

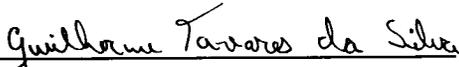
Relatório Científico

Projeto “Introdução aos Sistemas Dinâmicos Planares”

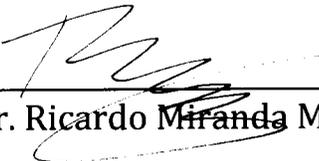
Projeto Fapesp 2013/04532-7

Bolsista: Guilherme Tavares da Silva

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins



Guilherme Tavares da Silva



Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas, 8 de maio de 2014.

Informações sobre o projeto

Título: Introdução aos Sistemas Dinâmicos Planares.

Bolsista: Guilherme Tavares da Silva (ra119509@ime.unicamp.br).

Orientador: Ricardo Miranda Martins (rmiranda@ime.unicamp.br).

Processo: 2013/04532-7.

Vigência: 05/2013 - 04/2014.

Resumo do projeto

O objetivo deste projeto é iniciar o aluno no estudo dos Sistemas Dinâmicos. Faremos isto focando no caso de sistemas planares. Num primeiro momento, será feito um estudo teórico, incluindo resultados clássicos, como por exemplo Teorema de Poincaré-Bendixson e Teorema de Hartman-Grobman. A seguir, passaremos a estudar classes importantes de campos vetoriais, tais como campos reversíveis-equivariantes e hamiltonianos. Dentro deste contexto, estudaremos condições para que um sistema quadrático admita um centro (não-linear). Finalmente, estudaremos o número de ciclos-limite que podem se bifurcar de um centro (linear ou quadrático), utilizando o Método da Média.

Proposta de trabalho

Abaixo seguem as atividades previstas. Na próxima seção, detalharemos as atividades desenvolvidas.

Março a junho

Frequentar, como aluno ouvinte, às aulas da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias do Mestrado em Matemática, que foi lecionada no IMECC-Unicamp pelo orientador deste projeto, com o objetivo de estudar os resultados básicos relativos à teoria, como por exemplo o Teorema do Fluxo Tubular, Teorema de Poincaré-Bendixson, Teorema da Variedade Estável e Teorema de Hartman-Grobman.

Julho-setembro

Estudo sobre sistemas Hamiltonianos e reversíveis. Propriedades e principais características.

Outubro-novembro

Condições para que um sistema quadrático ter um centro.

Dezembro-fevereiro

Estudo do Método da Média.

Março-abril

Aplicação do Método da Média a centros planares, lineares e não-lineares, para determinação do número de ciclos-limite que podem nascer a partir de certas perturbações destes centros.

Atividades desenvolvidas

Março a julho

Foi realizado um estudo da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

Setembro-novembro

Determinação das condições para um sistema quadrático ter um centro.

Dezembro-fevereiro

Estudo do Método da Média.

Março-abril

Aplicação do Método da Média a centros planares, lineares e não-lineares, para determinação do número de ciclos-limite que podem nascer a partir de certas perturbações destes centros.

Alterações

Conforme consta no Relatório Parcial, o estudo sobre sistemas hamiltonianos e reversíveis foi alterado de julho-setembro para outubro-novembro, após o término da determinação das condições para um sistema quadrático ter um centro. No entanto, esse último levou mais tempo do que o previsto para ser finalizado. Assim, o estudo sobre sistemas hamiltonianos e reversíveis não foi realizado.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
GUILHERME TAVARES DA SILVA

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS
PLANARES

CAMPINAS
2014

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
GUILHERME TAVARES DA SILVA**

**INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS
PLANARES**

Relatório Científico apresentado à
Fundação de Amparo à Pesquisa
do Estado de São Paulo (FAPESP)
como requisito para a conclusão
do projeto de iniciação científica
referente ao processo 2013/04532-7
desenvolvido no período de 05/2013
à 04/2014.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Mi-
randa Martins

**CAMPINAS
2014**

RESUMO

Neste texto, temos como objetivo estimar o número máximo de ciclos limite que podem aparecer na perturbação polinomial de centros em sistemas planares polinomiais.

Inicialmente estudamos a teoria básica de equações diferenciais ordinárias. Em seguida, estabelecemos condições para um sistema planar polinomial ter um centro. Por fim, introduziremos o Método da Média para estudar o número de ciclos limite.

Obtivemos estimativas para o número máximo de ciclos limite em um centro linear com perturbação polinomial qualquer e nos centros quadráticos não-lineares S_1 e S_2 com perturbação polinomial de grau até 5.

Sumário

Introdução	3
1 Equações Diferenciais Ordinárias	5
1.1 Introdução	5
1.2 Existência e Unicidade de Soluções	7
1.3 Solução Maximal	13
1.4 Dependência Contínua e Diferenciável de Soluções em Relação a Parâmetros	18
1.5 Dependência Contínua e Diferenciável de Soluções em relação a Condições Iniciais	26
2 Campos Vetoriais	29
2.1 Fluxo	29
2.2 Retrato de Fase	32
2.3 Equivalência e Conjugação de Campos	35
2.4 Estabilidade	37
3 Campos Vetoriais Lineares	38
3.1 Introdução	38
3.2 Exponencial de Operadores Lineares	41
3.3 Cálculo da Exponencial de Operadores	45
3.4 O Caso Não-Homogêneo	49
4 Teoria Local	50
4.1 Introdução	50
4.2 Pontos Regulares	50
4.3 Singularidades	52
5 Centros Isócronos em Sistemas Polinomiais Planares	53
5.1 Introdução	53
5.2 Sistemas Homogêneos	54
5.3 Sistemas Analíticos Gerais	55
5.4 Sistemas Analíticos Gerais: o caso $m=1$	59
5.5 Sistemas Polinomiais Quadráticos	68

6	Método da Média	76
6.1	Introdução à Teoria de Perturbação	76
6.2	Método da Média	81
6.3	Método da Média e Ciclos Limite	86
6.3.1	Centro Linear	87
6.3.2	Centro Não-Linear	88
	Conclusão	94
	Referências Bibliográficas	96

Introdução

Uma equação relacionando uma função incógnita e suas derivadas é chamada equação diferencial. Presentes na descrição matemática de quase todos os fenômenos determinísticos, as equações diferenciais são de grande importância em quase todos os ramos da Ciência, sobretudo na Física, onde aparecem descrevendo leis fundamentais do Universo.

Não é surpresa, portanto, que a origem das equações diferenciais esteja relacionada à descoberta de algumas destas leis: as leis de Newton. No final do século XVII, enquanto formulava suas leis de movimento e gravitação, Newton introduziu com o seu *Principia Mathematica* as idéias básicas que dariam origem ao Cálculo Diferencial e Integral e, através deste, às equações diferenciais. Leibniz, de maneira independente, também deixou grandes contribuições para a formulação do Cálculo, cuja primeira descrição completa pode ser associada à Maria Agnesi em 1748 no seu *Instituzioni analitiche*.

Inicialmente, o estudo de equações diferenciais resumiu-se quase exclusivamente à procura e descrição explícita de suas soluções. Estudo esse que recebeu contribuição de nomes como Euler, Riccati, Clairaut, Lagrange, Laplace, d'Alembert e a família Bernoulli. Com a reformulação mais precisa e rigorosa do Cálculo feita no século XIX principalmente por Cauchy, Weierstrass e Riemann, dando origem ao que hoje conhecemos como Análise Real, começaram a surgir questões mais profundas na teoria de equações diferenciais como, por exemplo, a existência e unicidade de soluções.

Foi somente em 1881-1882 que, na série de artigos *On the curves defined by differential equations*, Poincaré deu um novo rumo à teoria ao construir a chamada Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais. Nesta teoria, Poincaré mostra que pode-se obter muitas informações sobre o comportamento qualitativo das soluções de uma equação diferencial a partir da própria equação, sem a necessidade do conhecimento explícito das soluções. Essa abordagem mais geométrica permitiu a Poincaré, dentre outras, investigar curvas integrais no plano, classificar singularidades (sela, foco, nó, centro), introduzir o conceito de ciclo limite e estudar a finitude dos mesmos.

Neste contexto, Lyapunov daria também sua grande contribuição à Teoria Qualitativa em 1892 ao estudar a estabilidade de soluções com maestria na sua tese de doutorado: *The general problem of the stability of motion*.

Em 1900, Hilbert propôs 23 problemas que, em sua visão, seriam os grandes desafios da Matemática no século que se iniciava. Destes, 5 continuam sem solução. No presente texto, estamos interessados no 16o problema, que trata do número máximo de ciclos limite que podem aparecer num sistema planar polinomial de grau n . Em particular, temos como objetivo estimar o número máximo de ciclos limite que podem aparecer na perturbação polinomial de centros em sistemas planares polinomiais.

Para isso, inicialmente estudaremos a teoria básica de equações diferenciais ordinárias. Em seguida, estabeleceremos condições para um sistema planar polinomial ter um centro. Por fim, introduziremos o Método da Média para estudar o número de ciclos limite.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução

Definição 1.1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto não-vazio e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Uma equação da forma*

$$x' = f(t, x), \quad (1.1)$$

onde $' = \frac{d}{dt}$ com $t \in \mathbb{R}$, é chamada **Equação Diferencial Ordinária (EDO)** de primeira ordem definida por f .

Observe que se $n > 1$, então (1.1) consiste num sistema de n equações diferenciais ordinárias escalares. De fato, introduzindo coordenadas em \mathbb{R}^n podemos escrever $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ de modo que a equação vetorial $x' = f(t, x)$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

Definição 1.1.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função derivável. Dizemos que φ é uma **solução** da equação (1.1) se satisfaz satisfaz a equação (1.1) em todo o seu domínio, ou seja, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I$.*

Exemplo 1.1.1. *Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = x$. Então, para todo $C \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_C(t) = Ce^t$ é solução da equação diferencial $x' = f(t, x)$.*

Exemplo 1.1.2. *Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t, x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Então, a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ é solução da equação diferencial $x' = f(t, x)$.*

O primeiro exemplo acima ilustra o fato de que uma EDO pode admitir infinitas soluções. Como veremos na próxima seção, é possível estabelecer condições sobre a função f que garantem a existência e unicidade de uma solução de (1.1) definida num dado ponto do aberto A , chamado condição inicial ou, mais precisamente:

Definição 1.1.3. *Seja $(t_0, x_0) \in A$ e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de (1.1). Se $t_0 \in I$ e $\varphi(t_0) = x_0$, então dizemos que a solução φ satisfaz a **condição inicial** (t_0, x_0) .*

Exemplo 1.1.3. *Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Então as funções $\varphi(t) \equiv 0$ e $\psi(t) = t^3$ definidas em \mathbb{R} são soluções da equação diferencial $x' = f(t, x)$ que satisfazem à condição inicial $x(0) = 0$.*

Fechamos esta seção observando que uma equação diferencial da forma

$$x^{(m)} = F(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}), \quad (1.3)$$

chamada EDO de ordem m , é equivalente a um sistema de m EDO's de primeira ordem, ou seja, uma solução de um dá origem a uma solução do outro.

Lema 1.1.1. *Toda EDO de ordem m é equivalente a um sistema de m EDO's de primeira ordem.*

Demonstração. Dada uma EDO de ordem m como (1.3), defina a seguinte família de funções:

$$x_i = x^{(i-1)},$$

onde $i = 1, \dots, m$. Então, temos o seguinte sistema de m EDO's de primeira ordem:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{m-1} = x_m \\ x'_m = F(t, x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

Seja $x = \varphi$ uma solução de (1.3). Definindo $\varphi_i = \varphi^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, m$, teremos a solução $x_1 = \varphi_1, \dots, x_m = \varphi_m$ do sistema acima.

Por outro lado, seja $x_1 = \varphi_1, \dots, x_m = \varphi_m$ uma solução do sistema acima. Definindo $\varphi = x_1$ teremos que

$$\begin{cases} \varphi = x_1 \\ \varphi' = x'_1 = x_2 \\ \vdots \\ \varphi^{(m-1)} = x'_{m-1} = x_m \\ \varphi^{(m)} = x'_m = F(t, x_1, \dots, x_m) = F(t, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(m-1)}) \end{cases}$$

ou seja, $x = \varphi$ é uma solução de (1.3). \square

Ao longo do texto demonstraremos outras equivalências dessa natureza cuja importância reside no fato de expandir os resultados já conhecidos para uma certa classe de equações diferenciais a outras classes.

1.2 Existência e Unicidade de Soluções

Nosso objetivo nesta seção é provar um Teorema de Existência e Unicidade de soluções para uma EDO de primeira ordem $x' = f(t, x)$, onde $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua. Para isso, antes demonstraremos dois lemas que auxiliarão na demonstração do teorema.

A menos que seja dito o contrário, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denotará a norma do máximo em \mathbb{R}^n , ou seja,

$$\|y\| = \max\{|y_i|; i = 1, \dots, n\}, \quad (1.4)$$

onde $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $|y_i|$ é o valor absoluto de $y_i \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.1. *Seja $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Uma vizinhança cúbica de (t_0, x_0) é um conjunto da forma*

$$(a, b)_{(t_0, x_0)} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a \text{ e } \|x - x_0\| \leq b\},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Observe que toda vizinhança cúbica é um compacto de \mathbb{R}^{n+1} , pois é o produto de dois compactos. De fato, podemos sempre escrever $(a, b)_{(t_0, x_0)} = B[t_0, a] \times B[x_0, b]$, onde a norma na segunda bola fica subentendida.

Lema 1.2.1. *Seja $\varphi : (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Então, vale a seguinte desigualdade:*

$$\left\| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\varphi(s)\| ds \right|. \quad (1.5)$$

Demonstração. Dados $t, t_0 \in (r_1, r_2)$ e escrevendo $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, então:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right\| &= \left\| \left(\int_{t_0}^t \varphi_1(s) ds, \dots, \int_{t_0}^t \varphi_n(s) ds \right) \right\| \\ &= \max \left\{ \left| \int_{t_0}^t \varphi_i(s) ds \right|; i = 1, \dots, n \right\} \leq \max \left\{ \left| \int_{t_0}^t |\varphi_i(s)| ds \right|; i = 1, \dots, n \right\} \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\varphi(s)\| ds \right|. \end{aligned}$$

\square

Definição 1.2.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto não-vazio e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f é **Lipschitz contínua** em relação a x se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x^*) - f(t, x)\| \leq K \|x^* - x\|, \quad (1.6)$$

para todo $(t, x^*), (t, x) \in A$.

Dizemos que f é **localmente Lipschitz contínua** se para todo ponto $(t_0, x_0) \in A$ existe uma vizinhança $U_0 \subset A$ desse ponto tal que a restrição de f a U_0 é Lipschitz contínua.

Lema 1.2.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto não-vazio e $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ contínuas em A , $\forall i, j = 1, \dots, n$. Então, dado $(t_0, x_0) \in A$ e uma vizinhança cúbica $(a, b)_{(t_0, x_0)} \subset A$, a restrição de f a essa vizinhança é Lipschitz contínua.

Demonstração. Seja $(t_0, x_0) \in A$ dado e $(a, b)_{(t_0, x_0)} \subset A$ uma vizinhança cúbica.

Como cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é contínua em $(a, b)_{(t_0, x_0)} \subset A$ compacto, então são limitadas e, portanto, existe $\tilde{K} > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq \tilde{K},$$

para todo $(t, x) \in (a, b)_{(t_0, x_0)}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Sejam $t \in B[t_0, a]$ e $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ fixos.

Como $B[x_0, b]$ é convexo, então pondo $y = x + s(x^* - x)$ teremos que $(t, y) \in (a, b)_{(t_0, x_0)}$, $\forall s \in [0, 1]$. Daí, definindo

$$g(s) = f_{i_0}(t, y) = f_{i_0}(t, x + s(x^* - x)), \quad s \in [0, 1],$$

teremos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$ e, portanto, da definição de g e da regra da cadeia segue que

$$f_{i_0}(t, x^*) - f_{i_0}(t, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(t, x + \theta(x^* - x))(x_j^* - x_j),$$

e, portanto, podemos estimar

$$\begin{aligned} |f_{i_0}(t, x^*) - f_{i_0}(t, x)| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(t, x + \theta(x^* - x)) \right| |(x_j^* - x_j)| \\ &\leq \tilde{K} \sum_{j=1}^n |(x_j^* - x_j)| \leq \tilde{K}n \|x^* - x\|. \end{aligned}$$

Logo, o resultado segue tomando $K = \tilde{K}n$. □

Corolário 1.2.1. *Sob as hipóteses do lema 1.2.2 acima, f é localmente Lipschitz contínua.*

Finalmente, abaixo enunciamos e demonstramos um Teorema de Existência e Unicidade de soluções para uma EDO de primeira ordem.

Teorema 1.2.1 (de Existência e Unicidade). *Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto não-vazio e $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Seja $x' = f(t, x)$ uma EDO de primeira ordem. Se f e as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ forem contínuas em A , $\forall i, j = 1, \dots, n$, então:*

- (a) *Para cada ponto $(t_0, x_0) \in A$, existe uma solução φ de $x' = f(t, x)$, definida em um intervalo $[t_0 - a^*, t_0 + a^*]$ para algum $a^* > 0$, que satisfaz $\varphi(t_0) = x_0$.*
- (b) *Se duas soluções φ e ψ de $x' = f(t, x)$ coincidem em um ponto t_0 , então elas coincidem em todo o seu intervalo de definição.*

Demonstração. (a) Seja $(t_0, x_0) \in A$ e $(a, b)_{(t_0, x_0)} \subset A$ uma vizinhança cúbica qualquer.

Pelo Lema 1.2.2, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x^*) - f(t, x)\| \leq K \|x^* - x\|,$$

para todo $(t, x^*), (t, x) \in (a, b)_{(t_0, x_0)}$.

Como f é contínua em $(a, b)_{(t_0, x_0)} \subset A$ e $(a, b)_{(t_0, x_0)}$ é compacto, então existe $M > 0$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad \forall (t, x) \in (a, b)_{(t_0, x_0)}.$$

Seja a^* um número real tal que

$$0 < a^* < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\},$$

e construa a seguinte sequência de funções definidas em $B[t_0, a^*]$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0, \\ \varphi_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s)) ds, \\ \varphi_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ \varphi_i(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{i-1}(s)) ds, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Primeiro, observe que por indução obtemos que todas as funções da sequência φ_i acima são contínuas. De fato, se φ_{i-1} é contínua, então $f(s, \varphi_{i-1}(s))$ é contínua, pois f é contínua. Daí, existe $N > 0$ tal que $\|f(s, \varphi_{i-1}(s))\| \leq N$, $\forall s \in B[t_0, a^*]$ e, portanto, dados $t_1, t_2 \in B[t_0, a^*]$ segue que

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi_{i-1}) ds - \int_{t_0}^{t_2} f(s, \varphi_{i-1}) ds \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi_{i-1}) ds \right| \leq M |t_2 - t_1|,$$

ou seja $\int_{t_0}^t f(s, \varphi_{i-1}) ds$ é Lipchitz contínua em t e, portanto, contínua. Logo, φ_i é contínua.

Além disso, o gráfico de cada função da sequência φ_i está contido em $(a, b)_{(t_0, x_0)}$. De fato, dado $t \in B[t_0, a^*]$ segue que

$$\begin{aligned} \|\varphi_i(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{i-1}) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_{i-1}(s))\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| \\ &\leq M |t - t_0| \leq M a^* < b, \end{aligned}$$

ou seja, $\|\varphi_i(t) - x_0\| < b$.

Provemos que a sequência φ_i converge uniformemente em $(a^*, b)_{(t_0, x_0)}$:

Observe que $\forall i \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_i(s)) - f(s, \varphi_{i-1}(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_i(s)) - f(s, \varphi_{i-1}(s))\| ds \right|. \end{aligned}$$

Mas, como todas as funções da sequência φ_i têm seus gráficos contidos em $(a^*, b)_{(t_0, x_0)}$, então podemos estimar

$$\|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)\| ds \right|.$$

Daí, por indução obtemos da desigualdade acima que

$$\|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| \leq b(K a^*)^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $K a^* < 1$, então a série $\sum_{i=0}^{\infty} b(K a^*)^i$ converge e, portanto, pelo critério de Weierstrass segue que a série $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ converge uniformemente em $B[t_0, a^*]$. Mas, a soma parcial dessa série é da forma $S_i(t) = \varphi_i(t) - \varphi_1(t)$, logo, a sequência φ_i converge uniformemente em $B[t_0, a^*]$ para uma função φ definida em $B[t_0, a^*]$. Além disso, como cada φ_i é contínua e $\varphi_i \rightarrow \varphi$ uniformemente, então φ é contínua.

Por outro lado, a sequência de funções

$$\int_{t_0}^t f(s, \varphi_i(s)) ds,$$

converge uniformemente para $\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ em $B[t_0, a^*]$. De fato, seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\varphi_i \rightarrow \varphi$ uniformemente, então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|\varphi_i(t) - \varphi(t)\| < \frac{\epsilon}{Ka^*}, \quad \forall t \in B[t_0, a^*].$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} n > n_0 \Rightarrow \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_i(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| &\leq \left| \int_{t_0}^t K \|\varphi_i(s) - \varphi(s)\| ds \right| \\ &\leq Ka^* \frac{\epsilon}{Ka^*} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, pela unicidade do limite segue que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad (1.7)$$

e, portanto, $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in B[t_0, a^*]$, completando a demonstração da parte (a).

(b) Sejam $\varphi : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : I_\psi \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas soluções de $x' = f(t, x)$ tais que $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$ para algum ponto $(t_0, x_0) \in A$.

Seja $J = I_\varphi \cap I_\psi$ o intervalo onde ambas as soluções estão definidas e $N \subset J$ o subconjunto onde elas coincidem. Observe que $N \neq \emptyset$, pois $t_0 \in N$.

Provemos que N é aberto e fechado em J :

(i) Fechado:

Seja $(t_n) \subset N$ uma sequência que converge para $\tau \in J$. Como φ e ψ são contínuas, então

$$\varphi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n) = \psi(\tau),$$

ou seja $\tau \in N$ e, portanto, N é fechado em J .

(ii) Aberto:

Seja $t_1 \in N$, ou seja, $\varphi(t_1) = \psi(t_1) = x_1$.

Analogamente ao realizado na demonstração da existência, obtemos uma vizinhança cúbica $(a^*, b)_{(t_1, x_1)}$ na qual é válida a desigualdade (1.6) e $Ka^* < 1$.

Diminuindo a^* se necessário, pela continuidade de φ e ψ podemos obter as desigualdades $\|\varphi(t)\| \leq b$, $\|\psi(t)\| \leq b$, $\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq b$, $\forall t \in B[t_1, a^*]$.

Mas, como φ e ψ são soluções, então podemos escrever

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad e \quad \psi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \psi(s)) ds,$$

e, portanto, para $t \in B[t_1, a^*]$ obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| \int_{t_1}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right\| \\ &\leq K \left| \int_{t_1}^t \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds \right| \leq b(Ka^*), \end{aligned}$$

, ou seja, $\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq b(Ka^*)$. Repetindo a desigualdade acima com esta nova estimativa obtemos que $\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq b(Ka^*)^2$ e assim sucessivamente obtemos que

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq b(Ka^*)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $Ka^* < 1$, segue pelo teorema do confronto aplicado à desigualdade acima que

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad \forall t \in B[t_1, a^*],$$

ou seja, existe uma vizinhança $U \subset N$ de t_1 , ou seja, N é aberto em J .

Como $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, então J é conexo. Logo, como $N \neq \emptyset$ é aberto e fechado em J , então $N = J$. \square

Assim, temos agora uma maneira relativamente simples para verificar existência e unicidade de soluções de equações diferenciais do tipo (1.1).

Exemplo 1.2.1. No exemplo 1.1.1 temos $f(t, x) = x$ e a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 1$ contínuas em \mathbb{R}^2 , logo, dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução φ de $x' = x$ definida em uma vizinhança I_φ de t_0 tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Exemplo 1.2.2. Analogamente ao anterior, no exemplo 1.1.2 temos $f(t, x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ e as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = (0, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = (-1, 0)$ contínuas em \mathbb{R}^3 , logo, dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^3$, existe uma única solução φ de $x' = f(t, x)$ definida em uma vizinhança de t_0 tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Exemplo 1.2.3. No exemplo 1.1.3 temos $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ que é contínua em \mathbb{R}^2 . Porém, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x^{-\frac{1}{3}}$ não é contínua em $x = 0$, logo, não podemos garantir a existência e unicidade de soluções que sejam definidas em pontos da forma $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$. De fato, como vimos naquele exemplo, existem pelo menos duas soluções definidas em $(0, 0)$. Por outro lado, nos demais pontos onde $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ está definida, ou seja, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ com $x_0 > 0$, podemos garantir existência e unicidade de soluções

1.3 Solução Maximal

O teorema 1.2.1 demonstrado na seção anterior é local, ou seja, obtemos sempre informações sobre soluções definidas numa vizinhança de um dado ponto de A . De fato, basta observar como a solução foi construída na demonstração da parte (a) do teorema.

Nesta seção, veremos que sob as hipóteses do teorema 1.2.1 é possível expandir o intervalo de definição de uma solução obtendo a chamada solução maximal, cujo intervalo de definição é maximal em A .

Fixemos o seguinte contexto: seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto não-vazio, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função satisfazendo as hipóteses do teorema 1.2.1 e $x' = f(t, x)$ uma EDO de primeira ordem.

Definição 1.3.1. *Seja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de $x' = f(t, x)$, onde I é um intervalo aberto.*

*Dizemos que $\hat{\varphi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um **prolongamento** de φ se \hat{I} contém I propriamente e $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in I$.*

*Dizemos que φ é uma **solução maximal** se não admitir prolongamento. Neste caso, o seu intervalo de definição é chamado **intervalo maximal** de existência de φ .*

Exemplo 1.3.1. *Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = 1 + x^2$. Pelo teorema 1.2.1, $\varphi(t) = \tan t$ é a única solução de $x' = f(t, x)$ que satisfaz $\varphi(0) = 0$. Mas, como φ só está definida continuamente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então esse é o intervalo maximal desta solução.*

Teorema 1.3.1. *Seja $(t_0, x_0) \in A$. Então, existe uma única solução maximal $\hat{\varphi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{\varphi}(t_0) = x_0$.*

Demonstração. Seja $(t_0, x_0) \in A$.

Considere o conjunto $\Sigma = \{(\varphi_\alpha, I_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ dos pares $(\varphi_\alpha, I_\alpha)$ onde $\varphi_\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de $x' = f(t, x)$ que satisfaz $\varphi_\alpha(t_0) = x_0$, definida no intervalo aberto I_α .

