



Relatório PIBIC

Problema do Centro-Foco

Vigência do projeto: agosto 2020 - setembro 2021
Aluno (voluntário): João Pedro Moresca Martins - RA 199759
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

1 Introdução

Neste relatório descrevemos o que foi feito durante o período de vigência do projeto. Estudamos o comportamento qualitativo de sistemas lineares de equações diferenciais em duas dimensões até a construção do diagrama traço-determinante. Fizemos também alguns avanços nas técnicas para encontrar o retrato de fase de alguns sistemas lineares em três dimensões.

O objetivo principal do projeto é, no entanto, estudar os centros em sistemas bidimensionais não-lineares e buscar meios de determinar quando ocorrem.

Sendo assim, abordamos o teorema de Hartman-Grobman e explicamos o problema do centro-foco.

Depois, trabalhamos um pouco com campos reversíveis e hamiltonianos, onde a identificação de centros pode ser um pouco mais fácil e discutimos a aplicação de Poincaré em sistemas cuja linearização é um centro.

Por último, analisamos um algoritmo para o cálculo das constantes de Lyapunov.

Ao longo deste projeto, fizemos uso do software Mathematica para plotar retratos de fase e fazer alguns cálculos relacionados às constantes de Lyapunov.

Vamos, agora, introduzir algumas noções que serão úteis no desenvolvimento deste relatório:

Notação 1 Neste projeto, temos como principal objeto de estudo equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, ou seja, equações da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde f é um campo vetorial em \mathbb{R}^n . Da teoria de equações diferenciais, temos que, se f é, pelo menos, de classe C^1 , o problema acima admite solução maximal única, que denotaremos por $\varphi(t)$ ou $x(t)$, definida em algum intervalo de \mathbb{R} contendo o zero.

Notação 2 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 definido no aberto U do \mathbb{R}^n e $p \in U$. Denotaremos por $\varphi_t(p)$ a solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

definida no intervalo maximal $I_p \subset \mathbb{R}$. Chamaremos $\varphi_t(p)$ a trajetória de f por p . Vem da teoria de equações diferenciais que $\varphi_t(p)$ é contínua em t e em p .

Definição 1 (Órbita) Uma órbita do campo f por p é o conjunto

$$\gamma_p = \{\varphi_t(p) : t \in I_p\}.$$

Dizemos que a órbita γ_p é periódica quando existe número real $T > 0$ tal que $\varphi_T(p) = p$.

Outro resultado básico da teoria de EDO's é que $q \in \gamma_p$ se, e somente se, $\gamma_q = \gamma_p$. Podemos, então, decompor o aberto U como união disjunta de órbitas. Podemos também designar uma orientação às órbitas de f da seguinte maneira:

Definição 2 Dada uma órbita γ de f e uma parametrização $\xi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de γ de classe C^1 , dizemos que ξ está orientada pelo campo f se

$$\langle \xi'(t), f(\xi(t)) \rangle > 0, \forall t \in J.$$

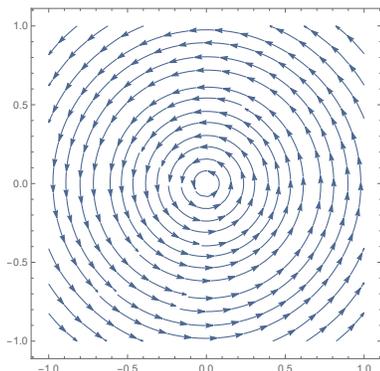
A decomposição do aberto U mencionada acima munida da orientação proveniente de f é denominada o *Retrato de Fase* do campo f .

Neste projeto, nosso interesse se concentra em estudar retratos de fase de campos bidimensionais nas vizinhanças de *singularidades isoladas*.

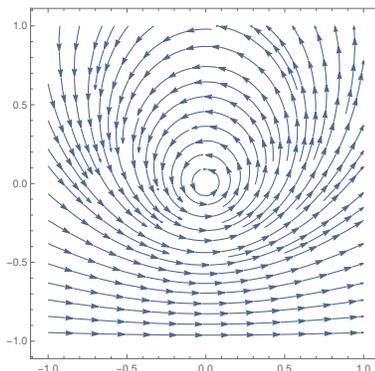
Definição 3 Dizemos que o ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é uma singularidade do campo f quando $f(p) = 0$. Além disso, se houver vizinhança perfurada V de p tal que $f(x) \neq 0, \forall x \in V$, dizemos que p é uma singularidade isolada de f .

Em \mathbb{R}^2 há vários tipos de retratos de fase que podem aparecer ao redor de uma singularidade isolada. Estamos particularmente interessados em retratos do tipo *Centro*:

Definição 4 (Centro) Dizemos que o retrato de fase de um campo f definido em um aberto de \mathbb{R}^2 ao redor de uma singularidade isolada p é do tipo *Centro*, se existir uma vizinhança perfurada V de p tal que, para todo $x \in V$, γ_x é periódica. Podemos dizer também que a singularidade p é do tipo *Centro*.



Retrato de fase do tipo centro proveniente de um campo linear



Retrato de fase do tipo centro proveniente de um campo não-linear

2 Sistemas lineares em 2D

Aqui, vamos considerar a EDO linear

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in M_2(\mathbb{R}) \quad (1)$$

cuja solução está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e é dada por

$$x(t) = e^{At}$$

onde a exponencial de uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ é definida pela expressão

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} B^i.$$

Uma órbita desse campo passando pelo ponto $p \in \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\gamma_p = \{\varphi_t(p) : t \in \mathbb{R}\} = \{e^{At}p : t \in \mathbb{R}\}.$$

Uma propriedade interessante da exponencial de matrizes é que, se C e D são matrizes $n \times n$ e existe uma matriz M tal que $CM = MD$, então $e^{Ct}M = Me^{Dt}$. Para provar esse fato, note que, para todo k natural, temos $C^k M = MD^k$. De fato, suponha que $C^{k-1}M = MD^{k-1}$. Então $C^k M = CC^{k-1}M = CMD^{k-1} = MDD^{k-1} = MD^k$. Com isso, temos

$$e^{Ct}M = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} C^i t^i \right) M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} C^i M t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} M D^i t^i = M \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i t^i \right) = Me^{Dt}$$

Como consequência disso, se J é a forma de Jordan da matriz A , temos

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1}$$

onde $MJM^{-1} = A$.

