

Métodos numéricos em equações diferenciais suaves por partes em dimensão 2

Orientador: Dr. Ricardo Miranda Martins

Estudante: Gabriel Belém Barbosa

1 Introdução

O estudo de sistemas de equações diferenciais no escopo de ciclos limite é um problema antigo e de grande importância matemática e histórica. Ainda mais recente e de comportamento mais desconhecido está o problema descontínuo, que é, assim como sua contraparte contínua, de interesse em diversas áreas acadêmicas e da tecnologia. Entender a existência e comportamento sob perturbação de órbitas periódicas nesses casos é essencial para estabelecer regimes de trabalho seguros e/ou previsíveis para sistemas dinâmicos diversos, incluindo sistemas mecânicos com impacto e fricção, como robôs e maquinário industrial, conversores eletrônicos de potência, sistemas de controle híbrido, entre outros, como pode ser visto em M. di Bernardo and Kowalczyk [2008]. Muito progresso nessa área está sendo desenvolvido; em especial, o caso com polinômio de grau 1 com duas regiões lineares, o mais simples dentre eles (e ainda não completamente entendido), foi abordado tanto em Huan and Yang [2012] em sua forma não perturbada quanto em Han and Zhang [2010] sob perturbações, ambos explorando a existência (ou surgimento, no segundo caso) e número de ciclos limites com bastante sucesso, identificando diversos casos cujo comportamento nesse sentido é determinável.

A primeira parte desse projeto foca na produção (e no desenvolvimento de um método numérico para a produção) de exemplos com 3 ciclos limite de uma certa classe de PWLDE's (piecewise linear differential equations) formados por focos compartilhando singularidade e com uma reta como descontinuidade, motivada pela escassez de tais exemplos, sendo aquele apresentado em Llibre and Ponce [2012] um dos poucos na literatura, e universalmente referenciado. A segunda parte foi focada na produção de exemplos e na descrição do comportamento (no que concerne o número de ciclos limite e regiões de órbitas fechadas) de uma outra classe de PWLDE's formados por pares de centros (ou pares de centros e selas) com uma descontinuidade em forma de cruz, com subsistemas iguais em quadrantes opostos.

2 PWLDE's com duas regiões compartilhando singularidade com 3 ciclos limite

Segundo Huan and Yang [2012], um sistema de equações diferenciais lineares por partes em dimensão 2 com duas regiões compartilhando um mesmo equilíbrio pode ser descrito, através de transformações invertíveis e sem perda de generalidade, na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}^+ \mathbf{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \mathbf{A}^- \mathbf{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

e neste estudo será focado o caso no qual $(a_{11}^\pm + a_{22}^\pm)^2 - 4 \cdot \det(\mathbf{A}^\pm) < 0$, $a_{12}^+ < 0$, $a_{12}^- < 0$, isto é, \mathbf{A}^\pm possuem ambas um par de autovalores complexos, $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, ($\beta^\pm > 0$, $i^2 = -1$), e ambos os subsistemas giram em torno da origem em sentido anti-horário, novamente sem perda de generalidade.

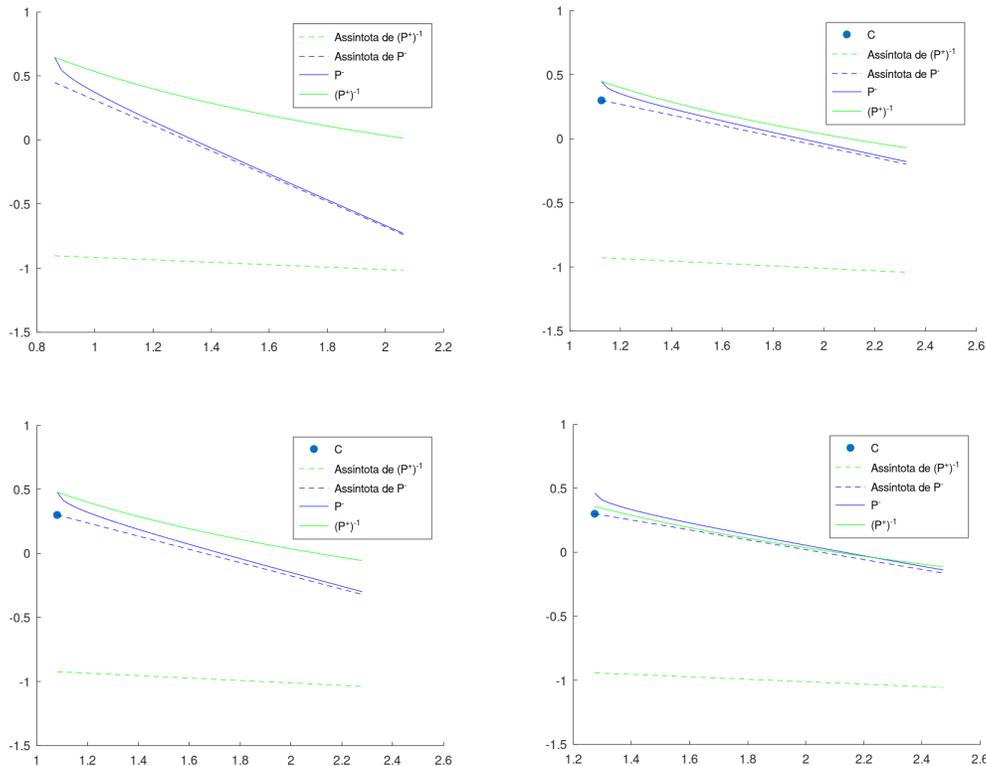


Figura 1: Gráficos de P^- e $(P^+)^{-1}$ com, em ordem de leitura, $f(\alpha^-) = 0$; $f(\alpha^-) = 0$ e $g(m^-) = 0$; $f(\alpha^-) = 0$ e $g(m^-) = 0$ e β^- variado; $f_p(\alpha^-) = 0$ e $g(m^-) = 0$.