Defina:

$$\hat{I} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha.$$

Como cada I_α é um intervalo aberto que contém t_0 , então \hat{I} é um intervalo aberto que contém t_0 . Além disso, certamente \hat{I} é maximal em $\{I_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ e, se $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, então $\hat{I} = (m(t_0, x_0), M(t_0, x_0))$, onde

$$m(t_0, x_0) = \inf_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha \quad e \quad M(t_0, x_0) = \sup_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha.$$

Assim, podemos definir a função $\hat{\varphi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ da seguinte forma: dado $t \in \hat{I}$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $t \in I_{\alpha_0}$ e, portanto, pela unicidade das soluções podemos associar a t o valor $\varphi_{\alpha_0}(t)$, ou seja, $\hat{\varphi}(t) = \varphi_{\alpha_0}(t)$.

Observe que construída dessa forma $\hat{\varphi}$ é solução de $x' = f(t, x)$ que satisfaz $\hat{\varphi}(t_0) = x_0$ e, portanto, $(\hat{\varphi}, \hat{I}) \in \Sigma$. Logo, $\hat{\varphi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução maximal definida no intervalo maximal \hat{I} . Além disso, como é maximal, então é única. \square

Seja $(t_0, x_0) \in A$ e $\hat{\varphi}_0 : \hat{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução maximal tal que $\hat{\varphi}_0(t_0) = x_0$. Seja $(t_1, x_1) \in A$ e $\hat{\varphi}_1 : \hat{I}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução maximal tal que $\hat{\varphi}_1(t_1) = x_1$. Defina a relação \sim em A por

$$(t_0, x_0) \sim (t_1, x_1) \Leftrightarrow \hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_1. \quad (1.8)$$

Observe que pelo teorema 1.3.1 a relação \sim está bem definida. Além disso, temos o seguinte lema:

Lema 1.3.1. *\sim é uma relação de equivalência em A .*

Demonstração. Se $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_0$, então $(t_0, x_0) \sim (t_0, x_0)$ e, portanto, \sim é reflexiva.

Se $(t_0, x_0) \sim (t_1, x_1)$, então $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_1$ e, portanto, $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_0$, ou seja, $(t_1, x_1) \sim (t_0, x_0)$. Logo, \sim é simétrica.

Se $(t_0, x_0) \sim (t_1, x_1)$, então $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_1$. Se $(t_1, x_1) \sim (t_2, x_2)$, então $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$. Logo, temos que $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$, ou seja, $(t_0, x_0) \sim (t_2, x_2)$ e, portanto, \sim é transitiva.

Logo, \sim é uma relação de equivalência em A . \square

Definição 1.3.2. *Seja $(t_0, x_0) \in A$. A classe de equivalência de (t_0, x_0) segundo a relação \sim é chamada **órbita** de (t_0, x_0) e denotada por $O(t_0, x_0)$, ou seja*

$$O(t_0, x_0) = \{(t, x) \in A; (t, x) \sim (t_0, x_0)\}. \quad (1.9)$$

Utilizando o conceito de órbita definido acima, segue do lema 1.3.1 o importante corolário abaixo.

Corolário 1.3.1. *A é a união disjunta das órbitas em A/\sim .*

Como veremos no teorema abaixo, a órbita de uma solução maximal tende à fronteira de A ou, em outras palavras, escapa de qualquer compacto contido em A .

Teorema 1.3.2. *Seja $C \subset A$ um compacto e $\varphi : (m_1, m_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de $x' = f(t, x)$.*

Se $m_1 > -\infty$, então existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $(t, \varphi(t)) \in A - C, \forall t < m_1 + \epsilon_1$.

Se $m_2 < +\infty$, então existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $(t, \varphi(t)) \in A - C, \forall t > m_2 - \epsilon_2$.

Demonstração. Seja $C \subset A$ um compacto e ρ a distância entre C e o complementar F de A em \mathbb{R}^{n+1} , ou seja, $\rho = d(C, F)$.

Primeiro, observe que $\rho > 0$. De fato, suponha por absurdo que $\rho = 0$. Como

$$\rho = \inf_{y \in C} \{d(y, F)\},$$

então, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in C$ tal que $d(y_n, F) < \frac{1}{n}$.

A sequência (y_n) assim obtida está contida no compacto C e, portanto, admite uma subsequência (y_{n_j}) convergente para algum $y_0 \in C$. Daí, como $d(y, F)$ com F fixo é uma função contínua na variável y e $0 \leq d(y_{n_j}, F) < \frac{1}{n_j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, segue pelo teorema do confronto que $d(y_0, F) = 0$, ou seja $y_0 \in C \cap F$, absurdo, pois $C \cap F = \emptyset$. Logo, $\rho > 0$.

Agora, defina o seguinte conjunto:

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; d(y, C) \leq \frac{\rho}{2}\}.$$

Observe que $C \subset C^* \subset A$ e, como C^* é fechado e limitado em \mathbb{R}^{n+1} , então é compacto. Logo, existem constantes reais $M > 0$ e $\tilde{K} > 0$ tais que

$$\|f(t, x)\| \leq M \quad e \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq \tilde{K},$$

para todo $(t, x) \in C^*$, $i, j = 1, \dots, n$.

Seja $(t_0, x_0) \in C$ e considere a vizinhança cúbica $(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2})_{(t_0, x_0)} \subset C^*$. Escolhendo $a^* \in \mathbb{R}$ de modo que

$$0 < a^* < \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2M}, \frac{1}{\tilde{K}}\right\}$$

e procedendo como na demonstração da parte (a) do teorema 1.2.1 obteremos uma solução φ de $x' = f(t, x)$ definida em $B[t_0, a^*]$ que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ e $\|\varphi(t) - x_0\| \leq \frac{\rho}{2}$, $\forall t \in B[t_0, a^*]$. Além disso, observe que a^* não depende do particular ponto (t_0, x_0) .

Seja (m_1, m_2) o intervalo maximal de definição de φ que existe pelo teorema 1.3.1 e provemos o caso onde $m_2 < +\infty$:

Suponha por absurdo que existe $t_1 \in (m_2 - a^*, m_2)$ tal que $(t_1, \varphi(t_1)) \in C$.

Observe que $(t_1, \varphi(t_1)) \in O(t_0, x_0)$ e, portanto, começando o processo acima com a condição inicial $(t_1, \varphi(t_1))$ obtemos uma solução definida em $B[t_1, a^*]$ com o mesmo intervalo maximal, (m_1, m_2) . Absurdo, pois esta solução está definida em $t_1 + a^* > m_2$.

Logo, basta tomar $\epsilon_2 = a^*$.

Analogamente provamos o caso $m_1 > -\infty$. \square

Corolário 1.3.2. *Se $A = \mathbb{R} \times E$ com E aberto não-vazio em \mathbb{R}^n , então dado $K \subset E$ um compacto e $\varphi : (m_1, m_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de $x' = f(t, x)$ segue que:*

Se $m_1 > -\infty$, então existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $\varphi(t) \notin K, \forall t < m_1 + \epsilon_1$.

Se $m_2 < +\infty$, então existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $\varphi(t) \notin K, \forall t > m_2 - \epsilon_2$.

Demonstração. Seja $m_1 < m < m_2 < +\infty$ e $I = [m, m_2]$. Então, como K e I são compactos segue que $C = I \times K$ é compacto contido em A .

Daí, pelo teorema 1.3.2 segue que existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $(t, \varphi(t)) \notin C, \forall t > m_2 - \epsilon_2$. Então, supondo sem perda de generalidade que $\epsilon_2 < m_2 - m$ temos que $(t, \varphi(t)) \notin C, \forall t > m_2 - \epsilon_2 > m$, ou seja, $\forall t \in I$. Logo, se $(t, \varphi(t)) \notin C = I \times K$ com $t \in I$, então $\varphi(t) \notin K$.

Analogamente provamos o caso $m_1 > -\infty$. \square

Conforme vimos no exemplo 1.3.1, a solução maximal de uma EDO nem sempre está definida em \mathbb{R} . Porém, conforme veremos nos exemplos abaixo, existe uma importante classe de equações diferenciais cujo intervalo maximal é \mathbb{R} .

Exemplo 1.3.2. *Considere o seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:*

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.10)$$

que pode ser escrito matricialmente de forma mais sucinta como

$$x' = A(t)x + b(t) = f(t, x), \quad (1.11)$$

onde $x = [x_1, \dots, x_n]^t$, $A(t) = (a_{ij})$ e $b(t) = [b_1, \dots, b_n]^t$.

Suponha que as funções a_{ij} e b_i são definidas e contínuas em um intervalo real (r, s) . Então, toda solução do sistema 1.11 que satisfaz uma condição inicial (t_0, x_0) com $t_0 \in (r, s)$, tem como intervalo maximal o próprio intervalo (r, s)

Demonstração. Primeiro, observe que $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A = (r, s) \times \mathbb{R}^n$. Além disso, como cada f_i é a soma e produto de funções contínuas em A , então f é contínua em A . Observe também que as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) = a_{ij}(t)$ são contínuas em A e só dependem de t .

Agora, seja $[\tilde{r}, \tilde{s}] \subset (r, s)$ e $(t_0, x_0) \in A$ com $t_0 \in [\tilde{r}, \tilde{s}]$. Provemos que existe uma solução $\varphi : [\tilde{r}, \tilde{s}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x)$ que satisfaz $\varphi(t_0) = x_0$:

Como cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é contínua, então existe $\tilde{K} > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq \tilde{K},$$

para todo $(t, x) \in [\tilde{r}, \tilde{s}] \times \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \dots, n$. Daí, tomando $K = n\tilde{K}$ segue pelo lema 1.2.2 que

$$\|f(t, x^*) - f(t, x)\| \leq K \|x^* - x\|,$$

para todo $(t, x^*), (t, x) \in [\tilde{r}, \tilde{s}] \times \mathbb{R}^n$.

Como f é contínua, então existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq \tilde{C},$$

para todo $(t, x) \in [\tilde{r}, \tilde{s}] \times \mathbb{R}^n$.

Construa a seguinte sequência de funções definidas em $[\tilde{r}, \tilde{s}]$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0, \\ \varphi_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s)) ds, \\ \varphi_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ \varphi_i(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{i-1}(s)) ds, \text{ etc.} \end{aligned}$$

De maneira análoga à realizada na demonstração da parte (a) do teorema 1.2.1 verificamos que cada função φ_i é contínua em $[\tilde{r}, \tilde{s}]$ e tem seu gráfico contido em $[\tilde{r}, \tilde{s}] \times \mathbb{R}^n$.

Pondo $C = \tilde{C}(\tilde{s} - \tilde{r})$ temos que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x_0)\| ds \right| \leq \tilde{C}(\tilde{s} - \tilde{r}) = C,$$

e, daí, por indução em i verificamos que

$$\|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| \leq \frac{C[K(\tilde{s} - \tilde{r})]^i}{i!}, \quad .$$

Como, pelo teste da razão a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C[K(\tilde{s} - \tilde{r})]^i}{i!}$ converge, então pelo critério de Weierstrass obtemos que a sequência de funções φ_i converge uniformemente em $[\tilde{r}, \tilde{s}]$ para uma função contínua $\varphi : [\tilde{r}, \tilde{s}] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Além disso, φ é da seguinte forma

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

e, portanto, $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in [\tilde{r}, \tilde{s}]$.

Agora, observe que o intervalo maximal de φ é no máximo (r, s) , pois as funções a_{ij} e b_i aí estão definidas. Mas, podemos escrever

$$(r, s) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[r + \frac{1}{n}, s - \frac{1}{n} \right],$$

com $t_0 \in [r + \frac{1}{n}, s - \frac{1}{n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como vimos acima, existe uma solução φ_n definida em cada um desses intervalos e, portanto, pela unicidade das soluções podemos definir uma solução maximal $\hat{\varphi} : (r, s) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz a condição inicial (t_0, x_0) associando a cada $t \in (r, s)$ o valor $\varphi_n(t)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. \square

Exemplo 1.3.3. *Um caso particular do sistema 1.11 é aquele em que as funções a_{ij} e b_i são constantes e, portanto, definidas em \mathbb{R} . Neste caso, como vimos no exemplo acima, temos um sistema matricial da forma*

$$x' = Ax + b, \tag{1.12}$$

com soluções maximais definidas em \mathbb{R} .

1.4 Dependência Contínua e Diferenciável de Soluções em Relação a Parâmetros

Seja $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^{1+n+l}$ um aberto não-vazio e considere a EDO de primeira ordem

$$x' = f(t, x, \mu), \tag{1.13}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \in \mathbb{R}^l$ e $f = (f_1, \dots, f_n) : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua com derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x, \mu)$ contínuas em \tilde{A} , $\forall i, j = 1, \dots, n$.

Definição 1.4.1. *Dizemos que μ é um **parâmetro** da equação diferencial 1.13.*

Definição 1.4.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^l$ e $\varphi_{\mu_0} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função derivável. Dizemos que φ_{μ_0} é **solução** de (1.13) se $\varphi'_{\mu_0}(t) = f(t, \varphi_{\mu_0}(t), \mu_0)$, $\forall t \in I$.*

Exemplo 1.4.1. *Considere a equação diferencial $x' = \mu x$, com $\mu \in \mathbb{R}$. As soluções dessa equação são dadas por $\phi_{\mu}(t) = e^{\mu t}$, $t \in \mathbb{R}$. Observe que essas soluções além de dependerem do parâmetro μ , são deriváveis em relação a μ e, portanto, são também contínuas em relação a μ .*

O exemplo acima ilustra o fato das soluções de 1.13 não só dependerem do parâmetro μ , mas também possivelmente serem contínuas e até diferenciáveis

em relação ao mesmo. Nesta seção, estudaremos em maior detalhe essas dependências e, na próxima seção, veremos que esses resultados estendem-se também para condições iniciais da equação 1.13.

Teorema 1.4.1 (de Dependência Contínua em Parâmetros). *Seja $(t_0, x_0, \mu_0) \in \tilde{A}$. Então, existem constantes reais $\rho > 0$ e $a^* > 0$ tais que para cada $\mu \in B[\mu_0, \rho]$, existe uma única solução $\varphi_\mu : B[t_0, a^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x, \mu)$ que satisfaz $\varphi_\mu(t_0) = x_0$. Mais ainda, a função*

$$\begin{aligned} \varphi : B[t_0, a^*] \times B[\mu_0, \rho] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mu) &\mapsto \varphi_\mu(t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

é contínua, satisfaz $\varphi(t_0, \mu) = x_0, \forall \mu \in B[\mu_0, \rho]$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mu) = f(t, \varphi(t, \mu), \mu), \quad \forall (t, \mu) \in B[t_0, a^*] \times B[\mu_0, \rho]. \quad (1.15)$$

Demonstração. Primeiro, observe que para cada $\mu \in \mathbb{R}^l$ fixo e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $(t_0, x_0, \mu) \in \tilde{A}$, segue pelo teorema 1.2.1 que existe uma única solução φ_μ de $x' = f(t, x, \mu)$, definida em $B[t_0, a^*]$ para algum $a^* > 0$, que satisfaz $\varphi_\mu(t_0) = x_0$.

Agora, seja $(t_0, x_0, \mu_0) \in \tilde{A}$ e considere uma vizinhança cúbica estendida

$$C = B[t_0, a] \times B[x_0, b] \times B[\mu_0, \rho],$$

onde $a, b, \rho \in \mathbb{R}^*$ são tais que $C \subset \tilde{A}$.

Como f é contínua e pelo lema 1.2.2, existem constantes reais $M > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\|f(t, x, \mu)\| \leq M \quad e \quad \|f(t, x, \mu) - f(t, x^*, \mu)\| \leq K \|x - x^*\|,$$

para todo $(t, x, \mu), (t, x^*, \mu) \in C$.

Seja a^* um número real tal que

$$0 < a^* < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\},$$

e construa a seguinte sequência de funções definidas em $B[t_0, a^*] \times B[\mu_0, \rho]$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, \mu) &= x_0, \\ \varphi_1(t, \mu) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s, \mu), \mu) ds, \\ \varphi_2(t, \mu) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s, \mu), \mu) ds, \\ &\vdots \\ \varphi_i(t, \mu) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{i-1}(s, \mu), \mu) ds, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Procedendo como na demonstração da parte (a) do teorema 1.2.1, provamos que cada função φ_i da sequência acima é contínua e, obtemos a desigualdade

$$\|\varphi_{i+1}(t, \mu) - \varphi_i(t, \mu)\| \leq b(Ka^*)^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $Ka^* < 1$, então analogamente àquela demonstração concluímos que a sequência de funções contínuas φ_i converge uniformemente para uma função contínua $\varphi : B[t_0, a^*] \times B[\mu_0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma

$$\varphi(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s, \mu), \mu) ds, \quad (1.16)$$

que satisfaz $\varphi(t_0, \mu) = x_0, \forall \mu \in B[\mu_0, \rho]$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mu) = f(t, \varphi(t, \mu), \mu), \quad \forall (t, \mu) \in B[t_0, a^*] \times B[\mu_0, \rho]$$

□

Observe que o teorema 1.4.1 é local, ou seja, obtemos sempre informações sobre a continuidade das soluções em relação a parâmetros numa vizinhança dos pontos (t_0, μ_0) . Na construção que realizaremos abaixo, expandiremos essa continuidade para intervalos maximais.

Defina a projeção $\pi : \mathbb{R}^{1+n+l} \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ por $\pi(t, x, \mu) = (t, x)$.

Seja $(t_0, x_0) \in \pi(\tilde{A})$ uma condição inicial e $\mu_0 \in \mathbb{R}^l$ tal que $(t_0, x_0, \mu_0) \in \tilde{A}$. Considere o conjunto

$$\tilde{A}(t_0, x_0) = \{\mu \in \mathbb{R}^l; (t_0, x_0, \mu) \in \tilde{A}\}. \quad (1.17)$$

Para cada $\mu \in \tilde{A}(t_0, x_0)$ fixo, temos pelo teorema 1.2.1 que existe uma única solução $\varphi_\mu(t)$ de $x' = f(t, x, \mu)$, definida em $B[t_0, a^*]$ para algum $a^* > 0$, que satisfaz $\varphi_\mu(t_0) = x_0$. Por outro lado, temos pelo teorema 1.3.1 que essa solução φ_μ admite um intervalo maximal de definição \hat{I}_μ .

Daí, podemos definir o conjunto

$$E(t_0, x_0) = \{(t, \mu) \in \mathbb{R}^{l+1}; \mu \in \tilde{A}(t_0, x_0), t \in \hat{I}_\mu\}, \quad (1.18)$$

que, por construção, é o domínio maximal da função 1.14 associado à condição inicial (t_0, x_0) . Além disso, conforme veremos abaixo, o conjunto $E(t_0, x_0)$ é aberto em \mathbb{R}^{l+1} e a função 1.14 é contínua no mesmo. Antes, porém, provaremos um lema que auxiliará na demonstração deste fato.

Lema 1.4.1 (de Gronwal). *Seja $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existem $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$u(t) \leq \int_{t_0}^t [\alpha u(s) + \beta] ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (1.19)$$

então,

$$u(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} [e^{\alpha(t-t_0)} - 1], \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.20)$$

Demonstração. Seja $v(t) = \int_{t_0}^t [\alpha u(s) + \beta] ds$. Então,

$$v'(t) = \alpha u(t) + \beta \quad \text{ou} \quad u(t) = \frac{1}{\alpha} [v'(t) - \beta],$$

e, portanto, de 1.19 segue que

$$\frac{1}{\alpha} [v'(t) - \beta] \leq v(t),$$

ou seja,

$$v'(t) - \alpha v(t) \leq \beta.$$

Daí, multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\alpha t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt} [v(t)e^{-\alpha t}] = v'(t)e^{-\alpha t} - v(t)\alpha e^{-\alpha t} \leq \beta e^{-\alpha t}.$$

Logo, integrando de t_0 até t e notando que $v(t_0) = 0$, obtemos

$$v(t)e^{-\alpha t} \leq \frac{\beta}{\alpha} [e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t}],$$

ou seja,

$$v(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} [e^{\alpha(t-t_0)} - 1].$$

□

Teorema 1.4.2. *Seja $(t_0, x_0) \in \pi(\tilde{A})$. Então, $E(t_0, x_0)$ é aberto em \mathbb{R}^{l+1} e a função φ é contínua em $E(t_0, x_0)$.*

Demonstração. Seja $(\tilde{t}, \tilde{\mu}) \in E(t_0, x_0)$, ou seja, $\tilde{t} \in \hat{I}\mu$, o intervalo maximal de definição da solução $\varphi_{\tilde{\mu}}$ de $x' = f(t, x, \tilde{\mu})$ que satisfaz $\varphi_{\tilde{\mu}}(t_0) = x_0$.

Suponha $\tilde{t} > t_0$ e escolha $r_2 \in \hat{I}\mu$ tal que

$$t_0 < \tilde{t} < r_2,$$

, e, portanto, $\tilde{t} \in (t_0, r_2) \subset \hat{I}\mu$. Analogamente, se $\tilde{t} < t_0$, escolhemos $r_1 \in \hat{I}\mu$ tal que $r_1 < \tilde{t} < t_0$.

Assim, para provar que $E(t_0, x_0)$ é aberto basta provar a existência de $\rho > 0$ tal que φ está definida em

$$(t_0, r_2) \times B(\tilde{\mu}, \rho) \subset E(t_0, x_0).$$

Como $\varphi_{\tilde{\mu}}$ é contínua, então o conjunto

$$\{(t, \varphi_{\tilde{\mu}}(t), \tilde{\mu}) \in \tilde{A}; t \in [t_0, r_2]\}$$

é compacto e, portanto, existem $a, b > 0$ tais que

$$\tilde{B} = \{(t, x, \mu); t \in [t_0, r_2], x \in B[\varphi_{\tilde{\mu}}(t), a], \mu \in B[\tilde{\mu}, b]\},$$

também é compacto contido em \tilde{A} .

Daí, pelo lema 1.2.2 segue que existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, x^*, \mu)\| \leq K \|x - x^*\|,$$

para todo $(t, x, \mu), (t, x^*, \mu) \in \tilde{B}$.

Como f é contínua, então é uniformemente contínua em \tilde{B} e, portanto, dado $\beta > 0$, existe $0 < b^* \leq b$ tal que

$$\|\mu - \tilde{\mu}\| \leq b^* \Rightarrow \|f(t, x, \mu) - f(t, x, \tilde{\mu})\| \leq \beta, \quad \forall t \in [t_0, t_2].$$

Dado $\beta > 0$, considere $\mu \in B[\tilde{\mu}, b^*]$ e φ_μ a solução de $x' = f(t, x, \mu)$ que satisfaz $\varphi_\mu(t_0) = x_0$ e suponha que φ_μ está definida em $[t_0, t_2]$ para algum $t_2 \leq r_2$.

Podemos fazer a seguinte estimativa $\forall t \in [t_0, t_2]$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\mu(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_\mu(s), \mu) - f(s, \varphi_{\tilde{\mu}}(s), \mu)\| ds \\ &+ \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_{\tilde{\mu}}(s), \mu) - f(s, \varphi_{\tilde{\mu}}(s), \tilde{\mu})\| ds \leq \int_{t_0}^t [K \|\varphi_\mu(s) - \varphi_{\tilde{\mu}}(s)\| + \beta] ds, \end{aligned}$$

e, portanto, pelo lema 1.4.1 segue que

$$\|\varphi_\mu(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(t)\| \leq \frac{\beta}{K} [e^{K(t-t_0)} - 1] \leq \frac{\beta}{K} [e^{K(r_2-t_0)} - 1], \quad (1.21)$$

para todo $t \in [t_0, t_2]$.

Daí, escolhendo $\beta > 0$ tal que $\frac{\beta}{K} [e^{K(r_2-t_0)} - 1] \leq a$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\|\mu - \tilde{\mu}\| \leq \rho \Rightarrow \|f(t, x, \mu) - f(t, x, \tilde{\mu})\| \leq \beta, \quad \forall t \in [t_0, t_2]. \quad (1.22)$$

Seja $\mu_1 \in B[\tilde{\mu}, \rho]$ e provemos que a solução φ_{μ_1} de $x' = f(t, x, \mu_1)$ que satisfaz $\varphi_{\mu_1}(t_0) = x_0$ está definida em $[t_0, r_2]$.

Seja (m_1, m_2) o intervalo maximal de definição de φ_{μ_1} .

Suponha por absurdo que $m_2 \leq r_2$. Então, pelo teorema 1.3.2 existe $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$t > m_2 - \epsilon_2 \Rightarrow (t, \varphi_{\mu_1}(t)) \notin \tilde{B}(\mu_1) = \{(t, x); t \in [t_0, r_2], x \in B[\varphi_{\mu_1}(t), a]\},$$

e, portanto, como $m_2 \leq r_2$, então existe $t_2 \in [t_0, r_2]$ tal que $t_2 > m_2 - \epsilon_2$, ou seja,

$$\|\varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(t)\| > a.$$

Absurdo, pois temos a estimativa 1.22. Logo, $m_2 > r_2$ e, portanto, φ_{μ_1} está definida em $[t_0, r_2]$.

Assim, $[t_0, r_2] \times B[\tilde{\mu}, \rho] \subset E(t_0, x_0)$ e, portanto, em particular $(t_0, r_2) \times B(\tilde{\mu}, \rho) \subset E(t_0, x_0)$, ou seja, $E(t_0, x_0)$ é aberto.

Provemos agora que φ é contínua em $E(t_0, x_0)$:

Seja $(\tilde{t}, \tilde{\mu}) \in E(t_0, x_0)$. Então, como vimos acima, existe a vizinhança fechada $[t_0, r_2] \times B[\tilde{\mu}, \rho] \subset E(t_0, x_0)$ onde podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, \mu) - \varphi(\tilde{t}, \tilde{\mu})\| &\leq \|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \tilde{\mu})\| + \|\varphi(t, \tilde{\mu}) - \varphi(\tilde{t}, \tilde{\mu})\| \\ &= \|\varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(t)\| + \|\varphi_{\tilde{\mu}}(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(\tilde{t})\|. \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ dado.

Como $\varphi_{\tilde{\mu}}$ é contínua, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|t - \tilde{t}| < \delta_1 \Rightarrow \|\varphi_{\tilde{\mu}}(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(\tilde{t})\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por outro lado, por 1.21 temos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|\mu - \tilde{\mu}\| < \delta_2 \Rightarrow \|\varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\tilde{\mu}}(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, tomando $\delta_0 = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que

$$\|(t, \mu) - (\tilde{t}, \tilde{\mu})\| < \delta_0 \Rightarrow \|\varphi(t, \mu) - \varphi(\tilde{t}, \tilde{\mu})\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja, φ é contínua em $E(t_0, x_0)$. \square

Como consequência temos o corolário abaixo que é ainda um resultado local, porém apenas em relação ao parâmetro.

