézout teria de ocorrer que r divide \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} , contradizendo a hipótese. ■

Quando uma reta possui menos que $m + 1$ singularidades ela pode ser invariante ou não, dependendo das singularidades. Usando o seguinte resultado caracterizaremos as retas invariantes.

Teorema 3.6. *Seja $r = 0$ uma reta. Ela é invariante para (2.3) se, e somente se, $\sum_p I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) = m + 1$.*

Demonstração. Por meio de uma projetividade podemos considerar que a reta é $Z = 0$. Suponha que $\sum_p I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) = m + 1$. Assim

$$\sum_p I_p(Z, \mathcal{P}) \geq m + 1 \quad \text{e} \quad \sum_p I_p(Z, \mathcal{Q}) \geq m + 1.$$

Por outro lado, uma vez que $\mathcal{P} = MZ - NY$, $\mathcal{Q} = NX - LZ$ e usando o Teorema 2.11(vii) teremos que

$$\sum_p I_p(Z, \mathcal{P}) = \sum_p I_p(Z, NY) \quad \text{e} \quad \sum_p I_p(Z, \mathcal{Q}) = \sum_p I_p(Z, NX).$$

Uma vez que X, Y e Z não podem se anular simultaneamente, segue que $\sum_p I_p(Z, N) \geq m + 1$ e assim pelo Teorema de Bézout Z divide N , isto é, $N = ZA$, para algum polinômio de grau $m - 1$, desta maneira $Z = 0$ é invariante para $\omega = 0$.

Reciprocamente, se $Z = 0$ é uma reta invariante para $\omega = 0$ teremos que $N = ZA$, para algum polinômio A de grau $m - 1$. Tomando $\bar{L} = L - AX$, $\bar{M} = M - AY$ e $\bar{N} = 0$ teremos que $\sum_p I_p(Z, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) = \sum_p I_p(Z, \bar{M}Z, -\bar{L}Z, LY - MX) = \sum_p I_p(Z, LY - MX) = m + 1$ pelo Teorema de Bézout. ■

Conforme a seguinte proposição, todos os resultados que concernem a equações diferenciais continuam prevalecendo para curvas algébricas invariantes.

Proposição 3.7. *Todos os pontos múltiplos de uma curva algébrica invariante irredutível de $\omega = 0$ (2.3) são singularidades da equação diferencial projetiva $\omega = 0$. Os pontos de intersecção entre duas curvas algébricas invariantes de $\omega = 0$ são singularidades da equação diferencial projetiva $\omega = 0$.*

Conforme feito na seção 3.2, para uma curva algébrica invariante irredutível $F = 0$ para (2.3) de grau n temos

$$\frac{\partial F}{\partial X} \left(L - \frac{KX}{n} \right) + \frac{\partial F}{\partial Y} \left(M - \frac{KY}{n} \right) + \frac{\partial F}{\partial Z} \left(N - \frac{KZ}{n} \right).$$

Logo existem dois tipos de singularidades para $\omega = 0$, aqueles que estão na curva projetiva $F = 0$ e os que não necessariamente estão, mas que satisfazem

$$L - \frac{KX}{n} = 0, \quad M - \frac{KY}{n} = 0, \quad N - \frac{KZ}{n} = 0.$$

Assim, definimos

$$h = \sum_p I_p \left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z} \right), \quad h' = \sum_p I_p \left(L - \frac{KX}{n}, M - \frac{KY}{n}, N - \frac{KZ}{n} \right).$$

Quando uma equação diferencial projetiva é extensão de uma equação diferencial afim temos $N \equiv 0$. Assim, em h' dois tipos de singularidades são contadas, não necessariamente disjuntas: aquelas em que $K = 0$ e aquelas em que $Z = 0$. Definindo

$$h'_1 = \sum_p I_p(L, M, K), \quad h'_2 = \sum_p I_p \left(L - \frac{KX}{n}, M - \frac{KY}{n}, Z \right),$$

segue do Lema 2.12 que

$$h' \leq h'_1 + h'_2. \quad (3.11)$$

Note que pelo Teorema de Bézout temos que $h'_1 \leq m(m-1)$, caso contrário os polinômios P e Q não seriam coprimos, contrariando a hipótese.

Se $h'_2 > m$, então $P_m \equiv \frac{k_{m-1}X}{n}$ e $Q_m \equiv \frac{k_{m-1}Y}{n}$. Considerando a equação diferencial projetiva oriunda de uma equação diferencial no plano afim

$$L(YdZ - ZdY) + M(ZdX - XdZ) = 0,$$

substituindo nela L por $L - \frac{k_{m-1}X}{n}$ e M por $M - \frac{k_{m-1}Y}{n}$ vemos que $Z = 0$ é uma reta composta por singularidades, isto é, tem infinito degenerado. Sistemas quadráticos afins com infinito degenerado podem ser reduzidos a equação diferenciais lineares em $\mathbb{C}P^2$, em particular não têm ciclos limite.

A seguir apresentaremos o seguinte resultado que diz respeito a curvas algébricas invariantes.

Lema 3.8. *Seja $f := \sum_{i=1}^n f_i = 0$ uma curva algébrica invariante afim do sistema (1.1) de grau n . Seja d um divisor linear real ou complexo de f_n com multiplicidade l e seja $k = \sum_{i=0}^{m-1} k_i$ o cofator de $f = 0$. Então:*

- i) d é um divisor de $\Delta := yP_m - xQ_m$;
- ii) Seja \bar{l} a multiplicidade de d como divisor de Δ . Então d é divisor de $k_{m-1}x - nP_m$ e de $k_{m-1}y - nQ_m$ com multiplicidade $\bar{l} - 1$;
- iii) $h'_2 = m + 1 - r$, onde r é o número dos diferentes fatores de f_n ;
- iv) d é um divisor de $f_{n-1}(k_{m-1}x - (n-1)P_m)$ e de $f_{n-1}(k_{m-1}y - (n-1)Q_m)$ com multiplicidade $\min\{l-1, \bar{l}\}$.

Demonstração. A curva $f = 0$ satisfaz (1.3) pois é invariante. Tomando os termos de grau $m+n-1$ e $m+n-2$ em (1.3) teremos

$$P_m \frac{\partial f_n}{\partial x} + Q_m \frac{\partial f_n}{\partial y} = k_{m-1} f_n, \quad (3.12)$$

$$P_m \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + Q_m \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + P_{m-1} \frac{\partial f_n}{\partial x} + Q_{m-1} \frac{\partial f_n}{\partial y} = k_{m-1} f_{n-1} + k_{m-2} f_n. \quad (3.13)$$

Por outro lado, de (3.12) e da fórmula de Euler $x \frac{\partial f_n}{\partial x} + y \frac{\partial f_n}{\partial y} = n f_n$ obtemos

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{f_n(k_{m-1}y - nQ_m)}{\Delta}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y} = \frac{f_n(nP_m - k_{m-1}x)}{\Delta}. \quad (3.14)$$

Portanto, qualquer divisor de f_n deve ser um divisor de $\frac{\partial f_n}{\partial x} \Delta$ e $\frac{\partial f_n}{\partial y} \Delta$. Se d é um divisor de f_n com multiplicidade l , então d é um divisor de $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ com multiplicidade $l - 1$, e assim d deve dividir Δ , isto prova i). Uma vez que d divide $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ com multiplicidade $l - 1$ e Δ com multiplicidade \bar{l} de (3.14) segue ii).

Suponha que $f_n = \prod_{i=1}^r d_i^{l_i}$, $l_1 + \dots + l_r = n$ e $\Delta = (\prod_{i=1}^r d_i^{\bar{l}_i})B$, onde B contém os divisores de Δ que não dividem f_n . Substituindo as expressões acima em (3.14) teremos

$$L_x \left(\prod_{i=1}^r d_i^{\bar{l}_i - 1} \right) B = k_{m-1}y - nQ_m, \quad L_y \left(\prod_{i=1}^r d_i^{\bar{l}_i - 1} \right) B = nP_m - k_{m-1}x, \quad (3.15)$$

onde $L_x = d_1 d_2 \dots d_r \sum_{i=1}^r \frac{l_i}{d_i} \frac{\partial d_i}{\partial x}$ e $L_y = d_1 d_2 \dots d_r \sum_{i=1}^r \frac{l_i}{d_i} \frac{\partial d_i}{\partial y}$. Note que L_x e L_y não têm fatores em comum de grau positivo.

Levando em conta os graus das expressões que aparecem em (3.15) teremos

$$r - 1 + \sum_{i=1}^r (\bar{l}_i - 1) + b = m.$$

Onde b é o grau de B . Logo

$$\sum_{i=1}^r (\bar{l}_i - 1) + b = m + 1 - r.$$

Portanto

$$h'_2 = \sum_p I_p \left(L - \frac{KX}{n}, M - \frac{KY}{n}, Z \right) = \sum_{i=1}^r (\bar{l}_i - 1) + b = m + 1 - r,$$

que prova iii). Esta última igualdade se torna clara se levarmos em conta que

$$L - \frac{KX}{n} = ZR + P_m - \frac{k_{m-1}X}{n} = ZR + \frac{1}{n} L_y \left(\prod_{i=1}^r d_i^{\bar{l}_i - 1} \right) B,$$

$$M - \frac{KY}{n} = ZS + Q_m - \frac{k_{m-1}Y}{n} = ZS - \frac{1}{n} L_x \left(\prod_{i=1}^r d_i^{\bar{l}_i - 1} \right) B,$$

e que seus pontos comuns em $Z = 0$ vêm dos divisores de $(\prod_{i=1}^r d_i^{\bar{l}_i - 1}) B$.

De (3.13) e da fórmula de Euler para f_{n-1} dada por $x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + y \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = (n-1) f_{n-1}$, obtemos

$$\Delta \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} = yC + f_{n-1}(k_{m-1}y - (n-1)Q_m), \quad \Delta \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = f_{n-1}((n-1)P_m - k_{m-1}x) - xC,$$

onde $C = k_{m-2}f_n - P_{m-1}\frac{\partial f_n}{\partial x} - Q_{m-1}\frac{\partial f_n}{\partial y}$. Uma vez que d é divisor de f_n , $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ com multiplicidades l , $l-1$ e $l-1$ respectivamente, então d é um divisor de C com multiplicidade maior ou igual que $l-1$. d também divide Δ com multiplicidade \bar{l} , assim segue iv). ■

O seguinte teorema é uma simplificação de um resultado mais geral devido a Darboux, para detalhes, veja [3].

Teorema 3.9 (Teorema de Darboux). *Sejam $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ duas curvas algébricas invariantes para o sistema (1.1) com cofator k_1 e k_2 , respectivamente. Suponha que existam dois números reais λ_1 e λ_2 tais que:*

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0.$$

Então $H = f_1^{k_1} f_2^{k_2}$ é uma integral primeira real para o sistema (1.1).

3.5 Alguns resultados sobre sistemas quadráticos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre sistemas quadráticos, que são da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_0 + P_1 + P_2 = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} &= Q_0 + Q_1 + Q_2 = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e mostraremos algumas situações em que ciclos limite não podem ocorrer.

Lema 3.10. *Seja $f := \sum_{i=0}^n f_i = 0$ uma curva algébrica invariante para (3.16) de grau n que não possui pontos múltiplos na reta do infinito. Sejam d_1 e d_2 dois divisores lineares de f_n , real ou complexo, com multiplicidade estritamente maior que um. Se $h' \geq 3$ ou $h' = 2$ e $h'_2 = 0$, então o sistema (3.16) possui uma integral primeira racional.*

Demonstração. Se $h' = 4$, então pelo Teorema 3.2 o sistema (3.16) possui uma integral primeira racional. Suponha que $h' = 3$, uma vez que f_n possui pelo menos dois divisores lineares, pelo Lema 3.8 iii) segue que $h'_2 \leq 1$, e assim $h'_1 \geq 2$. Se $h' = 2$ e $h'_2 = 0$, então $h'_1 = 2$. Em ambos os casos $h'_1 \geq 2$.

Seja $k = k_0 + k_1$ o cofator de f , em que k_i é um polinômio homogêneo de grau i . Uma vez que $h'_1 \geq 2$, o cofator ou possui pelo menos duas singularidades ou possui uma singularidade com multiplicidade maior ou igual a 2.

Afirmção. Se um divisor linear d_i divide f_{n-1} , então existe um ponto múltiplo de $F = 0$ em $Z = 0$.

Para provar a afirmação, sem perda de generalidade podemos assumir que $d_i = x$ e $f = f_0 + f_1 + \dots + f_{n-2} + xg_{n-2} + x^s g_{n-s}$, com $s \geq 2$. Então é fácil ver que o ponto $(0 : 0 : 1)$ é um ponto múltiplo de $F = 0$ em $Z = 0$. Assim a afirmação está provada.

Uma vez que a curva não possui pontos múltiplos no infinito, pelo Lema 3.8 iv) segue que d_1 e d_2 são divisores de $k_1 y - (n-1)Q_2$ e $k_1 x - (n-1)P_2$. Portanto

$$P_2 = \lambda_1 d_1 d_2 + \frac{k_1 x}{n-1}, \quad Q_2 = \lambda_2 d_1 d_2 + \frac{k_1 y}{n-1}.$$

Agora o sistema (3.16) toma a forma

$$\dot{x} = P_0 + P_1 + \lambda_1 d_1 d_2 + \frac{k_1 x}{n-1}, \quad \dot{y} = Q_0 + Q_1 + \lambda_2 d_1 d_2 + \frac{k_1 y}{n-1},$$

e então, pode ser escrito como

$$\dot{x} = P_0 + P_1 - \frac{k_0 x}{n-1} + \lambda_1 d_1 d_2 + \frac{k_1 x}{n-1}, \quad \dot{y} = Q_0 + Q_1 - \frac{k_0 y}{n-1} + \lambda_2 d_1 d_2 + \frac{k_1 y}{n-1}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = \lambda_2 x - \lambda_1 y$, teremos $\dot{z} = B + \frac{kz}{n-1}$, onde

$$B = \lambda_2 \left(P_0 + P_1 - \frac{k_0 x}{n-1} \right) - \lambda_1 \left(Q_0 + Q_1 - \frac{k_0 y}{n-1} \right).$$

Os polinômios B e k possuem o mesmo grau e B zera nos dois pontos de $k = 0$ que são singularidades ou na singularidade com multiplicidade maior que 2. Logo temos $B = ak$. Portanto, $\dot{z} = k(a + \frac{z}{n-1})$, isto é, $a + \frac{\lambda_2 x - \lambda_1 y}{n-1} = 0$ é uma reta invariante com cofator $\frac{k}{n-1}$. Assim, pelo Teorema de Darboux $H = f \left(a + \frac{\lambda_2 x - \lambda_1 y}{n-1} \right)^{1-n}$ é uma integral primeira racional para o sistema. ■

Proposição 3.11. *Seja $F = 0$ uma curva algébrica invariante irreduzível de grau 4 para o sistema quadrático (3.16). Suponha que a curva possui dois pontos múltiplos sobre $Z = 0$, então:*

- i) Se $h' \geq 3$, então o sistema possui uma integral primeira racional.*
- ii) Se os dois pontos múltiplos são cúspides, então ou o sistema possui uma integral primeira racional, ou a curva possui três cúspides.*

Demonstração. Sejam p_1 e p_2 os pontos múltiplos sobre a reta no infinito. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $p_1 = (1 : 0 : 0)$ e $p_2 = (0 : 1 : 0)$ se eles forem reais, ou $p_1 = (1 : i : 0)$ e $p_2 = (1 : -i : 0)$ se eles forem complexos. Em ambos os casos podemos escrever

$$f = D^2 + D(m_{21}x + m_{12}y) + m_{20}x^2 + m_{11}xy + m_{02}y^2 + m_{10}x + m_{01}y + m_{00},$$

onde $D = xy$ se os pontos forem reais e $D = x^2 + y^2$ se os pontos forem complexos. Através de uma mudança linear de variáveis podemos escrever:

$$f = D^2 + f_2 + f_1 + f_0,$$

onde f_i são polinômios homogêneos de grau $i \in \{0, 1, 2\}$. Claramente, pelo Lema 3.8 iii) temos $h'_2 = 1$.

Uma vez que a curva acima é invariante pelo fluxo definido por (3.16), desenvolvendo (1.3) de acordo com as diferentes potências, obtemos para os termos de grau 4 e 5 após uma simplificação

$$P_2 \frac{\partial D}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{k_1 D}{2}, \quad P_1 \frac{\partial D}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{k_0 D}{2}.$$

Derivando D com respeito a t e levando em conta as relações acima obtemos

$$\dot{D} = \dot{x} \frac{\partial D}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{k}{2} D + l, \quad (3.17)$$

onde l é uma função linear.

Para provar i), se $h' \geq 3$, então $h'_1 \geq 2$ devido a $h'_2 = 1$, e portanto existem duas singularidades do sistema no cofator levando em conta as multiplicidades, isto é, $l = ak$. Então a equação (3.17) pode ser escrita como $\dot{D} = \frac{k}{2}(D + 2a)$ e $H = f(D + 2a)^{-2}$ é uma integral primeira racional para o sistema.

Para provar ii), se os dois pontos múltiplos são cúspides, teremos $f_2 = m_{11}D$ e também

$$P_0 \frac{\partial D}{\partial x} + Q_0 \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{m_{11}k_1}{4}.$$

Então (3.17) pode ser escrita como

$$\dot{D} = \dot{x} \frac{\partial D}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{k}{2} \left(D + \frac{m_{11}}{2} \right) - m_{11} \frac{k_0}{4}.$$

- Se $h'_1 > 0$, então deverá existir uma singularidade no cofator, e assim $D + \frac{m_{11}}{2} = 0$ é uma curva invariante para o sistema (3.16) com cofator $\frac{k}{2}$, e portanto $H = f(D + \frac{m_{11}}{2})^{-2}$ é uma integral primeira racional para o sistema.
- Se $h'_1 = 0$, então $h' \leq h'_1 + h'_2 = 1$ e portanto $h \geq 6$. Mas para uma curva com dois cúspides teríamos $h = 4$. Uma vez que o número máximo de pontos múltiplos sobre uma curva algébrica invariante quártica é três, então deverá existir outro ponto múltiplo e este será um cúspide também. ■

Temos o seguinte resultado devido a Ye Yian-Qian, cuja demonstração pode ser encontrada em [24].