É possível, então, transformar uma das matrizes do sistema em sua forma normal de Jordan (no caso A^+ , que se torna J^+ , sem perda de generalidade) através de mudanças de coordenadas. É obtido, então, o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{J}^+ \mathbf{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \mathbf{A}^- \mathbf{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

A partir de um $\gamma^+ = \frac{\alpha^+}{\beta^+} > 0$ qualquer e sua respectiva J^+ , onde α^+ e β^+ são as partes reais e imaginárias (positivas) dos autovalores de A^+ , respectivamente, foi desenvolvido um método para a obtenção de uma matriz A^- tal que (1) possua 3 ciclos limite.

Para tal, é então construída uma matriz A^- sob especificação como sendo

$$A^- = \begin{pmatrix} \alpha^- - \frac{m^-}{\gamma^-} & \frac{1}{\gamma^-} \\ -\beta^- \left(\alpha^- + \frac{(m^-)^2}{\alpha^-} \right) & \alpha^- + \frac{m^-}{\gamma^-} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

onde γ^- , α^- e β^- são definidos de forma análoga para A^- e esta possui autovetores na forma $(1, m^- \pm i\alpha^-)^T$. Tal matriz cumpre as restrições de que $y_c^- < \gamma^+$ (sendo que o ponto $(1, y_c^-)^T$ define e pertence à menor órbita do sistema neste caso específico, mais detalhes em Belém [2021]), e $\gamma^- < 0$, caso o qual, segundo Huan and Yang [2012], possui de 0 a 3 ciclos limites. O caso com $\gamma^+ < y_c^-$, $\gamma^+ < 0$, $\gamma^- > 0$ será garantido por uma invariabilidade apresentada no mesmo artigo. Através do mapa de retorno do sistema resultante, P , é possível produzir uma função erro em função de α^- ,

$$f(\alpha^-) = \frac{1}{\hat{\tau}^-} \log \left(\frac{\sin(\hat{\tau}^-) a_{1,2}^- (exp(-\gamma^+ \hat{\tau}^+) \varphi_{\gamma^+}(\hat{\tau}^+) + exp(\gamma^+ \hat{\tau}^+) \varphi_{-\gamma^+}(\hat{\tau}^+))}{\sin(\hat{\tau}^+) \beta^- \varphi_{\gamma^-}(\hat{\tau}^-)} \right) + \gamma^-, \quad (4)$$

tal que é garantido que a menor órbita do sistema seja ciclo limite obtendo-se o zero de tal função erro, onde $\hat{\tau}^\pm$ e $a_{1,2}^-$ dependem de γ^- e/ou y_c^- (logo dependem de α^-), e φ_{γ^\pm} são funções auxiliares para simplificar a notação. Segue, no canto superior esquerdo da Fig. 1, um exemplo satisfazendo tal. A partir de métodos numéricos, então, (4) é zerada, porém com m^- escolhido de forma que a reta assintótica do mapa de Poincaré esquerdo, P^- (veja Huan and Yang [2012]), seja valorada $c < \gamma^+$ em y_*^- , isto é, a assíntota passa pelo ponto $C = (y_*^-, c)^T$, sendo, nesse caso, $y_*^- = (P^-)^{-1}(y_c^-)$. Tal é garantido através da busca numérica do zero da função

$$g(m^-) = \frac{c + exp(\gamma^- \pi) y_*^-}{1 + exp(\gamma^- \pi)} - \gamma^- \alpha^- - m^-, \quad (5)$$

em cada iteração da busca do zero de (4). Além disso, será variado manualmente β^- , o que altera a inclinação da assíntota, como pode ser comparado na Fig. 1. Por fim, pode ser somada uma folga p em (4), de forma que ao se zerar a função ajustada com a folga, $f_p(\alpha^-)$, $P(y_*^-) \neq y_*^-$ (isto é, a menor órbita não é fechada), porém de forma controlada.

2.1 Bifurcação de Hopf

Segundo Kuznetsov [1998], uma bifurcação é o fenômeno de surgimento de um retrato de fase topologicamente não equivalente conforme um ou mais parâmetros passam por um valor crítico. Apesar de existirem diversas classificações, aqui será comentado um pouco sobre a bifurcação de Hopf. Esse tipo de bifurcação leva um foco atrator ou repulsor a um estado de atração ou repulsão fraca (não linear), respectivamente, quando os parâmetros atingem o valor crítico, e então para um foco do tipo oposto para valores dos parâmetros após tal ponto crítico. Além disso é formado um ciclo limite em torno do foco em um dos lados do ponto crítico, cuja estabilidade depende do tipo de foco que é englobado; estável (bifurcação supercrítica) para um foco repulsor e instável (bifurcação subcrítica) para um atrator.

A distinção entre bifurcação subcrítica e supercrítica pode ser entendida com quão "abruptamente" uma solução escapa do equilíbrio na sua forma atratora quando o parâmetro é lentamente variado na direção da região na qual o foco passa a ser repulsor, o que é importante para entender se a solução permanecerá em uma vizinhança do equilíbrio de forma não catastrófica ou se será "ejetada" catastroficamente, o que é de consideração para o estudo da performance de máquinas sob desgaste ou outras variações externas (que representam a lenta variação dos parâmetros) quando estes atingem um ponto crítico. Para ilustrar essas ideias será apresentado um exemplo dentro do tema de sistemas lineares planares por partes.

Em Han and Zhang [2010] foi estudado o problema auxiliar

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}^+ \mathbf{x} + b^+ & \text{se } x \geq 0 \\ \mathbf{A}^- \mathbf{x} + b^- & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

com enfoque no fenômeno de bifurcação. Nele foi provado o seguinte teorema.