Corolário 1.4.1 (de Dependência Contínua em Parâmetros). *Seja $(t_0, x_0, \mu_0) \in \tilde{A}$. Se a solução φ_{μ_0} de $x' = f(t, x, \mu_0)$ que satisfaz $\varphi_{\mu_0}(t_0) = x_0$ está definida em $[r_1, r_2] \subset \mathbb{R}$, então existe $\rho > 0$ tal que a função solução φ está definida e é contínua em $[r_1, r_2] \times B(\mu_0, \rho)$.*

Demonstração. Como φ_{μ_0} está definida em $[r_1, r_2] \subset \mathbb{R}$, então $[r_1, r_2] \subset \hat{I}_{\mu_0}$, o intervalo maximal de definição de φ_{μ_0} . Daí, como $\varphi_{\mu_0}(t_0) = x_0$, então

$$[r_1, r_2] \times \{\mu_0\} \subset E(t_0, x_0).$$

Seja $(t, \mu_0) \in E(t_0, x_0)$ com $t \in [r_1, r_2]$. Como $E(t_0, x_0)$ é aberto, então existem $\epsilon_t > 0$ e $\rho_t > 0$ tais que

$$B(t, \epsilon_t) \times B(\mu_0, \rho_t) \subset E(t_0, x_0).$$

Em particular, $\bigcup_{t \in [r_1, r_2]} B(t, \epsilon_t)$ é uma cobertura aberta de $[r_1, r_2]$ contida em $E(t_0, x_0)$. Daí, como $[r_1, r_2]$ é compacto, então existem $\epsilon_{t_1}, \dots, \epsilon_{t_k} > 0$ tais que $\bigcup_{i=1}^k B(t_i, \epsilon_{t_i})$ é subcobertura finita de $[r_1, r_2]$.

Escolhendo $\rho = \max\{\rho_{t_1}, \dots, \rho_{t_k}\}$, então

$$B(\mu_0, \rho_{t_i}) \subset B(\mu_0, \rho), \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

e, portanto

$$[r_1, r_2] \times B(\mu_0, \rho) \subset \bigcup_{i=1}^k B(t_i, \epsilon_{t_i}) \times B(\mu_0, \rho_{t_i}) \subset E(t_0, x_0),$$

ou seja, φ está definida em $[r_1, r_2] \times B(\mu_0, \rho)$. Além disso, como φ é contínua em $E(t_0, x_0)$, então é contínua em $[r_1, r_2] \times B(\mu_0, \rho)$. \square

Além da dependência contínua das soluções de $x' = f(t, x, \mu)$ em relação ao parâmetro μ , exigindo mais uma condição sobre f podemos também obter dependência diferenciável em relação a μ , conforme veremos abaixo.

Seja $f = (f_1, \dots, f_n) : \tilde{A} \subset \mathbb{R}^{1+n+l} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com derivadas parciais em relação a $x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_l$ contínuas em \tilde{A} . Então, temos o teorema abaixo, que estabelece a dependência diferenciável das soluções de $x' = f(t, x, \mu)$ em relação ao parâmetro μ e cuja demonstração omitiremos aqui, mas pode ser encontrada em [8, p. 46].

Teorema 1.4.3 (de Dependência Diferenciável em Parâmetros). *Seja $(t_0, x_0) \in \pi(\tilde{A})$. Então, a função solução $\varphi : E(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x, \mu)$ além de contínua, possui as derivadas parciais*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_k}(t, \mu) \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t \partial \mu_k}(t, \mu), \quad k = 1, \dots, l \quad (1.23)$$

definidas e contínuas em $E(t_0, x_0)$, sendo que a derivada mista não depende da ordem de derivação.

Além disso, escrevendo $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, então as derivadas $\frac{\varphi_i}{\mu_k}$ satisfazem o sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_k} \right) (t, \mu) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (t, \varphi(t, \mu), \mu) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_k} (t, \mu) + \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k} (t, \varphi(t, \mu), \mu), \quad (1.24)$$

e as condições iniciais $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_k} (t_0, \mu) = 0, \forall i = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, l$.

O sistema 1.24 acima é chamado sistema de **equações variacionais** associado à $x' = f(t, x, \mu)$ com condições iniciais (t_0, x_0) . Podemos escrevê-lo matricialmente de forma mais sucinta da seguinte maneira:

Considere as matrizes $Y = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} \right)_{n \times l}$, $F_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{n \times n}$ e $F_\mu = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j} \right)_{n \times l}$. Então, o sistema 1.24 é equivalente à seguinte equação matricial:

$$Y'(t, \mu) = F_x(t, \varphi(t, \mu), \mu)Y(t, \mu) + F_\mu(t, \varphi(t, \mu), \mu). \quad (1.25)$$

O teorema 1.4.3 garante que a função solução φ é de classe C^1 em relação ao parâmetro μ , desde que f seja de classe C^1 em relação a x e μ . Conforme veremos no corolário abaixo esse resultado pode ser generalizado.

Corolário 1.4.2 (de Dependência Diferenciável em Parâmetros). *Seja $f : \tilde{A} \subset \mathbb{R}^{1+n+l} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^m em relação a x e μ . Então, dado $(t_0, x_0) \in \pi(\tilde{A})$, a função solução $\varphi : E(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^m em relação a μ .*

Exemplo 1.4.2. *No exemplo 1.4.1 temos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x, \mu) = \mu x$ que além de satisfazer as condições do teorema 1.2.1 é um polinômio em μ e, portanto, tem derivadas parciais em relação ao parâmetro μ de classe C^∞ . Logo, pelo corolário acima, a função solução associada a f é de classe C^∞ em relação a μ .*

Exemplo 1.4.3. *Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x, \mu) = |\mu|x$. Observe que f satisfaz as condições do teorema 1.2.1 porém não é derivável em relação a μ e, portanto, não podemos garantir a dependência diferenciável das soluções de $x' = |\mu|x$ em relação a μ .*

Fechamos esta discussão sobre parâmetros observando que uma EDO com parâmetros pode ser reduzida a outra sem parâmetros.

Lema 1.4.2. *Toda EDO com parâmetros $x' = f(t, x, \mu)$ é equivalente a uma EDO sem parâmetros $y' = g(t, y)$.*

Demonstração. Primeiro, defina uma aplicação $g : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g(t, y) = g(t, (x, \mu)) = (f(t, x, \mu), 0),$$

onde $(t, y) = (t, (x, \mu)) \in \tilde{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+l}$.

Agora, seja $\psi(t) = (\varphi(t), \mu(t))$ uma solução de $y' = g(t, y)$ que satisfaz a condição inicial $\psi(t_0) = (\varphi_0, \mu_0)$. Então, temos

$$(\varphi'(t), \mu'(t)) = \psi'(t) = g(t, \psi(t)) = (f(t, \varphi(t), \mu(t)), 0),$$

ou seja, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \mu(t))$ e $\mu'(t) = 0$ e, portanto, $\mu(t) \equiv \mu_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \mu_0)$. Logo, φ é solução de $x' = f(t, x, \mu_0)$ que satisfaz $\varphi(t_0) = x_0$.

Por outro lado, seja φ uma solução de $x' = f(t, x, \mu_0)$ que satisfaz $\varphi(t_0) = x_0$. Então, $\psi = (\varphi, \mu_0)$ é solução de $y' = g(t, y)$ que satisfaz $y(t_0) = (x_0, \mu_0)$. \square

1.5 Dependência Contínua e Diferenciável de Soluções em relação a Condições Iniciais

Seja $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^{1+n+l}$ um aberto não-vazio e $f = (f_1, \dots, f_n) : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ contínuas em \tilde{A} , $\forall i, j = 1, \dots, n$. Considere a equação diferencial

$$x' = f(t, x, \mu). \quad (1.26)$$

Na seção anterior vimos que as soluções 1.26 têm dependência contínua e até diferenciável em relação ao parâmetro μ . Agora, estudaremos a dependência das soluções de 1.26 em relação a condições iniciais $(t_0, x_0) \in \pi(\tilde{A})$.

Para isso, mostraremos que a EDO 1.26 munida de uma condição inicial pode ser reduzida a outra EDO que tem a condição da primeira como parâmetro e à qual são aplicáveis os resultados da seção anterior. Mais precisamente, temos a construção abaixo:

Considere a EDO 1.26 e uma condição inicial $(t_0, x_0) \in \pi(\tilde{A})$, ou seja,

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Seja $(t_0, x_0, \mu) \in \tilde{A}$ fixo e considere a mudança de variáveis

$$\begin{cases} t = s + t_0 \\ x = y + x_0 \end{cases}$$

que define a seguinte função

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R}^{1+n} \times \tilde{A} &\rightarrow \mathbb{R}^{1+n+l} \\ (s, y, \mu, t_0, x_0) &\mapsto (s + t_0, y + x_0, \mu) \end{aligned}$$

Observe que ρ é C^∞ . Logo, como \tilde{A} é aberto em \mathbb{R}^{1+n+l} , então $A^* = \rho^{-1}(\tilde{A})$ é aberto em $\mathbb{R}^{1+n} \times \tilde{A}$. Daí, como a função f é definida em \tilde{A} , podemos considerar a composta $f \circ \rho = g$ definida no conjunto aberto A^* :

$$g : \begin{array}{ccc} A^* & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (s, y, \mu, t_0, x_0) & \mapsto & f(s + t_0, y + x_0, \mu) \end{array}$$

Agora, consideremos em A^* a seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} = g(s, y, \mu, t_0, x_0) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Observe que devido à diferenciabilidade de f e ρ , temos que g e suas derivadas parciais em relação a $y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_l, t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}$ são contínuas em A^* e, portanto, valem as conclusões a respeito de dependência contínua e diferenciável de soluções de 1.28 em relação ao parâmetro (μ, t_0, x_0) .

Portanto, resta mostrar que toda solução de 1.28 dá origem a uma solução de 1.27 e vice-versa:

Seja $y(s) = \psi(s, \mu, t_0, x_0)$ a solução de 1.28 que satisfaz $\psi(0, \mu, t_0, x_0) = 0$. Note que de fato $(0, 0, \mu, t_0, x_0) \in A^*$, pois $\rho(0, 0, \mu, t_0, x_0) = (t_0, x_0, \mu) \in \tilde{A}$. Tal solução dá origem à função

$$x(s) = x_0 + y(s) = x_0 + \psi(s, \mu, t_0, x_0),$$

ou, lembrando que $t = s + t_0$:

$$x(t) = x_0 + \psi(t - t_0, \mu, t_0, x_0) = \varphi(t, \mu, t_0, x_0), \quad (1.29)$$

que satisfaz

$$\varphi(t_0, \mu, t_0, x_0) = x_0 \quad e \quad \frac{d\varphi}{dt}(t, \mu, t_0, x_0) = f(t, \varphi(t, \mu, t_0, x_0), \mu),$$

ou seja, $x(t) = \varphi(t, \mu, t_0, x_0)$ é solução de 1.27 que satisfaz $x(t_0) = x_0$.

Reciprocamente, se $x(t) = \varphi(t, \mu, t_0, x_0)$ é solução de 1.27 que satisfaz $\varphi(t_0, \mu, t_0, x_0) = x_0$, então temos a função

$$y(t) = \varphi(t, \mu, t_0, x_0) - x_0,$$

ou, lembrando que $t = s + t_0$:

$$y(s) = \varphi(s + t_0, \mu, t_0, x_0) - x_0 = \psi(s, \mu, t_0, x_0),$$

que satisfaz

$$\psi(0, \mu, t_0, x_0) = 0 \quad e \quad \frac{d\psi}{ds} = g(s, \mu, t_0, x_0),$$

ou seja, $y(s) = \psi(t, \mu, t_0, x_0)$ é solução de 1.28 que satisfaz $y(0) = 0$.

Observe que devido à relação acima entre as soluções de 1.27 e 1.28, temos que a continuidade ou diferenciabilidade de uma implica na mesma propriedade para a outra. Logo, aplicando os resultados da seção anterior ao sistema 1.28, obtemos os resultados que regem a dependência contínua e diferenciável das soluções de 1.27 em relação às suas condições iniciais.

De fato, dado $(\mu, t_0, x_0) \in \tilde{A}$, existe uma única solução maximal $\varphi_{(\mu, t_0, x_0)} : I_{(\mu, t_0, x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x, \mu)$ que satisfaz $\varphi_{(\mu, t_0, x_0)}(t_0) = x_0$. Daí, considere o conjunto

$$S = \{(t, \mu, t_0, x_0); (\mu, t_0, x_0) \in \tilde{A}, t \in I_{(\mu, t_0, x_0)}\}, \quad (1.30)$$

que é o análogo do conjunto $E(t_0, x_0)$ da seção anterior.

Aplicando o teorema 1.4.2 ao sistema 1.28 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.5.1 (de Dependência Contínua em Condições Iniciais). *O conjunto S é aberto em $\mathbb{R} \times \tilde{A}$ e a função*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mu, t_0, x_0) &\mapsto \varphi_{(\mu, t_0, x_0)}(t) \end{aligned} \quad (1.31)$$

é contínua.

Aplicando o corolário 1.4.2 ao sistema 1.28 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.5.2 (de Dependência Diferenciável em Condições Iniciais). *Se f é de classe C^m em relação a x e μ , então a função $\tilde{\varphi} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^m em relação a μ, t_0 e x_0 .*

Capítulo 2

Campos Vetoriais

2.1 Fluxo

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não-vazio e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k com $k \geq 1$.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma equação diferencial ordinária da forma

$$x' = f(x), \tag{2.1}$$

é *autônoma*.

No capítulo anterior verificamos que todos os sistemas de EDO's de primeira ordem, assim como as de ordem superior ou com parâmetros são equivalentes a uma EDO não-autônoma. Deste capítulo em diante, passaremos a estudar equações diferenciais do tipo 2.1.1 pois, conforme o lema abaixo, toda equação diferencial não-autônoma é equivalente a uma autônoma.

Lema 2.1.1. Toda EDO não-autônoma é equivalente a uma EDO autônoma.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^{1+n}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e considere a EDO não autônoma $x' = f(t, x)$.

Para cada $(t, x) \in A$, escreva $y = (t, x)$, defina o campo vetorial $g : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$g(y) = g(t, x) = (1, f(t, x)),$$

e considere a EDO autônoma $y' = g(y)$.

Seja $\psi(s) = (t(s), \varphi(s))$ uma solução de $y' = g(y)$. Então, temos que

$$(t'(s), \varphi'(s)) = \psi'(s) = g(\varphi(s)) = g(t(s), \varphi(s)) = (1, f(t(s), \varphi(s))),$$

ou seja, $t'(s) = 1$ e $\varphi'(s) = f(t(s), \varphi(s))$ e, portanto, $t(s) = s$ e $\varphi'(s) = f(s, \varphi(s))$. Logo, φ é solução de $x' = f(t, x)$.

Por outro lado, seja φ uma solução de $x' = f(t, x)$. Então, definindo $\psi(s) = (s, \varphi(s))$ segue que

$$\psi'(s) = (1, \varphi'(s)) = (1, f(s, \varphi(s))) = g(s, \varphi(s)) = g(\psi(s)),$$

ou seja, ψ é solução de $y' = g(y)$. \square

Observe que como f é um campo de classe C^k com $k \geq 1$, então temos sempre a existência e unicidade de soluções maximais de 2.1.1, assim como a dependência contínua e diferencial dessas soluções em relação a condições iniciais. Em particular, temos o importante teorema abaixo:

Teorema 2.1.1. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k com $k \geq 1$. Então:*

- (a) *Dado $x_0 \in E$, existe uma única solução maximal $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow E$ de $x' = f(x)$ que satisfaz $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.*
- (b) *O conjunto $S = \{(t, x_0); x_0 \in E, t \in I_{x_0}\}$ é aberto em $\mathbb{R} \times E$.*
- (c) *A função $\varphi : S \rightarrow E$ dada por $\varphi(t, x_0) = \varphi_{x_0}(t)$ é de classe C^k .*
- (d) *Dados $x_0 \in E$, $t_0 \in I_{x_0}$ e $y_0 = \varphi(t_0, x_0)$, então temos que $I_{y_0} = I_{x_0} - t_0$ e $\varphi(s, y_0) = \varphi(s, \varphi(t_0, x_0)) = \varphi(s + t_0, x_0)$.*

Demonstração. (a) Seja $g : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(t, x) = f(x)$. Como E é aberto em \mathbb{R}^n , então $\mathbb{R} \times E$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} . Além disso, como f é de classe C^k , então g é de classe C^k . Logo, dado $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ segue pelo teorema 1.3.1 que existe uma única solução maximal $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow E$ de $x' = g(t, x) = f(x)$ que satisfaz $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.

(b) e (c) Consequência direta dos teoremas 1.5.1 e 1.5.2.

(d) Defina a função $\lambda(s) = \varphi(t_0 + s, x_0)$. Então λ está definida para todo $s \in I_{x_0} - t_0$ e λ é solução de $x' = f(x), x(0) = y_0$. Mas, pelo teorema 1.2.1 temos que $\varphi(s, y_0)$ é a única solução desse sistema e, portanto, $\lambda(s) = \varphi(s, y_0)$, ou seja, $I_{x_0} - t_0 \subset I_{y_0}$.

Defina a função $\psi(t) = \varphi(t - t_0, y_0)$. Então ψ está definida para todo $t \in I_{y_0} + t_0$ e ψ é solução de $x' = f(x), x(t_0) = y_0$. Mas, pelo teorema 1.2.1 temos que $\varphi(t, x_0)$ é a única solução desse sistema e, portanto, $\psi(t) = \varphi(t, x_0)$, ou seja $I_{y_0} + t_0 \subset I_{x_0}$. Daí, segue que $I_{y_0} \subset I_{x_0} - t_0$.

Logo, $I_{y_0} = I_{x_0} - t_0$ e $\varphi(s, y_0) = \varphi(t_0 + s, x_0)$. \square

Definição 2.1.2. *Dado $x_0 \in E$, a solução maximal $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow E$ de $x' = f(x)$ que satisfaz $\varphi_{x_0}(0) = x_0$ é chamada **trajetória** do campo f por x_0 .*

Definição 2.1.3. A função $\varphi : S \rightarrow E$ é chamada **fluxo local** gerado por f .

O adjetivo *local* na definição acima é motivado pelo seguinte lema:

Lema 2.1.2. Seja $x_0 \in E$. Então, existe um difeomorfismo local definido numa vizinhança de x_0 .

Demonstração. Seja $x_0 \in E$. Então $(0, x_0) \in S$ e, portanto, como S é aberto segue que existem $\epsilon > 0$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de x_0 tais que $(-\epsilon, \epsilon) \times V \subset S$.

Seja $\varphi : S \rightarrow E$ o fluxo local gerado por f . Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ podemos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi_t : V &\rightarrow \varphi_t(V) \subset E \\ x &\mapsto \varphi(t, x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Mas, observe que $\varphi(0, x_0) = x_0 \in V$ e, portanto, pela continuidade de φ no ponto $(0, x_0)$ segue que existe $0 < \epsilon^* < \epsilon$ e $\Omega \subset V$ vizinhança de x_0 tais que

$$(t, x) \in (-\epsilon^*, \epsilon^*) \times \Omega \Rightarrow \varphi(t, x) \in V,$$

e, portanto, para $t \in (-\epsilon^*, \epsilon^*)$ temos que $\varphi_t(\Omega) \subset V$.

Daí, dado $t \in (-\epsilon^*, \epsilon^*)$ podemos definir as funções $\varphi_t|_{\Omega}$ e $\varphi_{-t}|_{\varphi_t(\Omega)}$. Pelo item (c) do teorema 2.1.1 ambas são de classe C^k e, além disso, pelo item (d) as funções acima são inversas uma da outra. De fato, dado $x \in \Omega$, então

$$\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi(-t, \varphi(t, x)) = \varphi(t - t, x) = \varphi(0, x) = x,$$

e, por outro lado, dado $y \in \varphi_t(\Omega)$, então

$$\varphi_t(\varphi_{-t}(y)) = \varphi(t, \varphi(-t, y)) = \varphi(t - t, y) = \varphi(0, y) = y,$$

ou seja, $\varphi_{-t}|_{\varphi_t(\Omega)}$ é a inversa de $\varphi_t|_{\Omega}$.

Logo, $\varphi_t|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \varphi_t(\Omega) \subset E$ é um difeomorfismo e, portanto, φ_t é um difeomorfismo local. \square

Definição 2.1.4. Dado $x_0 \in E$, a função $\varphi_t : V \rightarrow E$ definida em uma vizinhança V de x_0 e dada por (2.2) é denominada **fluxo no tempo t** em torno de x_0 .

O lema acima nos diz que o fluxo local gerado por um campo f define difeomorfismos locais, os fluxos no tempo t . Por outro lado, no caso em que $S = \mathbb{R} \times E$, ou seja, $\forall x \in E, I_x = \mathbb{R}$, observe que o fluxo no tempo t está definido em E e, além disso, é um difeomorfismo global em E . Daí, denotando o grupo dos difeomorfismos de classe C^k definidos em E com a operação de composição por $Dif^k(E)$, temos o corolário abaixo:

Corolário 2.1.1. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k com $k \geq 1$ tal que $\forall x \in E$ temos $I_x = \mathbb{R}$. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $\varphi_t \in \text{Dif}^k(E)$ e a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\rightarrow \text{Dif}^k(E) \\ t &\mapsto \varphi_t \end{aligned} \tag{2.3}$$

é um homomorfismo do grupo aditivo \mathbb{R} em $\text{Dif}^k(E)$.

2.2 Retrato de Fase

Definição 2.2.1. *Seja $x_0 \in E$. O conjunto $\gamma_{x_0} = \{\varphi(t, x_0); t \in I_{x_0}\}$ é chamado **órbita** de f por x_0 .*

Lema 2.2.1. *Sejam $x_0, y_0 \in E$. Então $\gamma_{x_0} = \gamma_{y_0}$ ou $\gamma_{x_0} \cap \gamma_{y_0} = \emptyset$.*

Demonstração. Primeiro, provemos que se $x \in \gamma_{x_0}$, então $\gamma_x = \gamma_{x_0}$. De fato, se $x \in \gamma_{x_0}$, então existe $t_x \in I_{x_0}$ tal que $x = \varphi(t_x, x_0)$ e, portanto, temos que $I_x = I_{x_0} - t_x$ e $\varphi(t, x) = \varphi(t + t_x, x_0)$. Daí, por um lado, dado $a \in \gamma_x$ segue que $a = \varphi(t_a, x) = \varphi(t_a + t_x, x_0) \in \gamma_{x_0}$. Por outro lado, dado $b \in \gamma_{x_0}$ segue que $b = \varphi(t_b, x_0) = \varphi(t_b - t_x, x) \in \gamma_x$. Logo, $\gamma_x = \gamma_{x_0}$.

Agora, suponha que existe $x \in \gamma_{x_0} \cap \gamma_{y_0}$. Então $\gamma_{x_0} = \gamma_x = \gamma_{y_0}$. Se x não existir, então $\gamma_{x_0} \cap \gamma_{y_0} = \emptyset$. \square

Em outras palavras, o conjunto E consiste na união disjunta das órbitas de f . Em particular, temos a seguinte definição:

Definição 2.2.2. *O conjunto E munido da decomposição em órbitas de f é chamado **retrato de fase** de f .*

Quando $n \leq 3$, o retrato de fase de um campo f é representado graficamente esboçando algumas órbitas de f em \mathbb{R}^n , orientando cada órbita com o sentido de crescimento da respectiva trajetória. Conforme veremos abaixo, cada órbita no retrato de fase pode pertencer a apenas um dentre três conjuntos.

Lema 2.2.2. *Seja $x_0 \in E$ e $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow E$ a trajetória de f por x_0 . Se φ_{x_0} não é injetora, então $I_{x_0} = \mathbb{R}$ e existe $c > 0$ tal que $\varphi_{x_0}(t + c) = \varphi_{x_0}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como φ_{x_0} não é injetora, então existem $t_1, t_2 \in I_{x_0}$ com $t_1 < t_2$ tais que $\varphi_{x_0}(t_1) = \varphi_{x_0}(t_2) = c_0$.

Defina a função $\psi(t) = \varphi_{x_0}(t + t_1)$. Então, ψ é a trajetória de f por c_0 definida em $I = I_{x_0} - t_1$. Além disso, pondo $c = t_2 - t_1 > 0$, então temos que $\psi(0) = \psi(c) = c_0$ e por indução obtemos que $\psi(nc) = c_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Daí, dado $t \in I$, então pelo algoritmo da divisão de Euclides segue que existe $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in [0, c]$ tais que $t = nc + r$ e, portanto,

$$\psi(t) = \varphi(t, c_0) = \varphi(nc + r, c_0) = \varphi(r, \varphi(nc, c_0)) = \varphi(r, c_0) = \psi(r),$$

ou seja, $\psi(I) \subset \psi([0, c])$.

Mas, como $0, c \in I$, então $[0, c] \subset I$, pois I é intervalo em \mathbb{R} e, portanto, é convexo. Daí, temos que $\psi([0, c]) \subset \psi(I)$.

Logo, $\psi(I) = \psi([0, c])$ é compacto, pois $[0, c]$ é compacto e ψ é contínua. Daí, pelo corolário 1.3.2 segue que $I = \mathbb{R}$ e, portanto, como $I_{x_0} = I + t_1$, então $I_{x_0} = \mathbb{R}$.

Além disso, como $\varphi(t_1, x_0) = \psi(0) = \psi(c) = \varphi(t_2, x_0)$, então $\varphi(t + t_1, x_0) = \varphi(t + t_2, x_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e, portanto

$$\begin{aligned} \varphi(t+c, x_0) &= \varphi(t+(t_2-t_1), x_0) = \varphi(-t_1, \varphi(t+t_2, x_0)) = \varphi(-t_1, \varphi(t+t_1, x_0)) = \\ &= \varphi(t, x_0), \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi_{x_0}(t+c) = \varphi_{x_0}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. □

Definição 2.2.3. *Sejam $x_0 \in E$, $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow E$ a trajetória de f por x_0 e γ_{x_0} a respectiva órbita. Se existir $c > 0$ tal que $\varphi_{x_0}(t+c) = \varphi_{x_0}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_{x_0}(t_1) \neq \varphi_{x_0}(t_2)$ para $t_1, t_2 \in (0, c)$, então dizemos que φ_{x_0} é **periódica com período c** e γ_{x_0} é uma **órbita periódica**.*

Teorema 2.2.1. *Seja $x_0 \in E$ e $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow E$ a trajetória de f por x_0 . Então, uma única dentre as seguintes alternativas é verdadeira:*

- (a) φ_{x_0} é injetora.
- (b) $I_{x_0} = \mathbb{R}$ e φ_{x_0} é constante.
- (c) $I_{x_0} = \mathbb{R}$ e φ_{x_0} é periódica.