Assim, o comportamento do sistema pode ser expresso em termos dos autovalores da matriz A . Em particular, no caso bidimensional, se esses autovalores possuem parte real igual a zero e parte imaginária diferente de zero, $p = 0$ será uma singularidade isolada do tipo centro.

De fato, suponha que os autovalores de A sejam da forma $\lambda = \pm\alpha i$, onde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então $\det A = \alpha^2 \neq 0$ e, assim, $p = 0$ é a única singularidade do campo (1) e, portanto, é isolada. Pelo que vimos acima, podemos, sem perda de generalidade, assumir que A está na sua forma de Jordan, que é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular a exponencial de At vamos mostrar indutivamente que

$$(At)^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n (\alpha t)^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n (\alpha t)^{2n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (At)^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} (\alpha t)^{2n+1} \\ (-1)^n (\alpha t)^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo rápido confirma a validade das expressões para o caso $n = 0$. Agora, supondo-as válidas para $n - 1$, temos

$$\begin{aligned}(At)^{2n} &= (At)^{2(n-1)} \cdot (At)^2 \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{(n-1)}(\alpha t)^{2(n-1)} & 0 \\ 0 & (-1)^{(n-1)}(\alpha t)^{2(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(\alpha t)^2 & 0 \\ 0 & -(\alpha t)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n(\alpha t)^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n(\alpha t)^{2n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A segunda expressão se demonstra de maneira análoga. Com isso,

$$\begin{aligned}e^{At} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} (At)^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} (At)^{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \begin{pmatrix} (-1)^i(\alpha t)^{2i} & 0 \\ 0 & (-1)^i(\alpha t)^{2i} \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{i+1}(\alpha t)^{2i+1} \\ (-1)^i(\alpha t)^{2i+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} (-1)^i (\alpha t)^{2i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} (-1)^i (\alpha t)^{2i} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} (-1)^i (\alpha t)^{2i+1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} (-1)^i (\alpha t)^{2i+1} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Observe que as séries que aparecem nas entradas das matrizes são as expansões em série de Taylor de seno e cosseno. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}e^{At} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\text{sen}(\alpha t) \\ \text{sen}(\alpha t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\text{sen}(\alpha t) \\ \text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Para um ponto qualquer $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ temos

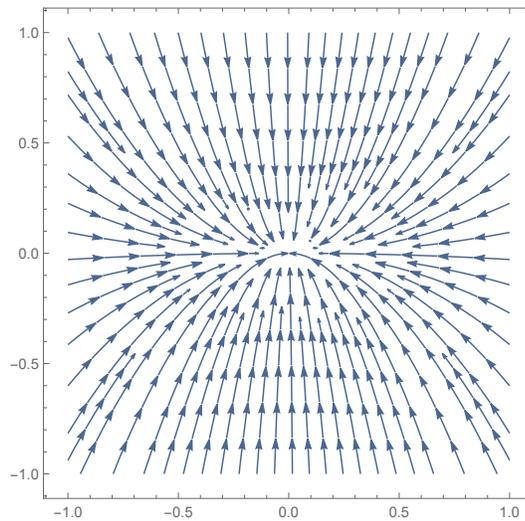
$$\varphi_t(p) = e^{At}p = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\text{sen}(\alpha t) \\ \text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha t) - y \text{sen}(\alpha t) \\ x \text{sen}(\alpha t) + y \cos(\alpha t) \end{pmatrix}$$

Portanto, para $T = 2\pi/\alpha$, temos $\varphi_t(p) = p$, ou seja, a órbita que passa por p é periódica. Esse resultado nos diz que todas as órbitas não singulares desse campo são periódicas, portanto o retrato de fase é do tipo centro.

Os outros tipos de retratos de fase do campo (1) podem ser encontrados de maneira semelhante, calculando-se a exponencial da matriz A . Como mencionamos anteriormente, em campos lineares, essa classificação pode ser inteiramente

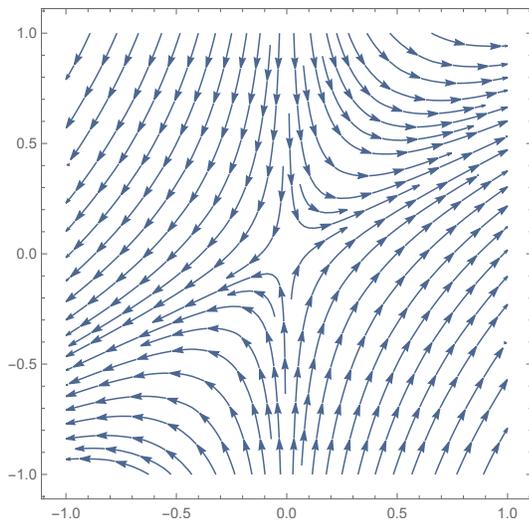
feita olhando apenas para os autovalores de A . A seguir, daremos uma breve descrição dos outros tipos de retratos de fase de um campo linear ao redor de uma singularidade isolada e como devem ser os autovalores de A para que ocorram.