Teorema 1. *Dado (6) com $b^\pm = \vec{0}$ e um foco elementar de tipo FF (focus-focus, isto é, um foco de ambos os subsistemas) e ordem 1 na origem, sendo α^\pm e β^\pm definidos como previamente e*

$$\alpha^+ < 0, \quad \frac{\alpha^+}{\beta^+} + \frac{\alpha^-}{\beta^-} < 0,$$

então existe uma constante $\varepsilon_0 > 0$ e funções C^∞

$$\begin{aligned} \varphi_1(b_1^+) &= \frac{\beta^-}{\beta^+} b_1^+ + O(|b_1^+|^2), \quad \varphi_2(b_1^+) = \frac{\alpha^-}{\beta^+} b_1^+ + O(|b_1^+|^2) \\ \varphi_3(b_1^+) &= \frac{\alpha^+}{\beta^+} b_1^+ + O(|b_1^+|^2), \quad \tilde{\varphi}(b_1^+, b_2^+) = \frac{\alpha^-}{\alpha^+} b_2^+ + O(|b_1^+, b_2^+|^2) \end{aligned}$$

tal que para $|b_1^\pm| + |b_2^\pm| < \varepsilon_0$, se

$$b_2^+ < \varphi_3(b_1^+), \quad \varphi_2(b_1^+) < b_2^- < \tilde{\varphi}(b_1^+, b_2^+)$$

o sistema (6) possui 1 ciclo limite se $0 < \varphi_1(b_1^+) - b_1^- \ll 1$ e 2 se $0 < b_1^- - \varphi_1(b_1^+) \ll 1$.

Prova. Veja Han and Zhang [2010].

Tomando

$$A^- = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$b^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a Fig. 2 apresenta o retrato de fase de (6), no qual a origem é um foco repulsor (repare que o fluxo do sistema é no sentido horário).

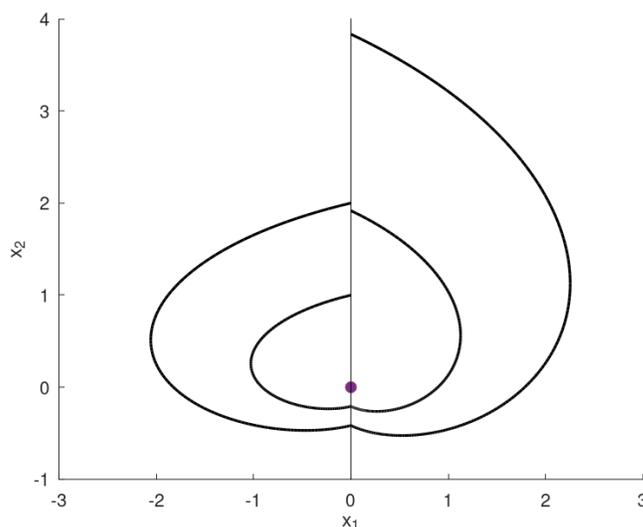


Figura 2: $b^\pm = \vec{0}$

Tomando agora o mesmo exemplo, porém com

$$b^- = \begin{pmatrix} -0.14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$b^+ = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix},$$

é produzido o retrato de fase da Fig. 3, na qual o ponto crítico dos parâmetros foi ultrapassado para o caso com $0 < \varphi_1(b_1^+) - b_1^- \ll 1$, e a origem deixa de ser um foco, entretanto dá-se origem a um ciclo limite atrator em torno dela; apesar de não descrever

precisamente uma bifurcação de Hopf, essa transição é análoga e pode ser caracterizada como supercrítica, uma vez que um foco atrator é substituído por dois pontos elementares "repulsores" cercados de um ciclo limite estável (região ao seu redor em vermelho), e a solução ao escapar do equilíbrio perde estabilidade de forma não catastrófica (suave), permanecendo em uma vizinhança limitada da origem. O caso subcrítico seria o oposto, no qual dois pontos elementares "atratores" cercados por um ciclo limite instável são substituídos por um foco repulsor sem um ciclo limite o cercando, e a solução escapa em uma catastrófica (abrupta) perda de estabilidade.

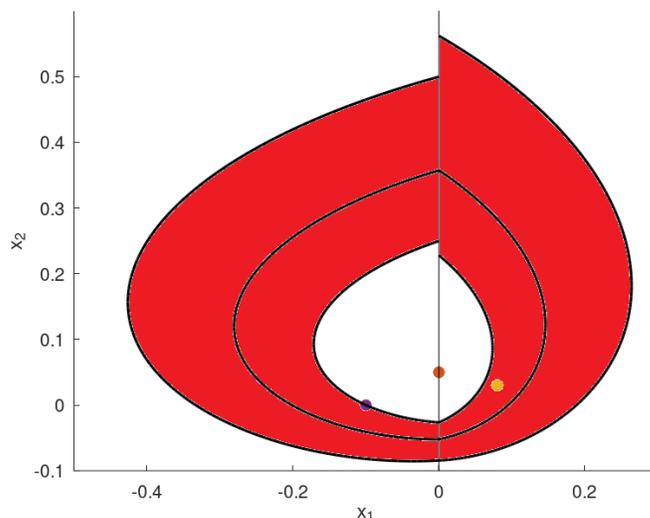


Figura 3: $|b_1^\pm| + |b_2^\pm| < \varepsilon_0$, $0 < \varphi_1(b_1^+) - b_1^- \ll 1$, $b_2^+ < \varphi_3(b_1^+)$, $\varphi_2(b_1^+) < b_2^- < \tilde{\varphi}(b_1^+, b_2^+)$.

Por fim, tomando agora

$$b^- = \begin{pmatrix} -0.14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$b^- = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix},$$

obtém-se o retrato de fase da Fig. 4, no qual outro ponto crítico foi ultrapassado com o cumprimento de $0 < b_1^- - \varphi_1(b_1^+) \ll 1$, e um novo ciclo limite se forma entre o anterior e o ponto elementar, desta vez repulsor (região ao seu redor em azul).