Teorema 3.12. *a) Sejam X e Y funções de classe \mathcal{C}^1 definidas em uma região simplesmente conexa $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Se*

$$\operatorname{div}(X(x, y), Y(x, y)) = \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} = 0,$$

então o campo vetorial

$$\mathcal{X} = X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y}$$

não possui ciclos limite em \mathcal{U} .

- b) Para um sistema quadrático, existe uma única singularidade dentro de uma região limitada por uma órbita fechada, o qual é um centro ou um foco, e o determinante da parte linear nesta singularidade é não nulo.*

3.6 Prova do Teorema 3.4

Seja $f = 0$ uma curva algébrica invariante irreduzível com coeficientes reais de grau 4 para o sistema quadrático (3.16). Suponha que este contenha um oval que seja um ciclo limite para o sistema. Seja $F = 0$ a equação da curva no plano projetivo. Então, por (3.2) temos que $h + h' \geq 7$. A existência de uma integral primeira racional exclui a existência de um ciclo limite. Assim, pelo Teorema 3.2 deveremos ter $h' < 4$ e portanto segue que $h \geq 4$. Levando em conta o Teorema 2.4, uma curva quártica pode ter, no máximo, um ponto triplo ou três pontos duplos.

3.6.1 A curva $F = 0$ possui um ponto triplo p

Neste caso a curva não pode ter nenhum oval. No caso de existir, como p é real podemos extrair uma reta contendo p e um outro ponto q na região limitada pelo oval. Esta reta possui cinco pontos em comum com a curva quártica, contando suas multiplicidades. Pelo Teorema de Bézout, a curva não é irreduzível.

3.6.2 A curva $F = 0$ possui três pontos duplos p_1, p_2, p_3

Pelo menos um dos três pontos múltiplos deve ser real pois quando a curva possui um ponto complexo esta possui também o seu conjugado, mas apenas 3 pontos são permitidos. Por outro lado $h \geq 4$, o gênero (2.1) da curva nunca é um inteiro negativo, e levando em conta a Observação 2.19, os pontos duplos podem ser somente cúspides ou nós pois a existência de pontos mais degenerados implicaria a existência de pontos duplos implícitos, que forçaria o gênero ser negativo. Temos as seguintes possibilidades:

3.6.2.1 p_1 é um cúspide e p_2 e p_3 são nós

Neste caso p_1 é um ponto real e uma vez que este é cúspide, sua tangente deverá ser real. Assim, a cônica que contém os pontos p_1, p_2, p_3 , um ponto q na região limitada definida pelo oval e sua tangente a p_1 , corta a curva $F = 0$ em nove pontos, o qual não é possível pelo Teorema de Bézout se a curva for irreduzível.

3.6.2.2 p_1 e p_2 são cúspides e p_3 é um nó

Neste caso p_1 e p_2 não podem ser reais. Caso o fossem, suas tangentes seriam reais também e a cônica que contém os pontos p_1, p_2, p_3 , um ponto q na região limitada pelo oval, e sua tangente a p_1 cortaria a curva $F = 0$ em nove pontos, o que não é possível se a curva é irreduzível.

O nó p_3 não pode ter tangentes reais. Isto pode ser visto usando a mesma cônica, agora tangente a $F = 0$ em p_3 . E usando esta cônica não tangente a p_3 , mas contendo um ponto real simples r que não pertença ao oval segue que os únicos pontos reais da curva $F = 0$ são p_3 e os pontos do oval. Em particular, a curva tem no máximo um oval.

Pela Proposição 3.11 p_1 e p_2 não podem ser pontos infinitos. Por outro lado, p_3 não pode ser um ponto infinito pois ele possui tangentes complexas e a reta infinita é invariante. Se algum ponto do oval corta o infinito não teremos ciclos limite afins. Assim, os pontos do infinito devem

ser conjugados complexos e pelo Lema 3.8 $F_4 = D^2$, onde D é um polinômio quadrático irreduzível sobre o corpo real.

Sem perda de generalidade podemos assumir que a expressão local da curva no plano afim seja:

$$f = m_{00} + m_{10}x + m_{01}y + m_{20}x^2 + m_{11}xy + m_{02}y^2 + m_{30}x^3 \\ + m_{21}x^2y + m_{12}xy^2 + m_{03}y^3 + (x^2 + Bxy + Cy^2)^2$$

onde $B^2 - 4C < 0$. Note que $C \neq 0$.

Podemos considerar $p_1 = (0 : i : 1)$, $p_2 = (0 : -i : 1)$ e $p_3 = (1 : 0 : 1)$. Uma vez que p_1 e p_2 são cúspides e p_3 é um nó, as seguintes expressões devem ser identicamente nulas. Note que a última significa que a tangente a $f = 0$ em p_1 e p_2 é dupla.

$$f(p_{1,2}) = C^2 + m_{00} - m_{02} \pm (m_{01} - m_{03})i, \quad f(p_3) = 1 + m_{00} + m_{10} + m_{20} + m_{30},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_{1,2}) = m_{10} - m_{12} \pm (m_{11} - 2BC)i, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(p_3) = 4 + m_{10} + 2m_{20} + 3m_{30},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p_{1,2}) = m_{01} - 3m_{03} \pm (m_{02} - 2C^2)i, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_3) = 2B + m_{01} + m_{11} + m_{21},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial xy} \right)^2 \right) (p_{1,2}) = -12B^2C^2 + 48C^3 - 4B^2m_{02} - 8Cm_{02} + 12BCm_{11} - m_{11}^2$$

$$+ 4m_{12}^2 - 24C^2m_{20} + 4m_{02}m_{20} - 12m_{03}m_{21} \pm 4(3B^2m_{03} + 6Cm_{03} - 6BCm_{12} + m_{11}m_{12} - 3m_{03}m_{20} + 6C^2m_{21} - m_{02}m_{21})i.$$

Desta maneira obtemos $m_{10} = m_{12} = 2 - 2C^2 + m_{30}$, $m_{20} = -3 + C^2 - 2m_{30}$, $m_{11} = 2BC$, $m_{02} = 2m_{00} = 2C^2$, $m_{21} = -2B(1 + C)$, $m_{01} = m_{03} = 0$. Então a última expressão pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial xy} \right)^2 \right) (p_{1,2}) = 4(2 + 2C + m_{30})(2 - 2C + 4C^2 + m_{30}) \\ \pm 16BC(2 + 2C + m_{30})i.$$

Se $2 + 2C + m_{30} = 0$, então $f = (C - x - Cx + x^2 + Bxy + Cy^2)$, que não é irreduzível. Assim a única possibilidade é $2 - 2C + 4C^2 + m_{30} = 0$ e $C \neq 0$. Então temos $m_{30} = -2 + 2C - 4C^2$. Também, uma vez que $C \neq 0$ temos que $B = 0$. Neste caso f depende apenas de potências pares de y . Assim, levando em conta que existe no máximo um oval, se houver é um oval para $f = 0$, o qual é simétrico com respeito ao eixo $y = 0$ e deve haver três pontos de intersecção da curva $f = 0$ com este eixo: os pontos do oval e p_3 . De fato,

$$f(x, 0) = (-1 + x)^2(C^2 + 2Cx - 4C^2x + x^2).$$

O primeiro fator corresponde a p_3 e o segundo deve ter duas raízes reais. As raízes são $x = -C + 2C^2 \pm \sqrt{(-1 + C)C^3}$. Assim, uma condição necessária para a existência de um oval é $C > 1$.

Impondo a $f = 0$ ser invariante para (3.16) com cofator $mx + ny + p$, definimos:

$$M = \sum_{i+j=0}^5 M_{ij}x^i y^j := \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - (mx + ny + p)f.$$

Os coeficientes M_{ij} devem ser zero.

Em ordem cinco temos:

$$\begin{aligned} M_{50} &= 4a_{20} - m, \\ M_{41} &= 4a_{11} + 4b_{20}C - n, \\ M_{32} &= 2(2a_{02} + 2a_{20}C + 2b_{11}C - Cm), \\ M_{23} &= 4a_{11}C + 4b_{02}C + 4b_{20}C^2 - 2Cn, \\ M_{14} &= C(4a_{02} + 4b_{11}C - Cm), \\ M_{05} &= C^2(4b_{02} - n). \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos $m = 4a_{20}$, $n = 4b_{02}$, $a_{11} = b_{02} - b_{20}C$ e $a_{02} = (a_{20} - b_{11})C$.

Os coeficientes de M em ordem quatro são:

$$\begin{aligned} M_{40} &= 4a_{10} + 2a_{20} - 2a_{20}C + 4a_{20}C^2 - q, \\ M_{31} &= 2(2a_{01} + b_{02} - b_{02}C + 2b_{10}C + 5b_{20}C + 2b_{02}C^2 - 9b_{20}C^2 + 6b_{20}C^3), \\ M_{22} &= 2C(2a_{10} - 6a_{20} + 2b_{01} + 5b_{11} + 12a_{20}C - 9b_{11}C - 6a_{20}C^2 + 6b_{11}C^2 - q), \\ M_{13} &= 2C(2a_{01} - b_{02} + 3b_{02}C + 2b_{10}C - b_{20}C + 3b_{20}C^2), \\ M_{04} &= C^2(2a_{20} + 4b_{01} - 2b_{11} - 6a_{20}C + 6b_{11}C - q). \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos $q = \frac{1}{2}(8b_{01} - b_{11} + 3b_{11}C)$, $a_{10} = \frac{1}{4}(4b_{01} - 2b_{11} + 3b_{11}C - 3b_{11}C)$, $a_{01} = C(-b_{10} - b_{20} + 3b_{20}C)$, $b_{02} = -3b_{20}C$, $a_{20} = \frac{3}{4}b_{11}$.

Em ordem três temos:

$$\begin{aligned} M_{30} &= \frac{1}{2}(8a_{00} + 4b_{01} + b_{11} - 4b_{01}C + 5b_{11}C + 8b_{01}C^2 - 7b_{11}C^2 - 15b_{11}C^3 + 18b_{11}C^4), \\ M_{21} &= 2C(2b_{00} + 5b_{10} + 5b_{20} - 9b_{10}C - 18b_{20}C + 6b_{10}C^2 + 33b_{20}C^2 - 18b_{20}C^3), \\ M_{12} &= \frac{1}{2}C(8a_{00} - 4b_{01} - b_{11} + 12b_{01}C - 3b_{11}C - 3b_{11}C^2 + 9b_{11}C^3), \\ M_{03} &= 2C^2(2b_{00} - b_{10} - b_{20} + 3b_{10}C + 12b_{20}C - 9b_{20}C^2). \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos $a_{00} = \frac{3}{4}b_{11}C^2(2 + 3C)$, $b_{00} = -3b_{20}C$, $b_{01} = -\frac{1}{4}b_{11}(1 + 3C)^2$, $b_{10} = b_{20}(-1 + 3C)$.

Em ordem dois temos:

$$M_{20} = \frac{3}{2}b_{11}(1 - C)C(-1 + 2C)(1 + 3C)^2,$$

e desta maneira teremos $b_{11} = 0$ uma vez que $C > 1$. Note que $b_{20} \neq 0$, caso contrário o sistema se tornaria $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Então, fazendo a reescala no tempo $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{b_{20}}$ o sistema se torna

$$\dot{x} = -4Cxy, \quad \dot{y} = -3C - x + 3Cx + x^2 - 3Cy^2,$$

e então o cofator é $k = -12Cy$. Portanto, pelo Teorema de Darboux $H = \frac{f}{x^3}$ é uma integral primeira racional e assim não existe nenhum ciclo limite para este caso.

3.6.2.3 p_1, p_2 e p_3 são cúspides

Neste caso um destes cúspides deve ser real e então podemos usar o mesmo argumento utilizado em 3.6.2.1.

3.6.3 A curva $F = 0$ possui dois pontos duplos p_1, p_2

Levando em conta que $h \geq 4$ estes dois pontos duplos não podem ser nós ou cúspides e algum deve ser mais degenerado. Por outro lado, pela observação 2.19 e pelo fato de o gênero computado por (2.1) não poder ser um inteiro negativo, segue que temos dois pontos duplos explícitos, mas não podemos ter mais que três pontos duplos (explícito ou implícito). Assim, p_1 ou p_2 devem ser um nó ou um cúspide. Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

3.6.3.1 p_1 é um nó e p_2 é um tacnó

Note que neste caso $h = 4$ e $h' = 3$.

Os pontos p_1 e p_2 devem ser reais pois a curva possui coeficientes reais, e não podem ser conjugados complexos pois seus índices de intersecção são diferentes. Uma vez que p_2 é um tacnó real de uma curva com coeficientes reais, ele possui uma tangente dupla com coeficientes reais. Portanto, uma tangente real.

As tangentes a p_1 não podem ser reais. Se estas fossem reais, a cônica que contém p_1, p_2 e outro ponto q na região limitada pelo oval e é tangente a p_1 e p_2 cortaria a curva $F = 0$ em nove pontos (contando suas multiplicidades) pelo Lema 2.21. Portanto a curva não seria irredutível pelo Teorema de Bézout.

Usando o mesmo argumento com a cônica não tangente a p_1 , mas contendo um ponto simples real de $F = 0$ segue que os únicos pontos reais de $F = 0$ são p_1, p_2 e os pontos do oval.

Um dos pontos p_1 e p_2 devem estar no infinito. Caso contrário, os pontos do infinito teriam de ser simples e complexos, uma vez que os únicos pontos reais da curva são p_1, p_2 e os pontos do oval. Então $f_4 = D^2$, onde D é um polinômio homogêneo de grau dois irredutível sobre o corpo dos reais, e pelo Lema 3.10 teríamos que o sistema possuiria integral primeira.

Mas somente p_2 pode estar no infinito. p_1 não pode estar pois ele possui tangentes complexas e a reta no infinito é invariante. Se p_2 estiver no infinito e existir algum outro, estes deveriam ser complexos conjugados, assim existiriam três pontos no infinito. Então teríamos $h'_2 = 0$ pelo Lema 3.8 e uma vez que $h' = 3$ teríamos $h'_1 \geq 3$ por (3.11), o que não é possível. Por outro lado, uma vez que $h' = 3$, pela Proposição 3.11 p_1 e p_2 não podem estar ambos sobre a reta do infinito.

Suponha que p_1 está no infinito. Podemos considerar $p_1 = (0 : 1 : 0)$ com tangente y e $p_2 = (0 : 0 : 1)$. Então a equação projetiva da curva é

$$F = X^4 + XY(AC + BY)Z + Y^2Z^2$$

e as tangentes em p_1 serão dadas por Z e $BX + Z$, que não são complexas, assim temos uma contradição.

Suponha que p_2 está no infinito. Vamos considerar $p_1 = (0 : 0 : 1)$ com tangentes complexas e $p_2 = (0 : 1 : 0)$. Uma vez que p_2 é um tacnó a equação afim da curva é

$$f = ax^4 + x^2(bx + cy) + x^2 + y^2,$$

que corresponde a família de Yablonskii, caso a) do Teorema 3.4.

3.6.3.2 p_1 é um nó e p_2 é um cúspide rhamloid

Neste caso p_1 e p_2 devem ser reais e então a tangente a p_2 também será real. A cônica que contém estes pontos, um ponto q na região limitada definida pelo oval e satisfaz o Lema 2.21 iii), corta a curva $F = 0$ em nove pontos, o que não é possível se a curva é irredutível.

3.6.3.3 p_1 e p_2 são cúspides

Através de uma projetividade podemos considerar que os cúspides são $p_1 = (1 : 0 : 0)$ e $p_2 = (0 : 1 : 0)$ e a equação projetiva da curva $F = 0$ é definida por

$$F = X^2Y^2 + \lambda_1XYZ^2 + (\lambda_2X + \lambda_3Y)Z^3 + \lambda_4Z^4.$$

Se $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$, então p_1 ou p_2 são tacnós, respectivamente. Se $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, a equação diferencial projetiva é definida por

$$L = L_2 + L_1Z + L_0Z^2, \quad M = M_2 + M_1Z + M_0Z^2, \quad N = N_2 + N_1Z + N_0Z^2.$$

Podemos considerar que o cofator de $F = 0$ é zero.

Uma vez que p_1 e p_2 são singularidades da equação diferencial projetiva, teremos:

$$\begin{aligned} (LY - MX)(1, 0, 0) &= -M_2(1, 0, 0) = 0, & (LY - MX)(0, 1, 0) &= L_2(0, 1, 0) = 0, \\ (LZ - NX)(1, 0, 0) &= -N_2(1, 0, 0) = 0, & (LZ - NX)(0, 1, 0) &= 0, \\ (MZ - NY)(1, 0, 0) &= 0, & (MZ - NY)(0, 1, 0) &= -N_2(0, 1, 0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $N_2 = a_0XY$, $L_2 = (a_1X + a_2Y)X$ e $M_2 = (a_3X + a_4Y)Y$. Consideremos $L_1 = b_1X + b_2Y$, $M_1 = b_3X + b_4Y$ e $N_1 = b_5X + b_6Y$.

Uma vez que $F = 0$ é uma curva algébrica invariante da equação diferencial projetiva obtemos as seguintes relações correspondendo aos coeficientes das diferentes potências de Z :

$$\begin{aligned} 2XY^2L_2 + 2X^2YM_2 &= 0, \\ 2XY^2L_1 + 2X^2YM_1 + 2\lambda_1XYN_2 &= 0, \\ 2XY^2L_0 + 2X^2YM_0 + \lambda_1YN_2 + \lambda_1XM_2 + 3(\lambda_2X + \lambda_3Y)N_2 + 2\lambda_1XYN_2 &= 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} 2YL_2 + 2XM_2 &= 0, \\ 2YL_1 + 2XM_1 + 2\lambda_1N_2 &= 0, \\ 2YL_0 + 2XM_0 + 3(\lambda_2X + \lambda_3Y)a_0 + 2\lambda_1N_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Em particular, da primeira equação de (3.18) obtemos

$$a_1 + a_3 = 0, \quad a_2 + a_4 = 0. \tag{3.19}$$

De (3.18) teremos

$$YL + XM + \lambda_1ZN = \lambda_1Z^3N_0 - \frac{3}{2}(\lambda_2X + \lambda_3Y)a_0Z^2.$$

Em outras palavras, se definimos $G = XY + \frac{\lambda_1}{2}Z^2$, teremos

$$\frac{\partial G}{\partial X}L + \frac{\partial G}{\partial Y}M + \frac{\partial G}{\partial Z}N = Z^2r, \quad (3.20)$$

onde $r = \lambda_1ZN_0 - \frac{3}{2}(\lambda_2X + \lambda_3Y)a_0$.