Demonstração. Suponha que φ_{x_0} não é injetora. Então, pelo lema 2.2.2 segue que $I_{x_0} = \mathbb{R}$ e, além disso, o conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R}; \varphi_{x_0}(t+c) = \varphi_{x_0}(t), \forall t \in \mathbb{R}\},$$

é tal que $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ e, portanto, $C \neq \emptyset$.

Provemos que C é um subgrupo aditivo de \mathbb{R} . De fato, dados $a, b \in C$, então

$$\varphi_{x_0}(t+(a+b)) = \varphi_{x_0}((t+a)+b) = \varphi_{x_0}(t+a) = \varphi_{x_0}(t),$$

ou seja, $a+b \in C$. Além disso, dado $a \in C$, então

$$\varphi_{x_0}(t - a) = \varphi_{x_0}((t - a) + a) = \varphi_{x_0}(t),$$

ou seja, $-a \in C$. Logo, C é subgrupo aditivo de \mathbb{R} .

Agora, provemos que C é fechado em \mathbb{R} . De fato, dada uma sequência $(a_n) \subset C$ tal que $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $t + a_n \rightarrow t + a$ e, portanto, pela continuidade de φ_{x_0} segue que

$$\varphi_{x_0}(t + a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x_0}(t + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(t),$$

ou seja, $a \in C$ e, portanto, C é fechado em \mathbb{R} .

Finalmente, provemos que $C = \mathbb{R}$ ou existe $\tau > 0$ tal que $C = \tau\mathbb{Z}$:

Como $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, então existe $\tau = \inf(C \cap \mathbb{R}_+) \geq 0$.

Suponha $\tau = 0$. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ dados. Como $\tau = 0$, então existe $c_0 \in C \cap \mathbb{R}_+$ tal que $0 < c_0 < \epsilon$. Por outro lado, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nc_0 < t < (n+1)c_0$, ou seja, $0 < t - nc_0 < c_0 < \epsilon$ e, portanto, existe $nc_0 \in C$ tal que $|t - nc_0| < \epsilon$. Logo, C é denso em \mathbb{R} , ou seja, $\overline{C} = \mathbb{R}$, onde \overline{C} denota o fecho de C . Mas, como C é fechado, então $C = \overline{C} = \mathbb{R}$.

Suponha $\tau > 0$. Então, $\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in C \cap \mathbb{R}_+$ tal que $\tau < t_n < \tau + \frac{1}{n}$ e, portanto, pelo teorema do confronto segue que $t_n \rightarrow \tau$. Daí, como C é fechado, então $\tau \in C$ e, portanto, como $\tau > 0$, então $\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$. Dado $c \in C$, então pelo algoritmo da divisão de Euclides segue que existe $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < \tau$ tais que $c = q\tau + r$ e, portanto, $0 \leq c - qc < \tau$. Mas, como $\tau, c \in C$, então $\tau - qc \in C$, pois C é grupo. Daí, pela minimalidade de τ segue que $r = 0$, ou seja, $C \subset \tau\mathbb{Z}$. Além disso, como $\tau \in C$ e C é grupo, então $\tau\mathbb{Z} \subset C$ e, portanto, $C = \tau\mathbb{Z}$.

No caso em que $C = \mathbb{R}$, temos que φ_{x_0} é constante e igual a x_0 . De fato, $\varphi_{x_0}(c) = \varphi_{x_0}(0) = x_0, \forall c \in \mathbb{R}$.

No caso em que existe $\tau > 0$ tal que $C = \tau\mathbb{Z}$, temos que φ_{x_0} é periódica com período τ . De fato, temos que $\varphi_{x_0}(t + \tau) = \varphi_{x_0}(t), \forall t \in \mathbb{R}$ e, além disso, pela minimalidade de τ segue que φ_{x_0} é injetora em $(0, \tau)$. \square

Definição 2.2.4. Se φ_{x_0} é constante e igual a p , então dizemos que φ_{x_0} é uma **trajetória singular** e p é um **ponto singular** ou **singularidade** de f . Caso contrário, dizemos que é uma **trajetória regular** e todos os pontos da respectiva órbita são chamados **pontos regulares** de f .

O teorema acima nos diz que toda trajetória ou é singular ou é regular. No caso regular, a trajetória ou é injetora ou é periódica. Em termos de órbitas, esse resultado dá origem ao corolário abaixo:

Corolário 2.2.1. Seja $x_0 \in E$ e γ_{x_0} a órbita de f por x_0 . Então, uma única dentre as seguintes alternativas é verdadeira:

- (a) γ_{x_0} é difeomorfa à reta \mathbb{R} .
- (b) $\gamma_{x_0} = \{p\}$, $p \in E$.
- (c) γ_{x_0} é difeomorfa ao círculo S^1 .

2.3 Equivalência e Conjugação de Campos

Na seção anterior verificamos que o campo vetorial f age sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ parcionando-o em curvas diferenciáveis, dando origem ao chamado retrado de fase. Uma questão natural é a seguinte: quando dois campos dão origem a retratos de fase qualitativamente similares? Para responder a essa questão introduziremos nesta seção dois conceitos que permitirão comparar retratos de fase: a equivalência e conjugação entre campos vetoriais.

Sejam $f_1 : E_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : E_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe C^1 e $\varphi_1 : S_1 \rightarrow E_1$, $\varphi_2 : S_2 \rightarrow E_2$ seus respectivos fluxos locais.

Definição 2.3.1. Dizemos que o campo f_1 é **topologicamente equivalente** (C^r -equivalente) a f_2 se existir um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : E_1 \rightarrow E_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(\xi(t), h(x)), \quad \forall (t, x) \in S_1 \quad (2.4)$$

onde $\xi : I_x^1 \rightarrow I_{h(x)}^2$ é uma função estritamente crescente sobrejetiva. A aplicação h é denominada **equivalência topológica** (diferenciável) entre f_1 e f_2 .

Lema 2.3.1. Se existe uma equivalência $h : E_1 \rightarrow E_2$ entre os campos f_1 e f_2 , então h leva órbitas de f_1 em órbitas de f_2 . Mais ainda, h leva pontos singulares e órbitas periódicas de f_1 em pontos singulares e órbitas periódicas de f_2 , respectivamente.

Demonstração. Seja $x_0 \in E_1$ e $\gamma_{x_0}^1$ a órbita de f_1 por x_0 . Então, dado $x = \varphi_1(t, x_0) \in \gamma_{x_0}^1$ segue que

$$h(x) = h(\varphi_1(t, x_0)) = \varphi_2(\xi(t), h(x_0)) \in \gamma_{h(x_0)}^2,$$

ou seja, $h(\gamma_{x_0}^1) \subset \gamma_{h(x_0)}^2$.

Por outro lado, seja $y = \varphi_2(s, h(x_0)) \in \gamma_{h(x_0)}^2$. Como ξ é sobrejetiva, então existe $t \in I_{x_0}^1$ tal que $s = \xi(t)$ e, portanto,

$$y = \varphi_2(\xi(t), h(x_0)) = h(\varphi_1(t, x_0)) \in h(\gamma_{x_0}^1),$$

ou seja, $\gamma_{h(x_0)}^2 \subset h(\gamma_{x_0}^1)$.

Logo, $h(\gamma_{x_0}^1) = \gamma_{h(x_0)}^2$.

Seja $p \in E_1$ um ponto singular de f_1 . Então, pela primeira parte temos que a órbita $\gamma_p^1 = \{p\}$ de f_1 é levada na órbita $\gamma_{h(p)}^2 = h(\gamma_p^1) = \{h(p)\}$ de f_2 , ou seja, $h(p)$ é um ponto singular de f_2 .

Seja $\varphi_{x_0}^1 : \mathbb{R} \rightarrow E_1$ uma trajetória periódica de f_1 com período c . Então, temos que

$$\varphi_{x_0}^1(t+c) = \varphi_{x_0}^1(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por outro lado,

$$\varphi_{h(x_0)}^2(\xi(t)) = h(\varphi_{x_0}^1(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\varphi_{h(x_0)}^2(\xi(c)) = h(\varphi_{x_0}^1(c)) = h(\varphi_{x_0}^1(0)) = \varphi_{h(x_0)}^2(\xi(0)).$$

Mas, como ξ é estritamente crescente, então $\xi(c) \neq \xi(0)$ e, portanto, $\varphi_{h(x_0)}^2$ não é injetora. Além disso, como $\varphi_{x_0}^1$ é periódica, então pelo teorema 2.2.1 segue que $\varphi_{x_0}^1$ não é constante e, portanto, $\varphi_{h(x_0)}^2$ também não é constante, pois h é bijetora e pela primeira parte temos que $\gamma_{h(x_0)}^2 = h(\gamma_{x_0}^1)$.

Logo, pelo teorema 2.2.1 segue que $\varphi_{h(x_0)}^2$ é periódica. \square

Definição 2.3.2. Dizemos que o campo f_1 é **topologicamente conjugado** (C^r -conjugado) a f_2 se existir um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : E_1 \rightarrow E_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)), \quad \forall (t, x) \in S^1 \quad (2.5)$$

A aplicação h é denominada **conjugação topológica** (diferenciável) entre f_1 e f_2 .

Lema 2.3.2. Seja $h : E_1 \rightarrow E_2$ um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$. Então, h é uma conjugação entre f_1 e f_2 se, e somente se,

$$Dh(x)f_1(x) = f_2(h(x)), \quad \forall x \in E_1. \quad (2.6)$$

Demonstração. Suponha que h satisfaz 2.6. Dado $x_0 \in E_1$, defina a função $\psi(t) = h(\varphi_1(t, x_0))$, $t \in I_{x_0}^1$. Então, ψ é a trajetória de f_2 por $h(x_0)$. De fato, $\psi(0) = h(\varphi_1(0, x_0)) = h(x_0)$ e

$$\psi'(t) = Dh(\varphi_1(t, x_0)) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, x_0) = Dh(\varphi_1(t, x_0)) f_1(\varphi_1(t, x_0)) =$$

$$= f_2(h(\varphi_1(t, x_0))) = f_2(\psi(t)),$$

e, portanto, $h(\varphi_1(t, x_0)) = \psi(t) = \varphi_2(t, h(x_0))$, ou seja, h é uma conjugação.

Agora, suponha que h é uma conjugação. Dado $x_0 \in E_1$, então vale que $h(\varphi_1(t, x_0)) = \psi(t) = \varphi_2(t, h(x_0))$, $\forall t \in I_{x_0}^1$. Daí, derivando em relação a t obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(t, h(x_0)) = \frac{\partial}{\partial t} h(\varphi_1(t, x_0)) = Dh(\varphi_1(t, x_0)) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, x_0),$$

ou seja,

$$f_2(\varphi_2(t, h(x_0))) = Dh(\varphi_1(t, x_0)) f_1(\varphi_1(t, x_0)),$$

e, portanto, calculando em $t = 0$ obtemos 2.6. □

2.4 Estabilidade

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 com fluxo $\varphi_t : E \rightarrow E$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4.1. *Seja p uma singularidade de f .*

*Dizemos que p é **estável** se para toda vizinhança U de p existe uma vizinhança W de p tal que $\varphi_t(x) \in U$ para todo $x \in W$ e $t \geq 0$. Se, além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = p$ para todo $x \in W$ então dizemos que p é **assintoticamente estável**.*

*Dizemos que p é **instável** se não for estável.*

No teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [9, p. 131], apresentamos um critério para determinar a estabilidade de uma singularidade.

Teorema 2.4.1. *Seja p uma singularidade de f e $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $V(p) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq p$. Então*

- (a) p é estável se $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in E$;
- (b) p é assintoticamente estável se $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in E \setminus \{p\}$;
- (c) p é instável se $\dot{V}(x) > 0$ para todo $x \in E \setminus \{p\}$.

Observe que $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi_t(x))|_{t=0}$ e, portanto, os critérios nos itens (a), (b) e (c) acima são equivalentes respectivamente a V ser não-crescente, estritamente decrescente e estritamente crescente sob trajetórias de f . Uma função V satisfazendo qualquer um dos três conjuntos de hipóteses do teorema acima é chamada **função de Lyapunov**.

Capítulo 3

Campos Vetoriais Lineares

3.1 Introdução

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um \mathbb{R} -espaço vetorial normado, completo e com dimensão finita e igual a n .

Definição 3.1.1. *Uma equação diferencial ordinária linear é uma equação da forma*

$$\dot{y} = A(t)y(t) + b(t) \quad (3.1)$$

onde $A(t) : E \rightarrow E$ é contínua em t e linear para cada t fixado e $b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ é contínua.

Se $b(t) \equiv 0$ então dizemos que a equação é **homogênea**. De maneira geral, a **equação homogênea associada** à equação (3.1) é

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (3.2)$$

De agora em diante estudaremos apenas equações homogêneas e ao final deste capítulo trataremos o caso não-homogêneo.

Lema 3.1.1. *O conjunto de soluções de (3.2) é um espaço vetorial com dimensão igual à de E .*

Demonstração. Sejam $x^1(t)$ e $x^2(t)$ soluções de (3.2) tais que $x^1(t_0) = x_0^1$ e $x^2(t_0) = x_0^2$. Então, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda_1 x^1(t) + \lambda_2 x^2(t)$ é solução de (3.2) com condição inicial $\lambda_1 x_0^1 + \lambda_2 x_0^2$. Logo, o conjunto de soluções de (3.2) é um espaço vetorial com dimensão igual à de E . \square

Seja $t \mapsto g(t)$ uma curva de classe C^1 no espaço de matrizes $n \times n$. Escrevendo

$$g(t) = [g_1(t) \quad \cdots \quad g_n(t)] \quad (3.3)$$

onde $g_1(t), \dots, g_n(t)$ são as colunas de $g(t)$, então $g(t)$ é solução de $g'(t) = A(t)g(t)$ se, e somente se, $g_i(t)$ é solução de (3.2) para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Neste caso, dizemos que $g(t)$ é uma **solução matricial** de (3.2). A construção abaixo permite escrever as soluções de (3.2) em termos de soluções matriciais:

Dada uma base $\{x_0^1, \dots, x_0^n\}$ de E então para todo $x_0 \in E$ existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_0 = \lambda_1 x_0^1 + \dots + \lambda_n x_0^n \quad (3.4)$$

e, portanto, supondo que existe uma solução $x_i(t)$ de (3.2) tal que $x_i(t_0) = x_0^i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ então pelo Lema 3.1.1 temos a solução

$$x(t) = \lambda_1 x^1(t) + \dots + \lambda_n x^n(t) \quad (3.5)$$

de (3.2) com condição inicial x_0 . Daí, definindo $g(t) = [x^1(t) \dots x^n(t)]$ então podemos escrever

$$x(t) = g(t) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Mas, como $\{x_0^1, \dots, x_0^n\}$ é base de E então $g(t_0)$ é inversível e, portanto,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = g^{-1}(t_0)x_0 \quad (3.7)$$

ou seja,

$$x(t) = g(t)g^{-1}(t_0)x_0. \quad (3.8)$$

Definição 3.1.2. *Seja $g(t)$ uma solução matricial de (3.2). Se $g(t)$ é inversível para todo t , então dizemos que $g(t)$ é uma **solução fundamental** de (3.2).*

Em outras palavras, se (3.2) possui uma solução fundamental $g(t)$, então todas as suas soluções são dadas por (3.8).

Exemplo 3.1.1. *A equação linear em \mathbb{R}^2 dada por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x \quad (3.9)$$

tem uma solução fundamental dada por

$$g(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e, portanto, a solução $x(t)$ de (3.9) tal que $x(0) = x_0$ é dada por

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} x_0. \quad (3.11)$$

Abaixo apresentamos algumas propriedades das soluções fundamentais.

Teorema 3.1.1 (de Liouville). *Seja $g(t)$ uma solução matricial de (3.2) definida em um intervalo I . Então, para todo $t \in I$ e $t_0 \in I$ fixo vale que*

$$\det g(t) = \det [g(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} \quad (3.12)$$

onde $\text{tr}(A(s))$ é o traço de $A(s)$.

Demonstração. Seja $\Delta(t) = \det g(t)$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= \sum_{i=1}^n \det (g_1(t), \dots, g'_i(t), \dots, g_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det (g_1(t), \dots, A(t)g_i(t), \dots, g_n(t)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Se $g(t)$ não é fundamental então temos (3.12) trivialmente, logo, suponha que $g(t)$ é fundamental. Daí, para cada $t \in I$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ escrevendo $A(t)g_i(t)$ em termos da base $\{g_1(t), \dots, g_n(t)\}$ obtemos que

$$A(t)g_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(t) \quad (3.14)$$

onde $[a_{ij}]$ é a matriz de $A(t)$ na base $\{g_1(t), \dots, g_n(t)\}$ e, portanto, como o traço é independente da base então

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= \sum_{i=1}^n \det (g_1(t), \dots, \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(t), \dots, g_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \det (g_1(t), \dots, g_i(t), \dots, g_n(t)) \\ &= \text{tr}(A(t))\Delta(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Logo, como $\Delta(t) = \Delta(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds}$ é solução da equação diferencial acima, então segue a fórmula (3.12). \square

Corolário 3.1.1. *Seja $g(t)$ uma solução matricial de (3.2). Se $g(t_0)$ é inversível para algum t_0 , então $g(t)$ é uma solução fundamental de (3.2).*

Teorema 3.1.2. *Sejam $g(t)$ e $h(t)$ soluções matriciais de (3.2) com $h(t)$ fundamental. Então, existe uma matriz C tal que $g(t) = h(t)C$ para todo t . Mais ainda, se $g(t)$ também é fundamental então C é inversível.*

Demonstração. Como $h(t)$ é fundamental então $hh^{-1} = Id$ e, portanto $h'h^{-1} + h(h^{-1})' = 0$. Daí, segue que

$$(h^{-1})'(t) = -h^{-1}h'h^{-1} = -h^{-1}A(t)hh^{-1} = -h^{-1}(t)A(t). \quad (3.16)$$

Logo,

$$(h^{-1}(t)g(t))' = (h^{-1})'g + h^{-1}g' = -h^{-1}A(t)g + h^{-1}A(t)g = 0, \quad (3.17)$$

e, portanto, existe uma matriz constante $C = h^{-1}(t_0)g(t_0)$ com as propriedades desejadas, onde t_0 é tomado no intervalo de definição de $g(t)$ e $h(t)$. \square

Teorema 3.1.3. *Se existe uma solução fundamental $g(t)$ de (3.2), então $x(t) = g(t)g^{-1}(t_0)x_0$ é a única solução tal que $x(t_0) = x_0$.*

Demonstração. Suponha que $y(t)$ seja outra solução com $y(t_0) = x_0$. Então,

$$\frac{d}{dt}(g^{-1}(t)y(t)) = -g^{-1}(t)A(t)y(t) + g^{-1}(t)A(t)y(t) = 0, \quad (3.18)$$

e, portanto, $g^{-1}(t)y(t) = g^{-1}(t_0)y(t_0)$, ou seja, $y(t) = g(t)g^{-1}(t_0)x_0 = x(t)$. \square

3.2 Exponencial de Operadores Lineares

Seja $L(E) = \{T : E \rightarrow E \mid T \text{ é linear}\}$.

Definição 3.2.1. *Dado $T \in L(E)$ definimos sua **norma de operador** por*

$$\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \quad (3.19)$$

Observe que $\|\cdot\|_{op}$ está bem definida e de fato é uma norma, pois a dimensão de E é finita.

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma sequência de operadores $T_k \in L(E)$ converge para o operador $T \in L(E)$ quando $k \rightarrow \infty$, isto é,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T \quad (3.20)$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k - T\|_{op} < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$.

Observe que $L(E)$ é completo quando munido com a norma de operador e a noção de convergência de seqüências definida acima, pois E é completo.

Lema 3.2.1. *Sejam $T, S \in L(E)$ e $x \in E$. Então,*

- (a) $\|Tx\| \leq \|T\|_{op}\|x\|$;
- (b) $\|TS\|_{op} \leq \|T\|_{op}\|S\|_{op}$;
- (c) $\|T^k\|_{op} \leq \|T\|_{op}^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a) Para $x = 0$ é imediato, logo, suponha $x \neq 0$. Então, pela definição segue que

$$\|T\|_{op} \geq \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}T(x)\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \quad (3.21)$$

ou seja, $\|Tx\| \leq \|T\|_{op}\|x\|$.

(b) Para $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$ segue de (a) que

$$\|T(S(x))\| \leq \|T\|_{op}\|S(x)\| \leq \|T\|_{op}\|S\|_{op}\|x\| = \|T\|_{op}\|S\|_{op}. \quad (3.22)$$

Logo,

$$\|TS\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(S(x))\| \leq \|T\|_{op}\|S\|_{op}. \quad (3.23)$$

(c) Segue de (b) por indução. □

Teorema 3.2.1. *Sejam $T \in L(E)$ e $t_0 > 0$. Então, a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T^k}{k!} \quad (3.24)$$

converge absolutamente e uniformemente em $[-t_0, t_0]$.

Demonstração. Do Lema 3.2.1 segue que para $|t| < |t_0|$ temos

$$\left\|\frac{t^k T^k}{k!}\right\|_{op} \leq \frac{|t|^k \|T\|_{op}^k}{k!} \leq \frac{|t_0|^k \|T\|_{op}^k}{k!} \leq e^{|t_0|\|T\|_{op}} \quad (3.25)$$

e, portanto, pelo teste M de Weierstrass segue que a série (3.24) converge absolutamente e uniformemente em $[-t_0, t_0]$. □

Definição 3.2.3. *Dado $T \in L(E)$, definimos*

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}. \quad (3.26)$$

Observe que das propriedades de limite segue que $e^T \in L(E)$ para todo operador $T \in E$.

Frequentemente estamos mais interessados na matriz que representa um operador linear. Neste caso, todas as definições e resultados acima são análogos.

Abaixo apresentamos algumas propriedades da exponencial de operadores.

Lema 3.2.2. *Sejam $T, P \in L(E)$ e $S = PTP^{-1}$. Então, $e^S = Pe^TP^{-1}$.*

Demonstração. Como $S^k = PT^kP^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, então

$$\begin{aligned} e^S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{PT^kP^{-1}}{k!} \\ &= P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^TP^{-1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

□

Lema 3.2.3. *Sejam $S, T \in L(E)$ tais que $ST = TS$. Então, $e^{S+T} = e^Se^T$.*

Demonstração. Pelo binômio de Newton segue que

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!}. \quad (3.28)$$

Logo,

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^Se^T \quad (3.29)$$

onde usamos que o produto de duas séries absolutamente convergente é igual à série cujos termos são dados pelo produto de Cauchy. □

Corolário 3.2.1. *Seja $T \in L(E)$. Então e^T é inversível e $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.3 segue que $Id = e^0 = e^T e^{-T}$. Logo, e^T é inversível e $(e^T)^{-1} = e^{-T}$. □

Lema 3.2.4. *Seja $T \in L(E)$. Então,*

$$\frac{d}{dt} e^{tT} = T e^{tT} = e^{tT} T. \quad (3.30)$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.3 e pela definição de derivada segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{tT} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(h+t)T} - e^{tT}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hT} - I}{h} e^{tT} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(T + \frac{hT^2}{2!} + \dots + \frac{h^{k-1}T^k}{k!} \right) e^{tT} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left(T + \frac{hT^2}{2!} + \dots + \frac{h^{k-1}T^k}{k!} \right) e^{tT} \\
&= Te^{tT}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde a penúltima igualdade é garantida pela convergência uniforme dada pelo Teorema 3.2.1. A outra igualdade é obtida analogamente. \square

Corolário 3.2.2. *Sejam $S, T \in L(E)$ tais que $ST = TS$. Então $e^{S+T} = e^S e^T = e^T e^S$.*

Demonstração. Já provamos a primeira igualdade no Lema 3.2.3. Para a segunda igualdade observe que pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\frac{d}{dt} (e^{tS} T e^{-tS}) = e^{tS} S T e^{-tS} + e^{tS} T (-S) e^{-tS} = 0 \tag{3.32}$$

e, portanto, $e^{tS} T e^{-tS} = T$ para todo t . Logo, pelo Lema 3.2.2 segue que $e^{tS} e^T e^{-tS} = e^T$, ou seja, $e^{tS} e^T = e^T e^{tS}$ para todo t . \square

Pelo Teorema 3.1.3 e pelo Lema 3.2.4 segue o teorema abaixo.

Teorema 3.2.2. *Seja A uma matriz $n \times n$. Então, dado $x_0 \in E$, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

tem uma única solução dada por

$$x(t) = e^{tA} x_0. \tag{3.34}$$

Pelo Teorema 3.2.2 e pelo Exemplo 1.3.3 segue o corolário abaixo.

Corolário 3.2.3. *Seja A uma matriz $n \times n$. Então, o campo $x \mapsto Ax$ gera o fluxo $\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ dado por*

$$\phi(t, x) = e^{tA} x. \tag{3.35}$$

3.3 Cálculo da Exponencial de Operadores

No Teorema 3.2.2 da seção anterior vimos que resolver o problema (3.33) equivale a calcular a exponencial da matriz A . Nesta seção, verificaremos que calcular essa exponencial é equivalente a calcular a forma canônica de Jordan de A , tendo como motivação inicial a seguinte propriedade da exponencial:

Lema 3.3.1. *Seja $A = \text{diag}[A_1, \dots, A_r]$ uma matriz $n \times n$ diagonal em blocos, ou seja,*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde cada A_i é uma matriz quadrada. Então, $e^A = \text{diag}[e^{A_1}, \dots, e^{A_r}]$, ou seja,

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{A_r} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Demonstração. Como $A^k = \text{diag}[A_1^k, \dots, A_r^k]$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, então

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}[A_1^k, \dots, A_r^k] = \text{diag}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_r^k}{k!}\right] \\ &= \text{diag}[e^{A_1}, \dots, e^{A_r}]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

□

Assim, faz sentido utilizar a forma canônica de Jordan que apresentamos no teorema abaixo.