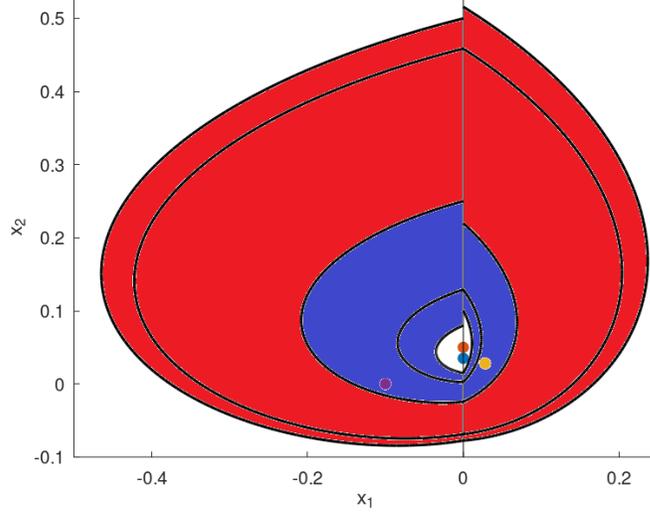


Figura 4: $|b_1^\pm| + |b_2^\pm| < \varepsilon_0$, $0 < b_1^- - \varphi_1(b_1^+) \ll 1$, $b_2^+ < \varphi_3(b_1^+)$, $\varphi_2(b_1^+) < b_2^- < \tilde{\varphi}(b_1^+, b_2^+)$.

3 PWLDE's formados por pares de centros com uma descontinuidade na forma de cruz

Um sistema diferencial linear do tipo centro genérico pode ser descrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -b & -\frac{4b^2 + \omega^2}{4a} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix},$$

cujas primeira integral é dada por

$$H(x, y) = 4(ax + by)^2 + 8a(cx - dy) + y^2\omega^2.$$

Sendo mais restritivo nessa definição, um centro diferencial sem rotação, isto é, um centro formado por elipses cujos maiores e menores diâmetros são paralelos ao eixo x ou y , pode ser descrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix},$$

com primeira integral

$$H(x, y) = a^2x^2 + 2a(cx - dy) + y^2. \quad (7)$$

Nesse projeto foram analisados sistemas compostos por centros e selas com a curva de descontinuidade Σ do tipo (LV) (nomenclatura estabelecida em Jimenez et al. [2020]), sendo $\Sigma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_2^-$, onde $\Gamma_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}$, $\Gamma_1^- = \{(x, y) \in$

$\mathbb{R}^2 : x = 0, y \leq 0\}$, $\Gamma_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \geq 0\}$ e $\Gamma_2^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 0\}$.
A curva Σ delimita as seguintes regiões no plano:

$$\begin{aligned} R_{LV}^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}, \\ R_{LV}^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } y > 0\}, \\ R_{LV}^3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } y < 0\}, \\ R_{LV}^4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y < 0\}. \end{aligned}$$

Nesse caso existem 3 tipos de órbitas; as de tipo 1, que intersectam dois ramos de Σ em exatamente dois pontos cada, as de tipo 2, que intersectam um único ponto em cada ramo de Σ , e as de tipo 3, que intersectam um único ramo de Σ em dois pontos. Todos esses tipos podem ser vistos na Fig. 5, onde também é possível ver como esses diferentes tipos obrigatoriamente se aninham (sempre nessa ordem), implicam na existência de seus predecessores e só possuem um único intervalo/região onde podem existir no sistema (com órbitas de tipo 2 se estendendo até o infinito), fato que será omitido das demonstrações aqui apresentadas.

Um argumento que não foi minuciosamente expresso quando foi usado durante as demonstrações (visto que seriam muitos casos para se explicitar) é que o sistema possui uma chamada região de costura, delimitada pelos pontos nos quais os sistemas que compõe o sistema completo tangenciam os eixos x e y , e que restringe os possíveis valores iniciais para uma órbita; quando necessário tal argumento, a exigência da restrição mencionada pode ser facilmente constatada através de alguma figura em Belém [2022] que represente o sistema em questão e da análise do sentido de cada sub-sistema antes ou depois dos pontos tangenciais responsáveis por tal restrição.

Uma órbita fechada de tipo 2 intersecta Σ em quatro pontos, $p_1 = (0, y_1)$, $q_1 = (x_1, 0)$, $p_2 = (0, y_2)$ e $q_2 = (x_2, 0)$, com $x_1, y_1 > 0$ e $x_2, y_2 < 0$, e estes pontos devem obedecer as equações de fechamento

$$\begin{aligned} H_1(x_1, 0) &= H_1(0, y_1), \\ H_2(0, y_2) &= H_2(x_1, 0), \\ H_3(x_2, 0) &= H_3(0, y_2), \\ H_4(0, y_1) &= H_4(x_2, 0), \end{aligned} \tag{8}$$

sendo H_i as primeiras integrais para os subsistemas apropriados para os ramos aos quais os pontos pertencem.

Analogamente, uma órbita fechada de tipo 1 intersecta Σ em quatro pontos, $p_1 = (0, y_1)$, $p_2 = (0, y_2)$, $q_1 = (x_1, 0)$ e $q_2 = (x_2, 0)$, com $x_1 x_2, y_1 y_2 > 0$, e estes pontos devem obedecer

as equações de fechamento

$$\begin{aligned}
 H_1(0, y_2) &= H_1(0, y_1), \\
 H_2(x_1, 0) &= H_2(0, y_2), \\
 H_3(x_2, 0) &= H_3(x_1, 0), \\
 H_2(0, y_1) &= H_2(x_2, 0),
 \end{aligned} \tag{9}$$

novamente com as primeiras integrais dos subsistemas apropriados para os ramos dos pontos (que dessa vez podem pertencer a qualquer par de ramos consecutivos).