- *Nó*: pode ser atrator ou repulsor. Dizemos que um nó é atrator quando todas as órbitas se aproximam da origem quando $t \rightarrow \infty$ e que é repulsor quando se aproximam da origem quando $t \rightarrow -\infty$. Ocorre quando os autovalores de A são reais e têm o mesmo sinal. É atrator quando são negativos e repulsor quando são positivos. Quando os autovalores são iguais, o nó é dito *degenerado*;



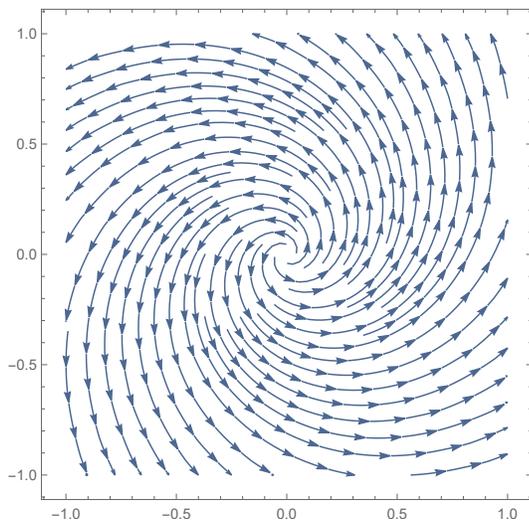
Nó atrator, retrato de fase de (1) com $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

- *Sela*: com exceção a um número finito de órbitas, todas elas se afastam da origem quando $t \rightarrow \pm\infty$. Ocorre quando os autovalores de A são reais e têm sinais opostos;



Sela, retrato de fase de (1) com $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- *Foco*: órbitas espiralam ao redor da origem. Assim como o nó, pode ser atrator ou repulsor. Ocorre quando os autovalores de A são complexos não reais com parte real diferente de zero. Quando essa parte real é negativa, o foco é atrator e, quando é positiva, é repulsor.



Foco repulsor, retrato de fase de (1) com $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Agora, observe que os autovalores da matriz A podem ser determinados pela equação

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad (2)$$

que possui solução

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \quad (3)$$

Isso motiva a criação de um diagrama que represente todos os possíveis retratos de fase do sistema (1) em função do traço e do determinante da matriz A .

Para isso, vamos olhar para o discriminante $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$ da equação (2). Ele nos dará todas as informações necessárias para saber a natureza dos autovalores de A .

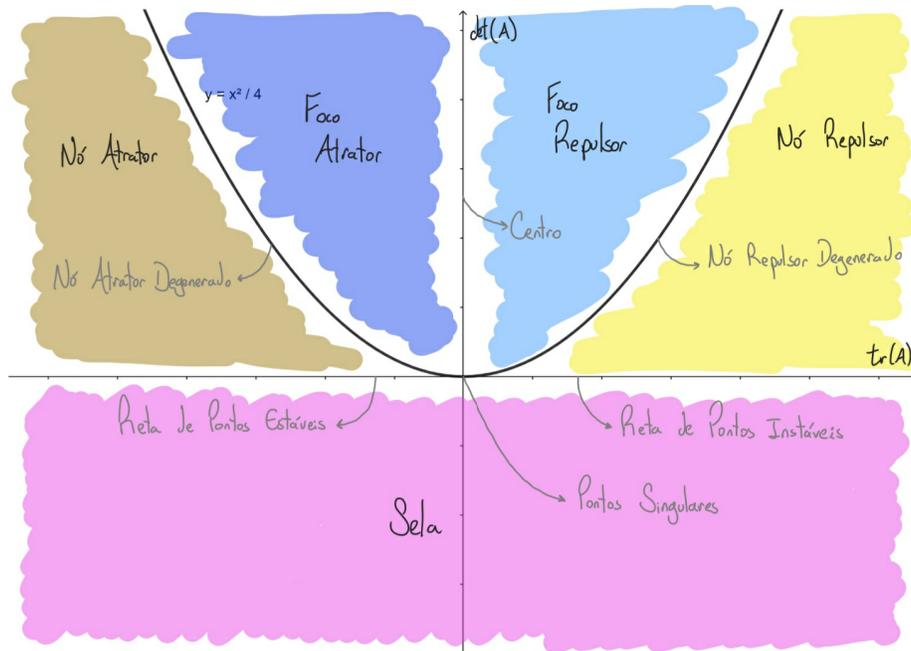
Da equação (3) e das relações entre os autovalores de A e o retrato de fase de (1) mostradas acima, chegamos nas seguintes relações:

- Se $\det(A) < 0$, temos uma *Sela*
- Se $0 < \det(A) \leq \text{tr}(A)^2/4$, temos um *Nó*, degenerado quando há igualdade
- Se $0 < \text{tr}(A)^2/4 < \det(A)$, temos um *Foco*
- Se $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$, temos um *Centro*

Podemos detalhar ainda mais se notarmos que $\text{tr}(A) > 0$ faz com que nós e focos sejam repulsores e $\text{tr}(A) < 0$ faz com que sejam atratores.

Podemos, ainda, classificar os retratos de fase da matriz A quando a mesma não é invertível, i.e., quando $\det(A) = 0$, calculando a exponencial de A . Nesse caso, quando $\text{tr}(A) \neq 0$, há uma reta de descontinuidades ao invés de um ponto. Se $\text{tr}(A) > 0$, o retrato de fase consiste de semiretas que se afastam da reta de descontinuidades quando $t \rightarrow \infty$. Se $\text{tr}(A) < 0$, essas semiretas se afastam da reta de descontinuidades quando $t \rightarrow -\infty$. Por último, quando $\text{tr}(A) = 0$, o sistema só possui pontos singulares.

Tendo em vista essas relações, o diagrama traço-determinante pode ser concebido como sendo a curva $y = x^2/4$ no plano $\det(A)$ por $\text{tr}(A)$. Cada região delimitada pela curva e pelos eixos corresponde a um tipo de retrato de fase:



Assim, o diagrama traço-determinante constitui uma maneira fácil e rápida de identificar o retrato de fase de um sistema linear bidimensional.

3 Sistemas lineares hiperbólicos em 3D

Nesta seção forneceremos apenas uma intuição sobre como desenhar retratos de fase de alguns sistemas lineares em três dimensões, visto que o foco do projeto é em sistemas bidimensionais.