Quando uma curva possui dois cúspides, temos $h = 4$ e assim $h' = \sum_p I_p(L, M, N) \geq 3$.

- Se $\{L = 0\} \cap \{M = 0\} \cap \{N = 0\} \cap \{Z = 0\} = \emptyset$, então $I_p(r, L, M, N) = I_p(L, M, N)$, para todo p por 3.20. Então:

$$\begin{aligned} \sum_p I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) &= \sum_p I_p(r, LY - MX, LZ - NX, MZ - NY) \\ &\geq \sum_p I_p(r, L, M, N) = \sum_p I_p(L, M, N) \geq 3 \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.5 $\sum_p I_p(r, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) = m + 1$ e portanto pelo Teorema 3.6 concluímos que r é uma reta invariante que contém as singularidades da equação diferencial. Nunca existe um foco numa reta invariante, logo não existem ciclos limite neste caso.

- Se q pertence a $\{L = 0\} \cap \{M = 0\} \cap \{N = 0\} \cap \{Z = 0\}$ com $q \neq p_1$ e $q \neq p_2$, então a reta $Z = 0$, que contém p_1, p_2 e q é invariante. Neste caso $a_0 = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial X}L + \frac{\partial G}{\partial Y}M + \frac{\partial G}{\partial Z}N = \lambda_1N_0Z^3.$$

Portanto, se $\lambda_1N_0 \neq 0$, todas as singularidades que não estiverem na curva $F = 0$ estarão na reta $Z = 0$, a qual é invariante. Em particular, os focos de um ciclo limite pertencem a $Z = 0$, o que não é possível. Se $\lambda_1N_0 = 0$, obtemos a integral primeira racional $H = \frac{F}{G^2}$ usando o Teorema de Darboux e o fato de as curvas $H = c$ serem escritas como polinômios homogêneos.

- Suponha que q pertence a $\{L = 0\} \cap \{M = 0\} \cap \{N = 0\} \cap \{Z = 0\}$ com $q = p_1$ ou $q = p_2$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $q = p_1$, e então como $L(1, 0, 0) = 0$ obtemos $a_1 = 0$ e de (3.19) $a_3 = 0$.

Nas coordenadas locais em p_1 , a equação diferencial é $(N - ZL)dy - (M - YL)dz = 0$. Levando em conta (3.19), podemos escrever como:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= M - yL = b_3z + \dots \\ \dot{z} &= N - zL = b_5z + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

E a curva nas coordenadas locais em p_1 é $f := y^2 + \lambda_1yz^2 + \lambda_2z^3 + \lambda_3yz^3 + \lambda_4z^4 = 0$. Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante de 3.21 com cofator $k = k_0 + k_1y + k_2z$, obtemos:

$$\begin{aligned} &(2y + \lambda_1z^2 + \dots)(b_3z + \dots) + (2\lambda_1yz + 3\lambda_2z^2 + \dots)(b_5z + \dots) \\ &= (k_0 + k_1y + k_2z)(y^2 + \lambda_1yz^2 + \lambda_2z^3 + \dots) \end{aligned}$$

Cada um dos coeficientes da expressão acima devem ser zero. Para os coeficientes de y^2 , yz e z^3 obtemos

$$k = 0, \quad 2b_3 = 0, \quad \lambda_1 b_3 + 3\lambda_2 b_5 - \lambda_2 k_0 = 0,$$

de onde

$$b_3 = b_5 = 0, \tag{3.22}$$

pois $\lambda_2 \neq 0$.

Tomando as coordenadas locais em p_2 para a equação diferencial e a curva, usando os mesmos argumentos como para p_1 obtemos:

$$b_2 = 0, \quad b_6 = \frac{a_2}{3}. \tag{3.23}$$

Resumindo, de (3.19), (3.22), (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} L &= a_2 XY + b_1 XZ - L_0 Z^2, \\ M &= -a_2 Y^2 + b_4 YZ + M_0 Z^2, \\ N &= a_0 XY + \frac{a_2}{3} YZ + N_0 Z^2. \end{aligned}$$

Uma vez que $F = 0$ é uma curva algébrica projetiva invariante para o sistema acima com cofator zero, a função

$$M = \sum_{i+j+k=5} M_{ijk} X^i Y^j Z^k := \frac{\partial F}{\partial X} L + \frac{\partial F}{\partial Y} M + \frac{\partial F}{\partial Z} N$$

deverá ser identicamente nula. Desta maneira obtemos:

$$\begin{aligned} M_{005} &= -L_0 \lambda_2 + \lambda_3 M_0 + 4\lambda_4 N_0, \\ M_{014} &= \frac{1}{3}(-3L_0 \lambda_1 + 3b_4 \lambda_3 + 4a_2 \lambda_4 + 9\lambda_3 N_0), \\ M_{104} &= b_1 \lambda_2 + \lambda_1 M_0 + 3\lambda_2 N_0, \\ M_{113} &= b_1 \lambda_1 + b_4 \lambda_1 + 2a_2 \lambda_2 + 4a_0 \lambda_4 + 2\lambda_1 N_0, \\ M_{122} &= \frac{1}{3}(-6L_0 + 2a_2 \lambda_1 + 9a_0 \lambda_3), \\ M_{212} &= 3a_0 \lambda_2 + 2M_0, \\ M_{221} &= 2(b_1 + b_4 + a_0 \lambda_1). \end{aligned}$$

As expressões acima são zero de maneira não trivial se

$$\det \left(\frac{\partial [M_{005}, M_{014}, M_{104}, M_{113}, M_{122}, M_{212}, M_{221}]}{\partial [a_2, b_1, L_0, b_4, M_0, a_0, N_0]} \right) = \frac{32}{3} \lambda_2 \Omega = 0,$$

onde $\Omega = \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_3 = 27\lambda_2^2 \lambda_3^2 - \lambda_1^4 \lambda_4 - 36\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + 8\lambda_1^2 \lambda_4^2 - 16\lambda_4^3$.

Quando $\lambda_2 = 0$, p_1 é um tacnó; e quando $\Omega = 0$ a curva $F = 0$ possui outro ponto múltiplo, contrariando a hipótese.

Portanto, não existem ciclos limite para este caso.

3.6.3.4 p_1 é um cúspide e p_2 é um tacnó

Neste caso os pontos duplos são reais e suas tangentes também são reais. A cônica que contém p_1, p_2 , um ponto q na região limitada pelo oval e é tangente a p_1 e p_2 , corta $F = 0$ em nove pontos, isto não é possível pois a curva é irredutível.

3.6.3.5 p_1 é um cúspide e p_2 é um cúspide rhampoid

Os argumentos acima podem ser usados novamente e assim este caso não é possível.

3.6.4 A curva $F = 0$ possui um ponto duplo p

Levando em conta que $h' \leq 3$, pois caso contrário pelo Teorema 3.2 existiria uma integral primeira racional, segue da equação (3.2) que $h \geq 4$. Vamos distinguir dois casos.

3.6.4.1 p é um cúspide rhampoid

O ponto p é real, e uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$, f_4 não pode ter três divisores diferentes, caso contrário $h'_2 = 0$ pelo Lema 3.8 iii). Então, $h'_1 \geq 3$ por (3.11), o que não é possível pois o sistema é quadrático. Vamos distinguir duas possibilidades importantes.

3.6.4.1.1 p um ponto finito

Seja p um ponto finito no plano projetivo. Podemos considerar $p = (0 : 0 : 1)$ um cúspide rhampoid. Se y é a tangente à curva $F = 0$ em p , então temos

$$f = y + yf_2 + f_4,$$

pois $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$, onde y divide $f_4 - \frac{1}{4}f_2^2$. E uma vez que f_4 não pode ter três divisores, este pode tomar as seguintes formas: $f_4 = d_1^2 d_2^2$, $f_4 = d_1^3 d_2$ ou $f_4 = kd_1^4$.

3.6.4.1.1.1 $f_4 = d_1^2 d_2^2$

Uma vez p é o único ponto múltiplo da curva, não existem pontos múltiplos no infinito. Por outro lado, $h' \geq 3$ e f_4 possui dois divisores com ambas multiplicidades estritamente maiores que um. Assim, pelo Lema 3.10, o sistema possui uma integral primeira racional.

3.6.4.1.1.2 $f_4 = d_1^3 d_2$

Sem perda de generalidade podemos assumir que a curva é

$$f = y^2 + y(ax^2 + bxy + cy^2) + x^3(Ax + By).$$

Uma vez que y divide $f_4 - \frac{1}{4}f_2^2$ segue que $A = \frac{a^2}{4}$. Podemos considerar $c \neq 0$, caso contrário existiria um ponto duplo no infinito, $a \neq 0$ pois a curva deve ser irredutível e $B \neq 0$. O caso $B = 0$ será estudado em 3.6.4.1.1.3.

Fazendo uma mudança de variáveis $x = X/(Bc)^{1/3}$, $y = Y/c$ podemos considerar

$$f = y^2 + y(ax^2 + bxy + y^2) + x^3 \left(\frac{a^2}{4}x + y \right).$$

Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante para (3.16) com cofator $mx + ny + q$, obtemos que $a_{00} = b_{00} = 0$, pois p é uma singularidade. Definimos

$$M = \sum_{i+j=0}^5 M_{ij}x^i y^j := \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - (mx + ny + q)f,$$

que deverá ser identicamente nula.

Para grau cinco temos:

$$\begin{aligned} M_{50} &= \frac{1}{4}(4a^2a_{20} + 4b_{20} - a^2m), \\ M_{41} &= \frac{1}{4}(4a^2a_{11} + 12a_{20} + 4b_{11} - 4m - a^2n), \\ M_{32} &= a^2a_{02} + 3a_{11} + b_{02} - n, \\ M_{23} &= 3a_{02}, \\ M_{14} &= M_{05} = 0, \end{aligned}$$

de onde temos $a_{02} = 0$, $n = 3a_{11} + b_{02}$, $m = \frac{1}{4}(a^2a_{11} + 12a_{20} - a^2b_{02} + 4b_{11})$, $b_{20} = \frac{1}{16}a^2(a^2a_{11} - 4a_{20} - a^2b_{02} + 4b_{11})$.

Para grau quatro temos:

$$\begin{aligned} M_{40} &= \frac{1}{16}(16a^2a_{10} + a^5a_{11} - 4a^3a_{20} - a^5b_{02} + 16b_{10} + 4a^3b_{11} - 4a^2q), \\ M_{31} &= \frac{1}{8}(8a^2a_{01} + 24a_{10} - 2a^3a_{11} - aa_{20} + a^4a_{11}b - 4a^2a_{20}b + 8b_{01} \\ &\quad + 2a^3b_{02} - a^4bb_{02} + 4a^2bb_{11} - 8q), \\ M_{22} &= \frac{1}{16}(48a_{01} - 16aa_{11} + 3a^4a_{11} - 12a^2a_{20} - 4a^2a_{11}b - 32a_{20}b - 3a^4b_{02} \\ &\quad + 4a^2bb_{02} + 12a^2b_{11} + 16bb_{11}), \\ M_{13} &= \frac{1}{4}(-a^2a_{11} - 12a_{20} - 8a_{11}b + a^2b_{02} + 4bb_{02} + 8b_{11}), \\ M_{04} &= -3a_{11} + 2b_{02}. \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{72}(216a_{10} + 30a^3a_{11} + 3a^6a_{11} + 12aa_{11}b - 10a^4a_{11}b - 2a^2a_{11}b^2 + 72b_{01} \\ &\quad - 48ab_{11} - 6a^4b_{11} + 20a^2bb_{11}), \\ b_{02} &= \frac{3}{2}a_{11}, \\ a_{20} &= \frac{1}{24}(a^2a_{11} - 4a_{11}b + 16b_{11}), \\ a_{01} &= \frac{1}{72}(24aa_{11} + 3a^4a_{11} - 4a^2a_{11}b - 8a_{11}b^2 - 6a^2b_{11} + 8bb_{11}), \\ b_{10} &= \frac{1}{288}a^2(-72a_{10} + 42a^3a_{11} + 3a^6a_{11} - 10a^4a_{11}b - 2a^2a_{11}b^2 + 72b_{01} - 72ab_{11}, \\ &\quad - 6a^4b_{11} + 20a^2bb_{11}). \end{aligned}$$

Para grau três temos:

$$\begin{aligned}
M_{30} &= \frac{1}{288}a^3(-72a_{10} + 42a^3a_{11} + 3a^6a_{11} - 10a^4a_{11}b - 2a^2a_{11}b^2 + 72b_{01} \\
&\quad - 72ab_{11} - 6a^4b_{11} + 20a^2bb_{11}), \\
M_{21} &= \frac{1}{144}a(-144a_{10} - 72a^3a_{11} - 6a^6a_{11} - 72aa_{10}b - 12aa_{11}b + 62a^4a_{11}b \\
&\quad + 3a^7a_{11}b + 4a^2a_{11}b^2 - 10a^5a_{11}b^2 - 2a^3a_{11}b^3 + 72abb_{01} + 120ab_{11} \\
&\quad + 12a^4b_{11} - 112a^2bb_{11} - 6a^5bb_{11} + 20a^3b^2b_{11}), \\
M_{12} &= \frac{1}{288}(-216a^2a_{10} + 192a^2a_{11} + 150a^5a_{11} + 9a^8a_{11} - 576a_{10}b \\
&\quad + 144a_{11}b - 152a^3a_{11}b - 42a^6a_{11}b - 112aa_{11}b^2 + 34a^4a_{11}b^2 \\
&\quad + 8a^2a_{11}b^3 + 216a^2b_{01} + 288bb_{01} - 288b_{11} - 264a^3b_{11} - 18a^6b_{11} \\
&\quad + 256abb_{11} + 84a^4bb_{11} - 80a^2b^2b_{11}), \\
M_{03} &= \frac{1}{72}(-216a_{10} - 108a_{11} - 30a^3a_{11} - 3a^6a_{11} + 12aa_{11}b + 13a^4a_{11}b - 2a^2a_{11}b^2 \\
&\quad - 8a_{11}b^3 + 144b_{01} + 48ab_{11} + 6a^4b_{11} - 26a^2bb_{11} + 8b^2b_{11}).
\end{aligned}$$

Considerando o sistema de equações dado por $M_{30} = M_{21} = M_{12} = M_{03} = 0$, com incógnitas a_{10}, a_{11}, b_{01} e b_{11} , vamos buscar uma solução não trivial pois para o caso trivial teríamos $P = Q = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
\det \left(\frac{\partial[M_{30}, M_{21}, M_{12}, M_{03}]}{\partial[a_{10}, a_{11}, b_{01}, b_{11}]} \right) &= \frac{1}{576}a^4(-2 + ab)(-1 + ab)(108 + 8a^3 \\
&\quad - 36ab - a^2b^2 + 4b^3) = 0.
\end{aligned}$$

Se $-2 + ab = 0$ ou $108 + 8a^3 - 36ab - a^2b^2 + 4b^3 = 0$, então existiria outro múltiplo, o que contradiria a hipótese. Assim, uma vez que $a \neq 0$, segue que $-1 + ab = 0$. Neste caso se tomarmos $b = \frac{1}{a}$, então obtemos o sistema c) do Teorema 3.4 fazendo a mudança de coordenadas $x = aX$ com o parâmetro $\frac{a^3}{2}$.

O ciclo limite neste sistema surge a partir da bifurcação de Hopf na singularidade $((9 - \sqrt{17})/8, -(5 + 3\sqrt{17})/8)$ quando $a = (-71 + 17\sqrt{17})/32$. Assim, quando a aumenta o ciclo limite algébrico aumenta sua amplitude e termina possuindo tamanho infinito sobre a curva $x^2(1 + x + y) = 0$ quando $a = 0$.

3.6.4.1.1.3 $f_4 = kd_1^4$

Fazendo uma conveniente mudança de variáveis linear podemos considerar

$$f = y^2 + y(ax^2 + bxy + cy^2) + kx^4.$$

Uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$, y divide $f_4 - \frac{1}{4}f_2^2$, e então $k = \frac{1}{4}a^2$.

Fazendo a mudança de variáveis $x = X/A$, $y = Y/B$, com $A = \frac{-b}{2}$ e $B = \frac{3b^2}{2(2b^2 - 3ac)}$, obtemos o sistema de Filipstov, caso b) do Teorema 3.4, com fator de proporcionalidade $\frac{27b^6c^2}{2(2b^2 - 3ac)}$, onde o parâmetro é $\frac{3ac}{2b^2 - 3ac}$.

O ciclo limite neste sistema surge a partir da bifurcação de Hopf na singularidade $(4, 48/13)$ quando $a = 3/13$. Assim, quando a diminui, o ciclo limite algébrico aumenta sua amplitude e termina possuindo tamanho infinito sobre a curva $y^2(3 - 6x + 4y) = 0$ quando $a = 0$.

Se $2b^2 - 3ac = 0$, obtemos $f = 24x^4 + 24x^2y + 6y^2 + 6xy^2 + y^3$, a qual não possui nenhum oval.

3.6.4.1.2 p um ponto infinito

Seja p um ponto infinito no plano projetivo. Podemos considerar $p = (0 : 1 : 0)$ o ponto múltiplo. Então $f = f_4 + xg_2 + f_2 + f_1 + f_0$, onde f_4 não pode ter três diferentes divisores e após mudança de variáveis lineares f_4 pode ser escrito em uma das seguintes formas: $f_4 = x^2y^2$, $f_4 = x^3y$, $f_4 = \alpha x^4$.