E por fim, uma órbita fechada de tipo 3 intersecta Σ em dois pontos, $p_1 = (0, y_1)$ e $p_2 = (0, y_2)$, com $y_1 y_2 > 0$, e estes pontos devem obedecer as equações de fechamento

$$\begin{aligned}
 H_1(0, y_2) &= H_1(0, y_1), \\
 H_2(0, y_1) &= H_2(0, y_2).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Uma órbita limítrofe é aqui definida como sendo aquelas que não se classificam como nenhuma das anteriores, em particular uma órbita que passa pela origem, que é limítrofe do tipo 1-2, pois está justamente na transição entre órbitas de tipo 1 e 2, e uma órbita que tangencia o eixo x positivo, que é limítrofe do tipo 3-1, ambas visíveis na Fig. 5.

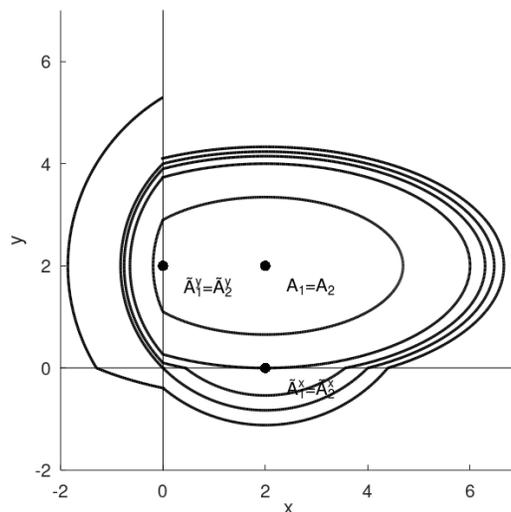


Figura 5: Sistema formado por (12) e (13) (sinal positivo) com $a = -1$, $a' = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = 2$.

Em todos os casos tratados, sem perda de generalidade graças a transformações de rotação no sistema, o ponto inicial das órbitas pertencerá ao ramo Γ_1^+ , ou seja, $y_1 > 0$ será a variável independente. Uma notação muito útil que será empregada nesse projeto é descrever as variáveis x_i e y_i acima como funções de y_1 de acordo com as equações de fechamento. Outra notação utilizada é a introdução de uma variável provisória y_3 , que

representa a altura na qual uma órbita cruza Γ_1^+ pela última vez, enquanto não verificada a última equação de cada conjunto de equações de fechamento que garante que $y_3 = y_1$.

Foram considerados os sistemas que possuem em $R_{LV}^{1,3}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (11)$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a'} \\ a' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{a'} \\ -a' \end{pmatrix}, \quad (12)$$

e que possuem em $R_{LV}^{2,4}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \pm a \end{pmatrix}. \quad (13)$$

3.1 Exemplos de casos de pares de centros e selas

Considerando um sistema com (11) ou (13) (sinal negativo) em $R_{LV}^{1,3}$ (repare que este último não está em suas regiões originais) e um sistema diferencial do tipo sela em $R_{LV}^{2,4}$ cuja singularidade A_2 seja colinear à singularidade de (11) (como pode ser visto nas Figuras 7 e 8) ou pertença à reta que é o reflexo pelo eixo x da reta que contém a singularidade de (13) (como pode ser visto na Fig. 6), e que possui autovetores que são reflexo um do outro por essas retas e cujos autovalores são iguais em módulo, obtém-se sistemas com alta simetria e contínuos de órbitas fechadas de segundo tipo. Modificando as selas e centros, tanto na excentricidade do segundo quanto nos autovalores do primeiro, mas mantendo os vetores \mathbf{b} de ambos iguais, foi possível causar uma bifurcação que quebra essa simetria de tal forma que foram formados ciclos limite próximos da origem.

Aqui não será apresentado um tratamento minucioso desses casos, porém com o intuito de reproduzir tais resultados, é aqui registrado que todos os sistemas da esquerda das figuras a seguir possuem $a = -\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, sendo λ_1 e λ_2 os autovalores do sistema tipo sela, $\mathbf{v}_1 = (1, \sqrt{3})^T$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1/\sqrt{3})^T$, sendo estes seus respectivos autovetores, e $\mathbf{b} = (0.5, -0.5)^T$ no caso da Fig. 6 e $\mathbf{b} = (-1, 1)^T$ no caso das Figuras 7 e 8; nos sistemas da direita, no caso da Fig. 6

$$\begin{aligned} a &\mapsto -0.7, \\ \lambda_2 &\mapsto -8, \end{aligned}$$

no caso da Fig. 7

$$\begin{aligned} a &\mapsto -0.9, \\ \lambda_2 &\mapsto -2, \end{aligned}$$

e no caso da Fig. 8

$$a \mapsto -0.9,$$

$$\lambda_2 \mapsto -1.8.$$

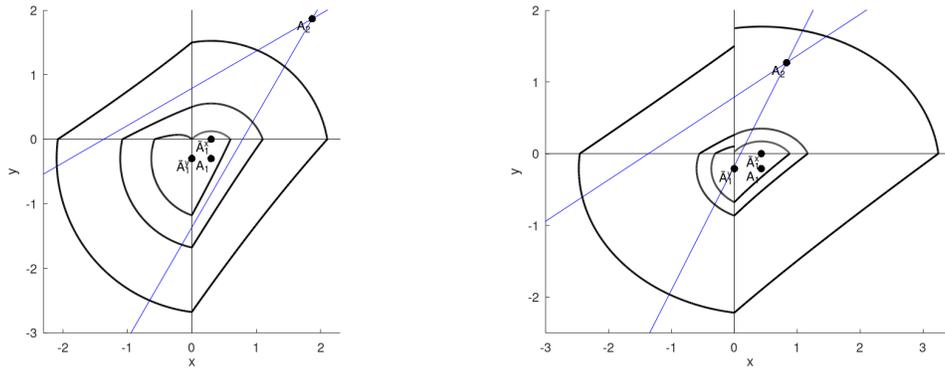


Figura 6: Sistema formado por (13) (sinal negativo) com $\alpha = -0.3$ e uma sela com alta simetria à esquerda e sua respectiva bifurcação à direita, com os autovetores em azul.