Portanto consideraremos novamente o sistema (1), mas, dessa vez, vamos supor $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz *hiperbólica*, ou seja, que não possui autovalores com parte real nula.

Para entender melhor o comportamento desses sistemas, vamos introduzir a definição de subespaço estável e subespaço instável:

Definição 5 Se $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2, 3$ são os autovalores da matriz A e $w_j = u_j + iv_j$ são os autovetores associados a λ_j , então definimos

$$E^s = \text{span}\{u_j, v_j \mid a_j < 0\}$$

$$E^u = \text{span}\{u_j, v_j \mid a_j > 0\}$$

os subespaços estável e instável respectivamente, ou seja, os subespaços gerados pelas partes real e imaginária dos autovetores associados aos autovalores com parte real menor que zero e maior que zero, respectivamente. Vamos dizer que esses subespaços estão associados aos autovalores com parte real negativa e positiva respectivamente.

Esses subespaços de \mathbb{R}^3 são invariantes por A e são tais que $\mathbb{R}^3 = E^s \oplus E^u$.

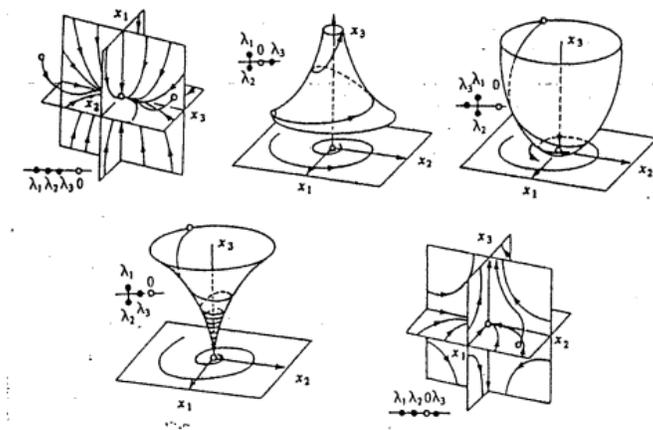
Para encontrar o retrato de fase de um sistema linear hiperbólico em 3D, primeiro devemos encontrar esses subespaços.

Como estamos em três dimensões e $\mathbb{R}^3 = E^s \oplus E^u$, podemos ter um subespaço com três dimensões e o outro com zero ou um subespaço com duas dimensões e o outro com uma. No primeiro caso, teremos que todas as trajetórias ou se aproximam da origem para tempo positivo (se $\dim(E^s) = 3$) ou se afastam da origem para tempo positivo (se $\dim(E^u) = 3$). Já no segundo caso, teremos que um dos espaços vai ser um plano e o outro uma reta e eles se intersectam na origem.

Sendo assim, chamando de λ_1 e λ_2 os autovalores de A associados ao espaço bidimensional e λ_3 o autovalor associado à reta, podemos usar λ_1 , λ_2 e o diagrama apresentado na seção anterior para identificar o comportamento das trajetórias no plano, já que os espaços são invariantes por A . Além disso, o sinal da parte real de λ_3 vai nos dizer se as trajetórias na reta se aproximam ou se afastam da origem para tempo positivo. Observe que λ_3 deve ser real e, portanto, deve ser sua própria parte real, já que, caso contrário, seu conjugado complexo seria também um autovalor de A cuja parte real teria o mesmo sinal da parte real de λ_3 e, com isso, teríamos contradição com o fato de o espaço associado a λ_3 ter dimensão 1.

Para desenhar o retrato de fase do sistema nesse caso, devemos, então, fazer o retrato de fase primeiro no plano e depois fazer com que as trajetórias repitam o comportamento apresentado lá, mas se aproximando assintoticamente da reta, seguindo a direção indicada pelo sinal de λ_3 .

Aqui estão alguns exemplos retirados do livro de Jorge Sotomayor [4]:



4 Problema do Centro-Foco

Nesta seção vamos explicar o que é, de fato, o problema do centro-foco, que é o objetivo principal deste projeto. Aqui, começaremos a trabalhar com sistemas não-lineares.

Para entender esse problema, precisamos, primeiro, apresentar o conceito de conjugação de campos vetoriais:

Definição 6 *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe C^1 definidos nos abertos U, V do \mathbb{R}^n e denote por φ_t e ψ_t as trajetórias de f e g , respectivamente. Dizemos que o campo f é topologicamente conjugado (resp. C^r -conjugado) à g se existir um homeomorfismo (resp. C^r -difeomorfismo) $H : V \rightarrow U$ tal que $I_{H(x)}^f = I_x^g =: I$ para todo $x \in V$ e*

$$\varphi_t \circ H = H \circ \psi_t, \quad \forall t \in I.$$

Observe que, se $p \in V$, o homeomorfismo H leva a órbita de g por p para a órbita de f por $H(p)$. De fato,

$$H(\gamma_p^g) = \{H(\psi_t(p)) : t \in I\} = \{\varphi_t(H(p)) : t \in I\} = \gamma_{H(p)}^f.$$

Mais ainda, como $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H(\psi_t(\cdot)) = H\left(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi_t(\cdot)\right)$, H preserva o comportamento das órbitas.

Antes de prosseguirmos, vamos introduzir duas definições.

Definição 7 *Seja p uma singularidade do campo f . Chamamos a matriz $df(p)$ de linearização ou parte linear de f no ponto p .*

Definição 8 *Dizemos que p é uma singularidade hiperbólica do campo f quando $f(p) = 0$ e a matriz $df(p)$ é hiperbólica, ou seja, não possui nenhum autovalor com parte real nula.*

Agora, apresentamos um dos teoremas clássicos da teoria qualitativa de equações diferenciais:

Teorema 1 (Hartman-Grobman) : *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, φ_t sua trajetória e $p \in U$ uma singularidade hiperbólica de f . Denotemos também $A = df(p)$. Então existem vizinhanças $V \subset U$ de p , $W \subset \mathbb{R}^n$ de 0 e um homeomorfismo $H : W \rightarrow V$ tais que*

$$\varphi_t \circ H(x) = H(e^{At}x)$$

para todo $x \in W$ e $t \in J_x$, onde J_x é o intervalo maximal de definição da trajetória do campo $x \mapsto Ax$ restrito a W .