Teorema 3.3.1. *Seja A uma matriz $(2n-k) \times (2n-k)$ com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e autovalores complexos $\lambda_{k+1}, \overline{\lambda_{k+1}}, \dots, \lambda_n, \overline{\lambda_n}$. Então, existe uma base $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n\}$ de \mathbb{R}^{2n-k} onde $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ são os autovetores generalizados com $v_j = \text{Im}(w_j)$ e $u_j = \text{Re}(w_j)$ para todo $j \in \{k+1, \dots, n\}$. Mais ainda, a matriz*

$$P = [v_1 \ \cdots \ v_k \ v_{k+1} \ u_{k+1} \ \cdots \ v_n \ u_n] \quad (3.39)$$

é inversível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

onde os blocos $J = J_i$, $i \in \{1, \dots, r\}$, são da forma

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

se λ for um autovalor real de A ou são da forma

$$J = \begin{bmatrix} D & Id_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & Id_2 \\ 0 & & & D \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

com

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad Id_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

se $\lambda = a + bi$ é um autovalor complexo de A .

Dizemos que a matriz (3.40) é a **forma canônica de Jordan** da matriz A e cada um dos seus blocos é chamado **bloco elementar de Jordan** ou simplesmente **bloco de Jordan**.

Pelos Lemas 3.2.2 e 3.3.1 e pelos Teoremas 3.2.2 e 3.3.1 segue o corolário abaixo

Corolário 3.3.1. *Seja A uma matriz $n \times n$ e $P^{-1}AP = \text{diag}[J_1, \dots, J_r]$ sua forma canônica de Jordan. Então, dado $x_0 \in E$, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.44)$$

tem uma única solução dada por

$$x(t) = P \text{diag}[e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_r}] P^{-1} x_0. \quad (3.45)$$

Assim, resolver o problema (3.44) é equivalente a calcular a forma canônica de Jordan, inclusive a matriz P . Informações detalhadas sobre o cálculo da forma canônica no caso geral podem ser encontrados em [Perko, pág.39]. Neste texto, apresentaremos apenas uma breve descrição do caso 2×2 :

Seja A uma matriz 2×2 com $\det A \neq 0$ e seja $J = P^{-1}AP$ sua forma canônica de Jordan.

Como $\det A \neq 0$ então $\ker A = \{0\}$, ou seja, $x = 0$ é a única singularidade do campo $x \mapsto Ax$. Nos propomos a estudar o retrato de fase desse campo numa vizinhança de $x = 0$.

Para isso, considere o problema

$$\begin{cases} \dot{y} = Jy \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.46)$$

cujas soluções são dadas por $y(t) = e^{tJ}x_0$. Como $J = P^{-1}AP$ então os campos $x \mapsto Ax$ e $y \mapsto Jy$ são conjugados e, portanto, estudar o retrato de fase de $x \mapsto Ax$ é equivalente a estudar o retrato de fase de $y \mapsto Jy$. Mas, pelo Teorema 3.3.1 temos que J é de uma das formas abaixo:

$${}^1J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad {}^2J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad {}^3J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

e, portanto, a solução de (3.46) com $J = {}^i J$ é dada respectivamente por

$$\begin{aligned} {}^1y(t) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} x_0, \\ {}^2y(t) &= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0, \\ {}^3y(t) &= e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} x_0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Utilizando esses resultados obtemos a seguinte classificação topológica do retrato de fase de (3.46) e, portanto, de (3.44):

Caso I. Se $J = {}^1 J$ com $\lambda > 0 > \mu$ então temos o retrato de fase na Figura 3.1. Neste caso, dizemos que a origem é uma **sela**.

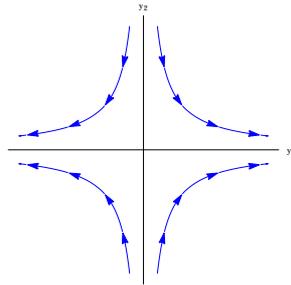


Figura 3.1: Sela.

Caso II. Se $J = {}^1 J$ com $\lambda \geq \mu > 0$ ou $J = {}^2 J$ com $\lambda > 0$ então temos os retratos de fase na Figura 3.2. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó próprio** se $J = {}^1 J$ com $\lambda = \mu$ e um **nó impróprio** nos outros dois casos.

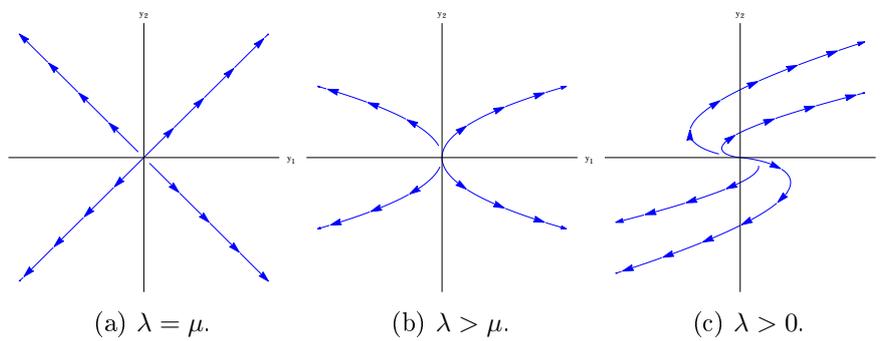


Figura 3.2: Nó.

Caso III. Se $J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ com $a > 0$ e $b > 0$, então temos o retrato de fase na Figura 3.3. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco**.

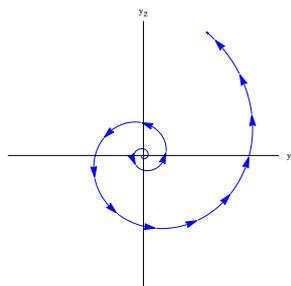


Figura 3.3: Foco.

Caso IV. Se $J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ com $a = 0$ e $b > 0$, então temos o retrato de fase na Figura 3.4. Neste caso, dizemos que a origem é um **centro**.

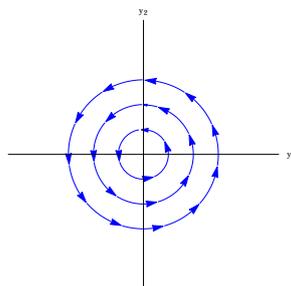


Figura 3.4: Centro.

Em todos os casos, observe que inverter o sinal dos autovalores equivale a inverter o sentido de crescimento do tempo.

Observe também que introduzindo coordenadas polares $y_1 = r \cos \theta$ e $y_2 = r \sin \theta$, então em um nó existe $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t)$. Já em um foco temos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t)$ não existe. Essa é a diferença topológica básica entre um nó e um foco.

Se a origem é uma sela, nó, foco ou centro de (3.46), então dizemos que a origem é uma sela, nó, foco ou centro, respectivamente, de (3.44)

Corolário 3.3.2. *Seja A uma matriz 2×2 com $\det A \neq 0$. Então, a origem é uma sela, nó, foco ou centro.*

3.4 O Caso Não-Homogêneo

Seja $A(t) : E \rightarrow E$ contínua em t e linear para cada t fixado e $b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ contínua. Considere o problema

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Suponha que a equação homogênea associada a (3.49) tem uma solução fundamental $g(t)$ tal que $g(t_0) = Id$. Procurando uma solução de (3.49) da forma $x(t) = g(t)u(t)$ obtemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} = g^{-1}(t)b(t) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.50)$$

cuja única solução é $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g^{-1}(s)b(s)ds$ e, portanto,

$$x(t) = g(t)x_0 + g(t) \int_{t_0}^t g^{-1}(s)b(s)ds. \quad (3.51)$$

é a única solução de (3.49).

Em particular, se $A(t) \equiv A$ então a solução é dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds. \quad (3.52)$$

Logo, pelo Exemplo 1.3.3 segue o corolário abaixo.

Corolário 3.4.1. *Seja A uma matriz $n \times n$ e $b \in E$. Então, o campo $x \mapsto Ax + b$ gera o fluxo $\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ dado por*

$$\phi(t, x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}b ds. \quad (3.53)$$

Capítulo 4

Teoria Local

4.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos os principais resultados utilizados para analisar localmente o retrato de fase de um dado campo, ou seja, em uma vizinhança de cada um dos seus pontos.

Lembre que dado um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ então os pontos $p \in E$ tais que $f(p) = 0$ são chamados singularidades e os demais são chamadas de pontos regulares.

Verificaremos que numa vizinhança de cada ponto regular o campo f é sempre conjugado a um mesmo campo da forma $g = (1, 0, \dots, 0)$. Assim, localmente a dinâmica de f resume-se às suas singularidades. Neste contexto, veremos que o comportamento qualitativo numa vizinhança das singularidades p de f de um certo tipo (hiperbólicas) é equivalente ao do campo linear $Df(p)$, que é bem conhecido pelo menos no caso planar.

4.2 Pontos Regulares

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k .

Definição 4.2.1. Dizemos que uma aplicação diferenciável $\sigma : A \rightarrow E$ de classe C^r definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é uma **seção transversal local** (de classe C^r) do campo f em A se para todo $a \in A$ o subespaço $D\sigma(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e o vetor $f(\sigma(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = \sigma(A)$ com a topologia induzida. Se $\sigma : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo então dizemos que Σ é uma **seção transversal** do campo σ em A .

Lema 4.2.1. Seja $p \in E$ um ponto regular de f e $\{v_1, \dots, v_{n-1}, f(p)\}$ uma base de \mathbb{R}^n . Seja $B(0; \delta)$ uma bola de \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem e raio $\delta > 0$. Então, para δ suficientemente pequeno a aplicação $\sigma : B(0; \delta) \rightarrow E$ dada por

$$\sigma(a_1, \dots, a_{n-1}) = p + \sum_{i=j}^{n-1} a_j v_j \quad (4.1)$$

é uma seção transversal local de f com $\Sigma = \sigma(B(0; \delta))$ uma seção transversal.

Demonstração. Para todo $a \in B(0; \delta)$, observe que $D_j \sigma(a) = v_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$ e, portanto, $D\sigma(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $f(\sigma(a))$ geram \mathbb{R}^n . Além disso, $Df(0)$ é um isomorfismo e, portanto, pelo Teorema da Função Inversa segue que para δ suficientemente pequeno $\sigma : B(0; \delta) \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo. \square

Teorema 4.2.1 (do Fluxo Tubular). *Seja $p \in E$ um ponto regular de f e $\sigma : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de f de classe C^k com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de classe C^k , onde $\epsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} com centro em $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

$$(a) \quad h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B;$$

$$(b) \quad h \text{ é uma } C^k\text{-conjugação entre } f|_V \text{ e o campo constante } g : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ dado por } g = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Sejam $\varphi : S \rightarrow E$ o fluxo de f e $S_A = \{(t, u); (t, \sigma(u)) \in S\}$. Defina $H : S_A \rightarrow E$ por $H(t, u) = \varphi(t, \sigma(u))$. Observe que

$$D_1 H(0) = \frac{d}{dt} \varphi(t, \sigma(0))|_{t=0} = f(\varphi(0, p)) = f(p) \quad (4.2)$$

e $D_j H(0) = D_{j-1} \sigma(0)$ para todo $j \in \{2, \dots, n\}$, pois $\varphi(0, \sigma(u)) = \sigma(u)$ para todo $u \in A$. Daí, como σ é uma seção transversal local de f então segue que os vetores $D_j H(0), j \in \{2, \dots, n\}$, geram \mathbb{R}^n e, portanto, $DH(0)$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Função Inversa, existem $\epsilon > 0$ e uma bola aberta B em \mathbb{R}^{n-1} com centro em $0 = f^{-1}(p)$ tais que $H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre o aberto $V = H((-\epsilon, \epsilon) \times B)$.

Seja $h = (H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B})^{-1}$. Então $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, pois $H(0, u) = f(u)$ para todo $u \in B$. Além disso, h^{-1} conjugua f e g pois

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, u) \cdot g(t, u) &= DH(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_1 H(t, u) \\ &= f(\varphi(t, \sigma(u))) = f(H(t, u)) = f(h^{-1}(t, u)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

para todo $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B$. \square

4.3 Singularidades

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k .

Definição 4.3.1. Dizemos que uma singularidade p do campo f é **hiperbólica** se todos os autovalores de $Df(p)$ têm parte real diferente de zero.

No teorema abaixo apresentamos um dos principais resultados da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. Um resumo da demonstração pode ser encontrado em [9, p. 120].

Teorema 4.3.1 (de Hartman-Grobman). *Seja p uma singularidade hiperbólica de f . Existem vizinhanças W de p em E e V de 0 em \mathbb{R}^n tais que $f|_W$ é topologicamente conjugado a $Df(p)|_V$.*

No caso planar, observe que se os autovalores de uma matriz A de ordem 2×2 têm parte real não nula então $\det A \neq 0$. Daí, dizendo que a singularidade p é uma sela, nó ou foco de f se 0 for respectivamente uma sela, nó ou foco de $Df(p)$ então pela classificação topológica dos retratos de fase de equações lineares planares realizada no capítulo anterior obtemos o corolário abaixo.

Corolário 4.3.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^k , $p \in E$ uma singularidade hiperbólica de f e λ_1, λ_2 os autovalores de $Df(p)$. Então*

- (a) p é uma sela se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \lambda_2 < 0$;
- (b) p é um nó se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \lambda_2 > 0$;
- (c) p é um foco se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ com $\alpha, \beta \neq 0$.

Capítulo 5

Centros Isócronos em Sistemas Polinomiais Planares

5.1 Introdução

Sejam P e Q campos vetoriais definidos em um aberto de \mathbb{R}^2 . Considere o sistema

$$\dot{x} = P(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Definição 5.1.1. Dizemos que uma singularidade (x_0, y_0) é um **centro** do sistema (5.1) se existir uma vizinhança U de (x_0, y_0) tal que toda trajetória de (5.1) contida em U é periódica. Se todas essas trajetórias têm o mesmo período p então dizemos que (x_0, y_0) é um **centro p -isócrono** ou simplesmente um **centro isócrono**.

Exemplo 5.1.1. O sistema dado por

$$\dot{x} = -y + x^2 + 2xy + y^2 \quad , \quad \dot{y} = x + x^2 - xy + y^2, \quad (5.2)$$

tem o centro em $(0, 0)$ representado na Figura 5.1.

Neste capítulo, temos como objetivo estabelecer condições para o sistema (5.1) possuir um centro isócrono numa dada singularidade no caso em que P e Q são polinômios de grau 2. Para isso, estudaremos antes cenários mais gerais e, na última seção deste capítulo cumpriremos o objetivo proposto.

Fixaremos o seguinte contexto: como um centro p -isócrono pode sempre ser levado via uma mudança na escala de tempo em um centro 2π -isócrono, então por centro entenderemos centro 2π -isócrono ;como uma singularidade (x_0, y_0) pode sempre ser transladada para a origem $O = (0, 0)$, então essa será sempre a candidata a centro.

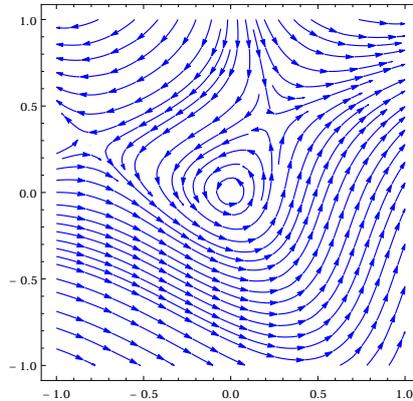


Figura 5.1: Centro em $(0,0)$.

5.2 Sistemas Homogêneos

Seja $m \in \mathbb{N}$ e considere o sistema

$$\dot{x} = X_m(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Y_m(x, y), \quad (5.3)$$

onde X_m, Y_m são polinômios homogêneos de grau m . Suponha que o sistema (5.3) tem uma singularidade isolada na origem, $O = (0, 0)$. Desejamos estabelecer condições sobre X_m e Y_m para O ser um centro de (5.3).

Introduzindo coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$ no sistema (5.3), obtemos

$$\dot{\rho} = \rho^m Z(\theta) \quad , \quad \dot{\theta} = \rho^{m-1} N(\theta), \quad (5.4)$$

onde,

$$Z(\theta) = \cos(\theta)X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \sin(\theta)Y_m(\cos \theta, \sin \theta), \quad (5.5)$$

$$N(\theta) = \cos(\theta)Y_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin(\theta)X_m(\cos \theta, \sin \theta). \quad (5.6)$$

Definição 5.2.1. Dizemos que a singularidade O é **não-degenerada** se a equação $N(\theta) = 0$ não possui raízes reais.

Teorema 5.2.1. A singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema homogêneo (5.3) se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt = 0. \quad (5.7)$$

Demonstração. Primeiro, suponha que O é um centro. Então, todas as soluções de (5.4) podem se representadas por $\rho = \rho(\theta)$, onde $\rho(\theta)$ é solução de

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \frac{Z(\theta)}{N(\theta)}, \quad (5.8)$$

cuja solução é dada por

$$\rho(\theta) = \rho(0) \exp \left(\int_0^\theta \frac{Z(t)}{N(t)} dt \right). \quad (5.9)$$

Como O é um centro, então devemos ter $\rho(2\pi) = \rho(0)$ e, portanto,

$$\rho(0) = \rho(0) \exp \left(\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt \right) \Rightarrow \exp \left(\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt \right) = 1, \quad (5.10)$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt = 0. \quad (5.11)$$

Logo, se O é um centro, então vale (5.7). Mas, por (5.9) é claro que se temos (5.7), então $\rho(2\pi) = \rho(0)$ e, portanto, O é um centro. \square

Corolário 5.2.1. *A singularidade isolada não-degenerada O do sistema homogêneo (5.3) ou é um centro ou é um foco.*

Demonstração. Se $\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt = 0$, então pelo Teorema 5.2.1 segue que O é um centro. Por outro lado, suponha que $\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt \neq 0$. Então, por (5.9) temos que

$$\rho(2\pi n) = \rho(0) \exp \left(n \int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt \right) \quad (5.12)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $Z(t)$ e $N(t)$ são polinômios em $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

Daí, se $\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt > 0$, então $\rho(2\pi n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e, se $\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt < 0$, então $\rho(2\pi n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Logo, O é um foco estável no primeiro caso e instável no segundo caso. \square

5.3 Sistemas Analíticos Gerais

Seja $m \in \mathbb{N}$ e considere o sistema

$$\dot{x} = X_m(x, y) + f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Y_m(x, y) + g(x, y), \quad (5.13)$$

onde X_m, Y_m são polinômios homogêneos de grau m e f, g são funções analíticas absolutamente convergentes em $B(O; r)$, para algum $r > 0$, da forma

$$f(x, y) = \sum_{i+j>m} a_{ij}x^i y^j \quad , \quad g(x, y) = \sum_{i+j>m} b_{ij}x^i y^j. \quad (5.14)$$

Desejamos estabelecer condições sobre X_m, Y_m, f e g para a singularidade isolada $O = (0, 0)$ ser um centro do sistema (5.13).

Introduzindo coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$ no sistema (5.13), obtemos

$$\dot{\rho} = \rho^m [Z(\theta) + \rho P(\rho, \theta)] \quad , \quad \dot{\theta} = \rho^{m-1} [N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta)], \quad (5.15)$$

onde $Z(\theta)$ e $N(\theta)$ são como em (5.5) e (5.6), respectivamente, e

$$P(\rho, \theta) = \sum_{i+j>m} \rho^{i+j-m-1} [a_{ij} \cos \theta + b_{ij} \sin \theta] \cos^i \theta \sin^j \theta, \quad (5.16)$$

$$Q(\rho, \theta) = \sum_{i+j>m} \rho^{i+j-m-1} [b_{ij} \cos \theta - a_{ij} \sin \theta] \cos^i \theta \sin^j \theta. \quad (5.17)$$

Com o caso homogêneo como motivação, vamos supor de agora em diante que a singularidade O é não-degenerada, ou seja, $N(\theta) = 0$ não possui raízes reais.

Neste caso, como

$$\dot{\theta} = \rho^{m-1} [N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta)] \quad (5.18)$$

e $\rho > 0$, então o sinal de $\dot{\theta}$ coincide com o sinal de $N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta)$. Por outro lado, temos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta)] = N(\theta), \quad (5.19)$$

e, portanto, o sinal de $N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta)$ coincide com o sinal de $N(\theta)$ para ρ suficientemente pequeno. Em particular, como $N(\theta) \neq 0$, então temos que $N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta) \neq 0$ para ρ suficientemente pequeno.

Daí, diminuindo r se necessário, segue que todas as trajetórias em $B(O; r)$ podem ser representadas na forma $\rho = \rho(\theta)$ onde $\rho(\theta)$ é solução de

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \frac{Z(\theta) + \rho P(\rho, \theta)}{N(\theta) + \rho Q(\rho, \theta)}. \quad (5.20)$$

Agora, como o lado direito de (5.20) é analítico, então podemos expandir em série de potências de ρ , obtendo que

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(\theta) \rho^n, \quad (5.21)$$

onde $V_n(\theta)$ são funções racionais em $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

Dado $0 < \rho_0 < r$, seja $\rho(\theta, \rho_0)$ a solução de (5.21) tal que $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$, ou seja, o fluxo gerado por (5.21). Sabemos pela dependência contínua e diferenciável em condições iniciais que $\rho(\theta, \rho_0)$ é $C^\infty([0, 2\pi] \times [0, r])$ e, além disso, pelo Teorema 6.1.2 apresentado no próximo capítulo deste texto podemos escrever

$$\rho(\theta, \rho_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\theta) \rho_0^n, \quad (5.22)$$

ou seja, podemos expandir o fluxo em série de potências de ρ_0 . Daí, como $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$, então por (5.22) segue que

$$u_1(0) = 1 \quad e \quad u_n(0) = 0, \quad \forall n > 1. \quad (5.23)$$

Além disso, derivando (5.22) em relação a θ obtemos

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{du_n}{d\theta} \rho_0^n, \quad (5.24)$$

e, portanto, comparando (5.24) com (5.21) e (5.22) segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{du_n}{d\theta} \rho_0^n = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(\theta) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\theta) \rho_0^k \right)^n \quad (5.25)$$

e, comparando os coeficientes das respectivas potências de ρ_0 obtemos a seguinte sequência de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\theta} &= V_1(\theta)u_1, \\ \frac{du_2}{d\theta} &= V_1(\theta)u_2 + V_2(\theta)u_1^2, \\ \frac{du_3}{d\theta} &= V_1(\theta)u_3 + 2V_2(\theta)u_1u_2 + V_3(\theta)u_1^3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.26)$$

que, combinada com as condições iniciais (5.23) determina unicamente as funções $u_n(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ em relação ao sistema (5.13). Faz sentido, portanto, a definição abaixo.

Definição 5.3.1. *Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $\alpha_n = u_n(2\pi)$ é o n -ésimo **valor focal** do sistema (5.13).*

Teorema 5.3.1. *A singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema analítico (5.13) se, e somente se, as funções $u_n(\theta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, são periódicas de período 2π .*

Demonstração. (\Leftarrow) Como as funções $u_n(\theta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, são periódicas de período 2π , então por (5.23) segue que

$$u_1(2\pi) = 1 \quad e \quad u_n(2\pi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.27)$$

e, portanto, de (5.22) segue que

$$\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0, \quad (5.28)$$

ou seja, $\rho(\theta, \rho_0)$ é periódica para todo $0 < \rho_0 < r$ e, portanto, O é um centro.

(\Rightarrow) Suponha que u_1, \dots, u_{q_1} são periódicas de período 2π mas u_q não. Então, sem perda de generalidade existe $h > 0$ tal que

$$u_q(2\pi) - u_q(0) = h > 0. \quad (5.29)$$

Daí, por (5.22) segue que

$$\begin{aligned} \rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} [u_n(2\pi) - u_n(0)] \rho_0^n = \\ &= h\rho_0^q + \sum_{n=q+1}^{+\infty} [u_n(2\pi) - u_n(0)] \rho_0^n = \\ &= \rho_0^q \left(h + \sum_{n=1}^{+\infty} [u_n(2\pi) - u_n(0)] \rho_0^n \right). \end{aligned}$$

Diminuindo r se necessário, obtemos que o fator dentro dos parênteses tem o mesmo sinal que $h > 0$ e, portanto,

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) > 0 \Rightarrow \rho(2\pi, \rho_0) > \rho(0, \rho_0), \quad (5.30)$$

e, analogamente obtemos que

$$\rho(0, \rho_0) < \rho(2\pi, \rho_0) < \rho(4\pi, \rho_0) < \dots, \quad (5.31)$$

para todo $0 < \rho_0 < r$. Logo, O é um foco e, portanto, temos uma contradição pois O é um centro. \square

Uma consequência imediata da demonstração do teorema anterior é a seguinte.

Corolário 5.3.1. *A singularidade isolada não-degenerada O do sistema analítico (5.13) ou é um centro ou é um foco.*

Em termos de valores focais, o Teorema 5.3.1 pode ser escrito na forma abaixo.

Corolário 5.3.2. *A singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema analítico (5.13) se, e somente se, os valores focais α_n , $n \in \mathbb{N}$, desse sistema satisfazem*

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_n = 0 \quad , \quad \forall n > 1. \quad (5.32)$$

Corolário 5.3.3. *Seja O uma singularidade isolada não-degenerada do sistema (5.13). Se O é um centro de*

$$\dot{x} = X_m(x, y) + f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Y_m(x, y) + g(x, y), \quad (5.33)$$

então O é um centro do sistema homogêneo associado

$$\dot{x} = X_m(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Y_m(x, y). \quad (5.34)$$

Equivalentemente, se O é um foco do sistema homogêneo associado, então O é um foco do sistema (5.13).

Demonstração. Por (5.26), temos $\frac{du_1}{d\theta} = V_1(\theta)u_1$ que admite o fator integrante $-\int_0^\theta V_1(t)dt$ e, portanto, tem como solução

$$u_1(\theta) = u_1(0) \exp\left(\int_0^\theta V_1(t)dt\right). \quad (5.35)$$

Daí, como O é um centro, então pelo Teorema 5.3.1 segue que $u_1(0) = u_1(2\pi) = 1$ e, portanto,

$$1 = u_1(2\pi) = \exp\left(\int_0^{2\pi} V_1(t)dt\right) \Rightarrow \int_0^{2\pi} V_1(t)dt = 0. \quad (5.36)$$

Mas, observe que por (5.21) temos que $V_1(\theta) = \frac{Z(\theta)}{N(\theta)}$ e, portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(t)}{N(t)} dt = \int_0^{2\pi} V_1(t)dt = 0. \quad (5.37)$$

Daí, pelo Teorema 5.3.1 segue que O é um centro do sistema homogêneo associado. \square

5.4 Sistemas Analíticos Gerais: o caso $m=1$

Considere o sistema

$$\dot{x} = ax + by + f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = cx + dy + g(x, y), \quad (5.38)$$

onde,

$$f(x, y) = \sum_{k=2}^{+\infty} X_k(x, y) \quad e \quad g(x, y) = \sum_{k=2}^{+\infty} Y_k(x, y), \quad (5.39)$$

com X_k e Y_k polinômios homogêneos de grau k , $\forall k > 1$, tais que f e g são absolutamente convergentes em $B(O; r)$ para algum $r > 0$. Em outras palavras, consideremos agora o sistema (5.13) da seção anterior no caso $m = 1$ e, por simplicidade, agrupemos os termos de mesma ordem das funções analíticas f e g em polinômios homogêneos.