3.6.4.1.2.1 $f_4 = x^2y^2$

Neste caso

$$f = x^2y^2 + x(ax^2 + bxy + cy^2) + m_{20}x^2 + m_{11}xy + m_{02}y^2 + m_{10}x + m_{01}y + m_{00}.$$

Note que podemos considerar $b = c = 0$ fazendo a translação $x = X - \frac{c}{2}$, $y = Y - \frac{b}{2}$. Uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 4$ e a tangente a $f = 0$ em p é x , obtemos $m_{02} = m_{01} = 0$ e $m_{00} = \frac{m_{11}^2}{4}$, e então

$$f = \left(\frac{m_{11}}{2} + xy \right)^2 + m_{10}x + m_{20}x^2 + ax^3.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = m_{11}X$ podemos tomar $m_{11} = 1$, pois m_{11} não pode ser zero, caso contrário a curva seria redutível. Uma vez que os ramos de $f = 0$ são definidos por $\frac{-1}{2x} \pm \sqrt{-x(m_{10} + m_{20}x + ax^2)}$, a não pode ser zero, caso contrário a curva não teria ovais.

Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante para o sistema (3.16), com cofator $mx + ny + q$, definimos

$$M = \sum_{i+j=0}^5 M_{ij}x^i y^j := \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - (mx + ny + q)f$$

e zeramos os coeficientes M_{ij} .

Os coeficientes dos termos de grau 5 são:

$$\begin{aligned} M_{50} &= 0, \\ M_{41} &= 2b_{20}, \\ M_{32} &= 2a_{20} + 2b_{11} - m, \\ M_{23} &= 2a_{11} + 2b_{02} - n, \\ M_{14} &= 2a_{02}, \\ M_{05} &= 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $b_{20} = a_{02} = 0$, $m = 2(a_{20} + b_{11})$, $n = 2(a_{11} + b_{02})$.

Para os coeficientes dos termos de grau 4 temos:

$$\begin{aligned} M_{40} &= a(a_{20} - 2b_{11}), \\ M_{31} &= aa_{11} - 2ab_{02} + 2b_{10}, \\ M_{22} &= 2a_{10} + 2b_{01} - q, \\ M_{13} &= 2a_{01}, \\ M_{04} &= 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $a_{20} = 2b_{11}$, $b_{10} = \frac{1}{2}(2ab_{02} - aa_{11})$, $q = 2(a_{10} + b_{01})$, $a_{01} = 0$.

Para grau 3 temos:

$$\begin{aligned} M_{30} &= aa_{10} - 2ab_{01} - 2b_{11}m_{20}, \\ M_{21} &= 2b_{00} - 3b_{11} - 2b_{02}m_{20}, \\ M_{12} &= 2a_{00} - a_{11} - b_{02}, \\ M_{03} &= 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $a_{10} = \frac{2}{a}(ab_{01} + b_{11}m_{20})$, $b_{00} = \frac{1}{2}(3b_{11} + 2b_{02}m_{20})$, $a_{00} = \frac{1}{2}(a_{11} + b_{02})$.

O restante dos coeficientes de M são:

$$\begin{aligned} M_{20} &= \frac{1}{2}(-8b_{11}m_{10} + 2aa_{11} + 5ab_{02} - 4b_{01}m_{20}), \\ M_{11} &= \frac{1}{a}(aa_{11}m_{10} + 2b_{02}m_{10} + 3ab_{01} + 2b_{11}m_{20}), \\ M_{02} &= 0, \\ M_{10} &= \frac{1}{a}(-4ab_{01}m_{10} - 2b_{11}m_{10}m_{20} + aa_{11}m_{20} + 2ab_{02}m_{20}), \\ M_{01} &= 0, \\ M_{00} &= \frac{1}{2a}(aa_{11}m_{10} + ab_{02}m_{10} - 3ab_{01} - 2b_{11}m_{20}). \end{aligned}$$

A fim de obter uma solução não trivial devemos ter

$$\det \left(\frac{\partial[M_{20}, M_{11}, M_{10}, M_{00}]}{\partial[a_{11}, b_{01}, b_{11}, b_{02}]} \right) = \frac{2}{a}m_{10}(m_{10}^2 + m_{20})(4am_{20} - m_{20}^2) = 0.$$

- Se $m_{10} = 0$ os ramos de $f = 0$ são definidos por $y = \frac{-1}{2x} \pm \sqrt{-m_{20} - ax}$, que não definem nenhum oval.
- Se $4am_{10} - m_{20}^2 = 0$, os ramos de $f = 0$ são definidos por $y = \frac{-1}{2x} \pm \frac{m_{20} + 2ax}{2\sqrt{-ax}}$, que não definem nenhum oval.
- Se $m_{10}^2 + m_{20} = 0$ e $m_{10} \neq 0$, obtemos $m_{20} = -m_{10}^2$. Então de $M_{20} = 0$ obtemos $b_{02} = \frac{2}{5a}(-2b_{01}m_{10}^2 + 4b_{11}m_{10} - aa_{11})$. Portanto, de $M_{11} = 0$, teremos $b_{11} = \frac{1}{6m_{10}^2}8b_{01}m_{10}^3 - aa_{11}m_{10} - 15ab_{01}$. Agora, uma vez que $M_{10} = -b_{01}m_{10}$ e $m_{10} \neq 0$ segue que $b_{01} = 0$.

Tomando $a = km_{10}^3$ e fazendo a mudança de variáveis $x = X/m_{10}$, $y = m_{10}Y$, (3.16) toma a forma

$$\dot{x} = \frac{m_{10}}{6}(1 + 2x - 2kx^2 + 6xy), \quad \dot{y} = \frac{m_{10}}{12}(8 - 3k - 14kx - 2kxy - 8y^2),$$

e a curva se torna $f = \frac{1}{4} + x - x^2 + kx^3 + xy + x^2y^2 = 0$ com cofator $\frac{m_{10}}{3}(2 - 3kx + 2y)$. Este caso corresponde ao sistema d) do Teorema 3.4.

O ciclo limite surge a partir da bifurcação de Hopf na singularidade $(2, -1/4)$ quando $k = 1/4$. Assim, quando k diminui o ciclo limite algébrico aumenta sua amplitude e termina possuindo tamanho infinito sobre a curva $1/4 + x - x^2 + xy + x^2y^2 = 0$ quando $k = 0$.

3.6.4.1.2.2 $f_4 = x^3y$

Neste caso

$$f = x^3y + x(ax^2 + bxy + cy^2) + m_{20}x^2 + m_{11}xy + m_{02}y^2 + m_{10}x + m_{01}y + m_{00}.$$

Se considerarmos a projetivização desta curva vemos que a tangente da curva no ponto p é Z , e os termos de grau 3 são $X^3 + bX^2Z + m_{20}X^2Z + m_{01}Z^3$. Uma vez que p é um cúspide rhampoid, este caso não pode ocorrer pois Z não divide os termos de ordem três.

3.6.4.1.2.3 $f_4 = \alpha x^4$

Neste caso

$$f = \alpha x^4 + x(ax^2 + bxy + cy^2) + m_{20}x^2 + m_{11}xy + m_{02}y^2 + m_{10}x + m_{01}y + m_{00}.$$

Uma vez que p é um cúspide rhampoid e a tangente da curva neste ponto é Z , obtemos $c = 0$, $m_{02} = 1$ e $\alpha = \frac{b^2}{4} \neq 0$. A mudança de variáveis $x = X + A$, $y = Y + kX + B$, com $A = \frac{-1}{b^2}(a + bk)$, $B = \frac{-1}{2b^3}(a^2 + 2abk + b^2k^2 + b^3m_{01} - abm_{11} - b^2km_{11})$ e $k = \frac{-(-4a^2 - b^3m_{01} + abm_{11} + 2b^2m_{20})}{3b(-2a + bm_{11})}$ zera os coeficientes de x^3 , y e x^2 . Note que k está bem definido pois o denominador nunca zera. Caso contrário, se $-2a + bm_{11} = 0$, então $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) = 5$, o qual será estudado na próxima seção. Assim podemos considerar, fazendo a mudança da variável x , que $m_{11} = 1$, e então $f = \frac{b^2}{4}x^4 + bx^2y + y^2 + xy + m_{10}x + m_{00}$. Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante para (3.16) com cofator $mx + ny + q$, definimos

$$M = \sum_{i+j=0}^5 M_{ij}x^i y^j := \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - (mx + ny + q)f,$$

o qual deverá ser identicamente nulo.

Para grau 5 temos:

$$\begin{aligned} M_{50} &= \frac{b^2}{4}(4a_{20} - m), \\ M_{41} &= \frac{b^2}{4}(4a_{11} - n), \\ M_{32} &= a_{02}b^2, \\ M_{23} &= M_{14} = M_{05} = 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $m = 4a_{20}$, $n = 4a_{11}$ e $a_{02} = 0$, uma vez que $b \neq 0$.

Para grau 4 temos:

$$\begin{aligned} M_{40} &= \frac{b}{4}(4a_{10}b + 4b_{20} - bp), \\ M_{31} &= b(-2a_{20} + a_{01}b + b_{11}), \\ M_{22} &= b(-2a_{11} + b_{02}), \\ M_{13} &= M_{04} = 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $b_{20} = \frac{b}{4}(q - 4a_{10})$, $b_{11} = 2a_{20} - a_{01}b$ e $b_{02} = 2a_{11}$.

Para os coeficientes dos termos de grau 3 temos:

$$\begin{aligned} M_{30} &= \frac{b}{4}(-4a_{10} + 4a_{00}b + 4b_{10} + q), \\ M_{21} &= \frac{1}{2}(-2a_{20} - 2a_{01}b + 2bb_{01} - bq), \\ M_{12} &= -a_{11}, \\ M_{03} &= 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos $q = 4(a_{10} - a_{00}b - b_{10})$, $a_{11} = 0$ e $a_{20} = b(-a_{01} - 2a_{10} + 2a_{00}b + b_{01} + 2b_{10})$.

Para grau 2 obtemos:

$$\begin{aligned} M_{20} &= bb_{00} + b_{10} + 3a_{01}bm_{10} + 6a_{10}bm_{10} - 6a_{00}b^2m_{10} - 3bb_{01}m_{10} - 6bb_{10}m_{10}, \\ M_{11} &= -3a_{10} + 6a_{00}b + b_{01} + 6b_{10}, \\ M_{02} &= a_{01} - 4a_{10} + 4a_{00}b + 2b_{01} + 4b_{10}, \end{aligned}$$

de onde obtemos $a_{01} = 2(-a_{10} + 4a_{00}b + 4b_{10})$, $b_{01} = 3(a_{10} - 2a_{00}b - 2b_{10})$ e $b_{00} = \frac{1}{b}(-b_{10} + 9a_{10}bm_{10} - 36a_{00}b^2m_{10} - 36bb_{10}m_{10})$.

Para os demais graus, os coeficientes a zerar são:

$$\begin{aligned} M_{10} &= \frac{1}{b}(-b_{10} - 12a_{10}b^2m_{00} + 48a_{00}b^3m_{00} + 48b^2b_{10}m_{00} + 6a_{10}bm_{10} - 32a_{00}b^2m_{10} - 32bb_{10}m_{10}), \\ M_{01} &= \frac{1}{b}(a_{00}b - 2b_{10} + 16a_{10}bm_{10} - 64a_{00}b^2m_{10} - 64bb_{10}m_{10}), \\ M_{00} &= -4a_{10}m_{00} + 4a_{00}bm_{00} + 4b_{10}m_{00} + a_{00}m_{10}. \end{aligned}$$

Podemos obter uma solução não trivial para a_{00} , b_{10} e a_{10} de $M_{10} = M_{01} = M_{00}$ se

$$\det \left(\frac{\partial [M_{10}, M_{01}, M_{00}]}{a_{00}, b_{10}, a_{10}} \right) = \frac{4}{b}(-m_{00} + 108b^2m_{00}^2 - 36bm_{00}m_{10} - m_{10}^2 - 32bm_{10}^3) = 0.$$

O anulamento deste determinante é uma condição para a existência de outro ponto múltiplo, também. Por hipótese, isto não pode ocorrer.

3.6.4.2 p é um ponto duplo com $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 5$

Os únicos pontos reais são p e os pontos que estão no oval. Se r é outro ponto real, a cônica que contém r , um ponto q na região limitada pelo oval e satisfaz o Lema 2.21 iv), corta a quártica com índice maior ou igual a seis em p , índice um em r , e corta o oval em dois pontos, o que não é possível pelo Teorema de Bézout se a curva é irredutível.

3.6.4.2.1 p é um ponto finito

Seja p um ponto finito. Podemos considerar $p = (0 : 0 : 1)$ e a tangente à curva em p é x . Então, pela Proposição 2.20, em coordenadas locais $f = x^2 + xf_2 + f_4$ e x^2 divide $f_4 - \frac{1}{4}f_2^2$.

Uma vez que não há pontos reais de $f = 0$ no infinito temos $f_4 = \lambda D^2$, onde D é um polinômio quadrático irredutível sobre o anel de polinômios reais. Através de uma mudança de coordenadas linear podemos tomar $D = x^2 + y^2$ e $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Mais ainda, uma vez que x^2 divide $f_4 - \frac{1}{4}f_2^2$, segue que $\lambda D^2 - \frac{1}{4}f_2^2 = Ax^2$, para algum polinômio A de grau 2. Em particular, $\lambda \neq -1$, caso contrário esta decomposição não seria possível.

Uma vez que $I_p(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}) \geq 5$ segue que x^2 divide $D^2 - \frac{1}{4}f_2^2 = (D - \frac{1}{2}f_2)(D + \frac{1}{2}f_2)$. Se x divide ambos os fatores da última expressão, então x divide D , o que não é possível. Assim, as possibilidades são $f_2 = \pm 2D + 2cx^2$, para alguma constante c . Então a curva pode ser escrita como $f = (x \pm D^2)^2 + 2cx^3$. Quando o menos aparece, mudamos o sinal de x e c e portanto, a curva é

$$f = (x + x^2 + y^2)^2 + cx^3.$$

Se c é positivo, qualquer círculo $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ corta a curva $f = 0$ em $p(x) = (x + \varepsilon)^2 + 2cx^3$. Note que $p(0) = \varepsilon^4$ e $p(-\varepsilon^2) = -2c\varepsilon^6$, de onde existe uma raiz real de $p(x) = 0$ em $(-\varepsilon^2, 0)$. Portanto, existem pontos de $f = 0$ em qualquer vizinhança da origem, isto é, a origem não é isolada. Uma vez que os únicos pontos reais de $f = 0$ são p e os pontos do oval, então p deve pertencer ao oval, que não é um ciclo limite pois o ponto é uma singularidade.

Suponha que c é negativo. Neste caso

$$f = (x + x^2 + y^2)^2 - a^2x^3.$$

Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante para (3.16) com cofator $mx + ny + q$, teremos

$$M = \sum_{i+j=0}^5 M_{ij}x^i y^j := \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - (mx + ny + q)f,$$

o qual deverá ser identicamente nulo.

Para os coeficientes de grau 5 teremos:

$$\begin{aligned} M_{50} &= 4a_{20} - m, \\ M_{41} &= 4a_{11} + 4b_{20} - n, \\ M_{32} &= 2(2a_{02} + 2a_{20} + 2b_{11} - m), \\ M_{23} &= 2(2a_{11} + 2b_{02} + 2b_{20} - n), \\ M_{14} &= 4a_{02} + 4b_{11} - m, \\ M_{05} &= 4b_{02} - n. \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos $m = 4(a_{02} + b_{11})$, $n = 4(a_{11} + b_{20})$, $b_{02} = a_{11} + b_{20}$ e $a_{20} = a_{02} + b_{11}$.

Para os coeficientes de grau 4 teremos:

$$\begin{aligned} M_{40} &= -2a_{02} + a^2a_{02} + 4a_{10} - 2b_{11} + a^2b_{11} - q, \\ M_{31} &= 4a_{01} - 2a_{11} + a^2a_{11} + 4b_{10} - 4b_{20} + 4a^2b_{20}, \\ M_{22} &= -3a^2a_{02} + 4a_{10} + 4b_{01} - 2b_{11} - 2q, \\ M_{13} &= 2(2a_{01} - a_{11} + 2b_{10} - 2b_{20}), \\ M_{04} &= 2(2a_{02} + 4b_{01} - q). \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos $p = 2(a_{02} + 2b_{01})$, $a_{11} = 2(a_{01} + b_{10} - b_{20})$, $b_{11} = -4a_{02}$, $a_{10} = \frac{1}{4}(3a^2a_{02} + 4b_{01} - 4a_{02})$ e $b_{20} = -(a_{01} + b_{10})$.

Para os coeficientes de grau 3 teremos:

$$\begin{aligned} M_{30} &= \frac{1}{4}(-16a_{02} + 38a^2a_{02} - 9a^4a_{02} - 8b_{01} + 4a^2b_{01} + 16a_{00}), \\ M_{21} &= -3a^2a_{01} + 2a_{01} + 4b_{00}, \\ M_{12} &= \frac{1}{2}(-8a_{02} + 3a^2a_{02} - 4b_{01} + 8a_{00}), \\ M_{03} &= 2(a_{01} + 2b_{00}). \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos que $a_{01} = -2b_{00} = 0$, de onde concluímos que $b_{10} = 0$. Para os coeficientes de grau 1 temos $M_{10} = 2a_{00}$ que nos leva a concluir que $a_{00} = 0$. Daí teremos $b_{01} = \frac{1}{4}(-8 + 3a^2)a_{02}$, de onde obtemos $M_{30} = \frac{3}{2}(2 - a)a^2(2 + a)a_{02}$.

Se $a_{02} = 0$, teremos $P = Q = 0$. Se $a = 2$ ou $a = -2$, fazendo uma reescala no tempo, o sistema se torna:

$$\dot{x} = 3x - 3x^2 + y^2, \quad \dot{y} = (1 - 4x)y.$$

É fácil verificar que o ponto $(1,0)$ é uma singularidade, o qual está na curva $f = 0$ e deverá estar no oval pois os únicos pontos reais são os pontos do oval e p . Portanto, não há ciclos limite neste caso.