O teorema de Hartman-Grobman, enunciado acima, diz que, se a matriz de linearização de um sistema for hiperbólica, esse sistema é conjugado à sua parte linear em uma vizinhança da singularidade, ou seja, o comportamento qualitativo do sistema nessa vizinhança é igual ao de sua parte linear, o que é um resultado surpreendente e muito útil no estudo desses sistemas.

Porém, se a matriz de linearização do sistema não for hiperbólica, não há nenhum resultado como esse teorema, que avalie o comportamento em uma vizinhança da singularidade.

No caso bidimensional, o que se sabe é que, caso a matriz não seja hiperbólica, o retrato de fase será um centro ou um foco.

O problema do centro-foco trata justamente de saber diferenciar entre os dois no caso de um sistema cuja linearização não seja hiperbólica.

5 Centros Quadráticos e Cúbicos

Nesta seção, vamos apresentar 2 teoremas que tratam da identificação de centros em sistemas polinomiais quadráticos e cúbicos em \mathbb{R}^2 . Será conveniente escrever esses sistemas como

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y). \quad (4)$$

Porém, os teoremas tratam de tipos especiais de centros, os chamados centros *isócronos*.

Na definição (1), definimos uma órbita periódica. O menor número T que satisfaz aquela propriedade é chamado de *período mínimo* da órbita. Se uma singularidade p de um campo C^1 em \mathbb{R}^2 é do tipo centro, todas as órbitas em uma vizinhança perfurada V de p são periódicas. Sendo assim, podemos definir uma função em V , que chamaremos de *função período* de p , que leva $x \in V$ ao período mínimo de γ_x . Da unicidade de soluções, segue que a função período de p está bem definida.

Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 9 (*Centro Isócrono*): *Um centro p de um sistema como (4) é dito isócrono se a função período de p em uma vizinhança perfurada V de p é constante.*

Antes de avançarmos para os teoremas, vamos introduzir a noção de equivalência entre campos vetoriais, que é muito parecida com a noção de conjugação apresentada na seção anterior, mas é mais fraca.

Definição 10 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe C^1 definidos nos abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ e denote por φ_t e ψ_t as trajetórias de f e g , respectivamente. Dizemos que f é topologicamente equivalente (resp. C^r -equivalente) à g se existir um homeomorfismo (resp. C^r -difeomorfismo) $H : U \rightarrow V$ tal que, para todo $p \in U$,*

$$\psi_t(H(p)) = H(\varphi_{\tau_p(t)}(p)), \quad \forall t \in I_{H(p)}^g$$

onde $\tau_p : I_{H(p)}^g \rightarrow I_p^f$ é uma função estritamente crescente.

Grosso modo, a equivalência entre campos vetoriais também preserva o comportamento qualitativo das órbitas, mas, diferentemente da conjugação, não preserva o tempo. Podemos dizer também que a função τ *redimensiona* o tempo.

Agora vamos considerar os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases} \quad (5)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ \dot{y} = x + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{cases} \quad (6)$$

Observe que a linearização de ambos os sistemas é um centro.

Finalmente, apresentamos 2 teoremas muito similares que nos dizem quando esses sistemas serão centros isócronos. Os teoremas foram tirados do artigo [2], de Chavarriga e Sabatini, mas o primeiro foi provado por W. S. Loud e o segundo, por I. A. Pleshkan. Suponha a singularidade na origem.

Teorema 2 *A origem do sistema quadrático (5) é um centro isócrono se, e somente se, o sistema pode, por meio de uma mudança linear de coordenadas e redimensionamento do tempo, ser levado para um dos seguintes sistemas:*

- $\dot{x} = -y + x^2 - y^2, \quad \dot{y} = x(1 + 2y)$
- $\dot{x} = -y + x^2, \quad \dot{y} = x(1 + y)$
- $\dot{x} = -y - \frac{4}{3}x^2, \quad \dot{y} = x(1 - \frac{16}{3}y)$
- $\dot{x} = -y + \frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2, \quad \dot{y} = x(1 + \frac{8}{3}y)$

Teorema 3 *A origem do sistema cúbico (6) é um centro isócrono se, e somente se o sistema pode, por meio de uma mudança linear de coordenadas e redimensionamento do tempo, ser levado para um dos seguintes sistemas:*

- $\dot{x} = -y + x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = x + 3x^2y - y^3$
- $\dot{x} = -y + x^3 - xy^2, \quad \dot{y} = x + x^2y - y^3$
- $\dot{x} = -y + 3x^2y, \quad \dot{y} = x - 2x^3 + 9xy^2$
- $\dot{x} = -y - 3x^2y, \quad \dot{y} = x + 2x^3 - 9xy^2$

Esses dois teoremas basicamente nos dizem que, a menos de equivalência, esses são todos os centros isócronos quadráticos e cúbicos que existem.

6 Campos Reversíveis e Hamiltonianos

Agora, vamos falar um pouco sobre campos hamiltonianos e sobre o conceito de reversibilidade e relacioná-los com centros no plano.

Definição 11 *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial. Dizemos que f é ϕ -reversível se*

$$d\phi(x)f(x) = -f(\phi(x))$$

onde ϕ é uma involução, ou seja, um difeomorfismo tal que $\phi \circ \phi = id$.

Uma propriedade de vital importância no estudo de campos reversíveis é a simetria com respeito ao conjunto dos pontos fixos de ϕ :

Se f é um campo ϕ -reversível, então o retrato de fase do sistema $\dot{x} = f(x)$ é simétrico com relação ao conjunto $Fix(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) = x\}$.