Suponha que a origem $O = (0, 0)$ é uma singularidade isolada não-degenerada do sistema (5.38). Já estabelecemos na seção anterior condições para O ser um centro, vide Teorema 5.3.1 e Corolário 5.3.2. Nesta seção, desejamos estabelecer condições sobre (5.38) para O ser um centro em termos da integrabilidade deste sistema.

Lema 5.4.1. *Se a singularidade O é um centro do sistema (5.38), então esse é C^∞ -conjugado ao sistema*

$$\dot{x} = -y + \bar{f}(x, y) \quad , \quad \dot{y} = x + \bar{g}(x, y), \quad (5.40)$$

onde \bar{f} e \bar{g} são da forma (5.39).

Demonstração. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

e seja P a matriz de mudança da base canônica de \mathbb{R}^2 para a Forma Canônica de Jordan Real J de A . Então, temos $A = PJP^{-1}$ e

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

e, portanto, podemos reescrever o sistema (5.38) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = (PJP^{-1})P \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = PJ \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$P^{-1} \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

onde \bar{f} e \bar{g} são da forma (5.39) e, portanto, o sistema (5.38) é C^∞ -conjugado ao sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Mas, como O é um centro, então pelo Corolário 5.3.3 segue que O é um centro do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

e, portanto,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante real. Logo, supondo sem perda de generalidade que $\lambda = 1$ (basta repetir o processo acima com a mudança de coordenadas linear $\bar{x} = \frac{1}{\lambda}\bar{x}$, $\bar{y} = \frac{1}{\lambda}\bar{y}$), obtemos o resultado desejado. \square

Devido ao Lema 5.4.1, de agora em diante vamos considerar sem perda de generalidade que o sistema (5.38) é da forma

$$\dot{x} = X(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (5.47)$$

onde

$$X(x, y) = -y + \sum_{k=2}^{+\infty} X_k(x, y) \quad e \quad Y(x, y) = x + \sum_{k=2}^{+\infty} Y_k(x, y). \quad (5.48)$$

Antes de estudar as condições para O ser um centro do sistema (5.47), vamos definir o que entenderemos por integrabilidade e os resultados básicos associados.

Definição 5.4.1. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla F(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in U$. Dizemos que F é uma **integral primeira** do sistema (5.47) se F for constante ao longo de qualquer trajetória de (5.47) em U .*

*Dizemos que (5.47) é **integrável** em U se possuir uma integral primeira $F : U \rightarrow \mathbb{R}$.*

Lema 5.4.2. *Seja $\phi(x, y) = c$ uma solução de (5.47) dada implicitamente. Então, para toda função diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F \circ \phi$ é solução clássica (de classe C^1) da EDP*

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (5.49)$$

Por outro lado, se F é solução clássica da EDP acima, então $F(x, y) = c$ define implicitamente uma solução de (5.47) para todo nível regular c de F , ou seja, $F(x, y) = c \Rightarrow \nabla F(x, y) \neq 0$.

Demonstração. Na primeira parte, temos $F(c) = F(\phi(x, y)) = (F \circ \phi)(x, y)$ e, portanto, pela regra da cadeia segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(F \circ \phi)(x, y) = \frac{dx}{dt} \frac{\partial(F \circ \phi)}{\partial x}(x, y) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial(F \circ \phi)}{\partial y}(x, y) \\ &= X(x, y) \frac{\partial(F \circ \phi)}{\partial x}(x, y) + Y(x, y) \frac{\partial(F \circ \phi)}{\partial y}(x, y), \end{aligned}$$

ou seja, $F \circ \phi$ é solução clássica de (5.49).

Já na segunda parte, dado $c \in \mathbb{R}$ um nível regular de F , então pelo Teorema da Função Implícita segue que $F(x, y) = c$ define implicitamente uma curva de classe C^1 . Seja $z(s) = (z_1(s), z_2(s))$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, uma parametrização dessa curva. Então,

$$c = F(z(s)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} F(z_1(s), z_2(s)) = \frac{dz_1}{ds} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{dz_2}{ds} \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \quad (5.50)$$

$$\Rightarrow (z'_1(s), z'_2(s)) \cdot \nabla F(z(s)) = 0 \Rightarrow z'(s) \cdot \nabla F(z(s)) = 0. \quad (5.51)$$

Por outro lado,

$$X(z(s)) \frac{\partial F}{\partial x}(z(s)) + Y(z(s)) \frac{\partial F}{\partial y}(z(s)) = 0 \Rightarrow \quad (5.52)$$

$$\Rightarrow (X(z(s)), Y(z(s))) \cdot \nabla F(z(s)) = 0. \quad (5.53)$$

Daí, por (5.51) e (5.53) segue que existe uma função $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(s) \neq 0, \forall s \in I$, e

$$z'(s) = h(s)(X(z(s)), Y(z(s))). \quad (5.54)$$

Como $z(s)$ é de classe C^1 e O é uma singularidade isolada de (5.4.1), então por (5.54) segue que $h(s)$ é contínua. Portanto, existe uma primitiva H de h . Para cada $s \in I$, temos $H'(s) = h(s) \neq 0$ e, portanto, pela continuidade de $H' = h$ e pelo Teorema da Função Inversa segue que H é um difeomorfismo local. Assim, pondo $s = H^{-1}(t)$ obtemos uma reparametrização $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t))$ da curva $z(s)$, onde

$$\tilde{z}_1(t) = z_1(s) = z_1(H^{-1}(t)) \quad e \quad \tilde{z}_2(t) = z_2(s) = z_2(H^{-1}(t)). \quad (5.55)$$

Daí, de (5.54) e (5.55) segue que

$$\tilde{z}'_1(t) = z'_1(s) \frac{ds}{dt} = z'_1(s) \frac{1}{H'(H^{-1}(t))} = \frac{z'_1(s)}{h(s)} = X(\tilde{z}(t)), \quad (5.56)$$

e, analogamente,

$$\tilde{z}'_2(t) = \frac{z'_2(s)}{h(s)} = Y(\tilde{z}(t)), \quad (5.57)$$

ou seja, $\tilde{z}(s)$ é solução de (5.47). \square

Corolário 5.4.1. *Se o sistema (5.47) é integrável em uma vizinhança U de O com uma integral primeira $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, então todas as soluções de (5.47) contidas em U são dadas implicitamente por $F(x, y) = c$, onde c é uma constante real.*

Definição 5.4.2. *Seja U um aberto de \mathbb{R}^2 .*

*Dizemos que uma função $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é um **fator integrante** de (5.47) se*

$$\frac{\partial(RX)}{\partial x} + \frac{\partial(RY)}{\partial y} = 0. \quad (5.58)$$

*Dizemos que uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é um **fator integrante inverso** de (5.47) se $1/V$ é um fator integrante de (5.47).*

É claro que R é um fator integrante de definido em U se, e somente se, $1/R$ é um fator integrante inverso definido em $U \setminus \{(x, y) \in U \mid R(x, y) = 0\}$.

Observe que R é um fator integrante de (5.47) se, e somente se, satisfaz a equação

$$X \frac{\partial R}{\partial x} + Y \frac{\partial R}{\partial y} = - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) R. \quad (5.59)$$

Por outro lado, V é um fator integrante inverso de (5.47) se, e somente se, satisfaz a equação

$$X \frac{\partial V}{\partial x} + Y \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) V. \quad (5.60)$$

Daí, aplicando o Lema 5.49 obtemos o corolário abaixo.

Corolário 5.4.2. *Se V é um fator integrante inverso de (5.47), então $V(x, y) = 0$ define implicitamente soluções de (5.47).*

A relação entre integral primeira e fator integrante é dada no lema abaixo.

Lema 5.4.3. *O campo (5.47) possui uma integral primeira $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, possui um fator integrante $R : U \rightarrow \mathbb{R}$. Mais ainda, valem as seguintes relações*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = RY \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -RX. \quad (5.61)$$

Demonstração. Suponha que (5.47) possui um fator integrante $R : U \rightarrow \mathbb{R}$. Defina

$$H(x, y) = \int R(x, y)Y(x, y)dx + h(y), \quad (x, y) \in U, \quad (5.62)$$

onde $h(y)$ é escolhido de modo que $\frac{\partial H}{\partial y} = -RX$. Então, temos as relações (5.61) e, portanto, sob trajetórias de (5.47) temos

$$X \frac{\partial H}{\partial x} + Y \frac{\partial H}{\partial y} = RXY - RXY = 0 \quad (5.63)$$

ou seja, $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira de (5.47).

Suponha agora que (5.47) possui uma integral primeira $H : U \rightarrow \mathbb{R}$. Então, sob trajetórias de (5.47) temos

$$X \frac{\partial H}{\partial x} + Y \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (5.64)$$

ou seja, (X, Y) é perpendicular a (H_x, H_y) . Mas, $(-H_y, H_x)$ é perpendicular a (H_x, H_y) , logo, $(-H_y, H_x)$ é paralelo a (X, Y) , ou seja, existe uma função $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (5.61) e, portanto, pelo Teorema de Schwarz segue que

$$\frac{\partial(RX)}{\partial x} + \frac{\partial(RY)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0 \quad (5.65)$$

ou seja, $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um fator integrante de (5.47). \square

Estudemos agora as condições em termos de integrabilidade para O ser um centro.

Teorema 5.4.1. *A singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema (5.47) se, e somente se, o sistema (5.47) for integrável em uma vizinhança U de O com uma integral primeira $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ analítica.*

Demonstração. Primeiro, suponha que O é um centro e seja U uma vizinhança de O que contém apenas trajetórias fechadas. Provemos que o sistema é integrável com uma integral primeira $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ analítica, ou seja, da forma

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x, y), \quad (5.66)$$

onde F_k é um polinômio homogêneo de grau k . Para isso, vamos provar a existência de uma função da forma (5.66) tal que, sobre as trajetórias do sistema contidas em U , satisfaz a equação diferencial parcial

$$0 = \frac{dF}{dt} = X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (5.67)$$

ou seja, é constante sobre trajetórias.

Substituindo (5.66) em (5.67) com os polinômios F_1 e F_2 explicitados, obtemos que $F_1(x, y) \equiv 0$, $F_2(x, y) = x^2 + y^2$ e

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(y \frac{\partial F_k}{\partial x} - x \frac{\partial F_k}{\partial y} - H_k \right), \quad (5.68)$$

onde $-H_3 = 2xX_2 + 2yY_2$ e

$$-H_k = 2xX_{k-1} + 2yY_{k-1} + \sum_{l=2}^{k-2} \left(X_l \frac{\partial F_{k-l+1}}{\partial x} + Y_l \frac{\partial F_{k-l+1}}{\partial y} \right), \quad k > 3. \quad (5.69)$$

Observe que para determinar H_k deve-se conhecer F_3, F_4, \dots, F_{k-1} . Observe também que para determinar F é suficiente determinarmos F_k , $k \geq 3$, de modo que

$$y \frac{\partial F_k}{\partial x} - x \frac{\partial F_k}{\partial y} = H_k. \quad (5.70)$$

Seja $k \geq 3$ dado e suponha $F_3, \dots, F_{k-1}, H_3, \dots, H_k$ já determinados. Provemos que a equação acima admite um polinômio homogêneo de grau k como solução, digamos F_k . Mas antes, vamos encontrar uma condição necessária para F_k ser solução de (5.70).

Suponha que F_k é solução de (5.70). Em coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, as séries de Fourier de F_k e H_k são da forma

$$F_k(\rho, \theta) = \rho^k \varphi(\theta) \quad , \quad H_k(\rho, \theta) = \rho_k \psi(\theta), \quad (5.71)$$

onde,

$$\begin{aligned} \varphi_k(\theta) &= \sum_{l=0}^k [A_{kl} \cos(l\theta) + B_{kl} \sin(l\theta)], \\ \psi_k(\theta) &= \sum_{l=0}^k [C_{kl} \cos(l\theta) + D_{kl} \sin(l\theta)], \end{aligned} \quad (5.72)$$

e $A_{kl}, B_{kl}, C_{kl}, D_{kl}$ são constantes reais.

Substituindo (5.71) em (5.70) obtemos a equação

$$- \frac{d\varphi_k}{d\theta} = \psi_k, \quad (5.73)$$

ou seja,

$$\sum_{l=1}^k l [A_{kl} \sin(l\theta) - B_{kl} \cos(l\theta)] = \sum_{l=0}^k [C_{kl} \cos(l\theta) + D_{kl} \sin(l\theta)], \quad (5.74)$$

e, portanto, pela unicidade da série de Fourier segue que

$$C_{k0} = 0, \quad A_{kl} = \frac{D_{kl}}{l} \quad e \quad B_{kl} = -\frac{C_{kl}}{l}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (5.75)$$

Em outras palavras, se (5.70) admite o polinômio F_k como solução, então devemos ter (5.75). Agora provemos que F_k sempre pode ser determinado.

Se k é ímpar, então H_k é uma função ímpar e, portanto, $C_{k0} = 0$. Além disso, definindo

$$\varphi_k(\theta) = - \int_0^\theta \psi_k(t) dt, \quad (5.76)$$

então $\frac{d\varphi_k}{d\theta} = -\psi_k$ e, portanto, pondo $F_k(\rho, \theta) = \rho^k \varphi_k(\theta)$ obtemos uma solução de (5.70).

Se k é par e $C_{k0} = 0$, então analogamente ao caso anterior obtemos uma solução. Por outro lado, se $C_{k0} \neq 0$ então não temos 5.75 e, portanto, (5.70) não admite um polinômio homogêneo de grau k como solução. Porém, podemos satisfazer a equação

$$y \frac{\partial F_k}{\partial x} - x \frac{\partial F_k}{\partial y} = H_k - C_{k0} (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}. \quad (5.77)$$

De fato, em coordenadas polares temos

$$\frac{\partial F_k}{\partial \theta} = -H_k + \rho^k C_{k0} = -\rho^k [\psi_k(\theta) - C_{k0}], \quad (5.78)$$

ou seja,

$$-\frac{d\varphi_k}{d\theta} = \psi_k(\theta) - C_{k0} = \sum_{l=1}^k [C_{kl} \cos(l\theta) + D_{kl} \sin(l\theta)], \quad (5.79)$$

e, portanto, analogamente aos casos anteriores determinamos via integração um polinômio homogêneo de grau k que é solução de (5.77).

Em suma, sempre conseguimos resolver (5.70) quando k é ímpar. Já quando k é par, se não conseguimos resolver (5.70), então resolvemos (5.77). Provemos que nesse caso a origem não pode ser um centro, em contradição com a hipótese inicial e, portanto, concluindo esta parte da demonstração.

Seja F_{2i} o primeiro polinômio que não conseguimos determinar ($C_{2i,0} \neq 0$). Considere a função

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + F_3(x, y) + F_4(x, y) + \dots + F_{2i}(x, y). \quad (5.80)$$

Provemos que F é uma função de Lyapunov estrita para O e, portanto, essa singularidade não pode ser um centro.

Primeiro, introduzindo coordenadas polares temos que

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 + \rho^3 \alpha(\rho, \theta) = \rho^2 [1 + \rho \alpha(\rho, \theta)], \quad (5.81)$$

onde

$$\alpha(\rho, \theta) = \sum_{k=3}^{2i} \rho^{k-3} F_k(\cos \theta, \sin \theta), \quad (5.82)$$

ou seja, α é função contínua. Daí, como $\lim_{\rho \rightarrow 0} [1 + \rho \alpha(\rho, \theta)] = 1$, então existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$1 + \rho \alpha(\rho, \theta) > 0, \quad \forall \rho \in (0, \rho_0), \theta \in [0, 2\pi], \quad (5.83)$$

e, portanto,

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) > 0, \quad \forall \rho \in (0, \rho_0), \theta \in [0, 2\pi]. \quad (5.84)$$

Logo, voltando para coordenadas cartesianas temos que

$$F(x, y) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in B((0, 0), \rho_0), \quad (5.85)$$

com $F(x, y) = 0$ se, e somente se $(x, y) = (0, 0)$.

Agora, observe que por (5.68) segue que sobre uma trajetória temos

$$\frac{dF}{dt} = X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = -C_{2i,0}(x^2 + y^2)^i, \quad (5.86)$$

ou seja, fora de O temos $\frac{dF}{dt} \neq 0$ e com o sinal inverso de $C_{2i,0}$.

Logo, F é uma função de Lyapunov estrita para O e, portanto, O é assintoticamente estável ($C_{2i,0} > 0$) ou instável ($C_{2i,0} < 0$). Em ambos os casos, O não pode ser um centro.

Agora, suponha que (5.47) possui uma integral primeira $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ analítica, onde U é uma vizinhança de $(0, 0)$.

Já sabemos que F é da forma

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y) \quad (5.87)$$

e que existe $r_s > 0$ tal que

$$F(r \cos \varphi, r \sin \varphi) > 0, \quad \forall r \in (0, r_s), \varphi \in [0, 2\pi). \quad (5.88)$$

Além disso, pelo Lema 5.4.3 existe um fator integrante $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \mu Y \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\mu X. \quad (5.89)$$

Defina

$$G(r, R, \varphi) = F(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2 \quad (5.90)$$

para todo $r, R \in (0, r_s)$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$, onde (r, φ) denotam coordenadas polares. Observe que por (5.89)

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\mu(x, y)}{r} (xX(x, y) - yY(x, y)) \quad (5.91)$$

onde $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$.

Por (5.88) temos que para todo $r_0 \in (0, r_s)$ e $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ existe $R_0 \in (0, r_s)$ tal que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$. Além disso, $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0$ por (5.91) e pois $(0, 0)$ é não degenerada. Daí, pelo Teorema da Função Implícita segue que em uma vizinhança de cada (R_0, φ_0) está definida uma única função $\rho(R, \varphi)$ que satisfaz $G(\rho(R, \varphi), R, \varphi) = 0$ e, portanto, está bem definida $\rho : (0, r_s) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo

$$F(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2. \quad (5.92)$$

Daí, de (5.92) segue que para cada $R \in (0, r_s)$ temos que

$$\begin{aligned} R^2 &= F(\rho(R, 0), 0) = \rho^2(R, 0) + \sum_{k=3}^{\infty} \rho^k(R, 0) F_k(1, 0), \\ R^2 &= F(\rho(R, 2\pi), 0) = \rho^2(R, 2\pi) + \sum_{k=3}^{\infty} \rho^k(R, 2\pi) F_k(1, 0) \end{aligned} \quad (5.93)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho^2(R, 2\pi) - \rho^2(R, 0)] + \sum_{k=3}^{\infty} [\rho^k(R, 2\pi) - \rho^k(R, 0)] F_k(1, 0) = \\ &= [\rho(R, 2\pi) - \rho(R, 0)] [\rho(R, 2\pi) + \rho(R, 0)] + \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} [\rho(R, 2\pi) - \rho(R, 0)] \sum_{j=0}^k \rho^{k-j}(R, 2\pi) \rho^j(R, 0) F_k(1, 0) = \\ &= [\rho(R, 2\pi) - \rho(R, 0)] C \end{aligned} \quad (5.94)$$

onde $C > 0$, ou seja, $\rho(R, 2\pi) = \rho(R, 0)$.

Logo, de (5.92) e do Lema 5.4.2 segue que todas as trajetórias de (5.47) contidas em $(0, r_s) \times [0, 2\pi)$ são 2π -periódicas, ou seja, $(0, 0)$ é um centro. \square

5.5 Sistemas Polinomiais Quadráticos

Considere o sistema

$$\dot{x} = -y + Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad \dot{y} = x + Kx^2 + Lxy + My^2, \quad (5.95)$$

onde $A, B, C, K, L, M \in \mathbb{R}$.

Suponha que a origem $O = (0, 0)$ é uma singularidade isolada não-degenerada de (5.95). Desejamos estabelecer condições sobre os coeficientes A, B, C, K, L, M para O ser um centro. Para isso, trabalharemos com o sistema (5.95) na forma normal de Bautin apresentada no lema a seguir.

Lema 5.5.1. *O sistema (5.95) é C^∞ -conjugado a um sistema da forma*

$$\dot{x} = -y - bx^2 - (2c + \beta)xy - dy^2, \quad \dot{y} = x + ax^2 + (2b + \alpha)xy + cy^2, \quad (5.96)$$

onde $a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $a + c = 0$.

Demonstração. Primeiro, observe que o sistema (5.95) é igual ao (5.96), porém não necessariamente com $a + c = 0$. De fato, basta tomar

$$\begin{aligned} a &= K, \\ b &= -A, \\ c &= M, \\ d &= -C, \\ 2b + \alpha &= L \Rightarrow \alpha = L + 2A, \\ 2c + \beta &= -B \Rightarrow \beta = -B - 2M. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Agora, se $a + c = 0$ então terminamos. Caso contrário, se a', b', c', d', α' e β' representam os coeficientes do sistema (5.96) após aplicar a mudança de coordenadas C^∞ dada por

$$x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta \quad e \quad y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \quad (5.98)$$

então obtemos que

$$\begin{aligned} a' &= a \cos^3 \theta + (3b + \alpha) \cos^2 \theta \sin \theta + (3c + \beta) \cos \theta \sin^2 \theta + d \sin^3 \theta, \\ c' &= c \cos^3 \theta - (2b + \alpha - d) \cos^2 \theta \sin \theta - (2c + \beta - a) \cos \theta \sin^2 \theta + b \sin^3 \theta. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Daí, segue que

$$a' + c' = (a + c) \cos \theta + (b + d) \sin \theta. \quad (5.100)$$

Como $a + c \neq 0$, então existe $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\cos \theta_0 = \frac{-(b + d)}{\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}} \quad e \quad \sin \theta_0 = \frac{(a + c)}{\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}}. \quad (5.101)$$

Logo,

$$a' + c' = \frac{-(a+c)(b+d)}{\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}} + \frac{(b+d)(a+c)}{\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}} = 0. \quad (5.102)$$

□

O principal teorema desta seção é o seguinte.

Teorema 5.5.1. *A singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema (5.96) com $a+c = 0$ se, e somente se, um dos conjuntos de condições abaixo é satisfeito:*

- I) $b + d = 0$.
- II) $\beta = 0 = a\alpha$.
- III) $\beta = 0 = \alpha + 5(b+d) = a^2 + 2d^2 + bd$.

Mais ainda, para todo sistema satisfazendo I, II ou III existe uma integral primeira analítica $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é igual a \mathbb{R}^2 ou ao complemento de uma curva algébrica em \mathbb{R}^2 .

Para demonstrar esta equivalência seguiremos a seguinte estratégia: primeiro verificaremos que a suficiência das condições I, II ou III implica a necessidade; em seguida, com base no Teorema 5.4.1, demonstraremos a suficiência verificando que qualquer sistema satisfazendo uma das condições I, II ou III possui uma integral primeira analítica e, portanto, um centro em O .

Teorema 5.5.2 (de Bautin). *Suponha que se o sistema (5.96) com $a+c = 0$ satisfaz um dos conjuntos de condições I, II ou III então O é um centro. Neste caso, os valores focais α_n deste sistema são polinômios homogêneos de grau $n - 1$ em $\mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$. O ideal gerado por α_n , $n > 1$, possui a seguinte base*

$$\begin{aligned} B_1 &= (b+d)\beta, \\ B_2 &= (b+d)a\alpha[\alpha + 5(b+d)], \\ B_3 &= (b+d)^2a\alpha(a^2 + 2d + bd). \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro, para determinar os valores focais realizaremos a mesma construção apresentada na segunda seção deste texto.

Introduzindo coordenadas polares $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$ em (5.96) obtemos a equação

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{D\rho^2}{1 - \rho B}, \quad (5.103)$$

onde $B, D \in \mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$ e são dados por

$$\begin{aligned} B &= -a \cos^3 \varphi - (3b + \alpha) \cos^3 \varphi \sin \varphi + (3a + \beta) \cos \varphi \sin^2 \varphi - d \sin^3 \varphi, \\ D &= -a \sin^3 \varphi - b \cos^3 \varphi + (3a - \beta) \cos^2 \varphi \sin \varphi + (2b - \alpha - d) \sin^2 \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno escrevemos $\frac{1}{1-\rho B} = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho B)^k$ e, portanto,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \sum_{k=2}^{\infty} R_k \rho^k, \quad (5.104)$$

onde $R_k = B^{k-2}D \in \mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$ é um polinômio homogêneo de grau $k - 1$.

Dada uma condição inicial $\rho_0 > 0$ suficientemente pequena então conforme o Teorema 6.1.2 existe uma vizinhança da origem onde podemos escrever

$$\rho(\varphi, \rho_0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\varphi) \rho_0^k, \quad (5.105)$$

onde u_k é uma função de $\varphi, a, b, c, d, \alpha$, e β .

Substituindo (5.105) em (5.104) e comparando os termos com mesma potência de ρ_0 obtemos uma sequência de equações diferenciais cujos primeiros termos são

$$\frac{du_1}{d\varphi} = 0, \quad \frac{du_2}{d\varphi} = R_2 u_1^2, \quad \frac{du_3}{d\varphi} = 2R_2 u_1 u_2 + R_3 u_1^3, \dots$$

Integrando essas equações usando a condição inicial $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ obtemos que $\alpha_1 = u_1(2\pi) = 1$ e, portanto, $\alpha_2 = u_2(2\pi)$ é um polinômio homogêneo de grau 1 em $\mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$. Daí, segue que $\alpha_3 = u_3(2\pi)$ é um polinômio homogêneo de grau 2 em $\mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$. De maneira geral, usando a equação análoga à (5.25) obtida na substituição acima prova-se via indução que $\alpha_k = u_k(2\pi)$ é um polinômio homogêneo de grau $k - 1$ em $\mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$.