3.6.4.2.2 p um ponto infinito

Seja p um ponto infinito. Podemos tomar $p = (1 : 0 : 0)$ e considerar que a tangente à curva $F = 0$ em p é Z . Usando o argumento utilizado em **3.6.4.2.1** segue que localmente a curva é dada por $g = (z + z^2 + y^2)^2 + cz^3$. Assim, a curva projetiva global é $F = (XZ + Z^2 + Y^2)^2 + cXZ^3$, e no plano afim é

$$f = (1 + x + y^2)^2 + cx.$$

Se c é positivo, usando o argumento acima segue novamente que o ponto múltiplo não pode ser isolado. Assim, p deve pertencer ao oval pois os únicos pontos reais são p e os pontos do oval. Concluímos que o oval não pode ser um ciclo limite. Suponha que c é negativo. Neste caso podemos escrever

$$f = (1 + x + y^2)^2 - a^2x.$$

Os ramos de $f = 0$ são dados por

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-2 + a^2 - 2y^2 \pm a\sqrt{-4 + a^2 - 4y^2}).$$

Assim, para existir um oval, a deverá ser diferente de zero e o polinômio dentro da raiz deve ter duas raízes reais diferentes. Em particular, $a \neq 2$ e $a \neq -2$.

Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $mx + ny + q$, teremos

$$M = \sum_{i+j=0}^5 M_{ij}x^i y^j := \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - (mx + ny + q)f,$$

o qual deverá ser identicamente nulo.

Para os coeficientes de grau 5 temos:

$$\begin{aligned} M_{50} &= M_{41} = M_{32} = 0, \\ M_{23} &= 4b_{20}, \\ M_{14} &= 4b_{11} - m, \\ M_{05} &= 4b_{02} - n, \end{aligned}$$

desta maneira obtemos $b_{20} = 0$, $m = 4b_{11}$ e $n = 4b_{02}$.

Para grau 4 temos:

$$\begin{aligned}M_{40} &= M_{31} = 0, \\M_{22} &= 2(a_{20} - 2b_{11}), \\M_{13} &= 2(a_{11} - 2b_{02} + 2b_{10}), \\M_{04} &= 2a_{02} + 4b_{01} - q,\end{aligned}$$

desta maneira obtemos $a_{20} = 2b_{11}$, $a_{11} = 2b_{02} - 2b_{10}$ e $p = 2a_{02} + 4b_{01}$.

Para grau 3 temos:

$$\begin{aligned}M_{30} &= M_{21} = 0, \\M_{12} &= -2(a_{02} - a_{10} + 2b_{01} + 2b_{11}), \\M_{03} &= 2(a_{01} + 2b_{00} - 2b_{02}), \\M_{13} &= M_{04} = 0,\end{aligned}$$

de onde obtemos $a_{02} = a_{10} - 2b_{01} - 2b_{11}$ e $a_{01} = -2b_{00} + 2b_{02}$.

Para grau 2 os coeficientes são:

$$\begin{aligned}M_{20} &= 2a^2b_{11}, \\M_{11} &= 2a^2(b_{02} + b_{10}), \\M_{02} &= 2a_{00} - 2a_{10} - a^2a_{10} + 2a^2b_{01} + 4b_{11} + 2a^2b_{11}.\end{aligned}$$

Assim, $b_{11} = 0$, $b_{02} = -b_{10}$ e $a_{00} = \frac{1}{2}(2a_{10} + a^2a_{10} - 2a^2b_{01})$.

Para grau 1 temos:

$$\begin{aligned}M_{10} &= 2a^2(a_{10} - b_{01}), \\M_{01} &= 2a^2(b_{00} + b_{10}),\end{aligned}$$

desta maneira obtemos $a_{10} = b_{01}$ e $b_{00} = -b_{10}$.

Finalmente, o coeficiente de grau 0 é $M_{00} = \frac{1}{2}(-2 + a)a^2(2 + a)b_{01}$, uma vez que $a \neq \pm 2$ segue que $b_{01} = 0$. Neste caso temos $P = Q = 0$. Assim, concluímos que a curva não é invariante para o fluxo definido pelo sistema quadrático. Portanto, não existem ciclos limite para este caso.

Capítulo 4

Alguns resultados acerca de sistemas cúbicos

Neste capítulo apresentaremos sistemas quadráticos que possuem ciclos limite algébricos de grau 5 e 6, em seguida provaremos que todos os sistemas quadráticos obtidos possuem um único ciclo limite. Posteriormente aplicando transformações de Poincaré convenientes através dos sistemas quadráticos obtidos produziremos sistemas cúbicos, e mostraremos que é possível construir um sistema cúbico com uma curva algébrica invariante de grau 3. Finalmente exibiremos um sistema cúbico com dois ciclos limite algébricos.

4.1 Ciclos limite algébricos de grau 5 e 6 para sistemas quadráticos

Através do trabalho de Christopher, Llibre e Swirszcz em [8], nesta seção apresentaremos ciclos limite algébricos de grau 5 e 6 para sistemas quadráticos, para isto introduziremos uma técnica na qual a partir de um conhecido sistema quadrático com ciclo limite algébrico aplicamos uma mudança de variáveis que preserva o grau do sistema, mas aumenta o grau da curva algébrica invariante.

Para obtermos isto precisamos também mudar a variável independente ou o tempo do sistema. Para este propósito aplicamos a seguinte transformação birracional

$$(x, y) \rightarrow (x/y^2, 1/y), \quad (4.1)$$

depois de uma translação adequada. Se o sistema tem a forma

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y + 2ex^2 + bxy + cy^2, \quad \dot{y} = \gamma x + \delta y + exy + fy^2, \quad (4.2)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito ao tempo t , então é fácil ver que aplicando a transformação $u = x/y^2$, $v = 1/y$ e fazendo a mudança de variável temporal $dt = vds$, o sistema acima ainda permanecerá na classe dos sistemas quadráticos, obtendo assim o sistema

$$x' = -ev - fu - \gamma uv - \delta v^2, \quad y' = (b - 2f)u + cv - 2\gamma u^2 + (\alpha - 2\delta)uv + \beta v^2,$$

onde o apóstrofo denota a derivada com respeito ao tempo s .

Como um simples exemplo, o sistema de Yablonskii do Teorema 3.4 a) com um ciclo limite algébrico de grau 4 pode ser obtido a partir do exemplo de ciclo limite algébrico de grau 2 devido a Ch'in Yuan-shün.

Agora aplicaremos a transformação ao sistema d) do Teorema 3.4. Primeiramente fazendo a translação de uma das singularidades do sistema (3.9) para a origem e então aplicando a transformação (4.1) obtemos um novo sistema com a forma (4.2).

Teorema 4.1. *O sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 28x - \frac{12}{\alpha + 4}y^2 - 2(\alpha^2 - 16)(12 + \alpha)x^2 + 6(3\alpha - 4)xy, \\ \dot{y} &= (32 - \alpha^2)x + 8y - (\alpha + 12)(\alpha^2 - 16)xy + (10\alpha - 24)y^2,\end{aligned}\tag{4.3}$$

possui uma curva algébrica invariante irredutível de grau 5 dada por:

$$\begin{aligned}x^2 + (16 - \alpha^2)x^3 + (\alpha - 2)x^2y + \frac{1}{(4 + \alpha)^2}y^4 - \frac{6}{(4 + \alpha)^2}y^5 - \frac{2}{4 + \alpha}xy^2 \\ + \frac{(\alpha - 4)(12 + \alpha)}{4}x^2y^2 + \frac{(12 + \alpha)}{4 + \alpha}xy^4 + \frac{8 - \alpha}{4 + \alpha}xy^3 = 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Para $\alpha \in (3\sqrt{7}/2, 4)$ a curva (4.4) possui um ciclo limite algébrico de grau 5.

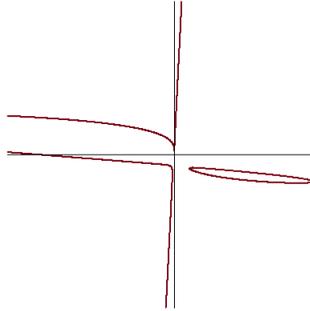


Figura 4.1: curva invariante do sistema do Teorema 4.1

Demonstração. Tome $a = 16 - \alpha^2$. Fazendo a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \left(\frac{u}{v^2} - \frac{1}{\alpha + 4}, \frac{1}{v} + \frac{\alpha - 2}{2} \right),\tag{4.5}$$

multiplicando por v , e substituindo novamente (u, v) por (x, y) o sistema (3.9) se torna (4.3). A curva (4.4) é obtida de (3.10) através da mesma mudança de coordenadas e multiplicando por v^6 . A irredutibilidade de (4.4) segue da irredutibilidade de (3.10).

O ciclo limite surge a partir da bifurcação de Hopf em torno de sua singularidade no ponto $\alpha = 3\sqrt{7}/2$, quando α aumenta o ciclo limite algébrico aumenta sua amplitude e termina possuindo

tamanho infinito sobre a curva $128xy^4 - 6y^5 + 1y^4 + 64x^2 + 32xy^3 + 128x^2y - 16xy^2 = 0$ quando $\alpha = 4$. Desta maneira segue o resultado. ■

Fazendo uma mudança de coordenadas para uma singularidade diferente e aplicando uma transformação linear que preserva a forma (4.2) obtemos o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *O sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 28(\beta - 30)\beta x + y + 168\beta^2 x^2 + 3xy, \\ \dot{y} &= 16\beta(\beta - 30)(14(\beta - 30)\beta x + 5y + 84\beta^2 x^2) + 24(17\beta - 6)\beta xy + 6y^2,\end{aligned}\quad (4.6)$$

possui uma curva algébrica invariante irreduzível de grau 6 dada por:

$$\begin{aligned}-7y^3 &+ 3(\beta - 30)^2 \beta y^2 + 18(\beta - 30)(\beta - 2)\beta xy^2 + 27(\beta - 2)^2 \beta x^2 y^2 \\ &+ 24(\beta - 30)^3 \beta^2 xy + 144(\beta - 30)(\beta - 2)^2 \beta^2 x^3 y + 48(\beta - 30)^4 \beta^3 x^2 \\ &+ 576(\beta - 30)^2 (\beta - 2)^2 \beta^3 x^4 - 432(\beta - 2)^2 \beta^2 (3 + 2\beta)x^4 y \\ &- 3456(\beta - 30)(\beta - 2)^2 \beta^3 (3 + 2\beta)x^5 + 3456(\beta - 2)^2 \beta^3 (12 + \beta)(3 + 2\beta)x^6 \\ &+ 24(\beta - 30)^2 \beta^2 (9\beta - 4)x^2 y + 64(\beta - 30)^3 \beta^3 (9\beta - 4)x^3 = 0.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Para $\beta \in (3/2, 2)$ a curva (4.7) possui um ciclo limite algébrico de grau 6.

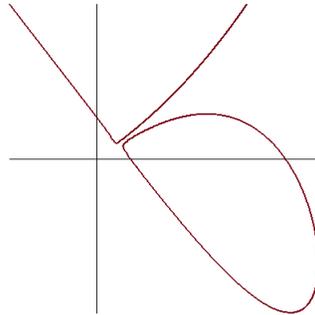


Figura 4.2: curva invariante do sistema do Teorema 4.2

Demonstração. Tome $a = (4 - \beta^2)/7$. Fazendo a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \left(\frac{v + 4u\beta(-30 + 3u(\beta - 2) + \beta)}{12u^2\beta(\beta^2 - 4)}, \frac{30 - \beta - u(8 + 3\beta)}{14u} \right),$$

multiplicando por $-42\beta u/2$, e substituindo (u, v) por (x, y) , o sistema (3.9) se torna (4.6). A curva (4.7) é obtida de (3.10) através da mesma mudança de coordenadas e multiplicando por $84672\beta^3(\beta^2 - 4)u^6$. A irreduzibilidade de (4.7) segue da irreduzibilidade de (3.10).

O ciclo limite surge a partir da bifurcação de Hopf na singularidade $(19/6, 0)$ quando $\beta = 3/2$. Assim, quando β aumenta, o ciclo limite algébrico aumenta sua amplitude e termina possuindo tamanho infinito quando $\beta = 2$. Desta maneira segue o resultado. ■

A partir dos resultados obtidos seguem perguntas naturais. Por exemplo, em todas as curvas algébricas que obtemos até o momento o sistema quadrático possui apenas um ciclo limite algébrico, será que podem haver mais? Além disso, será que podemos obter sistemas quadráticos com ciclos limite algébricos de grau arbitrário através de uma cadeia de transformações racionais como (4.1)? Podemos resumir esses questionamentos nas 3 seguintes perguntas:

Problema em aberto 1: *Em sistemas quadráticos permanecem em aberto os seguintes problemas:*

- i) *Qual é o grau máximo para um ciclo limite algébrico de um sistema quadrático?*
- ii) *Existe uma cadeia de transformações racionais que dão exemplos de sistemas quadráticos com ciclos limite algébricos de grau arbitrário?*
- iii) *O número máximo de ciclos limite algébricos que um sistema quadrático pode ter é 1?*

4.2 Unicidade de ciclos limite para sistemas quadráticos

Nesta seção vamos mostrar que os sistemas (3.3), (3.5), (3.7), (3.9), (4.3) e (4.6) possuem um único ciclo limite, o qual está contido na curva algébrica invariante. Em nosso auxílio, para a prova da unicidade do ciclo limite de quatro destes sistemas utilizaremos o seguinte lema.

Lema 4.3. *Seja $f(x, y) = 0$ uma curva algébrica invariante de grau maior que 1 para o sistema quadrático (1.1). Seja $k(x, y)$ o cofator de f . Defina:*

$$L(X, Y, Z) = Z^2 P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \quad M(X, Y, Z) = Z^2 Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right),$$

$$K(X, Y, Z) = Zk\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

Suponha que existem dois pontos A_1 e A_2 em $\mathbb{C}P^2$ tais que $L(A_i) = M(A_i) = K(A_i) = 0$, para $i \in \{1, 2\}$. Então todos os ciclos limite do sistema estão contidos em $f = 0$. Em particular, eles são algébricos.

Demonstração. Nesta demonstração consideraremos o sistema (1.1) quadrático, isto é, $m = 2$. Como k é o cofator de f e o sistema é quadrático, então o grau de k é no máximo 1. Primeiramente suponhamos que o cofator k de $f(x, y) = 0$ possui grau 0, i.e, k é um número real. Se $k = 0$, então f é uma integral primeira racional para o sistema quadrático (1.1) e conseqüentemente o sistema não possui ciclos limite, logo este caso não pode ocorrer. Portanto, suponhamos que $k \neq 0$. Seja γ um ciclo limite do sistema (1.1). Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante, ou $\gamma \subset \{f = 0\}$ ou $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Suponha que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$, então teremos

$$0 = \int_{\gamma} \frac{\dot{f}}{f} = \int_{\gamma} k \neq 0.$$

Assim teremos uma contradição. Portanto tem de ocorrer $\gamma \subset \{f = 0\}$ e o lema segue quando k possui grau 0.

Suponhamos agora que k possui grau 1. Pelas hipóteses, existem dois pontos A_1 e A_2 tais que $L(A_i) = M(A_i) = K(A_i) = 0$, para $i \in \{1, 2\}$. Note que neste caso temos que A_1 e A_2 são singularidades para o sistema estendido ao plano projetivo a partir de (1.1).

Afirmção. Existem dois números $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ e o polinômio K divide o polinômio $a_1L + a_2M$.

De fato, seja A_3 um ponto com componentes reais, diferente de A_1 e A_2 tal que $K(A_3) = 0$. Este ponto existe pois K é um polinômio homogêneo real de grau 1. Suponha que $L(A_3) = M(A_3) = 0$. Então os sistemas $L = 0$ e $K = 0$, $M = 0$ e $K = 0$ teriam três soluções diferentes, os pontos A_i para $i \in \{1, 2, 3\}$. Uma vez que os graus dos polinômios homogêneos L, M e K são 2, 2 e 1, respectivamente, pelo Teorema de Bezout segue que K divide L e M . Tomando $X = x, Y = y$ e $Z = 1$ obtemos que o polinômio k de grau 1 divide P e Q , o que contradiz a hipótese de P e Q serem coprimos. Portanto, temos $L^2(A_3) + M^2(A_3) \neq 0$. Consequentemente podemos escolher dois números reais a_1 e a_2 tais que $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ e $a_1L(A_3) + a_2M(A_3) = 0$. Portanto, o sistema $a_1L + a_2M = 0$ e $K = 0$ possui três soluções diferentes, os pontos A_i para $i \in \{1, 2, 3\}$. Uma vez que o grau dos polinômios homogêneos $a_1L + a_2M$ e K são 2 e 1, respectivamente, novamente pelo Teorema de Bézout segue que K divide $a_1L + a_2M$, o que conclui a afirmação.

Pela afirmação e tomando $X = x, Y = y$ e $Z = 1$ obtemos que k divide $a_1P + a_2Q$. Seja $u(x, y)$ o polinômio de grau ≤ 1 tal que

$$a_1P + a_2Q = ku. \quad (4.8)$$

Suponhamos que u possui grau 0, isto é, u é uma constante real. Assim considere a função $g = a_1x + a_2y$. Claramente

$$\dot{g} = a_1\dot{x} + a_2\dot{y} = a_1P + a_2Q = ku.$$

Portanto, uma vez que $\dot{f} = kf$, segue que

$$\frac{\dot{g}}{u} = \frac{\dot{f}}{f}.$$

Integrando esta igualdade segue que $H = f \exp(-g/u)$ é uma integral primeira definida em todo \mathbb{R}^2 . Portanto, neste caso o sistema não possui ciclos limite, logo este caso não pode ocorrer.

Suponha que u possui grau 1. Podemos considerar os três polinômios $u, a_1x + a_2y$ e 1 de graus 1, 1 e 0, respectivamente. Primeiramente, suponhamos que estes três polinômios são linearmente dependentes. Então, podemos escrever $u = c_1(a_1x + a_2y) + c_2$ com $c_1 \neq 0$. Assim teremos

$$\dot{u} = c_1(a_1\dot{x} + a_2\dot{y}) = c_1(a_1P + a_2Q) = c_1ku,$$

onde na última passagem utilizamos (4.8). Consequentemente, por (1.3), segue que $u = 0$ é uma reta invariante para o sistema (1.1). Novamente, uma vez que $\dot{f} = kf$, segue que

$$\frac{\dot{u}}{c_1u} = \frac{\dot{f}}{f}.$$

Integrando esta igualdade segue que $H = f^{c_1}/u$ é uma integral primeira definida em todo \mathbb{R}^2 , exceto na reta $u = 0$. Observe que uma vez que f possui pelo menos grau 2, f é diferente de u

e conseqüentemente H nunca pode ser igual a uma constante. Uma vez que $u = 0$ é uma reta invariante, a existência desta integral primeira implica que o sistema não possui ciclos limite, logo este caso não pode ocorrer.