De fato, note que, se f é ϕ -reversível e $x(t)$ é uma solução de $\dot{x} = f(x)$, temos

$$(\phi(x(-t)))' = -d\phi(x(-t))x'(-t) = -d\phi(x(-t))f(x(-t)) = f(\phi(x(-t))).$$

Pela unicidade de soluções, $x(t) = \phi(x(-t))$, o que significa que o retrato de fase é simétrico em relação a $Fix(\phi)$.

Uma consequência direta desse resultado é que, se uma órbita desse sistema toca o conjunto $Fix(\phi)$ em dois pontos distintos, então ela é, necessariamente, uma órbita periódica simétrica.

Apresentamos, agora, o teorema que relaciona campos reversíveis com centros no plano, presente em [1]:

Teorema 4 *Qualquer campo vetorial analítico em \mathbb{R}^2 cuja parte linear seja equivalente a $(-y, x)$ é reversível se, e somente se é um centro.*

Outra noção importante no estudo da teoria qualitativa de equações diferenciais é a de campo hamiltoniano:

Definição 12 *Dizemos que um campo f definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é hamiltoniano se existir $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que*

$$f(x, y) = \left(-\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right).$$

Agora, denotando por φ_t a trajetória de f , observe que, para $x \in U$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\varphi_t(x))) &= dH(\varphi_t(x))f(\varphi_t(x)) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_t(x)), \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_t(x)) \right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_t(x)), \frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_t(x)) \right) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_t(x))\frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_t(x)) + \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_t(x))\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_t(x)) = 0 \end{aligned}$$

A equação acima nos mostra que H é constante ao longo das trajetórias de f . Quando isso acontece, dizemos que H é uma *integral primeira* do campo f .

Observe que isso torna muito mais fácil o estudo das órbitas de f , já que elas serão curvas de nível da função H . Se $H^{-1}(c)$ for uma curva fechada para algum $c \in \mathbb{R}$, f admite, pelo menos, uma órbita periódica.

7 Mapa de Poincaré

Nesta seção, vamos considerar um sistema do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + X(x, y) \\ \dot{y} = x + Y(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

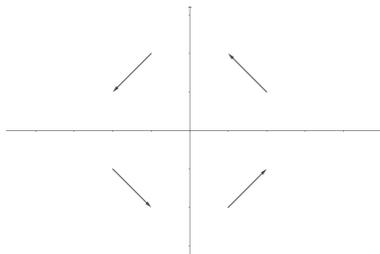
com uma singularidade isolada na origem, onde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ são funções de classe C^1 sem termos lineares. Observe que a linearização do sistema (7) na origem é do tipo centro.

Uma *seção transversal* de um campo f em \mathbb{R}^2 é um segmento de reta transversal às trajetórias de f em determinada região do plano. No nosso caso, vamos considerar uma parcela do eixo x positivo como uma seção transversal do campo (7). De fato, vamos tomar V como na definição (3) e denominar O_x^+ , o eixo x positivo. Como $\dot{y} = x + Y(x, y)$ e $Y(x, y)$ não possui termos lineares, podemos tomar $U \subset V$ uma vizinhança perfurada da origem pequena o suficiente para que $\dot{y} \neq 0$ em U . Então $\Sigma := U \cap O_x^+$ será uma seção transversal de (7).

Agora vamos mostrar que existe $\Sigma_0 \subset \Sigma$ tal que pontos de Σ_0 retornam a Σ através da trajetória do campo (7). A aplicação que leva um ponto de Σ_0 ao seu primeiro ponto de retorno a Σ é chamada de *Mapa de Poincaré*.

De fato, similarmente ao que observamos anteriormente, como $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ não têm termos lineares, podemos tomar uma vizinhança perfurada da origem $\tilde{U} \subset V$ pequena o suficiente para que $\text{sign}(\dot{x}) = \text{sign}(-y)$ e $\text{sign}(\dot{y}) = \text{sign}(x)$ em \tilde{U} .

Desse modo, no primeiro quadrante do plano teremos $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$, no segundo quadrante teremos $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} < 0$, no terceiro, $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$ e no quarto quadrante, $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} > 0$. Assim, as direções do nosso campo serão algo como esta ilustração:



Como as trajetórias são tangentes ao campo e contínuas, temos que, se $q \in \tilde{U} \cap O_x^+$, então $\varphi_t(q)$ retorna ao eixo x positivo para algum $t^* > 0$. Podemos,

então, definir $\Sigma_0 = \tilde{U} \cap O_x^+$ e, se necessário, tomar \tilde{U} menor, de modo que as trajetórias retornem para Σ .

Denotamos o mapa de Poincaré por $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ e, como dissemos anteriormente, dado $q \in \Sigma_0$, $\pi(q)$ é dado por

$$\pi(q) = \varphi_{t^*}(q)$$

onde $t = t^*$ é o menor tempo positivo para o qual $\varphi_t(q) \in \Sigma$.

O mapa de Poincaré é uma importante ferramenta no estudo da teoria qualitativa de equações diferenciais, já que transforma um problema de dinâmica contínua em um de dinâmica discreta, onde pode-se ganhar informações sobre o campo simplesmente olhando para as iterações dessa aplicação.

Um resultado que segue diretamente da definição do mapa de Poincaré é o de que, dado $q \in \Sigma_0$, a órbita γ_q é periódica se, e somente se,

$$\pi(q) = q.$$

Portanto essa aplicação também é muito útil para determinar a ocorrência de centros em sistemas do tipo (7).

8 Algoritmo para as constantes de Lyapunov

Nesta seção, descreveremos o algoritmo desenvolvido por Torregrosa para o cálculo das constantes de Lyapunov, seguindo [5].