Agora, provemos que o ideal gerado por α_k , $k > 1$, tem $\{B_1, B_2, B_3\}$ como base, ou seja, para todo $k > 1$ existem $\theta_k^{(1)}, \theta_k^{(2)}, \theta_k^{(3)} \in \mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$ tais que

$$\alpha_k = B_3 \theta_k^{(3)} + B_2 \theta_k^{(2)} + B_1 \theta_k^{(1)}.$$

Suponha que (5.96) satisfaz *III*. Então O é um centro e, portanto, pelo Corolário 5.3.2 segue que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_k = 0$ para todo $k > 1$. Daí, para todo $k > 1$ o valor focal α_k pertence ao ideal (nulo) gerado pelos polinômios β , $\alpha + 5(b + d)$ e $a^2 + 2d^2 + bd$. Logo, existem $\bar{\theta}_k^{(1)}, \bar{\theta}_k^{(2)}, \bar{\theta}_k^{(3)} \in \mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$ tais que

$$\alpha_k = (a^2 + 2d^2 + bd)\bar{\theta}_k^{(3)} + (\alpha + 5(b+d))\bar{\theta}_k^{(2)} + \beta\bar{\theta}_k^{(1)}. \quad (5.106)$$

Devido à distributividade, podemos reagrupar todos os termos que contêm o fator β em $\beta\bar{\theta}_k^{(1)}$ e, portanto, podemos supor que $\bar{\theta}_k^{(3)}$ e $\bar{\theta}_k^{(2)}$ não contêm o fator β . Daí, usando a representação acima para α_k e supondo agora que (5.96) satisfaz *II* e em seguida *I* obtemos que $\bar{\theta}_k^{(j)} = a\alpha(b+d)\theta_k^{(j)}$ para $j = 2, 3$ e $\bar{\theta}_k^{(1)} = (b+d)\theta_k^{(1)}$ com $\theta_k^{(1)}, \theta_k^{(2)}, \theta_k^{(3)} \in \mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$, ou seja,

$$\alpha_k = a\alpha(b+d)(a^2 + 2d^2 + bd)\theta_k^{(3)} + B_2\theta_k^{(2)} + B_1\theta_k^{(1)}. \quad (5.107)$$

Para $1 < k \leq 6$ devemos ter $\theta_k^{(3)} = 0$ pois α_k terá grau no máximo 5 e, portanto, podemos escrever $\alpha_k = B_2\theta_k^{(2)} + B_1\theta_k^{(1)}$. Já para $k \geq 7$, conforme [11, p. 12], pode-se provar que $\theta_k^{(3)}$ contém o fator $(b+d)$ e, portanto, podemos escrever

$$\alpha_k = B_3\theta_k^{(3)} + B_2\theta_k^{(2)} + B_1\theta_k^{(1)}. \quad (5.108)$$

Logo, $\{B_1, B_2, B_3\}$ é uma base para o ideal gerado por $\alpha_k, k > 1$. \square

Corolário 5.5.1. *Nas hipóteses do teorema anterior, se O é um centro do sistema (5.96) então um dos conjuntos de condições *I*, *II* ou *III* é satisfeito.*

Demonstração. Como O é um centro, então pelo Corolário 5.3.2 segue que os valores focais satisfazem

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_n = 0 \quad , \quad \forall n > 1,$$

e, portanto, pelo Teorema 5.5.2 segue que $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Daí, se $b + d = 0$ então temos *I*. Caso contrário, de $B_1 = 0$ segue que $\beta = 0$. Agora, se $a\alpha = 0$ então temos *II*. Caso contrário, de $B_2 = 0$ segue que $\alpha + 5(b+d) = 0$. Finalmente, de $B_3 = 0$ segue que $a^2 + 2d^2 + bd = 0$ e, portanto, temos *III*. \square

Com o corolário acima terminamos a primeira parte da estratégia para demonstrar o Teorema 5.5.1, isto é, a suficiência das condições *I*, *II* ou *III* implica a necessidade. Falta verificar que qualquer sistema satisfazendo uma das condições *I*, *II* ou *III* possui uma integral primeira analítica. Não apresentaremos uma demonstração deste fato aqui, mas sim um resumo do resultado apresentado em [11].

Antes disso, observe que a princípio poderíamos generalizar o Teorema 5.5.2 (e, portanto, o Teorema 5.5.1) para sistemas cúbicos, quárticos, etc. De fato, como \mathbb{R} é um anel Noetheriano então pelo Teorema das Bases de Hilbert segue que $\mathbb{R}[a, b, c, d, \alpha, \beta]$ também é um anel Noetheriano e, portanto, o

ideal gerado pelos valores focais sempre é finitamente gerado. No entanto, não conhecemos uma maneira trivial para determinar quantos e quais são os geradores. No caso do Teorema 5.5.2, para determinar esses geradores fizemos uso do conhecimento *a priori* das condições dadas pelo Teorema 5.5.1.

Demonstração do Teorema 5.5.1. Conforme a observação acima, basta verificar que qualquer sistema satisfazendo *I*, *II* ou *III* possui um integral primeira analítica.

Em [11, p. 16] foram construídas integrais primeiras analíticas definidas em \mathbb{R}^2 ou no complemento de uma curva algébrica em \mathbb{R}^2 para cada um dos quatro casos abaixo, concluindo a demonstração deste teorema:

Caso *I*) O sistema é C^∞ -conjugado via uma rotação de eixos ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - bx^2 - cxy + by^2 \\ \dot{y} = x + Axy \end{cases} \quad (\text{Q1})$$

onde $A, b, c \in \mathbb{R}$.

Caso *II* α) Suponha que $\beta = 0 = \alpha$. Então, temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + bx^2 - 2Axy + dy^2 \\ \dot{y} = x + Ax^2 + 2bxy - Ay^2 \end{cases} \quad (\text{Q2})$$

onde $A, b, d \in \mathbb{R}$.

Caso *II* a) Suponha que $\beta = 0 = a$. Então, temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - bx^2 - by^2 \\ \dot{y} = x + Axy \end{cases} \quad (\text{Q3})$$

onde $A, b, d \in \mathbb{R}$.

Caso *III*) O sistema é C^∞ -conjugado via uma semelhança ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - bx^2 + 2xy - dy^2 \\ \dot{y} = x + x^2 + (2b + \alpha)xy - y^2 \end{cases} \quad (\text{Q4})$$

onde $\alpha, b, d \in \mathbb{R}$. □

Finalmente, combinando o Lema 5.5.1 com o Teorema 5.5.1 obtemos o corolário abaixo:

Corolário 5.5.2. *A singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema (5.95) se, e somente se, (5.95) pode ser levado via uma rotação de eixos a um dos sistemas (Q1), (Q2), (Q3) ou (Q4).*

Em [6] provou-se que a singularidade isolada não-degenerada O é um centro do sistema (5.95) se, e somente se, (5.95) pode ser levado via uma mudança linear de coordenadas e uma mudança na escala de tempo a um dos sistemas (S1), (S2), (S3) ou (S4) que apresentamos nos exemplos abaixo.

Exemplo 5.5.1. O sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = x + 2xy \end{cases} \quad (\text{S1})$$

tem uma integral primeira dada por

$$H_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2y} \quad (5.109)$$

e, portanto, tem o centro na origem representado na Figura 5.2a.

Exemplo 5.5.2. O sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 \\ \dot{y} = x + xy \end{cases} \quad (\text{S2})$$

tem uma integral primeira dada por

$$H_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2} \quad (5.110)$$

e, portanto, tem o centro na origem representado na Figura 5.2b.

Exemplo 5.5.3. O sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{4}{3}x^2 \\ \dot{y} = x - \frac{16}{3}xy \end{cases} \quad (\text{S3})$$

tem uma integral primeira dada por

$$H_3(x, y) = \frac{9(x^2 + y^2) - 24x^2y + 16x^4}{-3 + 16y} \quad (5.111)$$

e, portanto, tem o centro na origem representado na Figura 5.2c.

Exemplo 5.5.4. O sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2 \\ \dot{y} = x + \frac{8}{3}xy \end{cases} \quad (\text{S4})$$

tem uma integral primeira dada por

$$H_4(x, y) = \frac{9(x^2 + y^2) + 24y^3 + 16y^4}{(3 + 8y)^4} \quad (5.112)$$

e, portanto, tem o centro na origem representado na Figura 5.2d.

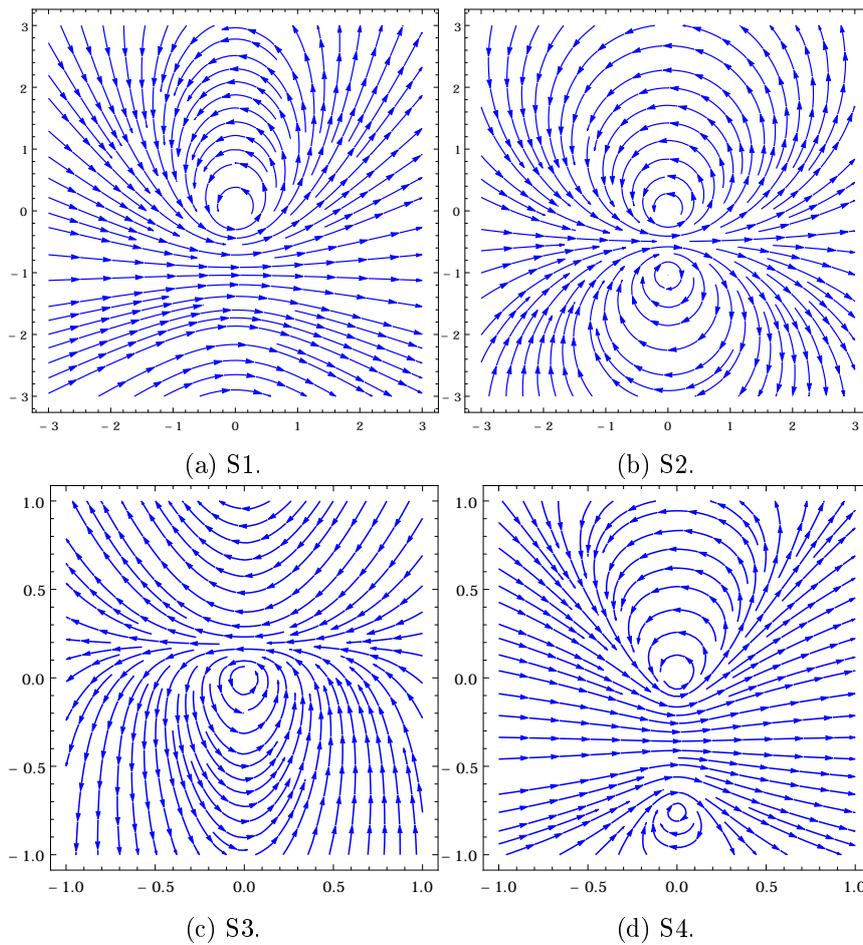


Figura 5.2: Representação dos centros na origem dos sistemas S1, S2, S3 e S4.

Capítulo 6

Método da Média

6.1 Introdução à Teoria de Perturbação

Considere o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x, \epsilon), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

onde $0 < \epsilon \ll 1$ é um parâmetro pequeno, $t \in I$ com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $x \in D$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Pela dependência contínua e diferenciável em parâmetros sabemos que se f é de classe C^k em ϵ então as soluções $x(t, t_0, x_0, \epsilon)$ de (6.1) também são de classe C^k em ϵ . Em outras palavras, desde que f seja pelo menos contínua temos que pequenas variações em ϵ provocam pequenas variações em $x(t, t_0, x_0, \epsilon)$. Uma pergunta natural é quão próximas as soluções de (6.1) são das soluções de

$$\dot{x} = f(t, x, 0), \quad x(t_0) = x_0. \quad (6.2)$$

Nas aplicações o parâmetro ϵ vem associado por exemplo a perturbações causadas por atrito, corpos de massa desprezível em sistemas gravitacionais de n-corpos, etc. Daí vem o nome da teoria. Em geral, dizemos que (6.2) é a equação não-perturbada associada a (6.1).

Exemplo 6.1.1. *O problema dado por*

$$\dot{x} = -x + \epsilon, \quad x(0) = 1,$$

tem como solução $x(t) = \epsilon + (1 - \epsilon)e^{-t}$. Já o problema não-perturbado

$$\dot{y} = -y, \quad y(0) = 1,$$

tem como solução $y(t) = e^{-t}$. Observe que

$$|x(t) - y(t)| = \epsilon - \epsilon e^{-t} \leq \epsilon,$$

ou seja, para todo $t \in \mathbb{R}$ o erro cometido ao aproximar $x(t)$ por $y(t)$ nunca é maior que ϵ .

Exemplo 6.1.2. O problema dado por

$$\dot{x} = +x + \epsilon, \quad x(0) = 1,$$

tem como solução $x(t) = -\epsilon + (1 + \epsilon)e^t$. Já o problema não-perturbado

$$\dot{y} = +y, \quad y(0) = 1,$$

tem como solução $y(t) = e^t$. Observe que

$$|x(t) - y(t)| = \epsilon|1 - e^t|,$$

ou seja, para $t \leq 0$ o erro cometido ao aproximar $x(t)$ por $y(t)$ nunca é maior que ϵ . Porém, para $t > 0$ o erro aumenta exponencialmente.

Nesta seção temos como objetivo estudar alguns aspectos da construção de aproximações das soluções de (6.1), em particular a obtida via expansão em potências de ϵ . Primeiro, estudaremos um maneira mais elaborada para comparar aproximações.

Definição 6.1.1. Dizemos que uma função $\delta : (0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva, monotonicamente decrescente em uma vizinhança de $\epsilon = 0$ tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$ existe é uma **função de ordem**.

Exemplo 6.1.3. ϵ^n para todo $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon|\ln \epsilon|$, $\sin \epsilon$, 2 , $e^{-1/\epsilon}$ são funções de ordem.

Abaixo, definimos uma maneira para comparar a taxa de crescimento de funções de ordem, os chamados símbolos O de Landau.

Definição 6.1.2. Sejam $\delta_1(\epsilon)$ e $\delta_2(\epsilon)$ funções de ordem.

Dizemos que $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ se existir uma constante $K > 0$ tal que $\delta_1(\epsilon) \leq K\delta_2(\epsilon)$ em uma vizinhança de $\epsilon = 0$.

Dizemos que $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ se para todo $K > 0$ temos $\delta_1(\epsilon) \leq K\delta_2(\epsilon)$ em uma vizinhança de $\epsilon = 0$.

É claro que se $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ então $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$. Em termos de limites, observe que

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = K \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon)),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon)).$$

Exemplo 6.1.4. $\epsilon^4 = o(\epsilon^2)$, $\sin \epsilon = O(\epsilon)$ e $\epsilon|\ln \epsilon| = o(1)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Agora, generalizamos a definição acima para funções vetoriais.

Definição 6.1.3. *Seja $\delta(\epsilon)$ uma função de ordem e $f(t, x, \epsilon)$ uma função com $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Seja $\|\cdot\|$ a norma do supremo em $I \times D$.*

Dizemos que $f(t, x, \epsilon) = O(\delta(\epsilon))$ se existir uma constante $K > 0$ tal que $\|f\| \leq K\delta(\epsilon)$ em uma vizinhança de $\epsilon = 0$.

Dizemos que $f(t, x, \epsilon) = o(\delta(\epsilon))$ se existir para todo $K > 0$ temos $\|f\| \leq K\delta(\epsilon)$ em uma vizinhança de $\epsilon = 0$.

É claro que se $f(t, x, \epsilon) = o(\delta(\epsilon))$ então $f(t, x, \epsilon) = O(\delta(\epsilon))$. Em termos de limites, observe que

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\delta(\epsilon)} = K \quad \Leftrightarrow \quad f(t, x, \epsilon) = O(\delta(\epsilon)),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\delta(\epsilon)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t, x, \epsilon) = o(\delta(\epsilon)).$$

Exemplo 6.1.5. *et sin x = O(\epsilon) quando $\epsilon \rightarrow 0$ para $t \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}$.*

Nos exemplos 6.1.1 e 6.1.2 podemos observar a importância do intervalo de tempo onde consideramos uma da aproximação. Uma maneira de controlar o tamanho deste intervalo consiste em alterar a velocidade do tempo ao estimar a ordem do erro. Neste contexto, definimos a noção de escala de tempo.

Definição 6.1.4. *Sejam $\delta_1(\epsilon)$ e $\delta_2(\epsilon)$ funções de ordem e $f(t, x, \epsilon)$ uma função com $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.*

*Dizemos que $f(t, x, \epsilon) = O(\delta_1(\epsilon))$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ na **escala de tempo** $1/\delta_2(\epsilon)$ se $f(t, x, \epsilon) = O(\delta_1(\epsilon))$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ para todo $x \in D$ e $0 \leq \delta_2(\epsilon)t \leq C$ onde C é uma constante independente de ϵ .*

Analogamente com o símbolo o.

Exemplo 6.1.6. *Para $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$ temos que $et \sin x = O(\epsilon)$ na escala de tempo 1 e $et \sin x = O(1)$ na escala de tempo $1/\epsilon$. Analogamente, $\epsilon^2 t \sin x = O(\epsilon)$ na escala de tempo $1/\epsilon$ e $\epsilon^2 t \sin x = O(\epsilon^{1/2})$ na escala de tempo $1/\epsilon^{3/2}$.*

Ao aproximar uma função $f(t, x, \epsilon)$ com outra função $g(t, x, \epsilon)$ o melhor cenário possível consiste em f ser igual a g quando $\epsilon \rightarrow 0$. Abaixo, formalizamos este conceito.

Definição 6.1.5. *Sejam $f(t, x, \epsilon)$ e $g(t, x, \epsilon)$ funções com $t \geq 0$ e $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta(\epsilon)$ uma função de ordem. Dizemos que $g(t, x, \epsilon)$ é uma **aproximação assintótica** de $f(t, x, \epsilon)$ na escala de tempo $1/\delta(\epsilon)$ se*

$$f(t, x, \epsilon) - g(t, x, \epsilon) = o(1)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$ na escala de tempo $1/\delta(\epsilon)$.

Observe que poderíamos trocar $f(t, x, \epsilon) - g(t, x, \epsilon) = o(1)$ por $f(t, x, \epsilon) - g(t, x, \epsilon) = O(\epsilon)$ na definição acima.

Exemplo 6.1.7. Para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$ temos que $x \sin t$ é uma aproximação assintótica de $x \sin(t + \epsilon t)$ na escala de tempo 1. Para $t \geq 0$ temos que ϵ é uma aproximação assintótica de $\sin(\epsilon) + \epsilon^3 t e^{-\epsilon t}$ na escala de tempo $1/\epsilon$.

Considere o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x, \epsilon), \quad x(t_0) = \eta, \quad (6.3)$$

com $t \geq 0$ e $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que podemos expandir $f(t, x, \epsilon)$ em uma série de Taylor em ϵ em torno de $\epsilon = 0$:

$$f(t, x, \epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j f_j(t, x). \quad (6.4)$$

Então, para todo $m \in \mathbb{N}$ podemos escrever

$$f(t, x, \epsilon) = \sum_{j=0}^m \epsilon^j f_j(t, x) + \epsilon^{m+1} R(t, x, \epsilon), \quad (6.5)$$

onde $R(t, x, \epsilon)$ é o resto de Lagrange.

Considere o m -jato da solução $x(t)$ de (6.3) em relação a ϵ

$$x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots + \epsilon^m x_m(t). \quad (6.6)$$

Substituindo (6.6) em (6.3), igualando os coeficientes das correspondentes potências de ϵ e aplicando as condições iniciais $x_0(t_0) = x(t_0)$, $x_i(t_0) = 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos determinar os coeficientes $x_j(t)$, $j \in \{0, \dots, m\}$. É natural esperar que a expansão assim obtida é uma aproximação assintótica de $x(t)$. No teorema abaixo provamos que sobre certas condições isto é verdade.

Teorema 6.1.1. *Considere o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = \sum_{j=0}^m \epsilon^j f_j(t, x) + \epsilon^{m+1} R(t, x, \epsilon), \quad x(t_0) = \eta, \quad (6.7)$$

com $|t - t_0| \leq h$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$. Suponha que

- (a) $f_j(t, x)$ é contínua em t e $(m + 1 - j)$ vezes continuamente diferenciável em x para todo $j \in \{0, \dots, m\}$;
- (b) $R(t, x, \epsilon)$ é Lipschitz em x e contínua em t e ϵ .

Então, a expansão

$$x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots + \epsilon^m x_m(t) \quad (6.8)$$

obtida como descrito acima é uma aproximação de $x(t)$ tal que

$$x(t) - (x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots + \epsilon^m x_m(t)) = O(\epsilon^{m+1}) \quad (6.9)$$

na escala de tempo 1.

Demonstração. Substituindo (6.8) em (6.7) obtemos a equação

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + \cdots + \epsilon^m \dot{x}_m &= \sum_{j=0}^m \epsilon^j f_j(t, x_0 + \cdots + \epsilon^m x_m) \\ &+ \epsilon^{m+1} R(t, x_0 + \cdots + \epsilon^m x_m, \epsilon). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Expandindo o lado direito em série de Taylor e igualando os coeficientes das potências correspondentes de ϵ obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0(t, x_0), \\ \dot{x}_1 &= f_1(t, x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x_0)x_1, \end{aligned} \quad (6.11)$$

e, de maneira geral,

$$\dot{x}_j = A_j(t) + B_j(t)x_j, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \quad (6.12)$$

onde $A_j(t)$ e $B_j(t)$ dependem de $x_0(t), \dots, x_{j-1}(t)$ e $f_0(t, x), \dots, f_j(t, x)$.

Pela hipótese (a) segue que as equações diferenciais acima com as condições iniciais $x_0(t_0) = \eta$ e $x_j(t_0) = 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$, determinam unicamente os coeficientes $x_j(t)$, $j \in \{0, \dots, m\}$, da expansão (6.8).

Integrando a equação (6.7) entre t_0 e t segue do Teorema Fundamental do Cálculo a seguinte equação integral que é equivalente ao problema de valor inicial:

$$x(t) = \eta + \sum_{j=0}^m \epsilon^j \int_{t_0}^t f_j(\tau, x(\tau)) d\tau + \epsilon^{m+1} \int_{t_0}^t R(\tau, x(\tau), \epsilon) d\tau. \quad (6.13)$$

Suponha que $m = 0$. Então, temos que

$$x_0(t) = \eta + \int_{t_0}^t f_0(\tau, x_0(\tau)) d\tau \quad (6.14)$$

e, portanto,

$$x(t) - x_0(t) = \int_{t_0}^t [f_0(\tau, x(\tau)) - f_0(\tau, x_0(\tau))]d\tau + \epsilon \int_{t_0}^t R(\tau, x(\tau), \epsilon)d\tau. \quad (6.15)$$

Seja L a constante de Lipschitz de f_0 e $M > 0$ tal que $\|R\| \leq M$. Então, sem perda de generalidade para $t \geq t_0$ temos

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \int_{t_0}^t L\|x(\tau) - x_0(\tau)\|d\tau + \epsilon M(t - t_0), \quad (6.16)$$

e, portanto, pelo Lema de Gronwall segue que

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \epsilon \frac{M}{L} e^{L(t-t_0)} - \epsilon \frac{M}{L}. \quad (6.17)$$

Logo, $x(t) - x_0(t) = O(\epsilon)$ na escala de tempo 1 e podemos escrever

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon\phi(t, \epsilon) \quad (6.18)$$

onde $\phi(t, \epsilon)$ é uma função limitada por uma constante não dependente de ϵ .

Analogamente, para $m = 1$ provamos que $\phi(t, \epsilon) - x_1(t) = O(\epsilon)$ na escala de tempo 1 e, prosseguindo via indução em m usando as equações (6.12) concluímos a demonstração. \square

Uma pergunta natural é se ao tomarmos o limite $m \rightarrow \infty$ no Teorema 6.1.1 acima obtemos uma expansão em série de potências convergente para $x(t)$. No teorema a seguir, cuja demonstração não apresentaremos aqui mas pode ser encontrada em [13, p. 119], obtemos uma resposta para essa questão.

Teorema 6.1.2. *Considere o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(t, x, \epsilon), \quad x(t_0) = \eta, \quad (6.19)$$

com $|t - t_0| \leq h$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ e $\eta \in [0, \eta_0]$.

Se $f(t, x, \epsilon)$ é contínua em t , x e ϵ e pode ser expandida em série de potências de x e ϵ para $\|x\| \leq \rho$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, então $x(t)$ pode ser expandida em uma série de potências de ϵ e η em uma vizinhança de $\epsilon = \eta = 0$ convergente na escala de tempo 1.

6.2 Método da Média

Na seção anterior estudamos aproximações de soluções obtidas via expansão em séries de potências. Nesta seção, estudaremos uma maneira de aproximar soluções de problemas não-autônomos por soluções de sistemas autônomos.

Considere o problema de valor inicial

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) + \epsilon^2 g(t, x, \epsilon), \quad x(0) = \eta, \quad (6.20)$$

onde $f(t, x)$ e $g(t, x, \epsilon)$ são T -periódicas em t . Dizemos que a equação diferencial acima está na forma padrão do Método da Média.

Seja

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \quad (6.21)$$

a média da função $f(t, x)$ em t .

Considere agora o problema de valor inicial

$$\dot{y} = f^0(y), \quad y(0) = \eta. \quad (6.22)$$

No teorema abaixo provamos que $y(t)$ é uma aproximação assintótica de $x(t)$. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 6.2.1. *Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $\|I - A\| < 1$, onde $\|\cdot\|$ é a norma de operador. Então, A é inversível e a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k \quad (6.23)$$

converge absolutamente para A^{-1} .

Demonstração. Seja $B = I - A$.

Primeiro, como $\|B\| < 1$ então $\sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k = \frac{1}{1-\|B\|}$. Daí, como temos $\|B^k\| \leq \|B\|^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ então segue que $\sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\|$ converge, ou seja, $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ converge absolutamente. Mais ainda, concluímos também que $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$.

Agora, seja $S = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$ e $S_n = \sum_{k=0}^n B^k$ as somas parciais. Então,

$$\begin{aligned} S_n - BS_n &= (I + B + B^2 + \dots + B^n) - (B + B^2 + B^3 + \dots + B^{n+1}) \\ &= I - B^{n+1}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

ou seja,

$$(I - B)S_n = I - B^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.25)$$

Daí, segue que

$$(I - B)S = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - B)S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - B^{n+1}) = I, \quad (6.26)$$

ou seja, $I - B$ é inversível e $(I - B)^{-1} = S$.

Logo, $A = I - B$ é inversível e $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ converge absolutamente para A^{-1} . \square

Teorema 6.2.1. *Considere os problemas de valor inicial (6.20) e (6.22) com $x, y, \eta \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. Suponha que*

- (a) f, g e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante $M > 0$ (independente de ϵ) em $[0, \infty) \times D$;
- (b) g é Lipschitz em x para $x \in D$;
- (c) $f(t, x)$ é T -periódica em t com média f^0 dada por (6.21) onde $T > 0$ é uma constante independente de ϵ ;
- (d) $y(t)$ é ponto interior de D para todo t .