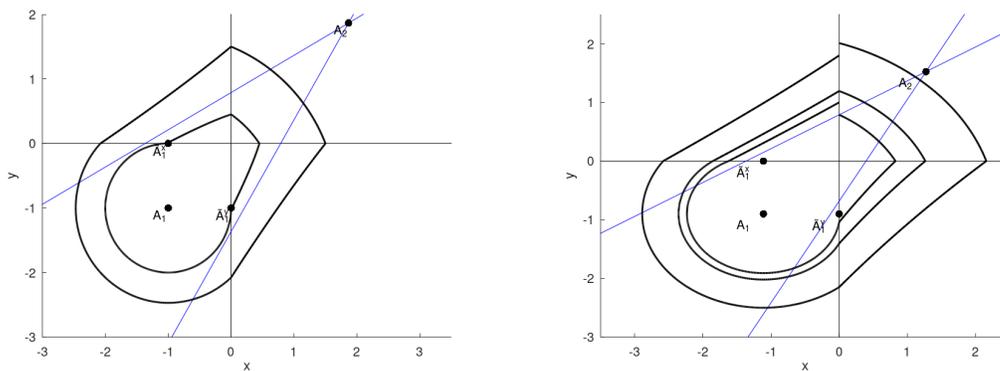


Figura 7: Sistema formado por (11) com $\beta = -1$ e uma sela com alta simetria à esquerda e sua respectiva bifurcação à direita, com os autovetores em azul.

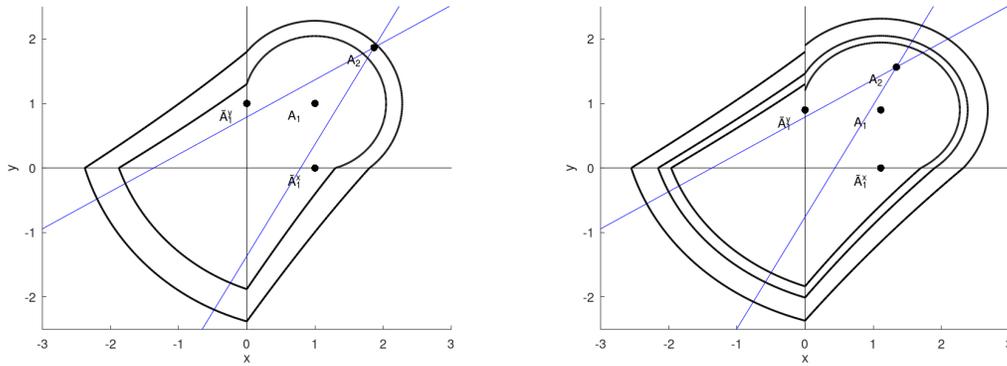


Figura 8: Sistema formado por (11) com $\beta = 1$ e uma sela com alta simetria à esquerda e sua respectiva bifurcação à direita, com os autovetores em azul.

A prova da existência e a localização de tais ciclos limite pode ser obtida com uma aplicação do Teorema de Newton-Kantorovich semelhante ao que pode ser visto em Llibre and Ponce [2012] (e a seguir na seção Resultados), porém com algumas alterações nas equações de fechamento para comportar a diferença no número de regiões entre o caso ali apresentado e o aqui tratado. Essa prova será aqui omitida por brevidade e visto que o intuito dessa seção é só delinear o comportamento do caso centro-sela, e visto que pelo menos a existência é bastante evidente, dada a inversão de comportamento entre as órbitas mais internas e externas mostradas nos gráficos da direita das figuras acima, com $y_3 > y_1$ para as mais externas e $y_3 < y_1$ para as mais internas, e pela continuidade de $y_3(y_1)$ (que é composição de funções contínuas). Obviamente ainda seria necessário analisar o possível efeito de erros numéricos na relações entre y_3 e y_1 , porém estas tão nítidas na escala do problema que somente erros implausíveis seriam capazes de invertê-las, e portanto essa análise de erro também será omitida.

Resultados

Utilizando o método descrito na Seção 2, que envolve a análise e manipulações sucessivas com métodos numéricos dos mapas de retorno de cada subsistema, mais um ajuste manual de alguns parâmetros, dado um sistema linear repulsor para o lado direito da linha de corte, foi obtido um sistema na forma (2) que possui 3 ciclos limites, com

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a forma de Jordan normalizada em β^- do subsistema direito (com $\gamma^+ = 0.75$) e

$$A^- = \begin{pmatrix} 13.43538491431723 & -18.14977774439898 \\ 10.01439047867205 & -13.50150142642550 \end{pmatrix},$$

Uma solução periódica de 2 pode ser descrita como a solução (t^+, t^-, Y) do sistema

$$\begin{aligned} u_1(t^+, t^-, Y) &= x^+(-t^+) - 1 = 0 \\ u_2(t^+, t^-, Y) &= x^-(t^-) - 1 = 0 \\ u_3(t^+, t^-, Y) &= y^+(-t^+) - y^-(t^-) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Foi provado que o sistema (14) das matrizes A^- e A^+ apresentadas possui soluções próximas à

$$\begin{array}{l|l|l} t_1^+ = 0.060050041701417 & t_2^+ = 0.090075062552126 & t_3^+ = 0.225187656380317 \\ t_1^- = 7.536280233527940 & t_2^- = 6.755629691409507 & t_3^- = 5.899916597164303 \\ Y_1 = 0.791849893551496 & Y_2 = 0.820743212919858 & Y_3 = 0.928334461670545 \end{array}$$

Para tal, foi usado o método presente em Llibre and Ponce [2012], no qual mais detalhes sobre como achar os limitantes de algumas normas estão presentes, que aqui serão omitidos por brevidade. A base da prova está no teorema de Newton-Kantorovich e pode ser acompanhada em Belém [2021].

Na Fig. 9 os três ciclos limites do sistema podem ser observados.