Para entender um pouco melhor o que são essas constantes, introduzimos o conceito de uma *função de Lyapunov*:

Definição 13 *Seja f um campo vetorial C^1 definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e p uma singularidade de f . Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov de f em p se h é C^1 e satisfaz:*

- a) $h(p) = 0$ e $h(x) > 0$ para todo $x \neq p$
- b) $fh(x) := \langle \nabla h(x), f(x) \rangle < 0$ para todo $x \neq p$

Se f admite função de Lyapunov em p , então existe vizinhança $V_0 \subset U$ de p tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(q) = p$ para todo $q \in V_0$, onde φ_t é a trajetória do campo f . Quando tal vizinhança V_0 existe, p é dita uma singularidade *assintoticamente estável*.

Quando temos $fh(x) > 0$ em vez de $fh(x) < 0$ no item b) da definição (13), existe vizinhança $V \subset U$ de p tal que, para toda vizinhança $V_0 \subset V$ de p , γ_q escapa de V para algum $q \in V_0$. Nesse caso, dizemos que p é *instável*.

Em [5], o valor das constantes de Lyapunov determina uma possível função de Lyapunov, como veremos na equação (8) à frente.

Este algoritmo faz uso de *coordenadas complexas* para reescrever o sistema (4):

Chamando $z = x + iy$, temos $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Substituindo em (4):

$$\begin{aligned}
\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} &= X(x, y) + iY(x, y) \\
&= X\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iY\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\
&:= Z(z, \bar{z})
\end{aligned}$$

Nosso interesse nesta seção é, novamente, em sistemas como (7). Então vamos trabalhar, em coordenadas complexas, com sistemas da forma $\dot{z} = iz + Z(z, \bar{z})$.

Agora, escrevemos $Z(z, \bar{z}) = Z_2(z, \bar{z}) + Z_3(z, \bar{z}) + \dots$, onde cada $Z_j(z, \bar{z})$ é um termo polinomial homogêneo de grau j .

O algoritmo se baseia na equação

$$\dot{F} = \sum_{k \geq 1} V_{2k+1} (z\bar{z})^{k+1} \quad (8)$$

onde $F = F_2 + F_3 + \dots$ é uma função de z e \bar{z} , com F_k um polinômio homogêneo de grau k e V_{2k+1} são as constantes de Lyapunov. Para encontrar as constantes, temos que encontrar as F_k 's. Se a primeira V_{2k+1} for negativa, F vai ser uma função de Lyapunov e a origem vai ser assintoticamente estável. Se ela for positiva, a origem vai ser instável. Se todas as constantes forem zero, Torregrosa mostrou que a origem é um centro.

Como $F = F(z, \bar{z})$, temos $\dot{F} = F_z \dot{z} + F_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$. Com isso, os termos F_k podem ser encontrados recursivamente através da equação

$$\begin{aligned}
&(F_{2z} + F_{3z} + \dots)(iz + Z_2 + Z_3 + \dots) + \\
&+(F_{2\bar{z}} + F_{3\bar{z}} + \dots)(-i\bar{z} + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \dots) = \\
&= V_3 (z\bar{z})^2 + V_5 (z\bar{z})^3 + \dots
\end{aligned}$$

Para o termo de grau 2, temos $izF_{2z} - i\bar{z}F_{2\bar{z}} = 0 \implies zF_{2z} - \bar{z}F_{2\bar{z}} = 0$, uma equação diferencial parcial que tem como solução $F_2(z, \bar{z}) = c(z\bar{z})$, onde c é qualquer constante complexa. Escolhemos $c = 1/2$ e ficamos com $F_2 = (z\bar{z})/2$.

Para os outros casos, definimos $\phi_{l,k} := F_{l_z} Z_k + F_{l_{\bar{z}}} \bar{Z}_k$ e temos, para grau p ,

$$-izF_{p_z} + i\bar{z}F_{p_{\bar{z}}} = \sum_{k=2}^{p-1} \phi_{p-k+1,k} - V_{p-1} (z\bar{z})^{\frac{p}{2}}$$

com $V_{p-1} = 0$ quando p é ímpar.

Escrevendo $F_p(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^p h_{p-j,j} z^{p-j} \bar{z}^j$, com algumas manipulações algébricas, Torregrosa chega em

$$\sum_{j=0}^p (2j - p) h_{p-j,j} z^{p-j} \bar{z}^j = -i \sum_{k=2}^{p-1} \phi_{p-k+1,k} + iV_{p-1} (z\bar{z})^{\frac{p}{2}}$$

o que dá origem a diferentes sistemas lineares, dependendo da paridade de p .

Quando p é ímpar, obtemos um sistema cuja matriz de coeficientes é diagonal e tem determinante não nulo. Além disso, $V_{p-1} = 0$ e não aparece na equação. A solução do sistema é dada por

$$h_{p-j,j} = \frac{\tilde{\phi}_j}{2j-p}, \quad j = 0, 1, \dots, p$$

onde $\tilde{\phi}_j$ é o coeficiente do termo $z^{p-j}\bar{z}^j$ na expressão $-i \sum_{k=2}^{p-1} \phi_{p-k+1,k} =: -iS(p)$.

Quando p é par, a matriz de coeficientes do sistema obtido também é diagonal, mas o $(\frac{p}{2} + 1)$ -ésimo elemento da diagonal é 0. Além disso, V_{p-1} não é, necessariamente, zero e aparece na posição $\frac{p}{2} + 1$ do vetor de coeficientes independentes. Desse modo, quando $j \neq \frac{p}{2}$, os termos $h_{p-j,j}$ são determinados como anteriormente, mas quando $j = \frac{p}{2}$, temos

$$0h_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}} = \tilde{\phi}_{\frac{p}{2}} + iV_{p-1}$$

e $h_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$ é um parâmetro livre, então podemos defini-lo como sendo zero. Mas, assim, o sistema só tem solução quando o coeficiente independente para $j = \frac{p}{2}$ é zero. Isso determina a constante de Lyapunov V_{p-1} :

$$V_{p-1} = i\tilde{\phi}_{\frac{p}{2}}.$$

9 Exemplo

Nesta seção, vamos fornecer um exemplo para ilustrar o que foi discutido na seção anterior. Em [5], Torregrosa exemplifica seu algoritmo com o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Nosso exemplo é similar, porém \dot{y} também é não linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ \dot{y} = x + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 \end{cases}$$

Começamos colocando nosso sistema em coordenadas complexas:

$$\dot{z} = iz + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

onde

$$Z_j = Z_j(z, \bar{z}) = a_j \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^j + b_j \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^j.$$

Como a parte linear é iz , temos $F_2(z, \bar{z}) = (z\bar{z})/2$.