Então, $x(t) - y(t) = O(\epsilon)$ na escala de tempo $1/\epsilon$.

Demonstração. As hipóteses (a) e (b) garantem a existência e unicidade de soluções de (6.20) e (6.22) na escala de tempo $1/\epsilon$.

Defina

$$u(t, x) = \frac{1}{K} \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds \quad (6.27)$$

onde $K > 0$ é tal que $\|\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\| < 1$ para todo $t \geq 0$ e $x \in D$. Observe que

$$\|u(t, x)\| \leq \frac{2MT}{K}, \quad t \geq 0, x \in D. \quad (6.28)$$

Defina

$$x(t) = z(t) + \epsilon u(t, z(t)), \quad (6.29)$$

e observe que $x(t) - z(t) = O(\epsilon)$ para $t \geq 0$.

Derivando (6.29) e substituindo em (6.20) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{z} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \epsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \dot{z} \\ &= \epsilon f(t, z + \epsilon u(t, z)) + \epsilon^2 g(t, z + \epsilon u(t, z), \epsilon). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Usando (6.27) podemos reescrever (6.30) como

$$[I + \epsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)] \dot{z} = \epsilon f^0(z) + R, \quad (6.31)$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$ e

$$R = \epsilon f(t, z + \epsilon u(t, z)) - \epsilon f(t, z) + \epsilon^2 g(t, z + \epsilon u(t, z), \epsilon). \quad (6.32)$$

Como $\|\frac{\partial u}{\partial z}(t, z)\| < 1$ então pelo Lema 6.2.1 segue que

$$\left[I + \epsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = I - \epsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\epsilon^3). \quad (6.33)$$

Como f é Lipschitz em z então

$$\|f(t, z + \epsilon u(t, z)) - f(t, z)\| \leq L\epsilon \|u(t, z)\| \leq \epsilon \frac{2LMT}{K}, \quad (6.34)$$

onde L é a constante de Lipschitz.

Como g é limitada então para algum $C > 0$ (independente de ϵ) temos que $\|R\| \leq \epsilon^2 C$, ou seja, $R = O(\epsilon^2)$.

De (6.31), (6.33) e (6.34) segue o problema

$$\dot{z} = \epsilon f^0(z) + R - \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} f^0(z) + O(\epsilon^3), \quad z(0) = x(0). \quad (6.35)$$

Como $R = O(\epsilon^2)$ então (6.35) pode ser colocada na forma utilizada no Teorema 6.1.1 tomando $\tau = \epsilon t$ e, portanto, concluímos que a solução $y(t)$ de

$$\frac{dy}{d\tau} = f^0(y), \quad y(0) = z(0), \quad (6.36)$$

é tal que $z(t) - y(t) = O(\epsilon)$ na escala de tempo 1 em τ e na escala de tempo $1/\epsilon$ em t .

Logo, como $x(t) - z(t) = O(\epsilon)$ então $x(t) - y(t) = O(\epsilon)$ na escala de tempo $1/\epsilon$. \square

No teorema abaixo apresentamos um dos principais resultados do Método da Média: uma correspondência entre os zeros de f^0 e as soluções periódicas de (6.20).

Teorema 6.2.2. *Considere os problemas de valor inicial (6.20) e (6.22). Suponha que*

(a) $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, g, \frac{\partial g}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante $M > 0$ (independente de ϵ) para $t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$;

(b) f e g são T -periódicas em t com T independente de ϵ .

Se $\eta_0 \in D$ é tal que $f^0(\eta_0) = 0$ e $Df^0(\eta_0)$ é não-singular, então existe uma solução T -periódica $\phi(t, \epsilon)$ de (6.20) definida para ϵ suficientemente pequeno e tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(t, \epsilon) = \eta_0$.

Reciprocamente, se existe uma solução T -periódica $\phi(t, \epsilon)$ de (6.20) definida para ϵ suficientemente pequeno e tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(t, \epsilon) = \eta_0$, então $f^0(\eta_0) = 0$.

Demonstração. Denotemos por $x(t, \eta, \epsilon)$ a solução de (6.20) com condição inicial $x(0, \eta, \epsilon) = \eta$.

Defina

$$x(t, \eta, \epsilon) = z(t, \eta, \epsilon) + \epsilon u(t, z(t, \eta, \epsilon)), \quad (6.37)$$

onde $u(t, z)$ é definida como na demonstração do Teorema 6.2.1.

Substituindo (6.37) em (6.20) obtemos a equação

$$\dot{z} = \epsilon f^0(z) + \epsilon^2 R(t, z, \epsilon), \quad (6.38)$$

onde

$$R(t, z, \epsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)u(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)f^0(z) + g(t, z, 0) + O(\epsilon) \quad (6.39)$$

é T -periódica em t e continuamente diferenciável em z .

Por (6.37), observe que $x(t, \eta, \epsilon)$ é T -periódica se, e somente se, $z(t, \eta, \epsilon)$ é T -periódica.

A solução $z(t, \eta, \epsilon)$ é T -periódica (para um valor fixo de $\epsilon \neq 0$) se, e somente se,

$$0 = z(T, \eta, \epsilon) - \eta = \epsilon \int_0^T [f^0(z(t, \eta, \epsilon)) - \epsilon R(t, z(t, \eta, \epsilon), \epsilon)] dt. \quad (6.40)$$

Assim, definindo

$$F(\eta, \epsilon) = \int_0^T [f^0(z(t, \eta, \epsilon)) - \epsilon R(t, z(t, \eta, \epsilon), \epsilon)] dt \quad (6.41)$$

segue que $z(t, \eta, \epsilon)$ é T -periódica se, e somente se, $F(\eta, \epsilon) = 0$. Observe que pela dependência contínua e diferenciável em parâmetros e condições iniciais segue que F é de classe C^1 .

Para a primeira parte, por hipótese temos que $F(\eta_0, 0) = 2\pi f^0(\eta_0) = 0$ e $DF(\eta_0, 0) = 2\pi Df^0(\eta_0)$ é não-singular. Daí, pelo Teorema da Função Implícita segue que existe uma única função η_ϵ de classe C^1 definida para ϵ pequeno tal que $F(\eta_\epsilon, \epsilon) = 0$. Daí, $z(t, \eta_\epsilon, \epsilon)$ é T -periódica para ϵ pequeno. Além disso, observe que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z(t, \eta_\epsilon, \epsilon) = z(t, \eta_0, 0)$ satisfaz o problema

$$\dot{z}(t, \eta_0, 0) = 0, \quad z(0, \eta_0, 0) = \eta_0, \quad (6.42)$$

e, portanto, $z(t, \eta_0, 0) = \eta_0$. Logo, basta tomar $\phi(t, \epsilon) = z(t, \eta_\epsilon, \epsilon) + \epsilon u(t, \eta_\epsilon, \epsilon)$.

Para a segunda parte, defina $\eta_\epsilon = \eta_0$ para ϵ pequeno. Então, $F(\eta_\epsilon, \epsilon) = 0$ para ϵ pequeno e, portanto,

$$2\pi f^0(\eta_0) = F(\eta_0, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(\eta_\epsilon, \epsilon) = 0, \quad (6.43)$$

ou seja, $f^0(\eta_0) = 0$. □

Em outras palavras, cada zero simples de f^0 dá origem a uma solução T -periódica de (6.20) e, por outro lado, cada solução T -periódica de (6.20) dá origem a um zero de f^0 (não necessariamente simples).

Logo, concluímos que o número mínimo de soluções T -periódicas de (6.20) é igual ao número de zeros simples de f^0 e que o número máximo de soluções T -periódicas de (6.20) é igual ao número máximo de zeros de f^0 .

6.3 Método da Média e Ciclos Limite

Definição 6.3.1. Dizemos que uma solução T -periódica γ de (6.20) é um T -ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única solução periódica de (6.20) que intercepta V .

Exemplo 6.3.1. O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (6.44)$$

tem o ciclo limite passando por $(0, 1)$ representado na Figura 6.1.

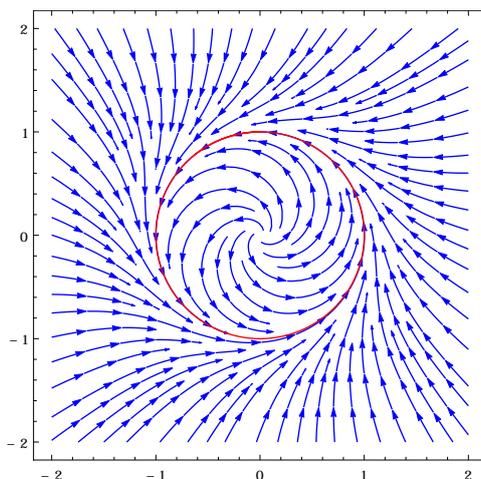


Figura 6.1: Ciclo limite.

Na seção anterior verificamos que o número máximo de zeros da equação média f^0 é uma estimativa para o número máximo de soluções T -periódicas de (6.20). Mas, como cada uma dessas soluções periódicas pode ser um ciclo limite, então temos também uma estimativa para o número máximo de T -ciclos limite.

Neste contexto, considere um sistema polinomial

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \quad (6.45)$$

com um centro T -isócrono na singularidade isolada e não-degenerada $(0, 0)$ e uma perturbação do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) + \epsilon P_N(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) + \epsilon Q_M(x, y) \end{cases} \quad (6.46)$$

onde

$$P_N(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{i+j=k} a_{i,j} x^i y^j \quad e \quad Q_M(x, y) = \sum_{k=1}^M \sum_{i+j=k} b_{i,j} x^i y^j. \quad (6.47)$$

Nesta seção, utilizaremos o Método da Média para estimar o número máximo de T -ciclos limite de (6.46). Em particular, veremos os casos de um centro linear e alguns centros não-lineares quadráticos estudados no capítulo anterior.

6.3.1 Centro Linear

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon P_N(x, y) \\ \dot{y} = x + \epsilon Q_M(x, y) \end{cases} \quad (6.48)$$

onde P_N e Q_M são dados em (6.47).

Introduzindo coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon [\cos(\theta) P_N(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin(\theta) Q_M(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{\epsilon}{r} [\cos(\theta) Q_M(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin(\theta) P_N(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{cases} \quad (6.49)$$

Como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{\theta} = 1$ então $\dot{\theta} > 0$ para ϵ suficientemente pequeno e, portanto,

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon [\cos(\theta) P_N(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin(\theta) Q_M(r \cos \theta, r \sin \theta)] + O(\epsilon^2) \quad (6.50)$$

que está na forma padrão do Método da Média. Daí, definindo $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(r) = \int_0^{2\pi} [\cos(\theta) P_N(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin(\theta) Q_M(r \cos \theta, r \sin \theta)] d\theta \quad (6.51)$$

então pelo Teorema 6.2.2 segue que o número máximo de 2π -ciclos limite de (6.48) é igual ao número máximo de zeros de $F(r)$. Mas,

$$\begin{aligned}
F(r) &= \sum_{k=1}^M r^k \sum_{i+j=k} a_{ij} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta \\
&+ \sum_{k=1}^N r^k \sum_{i+j=k} b_{ij} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{6.52}$$

é um polinômio em r de grau $\max\{N, M\}$ e, portanto, possui no máximo $\max\{N, M\}$ zeros.

Logo, o número máximo de 2π -ciclos limite de (6.48) é $\max\{N, M\}$.

6.3.2 Centro Não-Linear

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \tag{6.53}$$

com $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 .

Suponha que (6.53) possui uma integral primeira H de classe C^2 e uma família de trajetórias fechadas em torno da origem

$$\Gamma_h \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = h, h_c < h < h_s\} \tag{6.54}$$

onde sem perda de generalidade $0 \leq h_c < h_s$ e h_c é o nível da origem. Seja $U = \cup\{\Gamma_h \mid h_c < h < h_s\}$.

Considere uma perturbação do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) + \epsilon P(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) + \epsilon Q(x, y) \end{cases} \tag{6.55}$$

onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^2 .

No teorema abaixo apresentamos uma maneira de colocar (6.55) na forma padrão do Método da Média.

Teorema 6.3.1. *Considere os sistemas (6.53) e (6.55) sob as hipóteses acima. Suponha que*

$$q(x, y)x - p(x, y)y \neq 0, \quad \forall (x, y) \in U. \tag{6.56}$$

Seja $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ uma função de classe C^2 tal que

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2 \tag{6.57}$$

para todo $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$. Então, para ϵ suficientemente pequeno e $(x, y) \in U$ está bem definida

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Pq - Qp)}{2R(qx - py) + 2R\epsilon(Qx - Py)} \quad (6.58)$$

onde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$ e $\mu(x, y)$ é um fator integrante associado a $H(x, y)$.

Demonstração. Como H é uma integral primeira de (6.53) com fator integrante associado μ então

$$p \frac{\partial H}{\partial x} + q \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu q, \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu p. \quad (6.59)$$

Defina

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2 \quad (6.60)$$

para todo $(r, \varphi) \in U$ e $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ onde (r, φ) denotam coordenadas polares. Observe que de (6.59) segue que

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\mu(x, y)}{r} (q(x, y)x - p(x, y)y) \quad (6.61)$$

onde $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$.

Como $0 \leq h_c < h_s$ então para todo $(r_0, \varphi_0) \in U$ existe $R_0 \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ tal que $G(r_0, \varphi_0, R_0) = 0$. Além disso, $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \varphi_0, R_0) \neq 0$ por (6.56) e (6.61). Daí, pelo Teorema da Função Implícita segue que em uma vizinhança de cada (R_0, φ_0) está definida uma única função $\rho(R, \varphi)$ de classe C^2 que satisfaz (6.57) e, portanto, está bem definida em $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times U$.

Como $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$ e $\varphi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ para $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h$ e $t \in \mathbb{R}$, então obtemos que

$$\dot{R} = \epsilon \frac{\mu(Pq - Qp)}{2R} \quad e \quad \dot{\varphi} = \frac{(qx - py) + \epsilon(Qx - Py)}{x^2 + y^2}. \quad (6.62)$$

Logo, como por (6.56) segue que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{\varphi} \neq 0$ então para ϵ suficientemente pequeno e $(x, y) \in U$ está bem definida a equação (6.58). \square

Expandindo (6.58) em potências de ϵ e aplicando o Teorema 6.2.2 obtemos o corolário abaixo.

Corolário 6.3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 6.3.1, seja $F : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Pq - Qp)}{2R(qx - py)} d\varphi \quad (6.63)$$

onde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$. Então, o número máximo de 2π -ciclos limite de (6.55) é igual ao número máximo de zeros de (6.63).

Exemplo 6.3.2. O campo polinomial quadrático S1 dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = x + 2xy \end{cases} \quad (6.64)$$

possui um centro 2π -isócrono na singularidade isolada não-degenerada $(0, 0)$, conforme o Exemplo do capítulo anterior.

A integral primeira e fator integrante são dados respectivamente por

$$H_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2y} \quad e \quad \mu_1(x, y) = \frac{2}{(1 + 2y)^2} \quad (6.65)$$

onde $H_1(x, y) = h$ é uma trajetória fechada de (S1) para todo $h > 0$.

A função $\rho_1 : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ da mudança de coordenadas é dada por

$$\rho_1(R, \varphi) = R\sqrt{1 + R^2 \sin^2 \varphi} + R^2 \sin \varphi. \quad (6.66)$$

Considerando uma perturbação do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2 + \epsilon(a_{10}x + a_{01}y) \\ \dot{y} = x + 2xy + \epsilon(b_{10}x + b_{01}y) \end{cases} \quad (6.67)$$

aplicando o Corolário 6.3.1 e integrando os 28 termos que aparecem em (6.63) obtemos que

$$F(R) = \pi R(2b_{01}R^2 + a_{10} + b_{01}). \quad (6.68)$$

Como F está definida em $(0, \infty)$ então os seus zeros são dados por

$$2b_{01}R^2 + a_{10} + b_{01} = 0 \quad (6.69)$$

e, portanto, são no máximo 2.

Logo, (6.67) possui no máximo 2 2π -ciclos limite.

Exemplo 6.3.3. O campo polinomial quadrático S2 dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 \\ \dot{y} = x + xy \end{cases} \quad (6.70)$$

possui um centro 2π -isócrono na singularidade isolada não-degenerada $(0, 0)$, conforme o Exemplo do capítulo anterior.

A integral primeira e fator integrante são dados respectivamente por

$$H_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2} \quad e \quad \mu_2(x, y) = \frac{2}{(1 + y)^3} \quad (6.71)$$

onde $H_2(x, y) = h$ é uma trajetória fechada de (S2) para todo $h \in (0, 1)$.

A função $\rho_2 : (0, 1) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ da mudança de coordenadas é dada por

$$\rho_2(R, \varphi) = \frac{R}{1 - R \sin \varphi}. \quad (6.72)$$

Considere uma perturbação do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + \epsilon(a_{10}x + a_{01}y) \\ \dot{y} = x + xy + \epsilon(b_{10}x + b_{01}y) \end{cases} \quad (6.73)$$

com $a_{10} + b_{01} \neq 0$. Aplicando o Corolário 6.3.1 e integrando os 8 termos que aparecem em (6.63) obtemos que

$$F(R) = \pi R(a_{10} + b_{01}). \quad (6.74)$$

Como F está definida em $(0, 1)$ então os seus zeros são dados por

$$a_{10} + b_{01} = 0 \quad (6.75)$$

e, portanto, F não possui zeros pois por hipótese $a_{10} + b_{01} \neq 0$.

Logo, (6.73) não possui 2π -ciclos limite.

No exemplo acima nos deparamos com o caso onde a função média f^0 poderia ser identicamente nula e, portanto, não teríamos uma estimativa clara para o número máximo de T -ciclos limite. Para estudar casos como este devemos utilizar os chamados Métodos da Média de maior ordem. Por exemplo, no Método da Média de segunda ordem analisamos a equação

$$\dot{x} = \epsilon f_1(x, t) + \epsilon^2 f_2(x, t) + \epsilon^3 R(t, x, \epsilon). \quad (6.76)$$

Um estudo detalhado dos métodos de segunda e terceira ordem pode ser encontrado em [1].

Voltando ao nosso método de primeira ordem, considere uma perturbação polinomial do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) + \epsilon P_N(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) + \epsilon Q_N(x, y) \end{cases} \quad (6.77)$$

onde P_N, Q_N são dados como em (6.47) e o sistema não perturbado ($\epsilon = 0$) é $S1$ ou $S2$.

Utilizando o Corolário 6.3.1 e com o auxílio do sistema algébrico computacional Mathematica (versão 9.0.1) calculamos as estimativas dadas na Tabela 6.1 para o número máximo de 2π -ciclos limite de (6.77).

Para $S1$, utilizamos o algoritmo abaixo:

```

(*Input: n - natural number, degree of the polynomial
perturbation
Output: Estimative - natural number, estimative for the number
of limit cycles *)

(* Field *)
p = -y + x^2 - y^2;
q = x + 2*x*y;

(* First Integral and integrating factor *)
H = (x^2 + y^2) / (1 + 2*y);
Mu = 2 / (1 + 2*y)^2;

(* Change of variables *)
Rho = R*Sqrt[1 + R^2*Sin[Phi]^2] + R^2*Sin[Phi];
x = Rho*Cos[Phi];
y = Rho*Sin[Phi];

(* Polynomial perturbation *)
n = 3; (* Insert here the polynomial perturbation degree *)
P = Sum[If[1 <= i+j <=n, Subscript[a,{i,j}]*x^i*y^j,0], {i,0,n},
{j,0,n}];
Q = Sum[If[1 <= i+j <=n, Subscript[b,{i,j}]*x^i*y^j,0], {i,0,n},
{j,0,n}];

(* Integrand (first order averaging) *)
Int = Expand[Cancel[(Mu*(x^2+y^2)*(P*q-Q*p))/(2*R*(q*x-p*y))]];

(* Parallel integration *)
IntTerms = Level[Int,1];
FTerms = Parallelize[Integrate[#, {Phi,0,2*Pi}, Assumptions->R>0]
& /@ (IntTerms)];
F = Together[Sum[t, {t, FTerms}]];

(* Estimative for the number of limit cycles *)
FFactors = First /@ FactorList[Numerator[F]];
FFactorsEstim = DeleteCases[FFactors, Alternatives @@ Select[
FFactors, (# /. R->0) == 0 &]];
Estimative = Exponent[Collect[Product[t, {t, FFactorsEstim}], R],
R]

```

Para S2, utilizamos o algoritmo abaixo:

```

(*Input: n - natural number, degree of the polynomial
perturbation
Output: Estimative - natural number, estimative for the number
of limit cycles *)

(* Field *)
p = -y + x^2;
q = x + x*y;

(* First Integral and integrating factor *)
H = (x^2 + y^2) / (1 + y)^2;
Mu = 2 / (1 + y)^3;

```

```

(* Change of variables *)
Rho = R / (1 - R*Sin[Phi]);
x = Rho*Cos[Phi];
y = Rho*Sin[Phi];

(* Polynomial perturbation *)
n = 3; (* Insert here the polynomial perturbation degree *)
P = Sum[If[1 <= i+j <=n, Subscript[a,{i,j}]*x^i*y^j,0], {i,0,n},
{j,0,n}];
Q = Sum[If[1 <= i+j <=n, Subscript[b,{i,j}]*x^i*y^j,0], {i,0,n},
{j,0,n}];

(* Integrand (first order averaging) *)
Int = Expand[Cancel[(Mu*(x^2+y^2)*(P*q-Q*p))/(2*R*(qx-py))]];

(* Parallel integration and normalization *)
IntTerms = Level[Int,1];
FTerms = Parallelize[Integrate[#, {Phi,0,2*Pi}, Assumptions->0<R
<1] & /@ (IntTerms)];
FTermsNormal = Parallelize[Simplify[# /. R->Sqrt[1-Z^2],0<Z<1] &
/@ (FTerms)];
FNormal = Together[Sum[t,{t,FNormalTerms}]];

(* Estimative for the number of limit cycles *)
FNormalFactors = First /@ FactorList[Numerator[FNormal]];
FNormalFactorsEstim = DeleteCases[FNormalFactors, Alternatives @@
Select[FNormalFactors, (# /. Z->0) == 0 || (# /. Z->1) == 0
&]];
Estimative = Exponent[Collect[Product[t,{t,FNormalFactorsEstim
}], R], R]

```

N	S_1	S_2
1	2	0
2	2	2
3	2	3
4	4	5
5	6	7

Tabela 6.1: Número máximo de 2π -ciclos limite obtidos via perturbação polinomial de grau N dos centros S_1 e S_2 . O caso S_2 com $N = 1$ é tratado como no Exemplo 6.3.3.

Conclusão

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias como existência e unicidade de soluções e dependência contínua e diferenciável em parâmetros e condições iniciais.

Nos Capítulos 2 a 4 passamos a estudar equações diferenciais definidas por campos vetoriais. No Capítulo 2, apresentamos o fluxo gerado por um campo, o retrato de fase e seus comparadores: as conjugações e equivalências. Estudamos também aqui a estabilidade no sentido de Lyapunov. No Capítulo 3 apresentamos a teoria de equações diferenciais ordinárias lineares, obtendo uma classificação topológica do retrato de fase de sistemas lineares planares. No Capítulo 4, apresentamos os principais resultados utilizados para o estudo do comportamento local: os teoremas do Fluxo Tubular e Hartman-Grobman.

No Capítulo 5 determinamos condições para um sistema polinomial planar ter um centro isócrono. Vemos os casos de sistemas homogêneos, analíticos, analíticos com parte linear e, por fim, sistemas polinomiais quadráticos. Para este último, obtemos uma classificação direta em termos dos coeficientes do sistema.

Finalmente, no capítulo 6 começamos introduzindo a Teoria de Perturbação e, em seguida, apresentamos o Método da Média, que dá origem ao principal teorema deste texto: a correspondência entre os zeros da função média e as soluções periódicas do sistema perturbado. Utilizamos este resultado para estimar o número máximo de ciclos limite que aparecem ao perturbar um centro linear e os centros não-lineares S_1 e S_2 apresentados no capítulo anterior com polinômios.

Para o caso linear o problema é facilmente resolvido, pois os coeficientes da perturbação distribuem-se de maneira trivial na função média, que é um polinômio.

Para o caso não-linear, o problema reduz-se a estimar o número de zeros de uma função definida por uma integral. Fez-se necessário o uso do

sistema algébrico computacional Mathematica neste caso, pois o número de termos no integrando cresce rapidamente e os coeficientes da perturbação não distribuem-se de maneira trivial entre esses termos.

Com este trabalho, concluímos que o Método da Média oferece uma ótima alternativa para estimar o número máximo de ciclos limite que aparecem na perturbação polinomial de centros em sistemas polinomiais planares relativamente simples. Concluímos também que a dinâmica de sistemas planares é muito rica, principalmente em problemas relacionados ao 16o problema de Hilbert.

Referências Bibliográficas

- [1] BUICA, A.; LLIBRE, J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull. Sci. Math, 128:7-22, 2004.
- [2] CHAVARRIGA, J; SABATINI, M. *A Survey of Isocronous Centers*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 1:1-70, 1999.
- [3] CONTI, R. *Centers of Planar Polynomial Systems, A Review*. Le Matematiche, 8:207-240, 1998.
- [4] CONTI, R; SANSONE, G. *Nonlinear Differential Equations*. Pergamon Press, 1964.
- [5] DUMONTIER, F; LLIBRE J; ARTÉS, J.C. *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer, 2006.
- [6] LOUD, W.S. *Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*. Contributions to Differential Equations, 3:21-36, 1964.
- [7] MARTINS, R.M; OLIVEIRA, R.D.S; MEREU, A. C. *An estimative for the number of limit cycles in a Liénard-like perturbation of a quadratic non-linear center*. Preprint, 2014.
- [8] OLIVA, W.M. *Equações diferenciais ordinárias*. Notas do 8o Colóquio Brasileiro de Matemática, 1971.
- [9] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems* Texts in Appl. Math. 7, Springer, 2001.
- [10] SANDERS, J.A; VERHULST, F; MURDOCK, J. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Appl. Math. Sci. 59, Springer, 2007.
- [11] SCHLOMIUK, D; GUCKENHEIMER, J; RAND, R. *Integrability of plane quadratic vector fields*. Expositiones Mathematicae, 8:3-25, 1990.
- [12] SOTOMAYOR, J. *Equações diferenciais ordinárias*. Livraria da Física, 2011.

- [13] VERHULST, F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Universitext, Springer, 1996.