Suponha agora que os polinômios u , $a_1x + a_2y$ e 1 são linearmente independentes. Portanto, o polinômio k de grau 1 pode ser escrito ou como

$$k = d_1(a_1x + a_2y) + d_2, \quad (4.9)$$

ou como

$$dk = u + \lambda(a_1x + a_2y) + d_3, \quad (4.10)$$

onde $d_1 \neq 0$, $d \neq 0$, λ e d_3 são números reais.

Suponha que vale (4.9). Então teremos

$$\dot{k} = d_1(a_1\dot{x} + a_2\dot{y}) = d_1(a_1P + a_2Q) = d_1ku.$$

Portanto, $k = 0$ é uma reta invariante para o sistema (1.1). Seja γ um ciclo limite para o sistema (1.1). Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante, ou $\gamma \subset \{f = 0\}$, ou $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Suponha que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Portanto, uma vez que $\gamma \cap \{k = 0\} = \emptyset$ e pelo fato de $k = 0$ ser uma reta invariante, teremos

$$0 = \int_{\gamma} \dot{k} = \int_{\gamma} kf \neq 0.$$

O que é uma contradição. Logo tem de ocorrer $\gamma \subset \{f = 0\}$ e o portanto o lema segue quando ocorre (4.9).

Suponha que vale (4.10). Se definimos

$$H = (a_1x + a_2y + a_3)f^\lambda,$$

onde a_3 é um número real, então teremos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= (a_1\dot{x} + a_2\dot{y})f^\lambda + \lambda(a_1x + a_2y + a_3)f^{\lambda-1}\dot{f} \\ &= (a_1P + a_2Q)f^\lambda + \lambda(a_1x + a_2y + a_3)kf^\lambda \\ &= [u + \lambda(a_1x + a_2y + a_3)]kf^\lambda, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde usamos que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k e (4.8).

Suponha que $\lambda \neq 0$. Então, tomando $d_3 = \lambda a_3$, de (4.10) e (4.11) segue que

$$\dot{H} = dk^2 f^\lambda. \quad (4.12)$$

Seja γ um ciclo limite do sistema (1.1). Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante, ou $\gamma \subset \{f = 0\}$, ou $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Suponha que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Então, usando (4.12) teremos que

$$0 = \int_{\gamma} \dot{H} = \int_{\gamma} dk^2 f^\lambda \neq 0.$$

O que nos leva a uma contradição. Logo $\gamma \subset \{f = 0\}$ e portanto vale o lema para $\lambda \neq 0$.

Finalmente, suponha $\lambda = 0$. Então a equação (4.11) se torna

$$\dot{H} = uk = dk^2 - d_3k,$$

onde usamos a igualdade (4.10). Portanto, uma vez que $\dot{f} = kf$, se γ é um ciclo limite tal que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$, teremos que

$$0 = \int_{\gamma} \left(\dot{H} + d_3 \frac{\dot{f}}{f} \right) = \int_{\gamma} dk^2 \neq 0,$$

o que nos leva a uma contradição. Portanto $\gamma \subset \{f = 0\}$, o que completa a demonstração. ■

A seguir apresentaremos o resultado principal da seção, que garante que os sistemas quadráticos apresentados nas seções anteriores só possuem um único ciclo limite, neste caso o algébrico. Para a prova da unicidade de ciclo limite para os sistemas (3.3), (3.5), (3.7) e (3.9) a prova pode ser encontrada em [4]. Já para os sistemas (4.3) e (4.6) a prova é original.

Teorema 4.4. *Os sistemas quadráticos (3.3), (3.5), (3.7), (3.9), (4.3) e (4.6) possuem um único ciclo limite, o qual está contido na curva algébrica invariante.*

Demonstração. Para o sistema (3.7) temos como curva algébrica invariante $f = x^2 + x^3 + x^2y + 2axy^2 + 2axy^3 + a^2y^4 = 0$ com cofator $k = 2(5 + 9x + (5 + 6a)y)$. Usando a desigualdade $(-71 + 17\sqrt{17})/32 < a < 0$ segue que os pontos reais

$$A_1 = \left(\frac{-(5 + 34a + 12a^2) + (5 + 6a)\sqrt{1 + 16a + 4a^2}}{6(3a - 2)}, \frac{7 + 6a - 3\sqrt{1 + 16a + 4a^2}}{2(3a - 2)}, 1 \right),$$

$$A_2 = \left(\frac{-(5 + 34a + 12a^2) - (5 + 6a)\sqrt{1 + 16a + 4a^2}}{6(3a - 2)}, \frac{7 + 6a + 3\sqrt{1 + 16a + 4a^2}}{2(3a - 2)}, 1 \right),$$

satisfazem $L(A_i) = M(A_i) = K(A_i) = 0$, para $i \in \{1, 2\}$. Assim, o sistema (3.7) satisfaz as hipóteses do Lema 4.3, logo o sistema possui todos seus ciclos limite contidos na curva algébrica $f = 0$. Uma vez que $f = 0$ possui um único oval segue o resultado para o sistema (3.7).

Para o sistema (3.9) temos como curva algébrica invariante $f = \frac{1}{4} + x - x^2 + ax^3 + xy + x^2y^2 = 0$ com cofator $k = 4(2 - 3ax + 2y)$. Usando a desigualdade $0 < a < 1/4$ segue que os pontos reais

$$A_1 = \left(\frac{2 + \sqrt{4 - 7a}}{7a}, \frac{-8 + 3\sqrt{4 - 7a}}{14}, 1 \right),$$

$$A_2 = \left(\frac{2 - \sqrt{4 - 7a}}{7a}, \frac{-8 - 3\sqrt{4 - 7a}}{14}, 1 \right),$$

satisfazem $L(A_i) = M(A_i) = K(A_i) = 0$ para $i \in \{1, 2\}$. Assim o sistema satisfaz as hipóteses do Lema 4.3, logo o sistema possui todos seus ciclos limite contidos na curva algébrica $f = 0$. Uma vez que $f = 0$ possui um único oval segue o resultado para o sistema (3.9).

Para o sistema (4.3) temos como curva algébrica invariante (4.4) com cofator $k = 4(13\alpha - 24)y - 6(\alpha^2 - 16)(\alpha + 12)x + 56$. Aplicando a mudança de coordenadas (4.5) aos dois pontos anteriores obtemos os pontos

$$A_1 = \left(\frac{-196\alpha + 840 + 28\sqrt{7\alpha^2 - 108}}{(\alpha^2 - 16)(3\sqrt{7\alpha^2 - 108} - 7\alpha + 6)^2}, \frac{14}{3\sqrt{7\alpha^2 - 108} - 7\alpha + 6}, 1 \right),$$

$$A_2 = \left(\frac{196\alpha - 840 + 28\sqrt{7\alpha^2 - 108}}{(\alpha^2 - 16)(3\sqrt{7\alpha^2 - 108} + 7\alpha - 6)^2}, \frac{14}{3\sqrt{7\alpha^2 - 108} + 7\alpha - 6}, 1 \right),$$

que satisfazem $L(A_i) = M(A_i) = K(A_i) = 0$ para $i \in \{1, 2\}$. Assim, o sistema (4.3) satisfaz as hipóteses do Lema 4.3, logo o sistema possui todos seus ciclos limite contidos na curva algébrica $f = 0$. Uma vez que $f = 0$ possui um único oval segue o resultado para o sistema (4.3).

O restante da prova temos que os sistemas não satisfazem as hipóteses do Lema 4.3, logo teremos de usar argumentos particulares.

Para o sistema de Yablonskii (3.3) temos como curva algébrica invariante $f = (y + cx^2)^2 + x^2(x - a)(x - b) = 0$. Considere a função

$$H = \frac{2c(a - 3b)(3a - b)(y + cx^2) - ab(a + b - 4x)^2}{\sqrt{|f|}}.$$

Assim teremos

$$\dot{H} = \text{sgn}(f) \frac{c(2ab(a + b) - (3a^2 - 2ab + 3b^2)x)^2}{\sqrt{|f|}}. \quad (4.13)$$

Seja γ um ciclo limite do sistema (3.3). Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante, ou vale $\gamma \subset \{f = 0\}$, ou $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Suponha que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Então, de (4.13) teremos

$$0 = \int_{\gamma} \dot{H} = \text{sgn}(f|_{\gamma}) \int_{\gamma} \frac{c(2ab(a + b) - (3a^2 - 2ab + 3b^2)x)^2}{\sqrt{|f|}} \neq 0,$$

o que nos leva a uma contradição. Logo tem de ocorrer que o ciclo limite $\gamma \subset \{f = 0\}$. Uma vez que $f = 0$ é formada por um único oval, segue o resultado para (3.3).

Para o sistema de Filiptsov (3.5) temos como curva algébrica invariante $f = 3(1 + a)(ax^2 + y)^2 + 2y^2(2y + 3(1 + a)x) = 0$. Considere a função

$$H = \frac{2y + (3 + 5a)x^2}{\sqrt{|f|}}.$$

Assim teremos

$$\dot{H} = \text{sgn}(f) \frac{(4y - 3(1 + a)x)^2}{\sqrt{|f|}}. \quad (4.14)$$

Seja γ um ciclo limite do sistema (3.5). Uma vez que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante ou vale $\gamma \subset \{f = 0\}$, ou $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Suponha que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Então, de (4.14), teremos

$$0 = \int_{\gamma} \dot{H} = \text{sgn}(f|_{\gamma}) \int_{\gamma} \frac{(4y - 3(1 + a)x)^2}{\sqrt{|f|}} \neq 0,$$

o que nos leva a uma contradição. Logo tem que ocorrer que $\gamma \subset \{f = 0\}$. Uma vez que f possui um único oval, segue o resultado para (3.5).

Para provar a unicidade para o sistema (4.6), tome

$$H(x, y) = \frac{-16\beta(\beta + 12)x^3 + 8\beta(\beta - 30)x^2 + xy + \frac{20\beta(\beta-30)^2}{3(5\beta-24)}x + \frac{5(\beta-30)}{3(5\beta-24)}y}{\sqrt{|f|}},$$

onde f é a curva invariante (4.7).

Suponha que exista um ciclo limite γ tal que $\gamma \cap \{f = 0\} = \emptyset$. Uma vez que a forma é exata temos que

$$\int_{\gamma} \dot{H} = 0. \quad (4.15)$$

Por outro lado

$$\dot{H} = \text{sgn}(f|_{\gamma}) \frac{(xy + 6\sqrt{\frac{7}{5\beta-24}}y)^2}{\sqrt{|f|}} = \text{sgn}(f|_{\gamma}) \frac{h^2}{\sqrt{|f|}}.$$

Temos que $h = 0$ não é invariante para o sistema (4.6), além disso ela é formada por duas retas. Logo se γ é um ciclo limite de (4.6), então a quantidade de pontos pertencentes a $\{h = 0\} \cap \gamma$ é finita. Logo $\frac{h^2}{\sqrt{|f|}} > 0$ em quase todo ponto de γ . Desta maneira teremos

$$\int_{\gamma} \dot{H} \neq 0. \quad (4.16)$$

Assim, de (4.15) e (4.16) temos uma contradição. Portanto tem de ocorrer que se γ é um ciclo limite para o sistema (4.6), então $\gamma \subset \{f = 0\}$. Uma vez que f possui um único oval, concluímos que este sistema possui apenas um ciclo limite. ■

Observação: Para a obtenção dos pontos que satisfazem as hipóteses do Lema 4.3 para os sistemas (3.7), 3.9 e (4.3) basta apenas resolver o sistema $L(X, Y, Z) = M(X, Y, Z) = K(X, Y, Z) = 0$, o qual pode ser feito através de softwares matemáticos.

Já nas demonstrações da unicidade de ciclo limite para os sistemas (3.3), (3.5) e (4.6) não podemos fazer uso do Lema 4.3. A ideia era construir uma função $H(x, y) = \frac{g(x, y)}{|f(x, y)|}$, onde g é um polinômio de duas variáveis de grau 3 e concluir que $\int_{\gamma} \dot{H} \neq 0$. Para isto era necessário construir g de modo que

$$\dot{H} = \text{sgn}(f|_{\gamma}) \frac{(lx^2 + mxy + ny^2 + rx + sy)^2}{|f|}.$$

Por outro lado em virtude da regra da cadeia sabemos que

$$\dot{H} = P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{2(P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y}) - g.k.\text{sgn}(f)}{\sqrt{|f|}}.$$

Logo para obter g basta resolver o sistema de equações oriundo da igualdade

$$2(P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y}) - g.k = (lx^2 + mxy + ny^2 + rx + sy)^2,$$

nas variáveis dos coeficientes de g e os coeficientes $\{l, m, n, r, s\}$.

4.3 Ciclos limite algébricos para sistemas cúbicos

Nas próximas seções, devido ao trabalho de Llibre e Zhao em [19], abordaremos a cerca de resultados para sistemas cúbicos.

Assim como sistemas quadráticos, existem sistemas cúbicos que possuem ciclos limite algébricos de grau 2, como exemplo temos o sistema

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1),$$

que possui como curva algébrica invariante irreduzível o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Ao contrário do que ocorre para sistemas quadráticos, este não é o único sistema cúbico que possui ciclo limite algébrico de grau 2, para mais exemplos veja [1], [18] e [21].

Na seção 4.4 mostraremos que é possível construir sistemas cúbicos que possuem ciclos limite algébricos de grau 3. No artigo [17] o autor fornece exemplos explícitos de sistemas cúbicos possuindo o oval limitado da curva cúbica $y^2 = x^3 + cx^2 + 1$ com $c < -3\sqrt[3]{2}/2$ como um ciclo limite algébrico de grau 3. Há exemplos que mostram sistemas cúbicos onde este ciclo limite é único e outros onde o sistema possui adicionalmente um ciclo limite não algébrico.

A seguir, apresentaremos proposições com exemplos de sistemas cúbicos que possuem ciclos limite algébricos de grau 4, 5 e 6. A ideia da demonstração é aplicar uma transformação de Poincaré para um sistema quadrático conhecido que possua um ciclo limite com o grau desejado, assim a transformação preservará o grau do ciclo limite algébrico, mas aumentará o grau do sistema em uma unidade.

Proposição 4.5. .

a) O sistema cúbico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(-3(a+b)c + 4abcx - 4y + (a+b)xy), \\ \dot{y} &= -\frac{3}{2}a^2 + ab - \frac{3}{2}b^2 + 4abc^2 + ab(a+b)x + 5(a+b)cy + 4y^2 + (a+b)xy^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

possui um ciclo limite algébrico de grau 4 dado por:

$$1 + c^2 - (a+b)x + abx^2 + 2cxy + x^2y^2 = 0, \quad (4.18)$$

com cofator $4x(2abc + (a+b)y)$. Para $abc \neq 0$, $a \neq b$, $ab > 0$, $4c^2(a-b)^2 + (3a-b)(a-3b) < 0$, a curva (4.18) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

b) O sistema cúbico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x(-3(2+a) + 3(a+1)x + 6y + xy), \\ \dot{y} &= 3a(a+1) - 2(3+2a)y + 9(a+1)xy + 4y^2 - 2xy^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

possui uma curva algébrica invariante irreduzível de grau 4 dada por:

$$3(a+1)(a+xy)^2 + 2xy^2(-3-3a+2y) = 0, \quad (4.20)$$

com cofator $2x(3+3a-4y)$. Para $0 < a < 3/13$, a curva (4.20) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

c) O sistema cúbico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(6 + 5x + 4(a + 1)y + ay^2), \\ \dot{y} &= x - 2y - 3xy - (a + 2)y^2 - ay^3,\end{aligned}\tag{4.21}$$

possui uma curva algébrica invariante irredutível de grau 4 dada por:

$$x + x^2 + xy + 2axy^2 + 2ay^3 + a^2y^4 = 0,\tag{4.22}$$

com cofator $-2(3 + 5x + (2a + 3)y + 2ay^2)$. Para $(-71 + 17\sqrt{17})/32 < a < 0$, a curva (4.22) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

d) O sistema cúbico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x(2k - 2x - 6y - x^2), \\ \dot{y} &= -14kx + 2ky + (8 - 3k)x^2 - 4xy - 20y^2 - 2x^2y,\end{aligned}\tag{4.23}$$

possui uma curva algébrica invariante irredutível de grau 4 dada por:

$$kx - x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + x^2y + y^2 = 0,\tag{4.24}$$

com cofator $4(k - 2x - 2x^2 - 10y)$. Para $0 < k < 1/4$, a curva (4.24) contém um ciclo limite algébrico de grau 4.

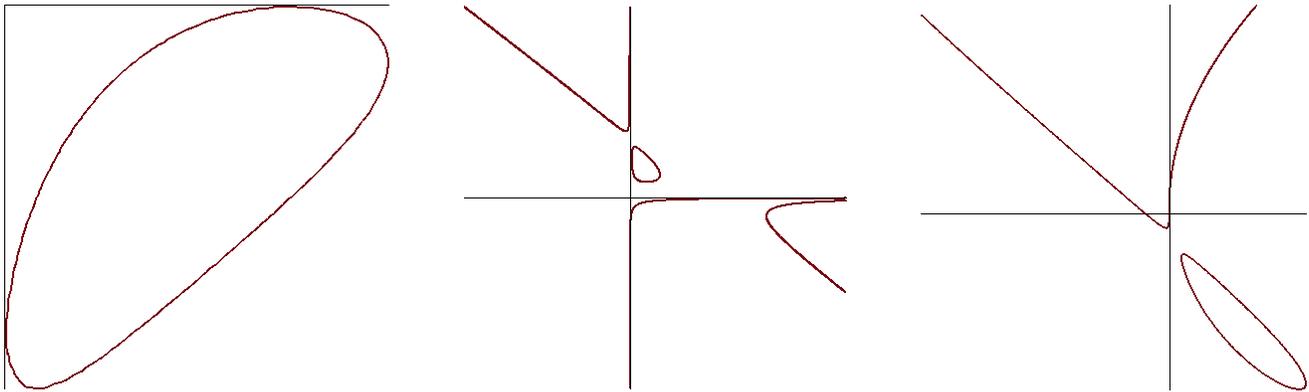


Figura 4.3: curvas invariantes dos sistemas a), b) e c), respectivamente, da Proposição 4.5

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que os ciclos limite algébricos que aparecem nos sistemas quadráticos (3.3), (3.5), (3.7) e (3.9) não intersectam o eixo y .