Agora observe que, para todo $j \in \{2, 3, 4\}$, temos $\overline{Z_j} = Z_j$. Desse modo, $\phi_{l,k} = Z_k(F_{l_z} + F_{l_{\bar{z}}})$. Para calcular F_3 , temos

$$S(3) = \phi_{2,2} = \frac{1}{8}(a_2 - b_2)z^3 + \frac{1}{8}(3a_2 + b_2)z^2\bar{z} + \frac{1}{8}(3a_2 - b_2)z\bar{z}^2 + \frac{1}{8}(a_2 - b_2)\bar{z}^3.$$

Lembrando que $\tilde{\phi}_j$ são os coeficientes de $-iS(p)$, os coeficientes de F_3 são dados por:

$$\begin{aligned} h_{3,0} &= \frac{-i(a_2 - b_2)/8}{-3} = \frac{i}{24}(a_2 - b_2), & h_{2,1} &= \frac{-i(3a_2 - b_2)/8}{2 - 3} = \frac{i}{8}(3a_2 + b_2), \\ h_{1,2} &= \frac{-i(3a_2 - b_2)/8}{4 - 3} = -\frac{i}{8}(3a_2 + b_2), & h_{0,3} &= \frac{-i(a_2 - b_2)/8}{6 - 3} = -\frac{i}{24}(a_2 - b_2). \end{aligned}$$

Para F_4 , temos

$$\begin{aligned} S(4) &= \phi_{2,3} + \phi_{3,2} = \\ &= \frac{i}{16}(z + \bar{z})(2a_2^2(z - \bar{z})(z + \bar{z})^2 - ia_3(z + \bar{z})^3 - 2a_2b_2(z - \bar{z})^3 + b_3(z - \bar{z})^3) \end{aligned}$$

Como 4 é par, teremos $h_{2,2} = 0$. Para o resto dos coeficientes, expandimos a expressão de $-iS(4)$ e usamos seus coeficientes como anteriormente para encontrar:

$$\begin{aligned} h_{4,0} &= \frac{1}{64}(-2a_2^2 + ia_3 + 2a_2b_2 - b_3), & h_{3,1} &= \frac{1}{16}(-2a_2^2 + 2ia_3 - 2a_2b_2 + b_3), \\ h_{1,3} &= \frac{1}{16}(-2a_2^2 - 2ia_3 - 2a_2b_2 + b_3), & h_{0,4} &= \frac{1}{64}(-2a_2^2 - ia_3 + 2a_2b_2 - b_3). \end{aligned}$$

Nossa primeira constante de Lyapunov vem da expressão

$$V_3 = i\tilde{\phi}_2.$$

Da expansão de $-iS(4)$, temos $\tilde{\phi}_2 = -\frac{3i}{8}a_3$, ou seja,

$$V_3 = \frac{3}{8}a_3.$$

Continuando o algoritmo, temos

$$V_5 = -\frac{1}{32}a_3(53a_2^2 + 48a_2b_2 + 3(5b_2^2 + b_3))$$

e

$$\begin{aligned} V_7 &= -\frac{1}{6144}a_3(-62786a_2^4 + 1989a_3^2 - 101440a_2^3b_2 + 10720a_4b_2 + 930b_2^4 + 8760b_2^2b_3 + \\ &+ 1071b_3^2 + a_2^2(-61272b_2^2 + 8508b_3) + 4704b_2b_4 + 4a_2(6692a_4 - 2970b_2^3 + 4575b_2b_3 + 1956b_4)). \end{aligned}$$

10 Anexos

Abaixo está o código do Mathematica utilizado para fazer os cálculos das constantes de Lyapunov apresentadas na seção anterior. Para simplificar a notação, usamos x, y em vez de z, \bar{z} .

```
Z[j_] := If[1 < j < 5, Subscript[a, j]*((x + y)/2)^j +
Subscript[b, j]*((x - y)/(2*I))^j, 0]

F[2] := x*y/2

\Phi[l_, k_] := Z[k]*(D[F[l], x] + D[F[l], y])

S[p_] := Sum[\Phi][p - i + 1, i], {i, 2, p - 1}]

K[p_, k_] := Coefficient[-I*S[p], x^(p - k)*y^k]

h[p_] := Table[If[2 k - p != 0, K[p, k]/(2 k - p), 0], {k, 0, p}]

F[p_] := Sum[h[p][[k]]*x^(p - k + 1)*y^(k - 1), {k, p + 1}]

V[p_] := Simplify[I*K[p + 1, (p + 1)/2]]
```

Referências

- [1] M. A. Teixeira, J. Yang, *The center-focus problem and reversibility*. Journal of Differential Equations **174**, 237–251 (2001).
- [2] J. Chavarriga, M. Sabatini, *A Survey of Isochronous Centers*. Qualitative Theory of Dynamical Systems **1**, 1–70 (1999).
- [3] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics **7**, Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [5] *The center-focus and cyclicity problems*. J. Torregrosa, 2016. Disponível em http://www.gsd.uab.cat/index.php?option=com_publications&view=publications&task=download&ID=Tor2016.pdf-2d3306127899d249201d9d1f1fad5312.pdf&OD=Tor2016.pdf. Acesso em: 11 de agosto de 2021.
- [6] *Notas de aula do Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes*. Curso de Equações Diferenciais Ordinárias, primeiro semestre de 2021. Site do professor: <http://www.ime.unicamp.br/~ddnovaes/>.