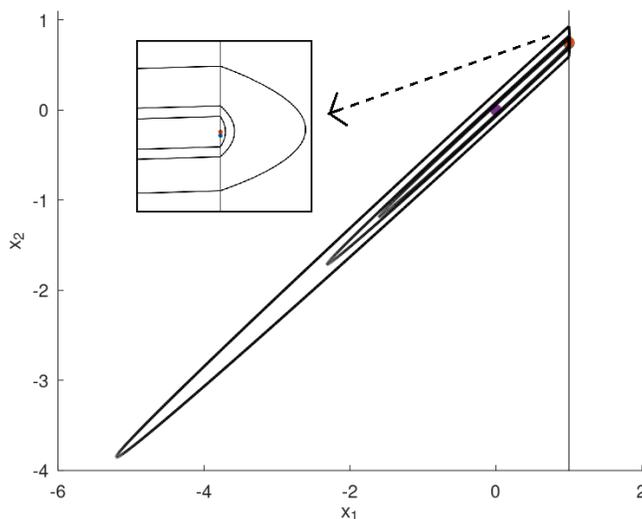


Figura 9: Três ciclos limite a partir de $\gamma^+ = 0.75$.

Já para a Seção 3 foram obtidos os seguintes resultados, cujas demonstrações se encontram em Belém [2022]:

Proposição 1. O sistema formado por (11) e (13) (sinal negativo) com $\beta, \alpha > 0$ possui um contínuo de órbitas fechadas de tipo 2 para $y_1 \geq y_{min}^2 = \max\{\pi_2 \circ \tilde{A}_1^y, \pi_2 \circ \tilde{A}_2^y\}$ (Fig. 10).

Proposição 2. Dado um sistema formado por (11) e (13) (sinal positivo) com $\beta > 0$ e $a < 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- Se $\alpha = \frac{\beta}{2}$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > y_{min}^2$, mais uma órbita fechada do tipo limítrofe para $y_1 = y_{min}^2$, que passa pela origem;
- Se $\alpha < \frac{\beta}{2}$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 \geq y_{min}^2$;
- Se $\beta > \alpha > \frac{\beta}{2}$, há um contínuo órbitas fechadas de primeiro tipo para $y_{min}^1 \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$, uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e um contínuo de órbitas de segundo tipo para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$;
- Se $\alpha \geq \beta$, há um contínuo órbitas fechadas de primeiro tipo para $y_{min}^{(1)} \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$, uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e um contínuo de órbitas de segundo tipo para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$ (Fig. 11).

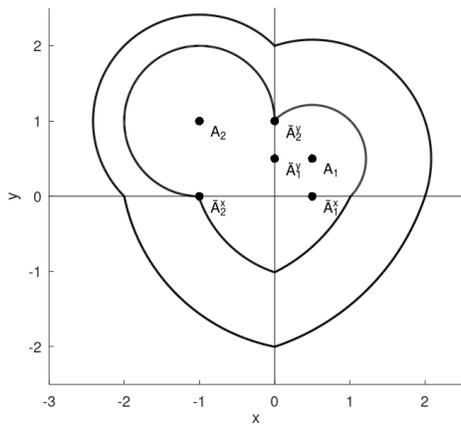


Figura 10: Sistema formado por (11) e (13) (sinal negativo), com $a = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$.

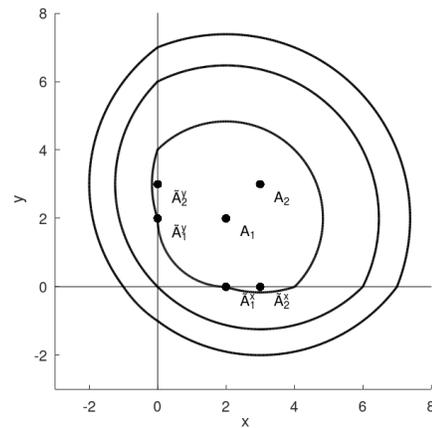


Figura 11: Sistema formado por (11) e (13) (sinal positivo), com $a = -1$, $\beta = 2$ e $\alpha = 3$.

Proposição 3. Dado um sistema formado por (11) e (13) (sinal positivo) com $\beta = 0$ e $a < 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- Se $\alpha > 0$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > y_{min}^2$ mais uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{min}^2$ que passa pela origem;
- Se $\alpha = 0$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > 0$ mais a órbita limítrofe degenerada para $y_1 = 0$ que permanece na origem;

- Se $\alpha < 0$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > 0$ mais uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = 0$ que passa pela origem.

Proposição 4. Dado um sistema formado por (12) e (13) (sinal positivo) com $a = -1$, $0 > a' \geq -1$ e $\beta > 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- Se $\alpha = \beta$, existe um contínuo de órbitas fechadas de terceiro tipo para $y_{min}^3 \leq y_1 < y_{lim}^{3-1}$, com uma órbita limítrofe fechada para $y_1 = y_{lim}^{3-1}$, de primeiro tipo para $y_{lim}^{3-1} < y_1 < y_{lim}^{1-2}$, com uma órbita limítrofe fechada para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e nenhuma órbita fechada para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$ (Fig. 5);
- Se $\alpha > \beta$, não existem órbitas fechadas (Fig. 12);
- Se $\frac{\beta}{2} \leq \alpha < \beta$, existe uma órbita fechada, que é de segundo tipo (Fig. 13);
- Existe um $\alpha^* < \frac{\beta}{2}$ tal que se $\alpha^* \leq \alpha < \frac{\beta}{2}$, existe uma órbita fechada, que é de segundo tipo, e se $\alpha < \alpha^*$, não existem órbitas fechadas.