Ora, substituindo $x = 0$ em (3.4), obtemos que $y^2 = 0$. Isto implica que a curva (3.4) intersecta o eixo y no único ponto $(0, 0)$, que é uma singularidade para o sistema (3.3). Portanto, o ciclo limite algébrico do sistema (3.3), contido na curva (3.4), não intersecta o eixo y .

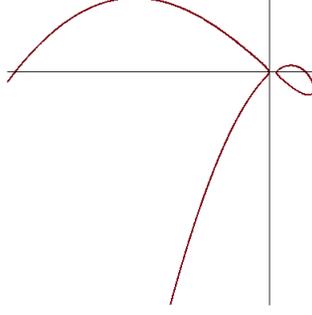


Figura 4.4: curva invariante do sistema d) da Proposição 4.5

Usando o mesmo argumento acima, concluímos que o ciclo limite algébrico do sistema (3.7) não intersecta o eixo y .

Para o sistema (3.5), temos

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=0} = 2y,$$

o que implicaria que se o ciclo limite do sistema (3.5) intersectasse o eixo y , então a origem estaria na região limitada por este ciclo limite. A origem é um nó instável, o que contradiria o Teorema 3.12.

Um cálculo direto mostra que a curva (3.10) e o eixo y não possuem pontos em comum. Portanto, para todos os pontos (x, y) dos ciclos limite algébricos que aparecem nos sistemas quadráticos (3.3), (3.5), (3.7) e (3.9) teremos $x \neq 0$. Aplicando a transformação de Poincaré

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}, \quad dt = z d\tau, \quad (4.25)$$

para os sistemas quadráticos (3.3), (3.5), (3.7) e (3.9) e substituindo novamente (z, u) por (x, y) , obtemos os sistemas (4.17), (4.19), (4.21), (4.23), respectivamente. As curvas (4.18), (4.20), (4.22) e (4.24) são obtidas de (3.4), (3.6), (3.8) e (3.10), respectivamente, através da mesma mudança de coordenadas e multiplicação por z^4 . ■

Proposição 4.6. *O sistema cúbico:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(2(\alpha^2 - 16)(\alpha + 12) - 28x - 6(3\alpha - 4)y + \frac{12}{\alpha + 4}y^2 \right), \\ \dot{y} &= -2(\alpha^2 - 16)x + (\alpha^2 - 16)(\alpha + 12)y - 20xy - 8\alpha y^2 + \frac{12}{\alpha + 4}y^3, \end{aligned} \quad (4.26)$$

possui uma curva algébrica invariante irredutível de grau 5 dada por:

$$\begin{aligned} & -(\alpha^2 - 16)x^2 + x^3 + (\alpha - 2)x^2y + \frac{1}{4}(\alpha - 4)(\alpha + 12)xy^2 - \frac{2x^2y^2}{\alpha + 4} \\ & - \frac{(\alpha - 8)xy^3}{\alpha + 4} + \frac{(\alpha + 12)y^4}{\alpha + 4} + \frac{xy^4}{(\alpha + 4)^2} - \frac{6y^5}{(\alpha + 4)^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

com cofator $4(\alpha^2 - 16)(\alpha + 12) - 84x - 2(19\alpha - 12)y + \frac{60}{\alpha + 4}y^2$. Para $\alpha \in (3\sqrt{7}/2, 4)$, a curva (4.27) contém um ciclo limite algébrico de grau 5.

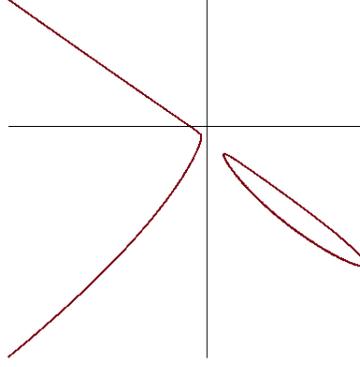


Figura 4.5: curva invariante do sistema da Proposição 4.6

Demonstração. Uma vez que $(0,0)$ é uma singularidade do sistema (4.3) e

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=0} = -\frac{12}{\alpha+4}y^2 \leq 0,$$

o ciclo limite do sistema (4.3) não intersecta o eixo y . Aplicando a transformação de Poincaré (4.25) para o sistema quadrático (4.3) obtém-se o sistema (4.26). A curva (4.27) é obtida de (4.4) através da mesma mudança de coordenadas e multiplicação por z^5 . ■

Proposição 4.7. *O sistema cúbico:*

$$\dot{x} = -x(168\beta^2 - 84\beta(\beta + 10)x + 3y + \frac{28}{3}\beta(\beta + 30)x^2), \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & 1344(\beta - 30)\beta^3 - 672(\beta - 30)\beta^2(\beta + 10)x + 48\beta(5\beta - 3)y \\ & + \frac{224}{3}\beta^2(\beta^2 - 900)x^2 + 28\beta(\beta - 54)xy + 3y^2 - \frac{28}{3}\beta(\beta + 30)x^2y, \end{aligned}$$

possui uma curva algébrica invariante irredutível de grau 6 dada por:

$$\begin{aligned} & 3456(\beta - 2)^2\beta^3(12 + \beta)(3 + 2\beta) - 10368(\beta - 2)^3\beta^3(3 + 2\beta)x \\ & + 576(\beta - 2)^2\beta^3(360 - 360\beta + 41\beta^2)x^2 - 448\beta^3(-11520 + 30600\beta \\ & - 676\beta^2 - 442\beta^3 + 29\beta^4)x^3 + 112\beta^3(294480 + 86880\beta - 6552\beta^2 \\ & - 440\beta^3 + 33\beta^4)x^4 - \frac{1568}{3}\beta^3(45648 + 3168\beta - 440\beta^2 - 8\beta^3 + \beta^4)x^5 \\ & + \frac{784}{27}\beta^3(140688 - 680\beta^2 + \beta^4)x^6 - 432(\beta - 2)^2\beta^2(3 + 2\beta)xy \\ & + 1296(\beta - 2)^3\beta^2x^2y - 168\beta^2(432 - 1092\beta + 40\beta^2 + 3\beta^3)x^3y \\ & + 56\beta^2(-10632 - 1124\beta + 82\beta^2 + \beta^3)x^4y - \frac{1568}{3}\beta^2(\beta^2 - 396)x^5y \\ & + 27(\beta - 2)^2\beta x^2y^2 - 504(\beta - 2)\beta x^3y^2 + (2352\beta + 7)x^4y^2 - 7x^3y^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

com cofator $-56\beta x(-6\beta + 30x + \beta x)$. Para $\beta \in (3/2, 2)$, a curva (4.29) contém um ciclo limite algébrico de grau 6.

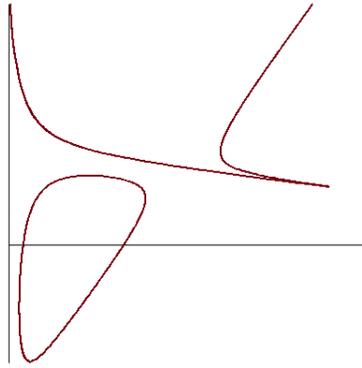


Figura 4.6: curva invariante do sistema da Proposição 4.7

Demonstração. Para o sistema (4.6), temos

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=-\frac{1}{3}} = \frac{28}{3}\beta(30 + \beta) \neq 0$$

o qual mostra que o ciclo limite do sistema (4.6) não intersecta a reta $x = -1/3$. Aplicando a transformação de Poincaré

$$z = \frac{1}{x + \frac{1}{3}}, \quad u = \frac{y}{x + \frac{1}{3}}, \quad dt = z d\tau$$

para o sistema quadrático (4.6) e substituindo novamente (z, u) por (x, y) , obtemos o sistema (4.28). A curva (4.29) é obtida de (4.7) pela mesma mudança de coordenadas e multiplicando por z^6 . ■

4.4 Ciclos limite algébricos de grau ≥ 3

Conforme visto na seção 3.2 do capítulo 3, não é possível haver ciclos limite algébricos de grau 3 para sistemas quadráticos. Como mencionamos na seção anterior, é possível obter ciclos limite algébricos de grau 3 para sistemas cúbicos. No final desta seção vamos apresentar um resultado mais geral, que garante que curvas algébricas de grau 3 que possuem um oval e satisfazem algumas hipóteses podem ser invariantes para uma conveniente equação diferencial polinomial planar de grau maior ou igual que 3.

Neste caminho apresentaremos alguns lemas preparatórios. O seguinte resultado pode ser visto em [15].

Lema 4.8. *Qualquer sistema cúbico hamiltoniano $H(x, y)$ possuindo um ponto crítico do tipo centro na origem pode ser colocado através de uma mudança de variáveis afim em uma forma normal*

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3 + axy^2 + \frac{1}{3}by^3, \quad (4.30)$$

onde os parâmetros a e b estão no conjunto

$$\Omega = \left\{ -\frac{1}{2} \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq (1-a)(1+2a)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

O oval de $H(x, y) = h$ em torno do centro na origem existe para os valores hamiltonianos $h \in \Sigma = (0, 1/6)$.

Proposição 4.9. *A curva algébrica de grau 3 contém um oval sem um ponto cujas coordenadas satisfazem $f(x, y) = \partial f(x, y)/\partial x = \partial f(x, y)/\partial y = 0$ se, e somente se, pode ser escrita através de uma mudança de variáveis afins na forma*

$$H(x, y) = h, (a, b) \in \Omega, h \in \Sigma, \quad (4.31)$$

onde H , Ω e Σ estão definidos como no Lema 4.8. Mais ainda, a curva algébrica (4.31):

a) contém um único oval e

b) é irredutível se, e somente se, $(b, h) \neq (0, (1+3a)/(24a^3))$.

Demonstração. A necessidade decorre diretamente do Lema 4.8. Para provar a suficiência, suponha que $f(x, y) = 0$ é uma curva algébrica de grau 3 possuindo um oval sem pontos cujas coordenadas satisfazem $f(x, y) = \partial f(x, y)/\partial x = \partial f(x, y)/\partial y = 0$. Então, $f(x, y) = 0$ é uma trajetória do sistema hamiltoniano quadrático

$$\dot{x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \quad (4.32)$$

Pelo Teorema 3.12, a componente fechada de $f(x, y) = 0$ não é um ciclo limite do sistema (4.32), isto implica que esta é uma órbita fechada circundando um centro e o determinante da parte linear neste centro é não nulo. Pelo Lema 4.8, $f(x, y)$ pode ser escrita na forma (4.31), o que conclui a demonstração da suficiência.

Para provar a afirmação a), assumamos que a curva algébrica $H(x, y) = h$ contém dois ovais, os quais são duas órbitas fechadas do sistema

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y + 2axy + by^2, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + x^2 - ay^2. \quad (4.33)$$

Uma figura com os retratos de fase deste sistema em função dos parâmetros a e b pode ser encontrado na figura 1 do artigo [15]. Pelo Teorema 3.12 existe um centro dentro de cada oval. Se estas duas órbitas fechadas circundam o mesmo centro, então a reta passando através do centro deveria intersectar em pelo menos quatro pontos a curva algébrica $H(x, y) = h$ de grau 3, o que é uma contradição. Se estas duas órbitas fechadas circundam dois centros diferentes, então a reta conectando os dois centros deveria intersectar em pelo menos quatro pontos a curva algébrica $H(x, y) = h$ de grau 3, o que é novamente uma contradição. Logo a curva $H(x, y) = h$ só pode ter um oval.

Para provar a afirmação b), suponha que $H(x, y) - h$ é redutível e $h \in \Sigma$, então $H(x, y) - h$ pode ser escrita na forma

$$H(x, y) - h = (\alpha x + \beta y + \delta)H_2(x, y),$$

onde α, β e δ são constantes reais, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $H_2(x, y)$ é um polinômio de grau 2. O Lema 4.8 implica que a reta $\alpha x + \beta y + \delta = 0$ não intersecta o oval $H_2(x, y) = 0$, o que dá $\delta \neq 0$. Uma vez que $\alpha x + \beta y + \delta$ é uma linha invariante do sistema (4.33), temos que $\alpha \dot{x} + \beta \dot{y} \equiv 0$ para os pontos (x, y) satisfazendo $\alpha x + \beta y + \delta = 0$. Se $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$, então

$$\begin{aligned} (\alpha \dot{x} + \beta \dot{y})|_{y=-\frac{\alpha x + \delta}{\beta}} &= \frac{1}{\beta^2}(-\delta(\alpha\beta - b\alpha\delta + a\beta\delta) + (-\alpha^2\beta - \beta^3 + 2b\alpha^2\delta - 4a\alpha\beta\delta)x \\ &\quad + (b\alpha^3 - 3a\alpha^2\beta + \beta^3)x^2) \equiv 0, \end{aligned}$$

o que fornece:

$$a = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\beta^2}{\delta^2} \right), \quad b = \frac{\beta(-\beta^2 + 3\delta^2)}{2\delta^3}, \quad \alpha = -\delta. \quad (4.34)$$

Se vale (4.34), então

$$H(x, y) - h - (-\alpha x + \beta y + \delta)H_2(x, y) = \frac{1}{6} - h,$$

onde

$$H_2(x, y) = \frac{1}{6\delta^3}(-\delta^2 - \delta^2 x + 2\delta^2 x^2 + \beta\delta y + 2\beta\delta xy + (3\delta^2 - \beta^2)y^2).$$

Isto significa que $H(x, y) - h$ é redutível se, e somente se, $h = 1/6 \notin \Sigma$. Se $\beta \neq 0$, $\alpha = 0$, então

$$(\alpha \dot{x} + \beta \dot{y})|_{y=-\frac{\delta}{\beta}} = \frac{1}{\beta}(-a\delta^2 - \beta^2 x + \beta^2 x^2) \neq 0,$$

o que é uma contradição.

Se $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, então o sistema (4.33)

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=-\frac{\delta}{\alpha}} = \frac{y(\alpha - 2a\delta + b\alpha y)}{\alpha} \equiv 0$$

se, e somente se, $\alpha = 2a\delta$ e $b = 0$, o que implica

$$H(x, y) - h - \frac{1}{24a^3}(2ax + 1)(-1 - 3a + 2a(1 + 3a)x - 4a^2x^2 + 12a^3y^2) = \frac{1 + 3a}{24a^3} - h.$$

Assim $H(x, y) - h$ é redutível se, e somente se, $b = 0$, $h = (1 + 3a)/(24a^3)$. ■

Para os resultados seguintes, precisaremos de uma hipótese a mais sobre o polinômio $H(x, y)$, ser *regular no infinito*.

Definição 4.10. *Um polinômio $H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ de grau $n + 1$ é dito regular no infinito se vale uma das três condições equivalentes:*

- i) sua parte homogênea principal \hat{H} , um polinômio homogêneo de grau $n + 1$, é um produto de $n + 1$ formas lineares duas a duas diferentes;
- ii) \hat{H} possui um ponto crítico isolado na origem $(x, y) = (0, 0)$;
- iii) A curva de nível $\{\hat{H} = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ é não singular.

Esta condição significa que após a compactificação projetiva natural do plano- (x, y) \mathbb{C}^2 , todos os fenômenos “interessantes” ainda acontecem apenas na parte finita do plano projetivo.

Lema 4.11. *Se \hat{H} não possui fatores repetidos, então $\text{mdc}(H_x, H_y) = 1$.*

Demonstração. Suponha que $\text{mdc}(H_x, H_y) \neq 1$. Então existe um polinômio A não constante tal que A divide H_x e A divide H_y . Portanto, \hat{A} divide \hat{H}_x e \hat{H}_y . Por outro lado, pela fórmula de Euler temos $x\hat{H}_x + y\hat{H}_y = n\hat{H}$, onde n é o grau de H . Assim \hat{A} divide \hat{H} . Uma vez que \hat{A} , \hat{H}_x , \hat{H}_y e \hat{H} são polinômios homogêneos de $\mathbb{C}[x, y]$ e \hat{A} divide \hat{H}_x , \hat{H}_y e \hat{H} , os fatores lineares de \hat{A} possuindo multiplicidade m deverão ser fatores lineares de \hat{H} possuindo multiplicidade $m + 1$. Esta última afirmação segue identificando os fatores lineares do polinômio homogêneo $\hat{H}(x, y)$ em duas variáveis com as raízes do polinômio $\hat{H}(1, z)$ na variável z . Portanto, \hat{A} é um fator repetido de \hat{H} , provando o resultado. ■

Lema 4.12. *Seja $f(x, y) = 0$ uma curva algébrica invariante de grau n para o sistema (1.1) de grau m . Suponha que:*

- i) Não existem pontos (x, y) tais que $f(x, y) = \partial f(x, y)/\partial x = \partial f(x, y)/\partial y = 0$;
- ii) \hat{f} não possui fatores repetidos, isto é, f é regular no infinito.

Então o sistema (1.1) tem a forma

$$\dot{x} = A(x, y)f(x, y) - D(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = B(x, y)f(x, y) + D(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad (4.35)$$

onde $A(x, y)$, $B(x, y)$ e $D(x, y)$ são polinômios com $\text{gr } A(x, y) \leq m - n$, $\text{gr } B(x, y) \leq m - n$ e $\text{gr } D(x, y) = m - n + 1$.

Demonstração. Aplicando a condição i), a partir do Teorema dos Zeros de Hilbert (para detalhes, veja [14], Hilbert’s Nullstellensatz) temos que existem polinômios E, F e G tais que

$$E\frac{\partial f}{\partial x} + F\frac{\partial f}{\partial y} + Gf = 1. \quad (4.36)$$

Uma vez que f satisfaz a equação (1.3), obtemos de (1.3) e (4.36) que

$$k = (kE + GP)\frac{\partial f}{\partial x} + (kF + GQ)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Substituindo k em (1.3), obtemos

$$[P - (kE + GP)f] \frac{\partial f}{\partial x} = -[Q - (kF + GQ)f] \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Uma vez que f satisfaz ii), pelo Lema 4.11 temos $\text{mdc}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = 1$, assim existe um polinômio D tal que

$$P - (kE + GP)f = -D \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Q - (kF + GQ)f = D \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (4.37)$$

Isto prova que o sistema (1.1) tem a forma (4.35) com $A = kE + GP$ e $B = kF + GQ$.

De (4.36) temos que $\text{gr } E = \text{gr } F \leq n$, o que nos dá que $\text{gr } A \leq m - n$ e $\text{gr } B \leq m - n$. Da equação (4.37) e da afirmação anterior concluímos que $\text{gr } D \leq m - n + 1$. ■

Teorema 4.13. *Um sistema cúbico possui uma curva algébrica invariante irreduzível contendo um oval regular no infinito de grau 3 se, e somente se, este sistema pode ser escrito através de uma mudança de variáveis afim na forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(l + mx + ny)H_y(x, y) + r(H(x, y) - h) = P(x, y), \\ \dot{y} &= (l + mx + ny)H_x(x, y) + s(H(x, y) - h) = Q(x, y). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Onde l, m, n, r e s são constantes reais, $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$, $H(x, y)$ é definido em (4.30), $h \in \Sigma = (0, 1/6)$, $b^2 - 4a^3 \neq 0$, $(b, h) \neq (0, (1 + 3a)/(24a^3))$ e o sistema

$$H(x, y) = h, \quad l + mx + ny = 0 \quad (4.39)$$

não possui soluções para $x \in (x_1(h), x_2(h))$, onde $(x_1(h), 0)$ e $(x_2(h), 0)$ são os dois pontos de intersecção da componente fechada de $H(x, y) = h$ com o eixo x . Mais ainda:

- a) a órbita fechada algébrica é um ciclo limite hiperbólico se, e somente se, $mr + ns \neq 0$
- b) se $mr + ns = 0$, então o sistema (4.38) não possui ciclos limite.

Demonstração. Se $\text{mdc}(H_x, H_y) \neq 1$, então existe uma curva tal que cada ponto é uma singularidade do sistema Hamiltoniano (4.33). Porém, este retrato de fase não aparece na figura 1 de [15]. Portanto, temos que ter $\text{mdc}(H_x, H_y) = 1$. Por outro lado, a curva $H(x, y) = h$ é regular no infinito se, e somente se, $b^2 - 4a^3 \neq 0$. Pela Proposição 4.9 temos que $H(x, y) = h$ é irreduzível se, e somente se, $(b, h) \neq (0, (1 + 3a)/(24a^3))$.

A Proposição 4.9 e o Lema 4.12 implicam que o sistema cúbico com uma curva algébrica fechada de grau 3 pode ser escrito através de uma mudança de variáveis afim na forma (4.38). Esta curva fechada pode ser um ciclo limite, um laço homoclínico, um laço heteroclínico ou uma órbita periódica circundando um centro.

Seja Γ_h o oval da curva algébrica $H(x, y) = h$. Então, Γ_h é uma órbita periódica do sistema (4.38) se, e somente se, não existe nenhuma singularidade em Γ_h . Existem dois tipos de singularidades em $H(x, y) = h$, aqueles cujas coordenadas satisfazem

$$H(x, y) = h, \quad H_y(x, y) = 0, \quad H_x(x, y) = 0 \quad (4.40)$$

e aqueles cujas coordenadas satisfazem (4.39). Pela Proposição 4.9, singularidades satisfazendo (4.40) não existem. Portanto, (4.39) não possui solução no intervalo $(x_1(h), x_2(h))$ se, e somente se, Γ_h é uma órbita periódica do sistema (4.38). Temos que um ciclo limite é hiperbólico se, e somente se

$$\int_0^{T(h)} \operatorname{div}(P, Q) dt = \int_0^{T(h)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) dt \neq 0, \quad (4.41)$$

onde $T(h)$ é o período de Γ_h . Uma vez que $H(x, y) = h$ é uma curva algébrica invariante temos que nela $H_x(x, y)dx + H_y(x, y)dy = 0$. Por outro lado, pelo sistema (4.38) obtemos

$$dt = \frac{dx}{P(x, y)}.$$

Uma vez que o oval Γ_h está sobre a curva algébrica $H(x, y) = h$, no cálculo da integral (4.41) teremos no denominador $P(x, y) = -(l + mx + ny)H_y(x, y)$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^{T(h)} \operatorname{div}(P, Q) dt &= \oint_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) \frac{dx}{P(x, y)} \\ &= \oint_{\Gamma_h} \frac{(r + n)H_x(x, y) + (s - m)H_y(x, y)}{-(l + mx + ny)H_y(x, y)} dx \\ &= \oint_{\Gamma_h} \frac{m - s}{l + mx + ny} dx - \oint_{\Gamma_h} \frac{(r + n)H_x(x, y)}{(l + mx + ny)H_y(x, y)} dx \\ &= \oint_{\Gamma_h} \frac{m - s}{l + mx + ny} dx + \oint_{\Gamma_h} \frac{r + n}{(l + mx + ny)} dy \\ &= \iint_{\operatorname{Int}\Gamma_h} \frac{mr + ns}{(l + mx + ny)^2} dx dy, \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos o Teorema de Green e supomos que Γ_h tem orientação anti-horária. Portanto, a órbita periódica Γ_h é um ciclo limite hiperbólico se, e somente se, $mr + ns \neq 0$. Assim provamos a afirmação a).

Se $mr + ns = 0$, $m^2 + n^2 \neq 0$, então $l + mx + ny = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_1(x, y) = nH_x(x, y) - mH_y(x, y)$. Por outro lado, o cofator da curva algébrica invariante $H(x, y) = h$ é $K_2(x, y) = rH_x(x, y) + sH_y(x, y)$. Portanto, $sK_1(x, y) + mK_2(x, y) \equiv 0$. Segue do Teorema de Darboux 3.9 que o sistema (4.38) possui uma integral primeira da forma

$$H_1 = (l + mx + ny)^s (H(x, y) - h)^m.$$

Se $m = n = 0$, $l \neq 0$, então o sistema (4.38) possui uma integral primeira da forma

$$H_2 = l \ln |H(x, y) - h| + sx - ry.$$

Portanto, das duas equações acima segue a afirmação b). ■

Com o auxílio dos resultados anteriores obteremos as seguintes proposições, que permitirão demonstrar o resultado principal da seção.

Proposição 4.14. *Se $r \neq 0$, $(a, b) \in \Omega$, $h \in \Sigma$, $l \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ e $(b, h) \neq (0, (1 + 3a)/(24a^3))$, então o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x-l)H_y(x, y) + r(H(x, y) - h) = \bar{P}(x, y), \\ \dot{y} &= (x-l)H_x(x, y) + s(H(x, y) - h) = \bar{Q}(x, y),\end{aligned}\tag{4.42}$$

possui um ciclo limite algébrico hiperbólico de grau 3, onde $H(x, y)$, Ω , Σ estão definidos como no Lema 4.8.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que não existem singularidades sobre o oval Γ_h da curva algébrica $H(x, y) = h$. Existem dois tipos de pontos críticos em $H(x, y) = h$: aqueles cujas coordenadas satisfazem (4.40), e aqueles cujas coordenadas satisfazem

$$H(x, y) = h, \quad x = l.\tag{4.43}$$

Sabemos que singularidades satisfazendo (4.40) não existem pela Proposição 4.9.

Denotado por $\Gamma_{1/6}$, o laço homoclínico do sistema quadrático hamiltoniano (4.33) é definido por $H(x, y) = \frac{1}{6}$. Através de uma computação direta sabemos que $\Gamma_{1/6}$ intersecta o eixo x nos pontos $(1, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$, o que implica que a linha $x = l$ não intersecta $\Gamma_{1/6}$. Uma vez que na órbita fechada Γ_h do sistema (4.33) encontra-se a região limitada pelo laço homoclínico $\Gamma_{1/6}$, esta órbita não intersecta a linha $x = l$. Portanto, não existem singularidades sobre o oval Γ_h da curva algébrica $H(x, y) = h$ para $h \in \Sigma$, o que mostra que Γ_h é uma órbita periódica.

Através dos mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 4.13, obtemos que

$$\int_0^{T(h)} \operatorname{div}(\bar{P}, \bar{Q}) dt = \oint_{\Gamma_h} \frac{1-s}{x-l} dx + \frac{r}{x-l} dy = -\operatorname{sgn}(l) \iint_{\operatorname{int}\Gamma_h} \frac{r}{(x-l)^2} dx dy \neq 0,$$

onde $T(h)$ é o período da órbita periódica Γ_h . Consequentemente, Γ_h é um ciclo limite algébrico hiperbólico irredutível de grau 3. ■

Teorema 4.15. *Qualquer oval de uma curva algébrica irredutível $f(x, y) = 0$ de grau k sem pontos (x, y) satisfazendo $\partial f(x, y)/\partial x = \partial f(x, y)/\partial y = 0$ é um ciclo limite algébrico de uma conveniente equação diferencial polinomial de grau i , $i \geq k + 1$.*

Demonstração. Se uma curva algébrica $f(x, y) = 0$ de grau k contém um oval sem pontos (x, y) satisfazendo $\partial f(x, y)/\partial x = \partial f(x, y)/\partial y = 0$, então esta é uma órbita fechada do sistema Hamiltoniano $\dot{x} = \partial f(x, y)/\partial y$, $\dot{y} = -\partial f(x, y)/\partial x$. Seja $f(x, y) = h$ uma integral primeira deste sistema hamiltoniano e (h_c, h_s) o intervalo máximo de existência de órbitas fechadas $\Gamma_h \subset \{(x, y); f(x, y) = h\}$, $h_c < 0 < h_s$. Considere a equação diferencial polinomial perturbada de grau $i \geq k + 1$

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon f(x, y)(y + x^{i-k}).\tag{4.44}$$

Segue de um cálculo direto que $f(x, y) = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema (4.44) com cofator $K(x, y) = \varepsilon f_y(x, y)(y + x^{i-k})$. A integral Abeliana, associada ao sistema (4.44), é dada por

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} f(x, y)(y + x^{i-k}) dx = hI_0(h),\tag{4.45}$$

onde supomos que o oval Γ_h possui a orientação horária e

$$I_0(h) = \oint_{\Gamma_h} y \, dx = \iint_{\text{int}\Gamma_h} dx dy \neq 0. \quad (4.46)$$

Para a conclusão do resultado utilizaremos as afirmações a seguir, que podem ser vista em [16].

É bem conhecido que a função deslocamento do sistema perturbado (4.44) pode ser expressa na forma

$$d(h, \varepsilon) = \varepsilon I(h) + O(\varepsilon^2)$$

e valem as seguintes afirmações quando $I(h) \neq 0$:

- a) Se existe $h^* \in (h_c, h_s)$ tal que $I(h^*) = 0$ e $I'(h^*) \neq 0$, então o sistema (4.44) possui um único ciclo limite bifurcando a partir de Γ_{h^*} , mais ainda, este ciclo limite é hiperbólico.
- b) O número total (contando as multiplicidades) de ciclos limite do sistema (4.44) bifurcando a partir do anel periódico de sistema hamiltoniano (4.44) com $\varepsilon = 0$ é limitado pelo número máximo de zeros isolados (levando em conta suas multiplicidades) da integral Abeliana $I(h)$ para $h \in (h_c, h_s)$.
- c) $I(h)$ é uma função analítica em $h \in (h_c, h_s)$.

Observe que $I(h)$ possui um único zero em $h = 0$ e $I'(0) = I_0(0) \neq 0$. Uma vez que (4.45) e (4.46) implicam que $d(h, \varepsilon) \neq 0$, segue que oval contido em $f(x, y) = 0$ é um ciclo limite algébrico hiperbólico. ■

Como consequência dos resultados anteriores, estamos em condições de enunciar o resultado principal da seção.

Teorema 4.16. *Qualquer oval de uma curva algébrica irredutível $f(x, y) = 0$ de grau 3 sem pontos (x, y) satisfazendo $\partial f(x, y)/\partial x = \partial f(x, y)/\partial y = 0$ é um ciclo limite algébrico de uma conveniente equação diferencial polinomial de grau i , $i \geq 3$.*

Demonstração. A afirmação segue diretamente da Proposição 4.14 e Teorema 4.15. ■

4.5 Sistemas cúbicos com dois ciclos limite algébricos

Ao contrário do que até o momento sabemos para sistemas quadráticos, podem ocorrer sistemas cúbicos com dois ciclos limite algébricos. Na próxima proposição apresentaremos um sistema cúbico com dois ciclos limite algébricos circundando dois focos diferentes, um estando contido em $x > 0$ e outro em $x < 0$.

Proposição 4.17. *O sistema cúbico:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(10 + xy), \\ \dot{y} &= 20x + y - 20x^3 - 2x^2y + 4y^3,\end{aligned}\tag{4.47}$$

possui dois ciclos limite algébricos contidos na curva algébrica invariante:

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = -\frac{1}{8}.\tag{4.48}$$

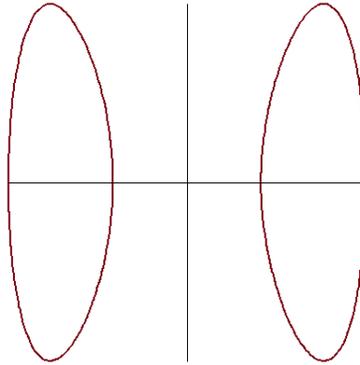


Figura 4.7: curva invariante do sistema da Proposição 4.17

Demonstração. O sistema (4.47) possui três singularidades no plano finito: uma sela em $(0, 0)$ e dois focos estáveis em $(\pm 1, 0)$. O sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3,$$

possui a integral primeira $H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h$ a qual corresponde a duas órbitas fechadas circundando o centro $(\pm 1, 0)$ se $h \in (-1/4, 0)$. Isto significa que a curva algébrica (4.48) contém dois ovals. É fácil provar que (4.48) é uma curva algébrica invariante para o sistema (4.47) com cofator $K(x, y) = 8y^2$. Uma vez que não existem singularidades do sistema (4.47) sobre a curva (4.48) e os focos $(\pm 1, 0)$ estão dentro dos dois ovals, segue o resultado. ■

Problema em aberto 2: *Em sistemas cúbicos permanecem em aberto os seguintes problemas:*

- i) Qual é o grau máximo para um ciclo limite algébrico de um sistema cúbico?*
- ii) Existe uma cadeia de transformações racionais que dão exemplos de sistemas cúbicos com ciclos limite algébricos de grau arbitrário?*
- iii) O número máximo de ciclos limite algébricos que um sistema cúbico pode ter é 2?*

Referências

- [1] Belevee, P.S., Valeeva R.T. *A class of dynamic systems with algebraic limit cycles*, Kuibyshev Gos. Ped. Inst. Nauchn. Trudy **232** (1979), 5-8 (in Russian).
- [2] Chavarriga, J. *A new example of a quartic algebraic limit cycle for quadratic systems*. Preprint 1999.
- [3] Chavarriga, J., Llibre, J. *Invariant algebraic curves and rational first integrals for planar polynomial vector fields*, J. Differential Equations **169** (2001), 1-16.
- [4] Chavarriga, J., Llibre, J., Giacomini, H. *Uniqueness of Algebraic Limit Cycles for Quadratic Systems* Journal of Mathematical Analysis and Applications **261** (2001), 85-99.
- [5] Chavarriga, J., Llibre, J., Moulin Ollagnier, J., *On a result of Darboux*. LMS J. Comput. Math **4** (2001), 197-2010 (eletronic).
- [6] Chavarriga, J., Llibre, J., Sorolla J. *Algebraic limit cycles of degree 4 for quadratic systems*. J. Diff. Eqns. **200** (2004), 206-44.
- [7] Ch'in, Yuan-shün, *On algebraic limit cycles of degree 2 of the differential equation $dx/dy = \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij}x^i y^j / \sum_{0 \leq i+j \leq 2} b_{ij}x^i y^j$* , Sci. Sinica **7** (1958), 934-945.
- [8] Christopher, C., Llibre, J., Świrszcz, G. *Invariant algebraic curves of large degree for quadratic system*, J. Math. Anal. Appl. **303** (2005), 450-61.
- [9] Christopher, C., Llibre, J., Pantazi C., Zhang X *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (2002), 2457-76.
- [10] Evdokimenco, R.M. *Behavior of integral curves of a dynamical system*, Differential Equations **9** (1974), 1095-1103.
- [11] Evdokimenco, R.M. *Construction of algebraic paths and the qualitative investigation in the large of the properties of integral curves of a system of differential equations*, Differential Equations **6** (1970), 1349-1358.
- [12] Evdokimenco, R.M. *Investigation in the large of a dynamical system with a given integral curve*, Differential Equations **15** (1979), 215-221.
- [13] Filipstov, V.F. *Algebraic limit cycles*, Differential Equations **9** (1973), 983-988.

- [14] Fulton, W. *Algebraic Curves. An introduction to Algebraic Geometry*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 2008.
- [15] Horozov, E., Iliev I. D. *Linear estimate for the number of zeroes of Abelian integrals with cubic Hamiltonians*, Nonlinearity **11** (1998) 1521-37.
- [16] Li C. *Abelian integrals and limit cycles*, Limit Cycles of Differential Equations Series: Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona. (2007)
- [17] Liu D. *The cubic systems with cubic curve solution $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$* . Northeast Math. J. **5** (1989) 427-47.
- [18] Liu Y-C. *On differential equation with algebraic limit cycle of second degree $dy/dx = (a_{10}x + a_{01}y + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3)/(b_{10}x + b_{01}y + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3)$* . Adv. Math. **4** (1958) 143-9.
- [19] Llibre, J., Zhao, Y. *Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations*, J. Phys. A. **40** (2007), 14207-14222.
- [20] Novikov, D., Yakovenko, S. *Redundant Picard-Fuchs system for Abelian integrals*, J. Diff. Eqns. **177** (2001), 267-306.
- [21] Shen, B.Q. *Existence of limit cycles of a system (E_3^2) with elliptic solution*. Chin. Ann. Math. A **14** (1993), 698-706 (in Chinese).
- [22] Sorolla, J. *On the algebraic limit cycles of quadratic systems*. 94 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Department de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra. 2004.
- [23] Yablonskii, A.I. *On limit cycles of certain differential equations*, Differential Equations **2** (1966), 164-168.
- [24] Ye Yian-Qian. *Theory of limit cycles*, Translations of Math. Monographs, Vol. 66, American Mathematical Society, Providence, 1986.