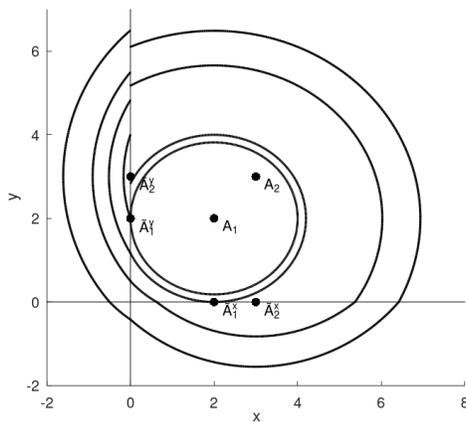


Figura 12: Sistema formado por (12) e (13) (sinal positivo) com $a = -1$, $a' = -\frac{10}{11}$, $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

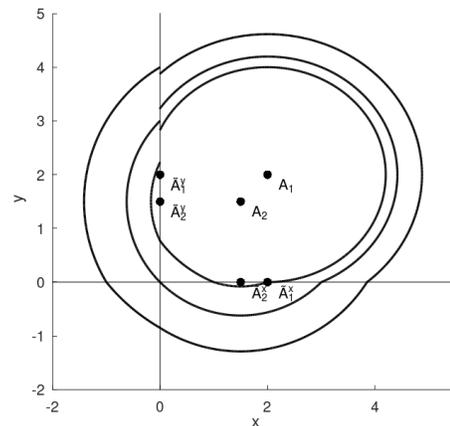


Figura 13: Sistema formado por (12) e (13) (sinal positivo) com $a = -1$, $a' = -\frac{10}{11}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = 2$.

Referências

- G. B. Belém. Métodos numéricos em equações diferenciais suaves por partes em dimensão 2. *Monografia (Projetos Supervisionados - MS777) - IMECC, UNICAMP, 2021.* URL <https://www.ime.unicamp.br/~mac/db/2021-2S-234672.pdf>.

- G. B. Belém. Métodos numéricos em equações diferenciais suaves por partes em dimensão 2. *Monografia (Projetos Supervisionados - MS877) - IMECC, UNICAMP*, 2022. URL <https://www.ime.unicamp.br/~mac/db/2022-1S-234672.pdf>.
- M. Han and W. Zhang. On hopf bifurcation in non-smooth planar systems. *Journal of Differential Equations*, 248(9):2399–2416, 2010. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.10.002>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609004094>.
- S.-M. Huan and X.-S. Yang. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 32(6):2147–2164, 2012. doi: 10.3934/dcds.2012.32.2147.
- J. J. Jimenez, J. C. Medrado, and J. Llibre. Crossing limit cycles for a class of piecewise linear differential centers separated by a conic. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020:1–36, 2020.
- Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. Springer, Utrecht and Pushchino, 1998.
- J. Llibre and E. Ponce. Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms*, 3, 01 2012.
- A. R. Champneys M. di Bernardo, C. J. Budd and P. Kowalczyk. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Theory and Application*. Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.

4 Perspectivas de continuidade de trabalho

Sobre a Seção 1, apesar do sucesso relativo obtido do método de busca de A^- com o caso específico apresentado ($\gamma^+ = 0.75$), esse foco da pesquisa ainda não está finalizado. Um possível ponto de interesse seria provar a conjectura de que qualquer $\gamma^+ > 0$ é candidato do tratamento apresentado para a obtenção de A^- tal que (2) tenha 3 ciclos limites. Tal análise começaria no estudo do mapa de Poincaré nos moldes de Huan and Yang [2012], utilizando técnicas ali apresentadas para tentar delinear uma demonstração.

Já a respeito da Seção 2, apesar de muitos casos serem aqui tratados, eles representam apenas uma pequena fração da enorme variedade que um sistema com curva de descontinuidade do tipo (LV) pode assumir, e uma fração de relativo simples tratamento, por sinal. A abordagem que naturalmente nasceu de tamanha gama de possibilidades foi a do

tratamento de casos com alta simetria primeiro, e a gradual bifurcação através da quebra de tais simetrias de forma controlada, permanecendo com equações relativamente simples e passíveis de manipulação algébrica. Para tal, as concessões empregadas para se chegar a um ponto no qual o comportamento do sistema é descrito são extremamente restritivas; só são tratados casos com sistemas iguais em quadrantes opostos, os sistemas individuais são do tipo centro (ou um par de centros e um par de selas, somente abordado de forma rasa), as singularidades de tais sistemas residem ambas em uma reta que passa pela origem e possui inclinação diretamente ligada aos parâmetros de pelo menos um dos centros (isto é, a), e nos casos da Seção 2, os centros possuem mesma excentricidade, igualdade esta que é então quebrada na Seção 3.

Os próximos passos poderiam incluir variar a excentricidade de (13) (que se manteve diretamente relacionada com o posicionamento de sua singularidade), retirar a condição de colinearidade das singularidades dos centros, retirar a condição de sistemas iguais em quadrantes opostos e depois repetir todo esse processo (ou seu equivalente particular para cada caso) para combinações de centros e selas, centros e focos, focos e focos e assim por diante.

O vasto número de possibilidades implica que a abordagem prova-se trabalhosa e de resultados esparsos e não generalizáveis, logo deve haver um interesse em um caso muito específico para se aplicar um tratamento semelhante ao aqui empregado, como por exemplo analisar uma gama de sistemas diretamente ligados com a modelagem de um problema físico específico; as ferramentas e estratégias empregadas nesse projeto podem de fato ser úteis nesse caso, a mérito de fornecer um guia geral de como proceder.

5 Outras atividades de interesse acadêmico

Ambas as partes desse projeto foram publicadas na forma de monografias (Belém [2021] e Belém [2022]) acompanhadas de apresentações para as disciplinas de Projetos Supervisionado I e II (MS777 e MS877, respectivamente) do curso de Matemática Aplicada e Computacional da Unicamp. Tais monografias são referenciadas múltiplas vezes ao longo desse relatório.

6 Apoio

Esse projeto contou com a colaboração do orientador assim como o fomento fornecido pela PIBIC. Nenhum apoio financeiro exterior à essa bolsa foi recebido.

7 Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador pela oportunidade, instrução e ensinamentos. Também agradeço a todo o ambiente da UNICAMP e ensino público no geral que possibilitaram essa oportunidade e a todos os envolvidos na construção e manutenção do meu ensino superior.

Campinas, 12 de setembro de 2022