

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC  
Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME  
Eldiane Borges dos Santos Durães

Relatório - PICME: Equações diferenciais e  
modelagem matemática

Campinas  
Janeiro/2023



Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC  
Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME  
Eldiane Borges dos Santos Durães

**Relatório - PICME: Equações diferenciais e modelagem  
matemática**

Relatório referente às atividades desenvolvidas no período de setembro à janeiro de 2022 pelo PICME, o qual concentra-se no estudo de modelos matemáticos da ecologia que envolvem equações diferenciais suaves.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Campinas  
Janeiro/2023



# Resumo

O presente projeto de iniciação científica trata-se de um estudo guiado e aprofundado acerca de modelos matemáticos da ecologia, em específico aqueles que modelam interação entre populações. A princípio, uma análise detalhada do diagrama traço-determinante foi feita, afinal é uma ferramenta muito útil em sistemas de equações diferenciais ordinárias para começar a entender retratos de fase, neste caso, de um sistema linear bidimensional. Em seguida, a atenção do projeto voltou-se a entender o que são ciclos limite - trajetórias fechadas e isoladas, isto é, com trajetórias vizinhas não fechadas -, já que são órbitas interessantes na análise de sistemas não lineares de EDO's que não são analíticas. Nesse sentido, foram apresentadas uma série de resultados relativos à existência ou não de ciclos e ciclos limite em sistemas, com fins de adquirir uma breve noção acerca da área. Não obstante, alguns pontos foram analisados com mais atenção, com esboço de demonstração e até mesmo exemplo numérico. Finalmente, estudou-se as famosas equações de Lotka-Volterra, modelo simples acerca da interação entre predador-presa, mas que auxilia no entendimento da relação periódica que se estabelece entre ambas populações. Aqui, viu-se a necessidade de realizar simulações computacionais acerca desse modelo, utilizando um método Runge-Kutta de 4ª ordem e implementado em *Octave*. Assim, a variação dos parâmetros em relação aos valores padrão auxiliou na percepção de como o modelo se comporta mediante ao comportamento das populações na natureza. Feito isso, incluiu-se ainda os efeitos da pesca ao modelo, considerando populações presa-predador de peixes, mostrando assim que adaptações podem ser feitas às equações de Lotka-Volterra conforme o fenômeno a ser analisado. Ao fim, percebeu-se que sempre haverá discordâncias entre os estudiosos acerca de modelos matemáticos propostos, mas que tudo se tratará de escolhas sobre que características ganhar e perder acerca do fenômeno em questão.

**Palavras-chaves:** traço-determinante, ciclo limite, Lotka-Volterra.



# Sumário

1	AQUECENDO: DIAGRAMA TRAÇO-DETERMINANTE . . . . .	7
2	CICLOS LIMITE E RESULTADOS IMPORTANTES . . . . .	19
2.1	Sistema gradiente . . . . .	19
2.2	Funções de Liapunov . . . . .	19
2.3	Critério de Dulac . . . . .	20
2.4	Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	20
2.5	The Fivefold Way . . . . .	21
2.6	Sistemas de Van der Pol e Lienard . . . . .	23
2.7	Mudança de coordenadas para análise de ciclos limite . . . . .	24
3	EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA . . . . .	27
3.1	Simulações computacionais . . . . .	30
3.2	Modelo de Lotka-Volterra incluindo efeitos da pesca . . . . .	37
	REFERÊNCIAS . . . . .	41





# 1 Aquecendo: diagrama traço-determinante

Sejam  $\mathbf{A}$  uma matriz real quadrada de ordem 2 e  $\mathbf{x} = (x(t), y(t))^T$ . Queremos obter o retrato de fase do sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , cuja solução é da forma  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}\mathbf{c}$ , com  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$  dependente das condições iniciais do problema.

A princípio, para obter a exponencial matricial de  $\mathbf{A}$ , precisamos conhecer seus autovalores. Veja que seu polinômio característico,  $p_A$ , é dado por

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= (a_{11}a_{22} - (a_{11} + a_{22})\lambda + \lambda^2) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - T\lambda + D, \end{aligned}$$

onde  $T \neq 0$  é o traço de  $\mathbf{A}$  e  $D$  é o determinante de  $\mathbf{A}$ . Daí, resolvendo  $p_A(\lambda) = 0$ , obtemos os autovalores de  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Vamos explorar o comportamento das soluções do sistema para cada valor do discriminante  $T^2 - 4D$ .

1.  $T^2 - 4D > 0 \Rightarrow D < \frac{T^2}{4}$

Veja que, se  $D < \frac{T^2}{4}$ , os dois autovalores são reais e distintos. Daí, para cada autovalor,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , existe um autovetor associado,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ , respectivamente, os quais compõem uma base para o  $\mathbb{R}^2$ . Daí, existe uma matriz invertível de mudança de base  $\mathbf{M}$ , de  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  para a canônica, tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$ , com

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Com isso, a solução do sistema pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{t}}\mathbf{c} = \mathbf{M}e^{\mathbf{D}\mathbf{t}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{c}.$$

Tomando  $\mathbf{k} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c} = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , segue que

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 e^{\lambda_1 t} k_1 + v_1 e^{\lambda_2 t} k_2 \\ u_2 e^{\lambda_1 t} k_1 + v_2 e^{\lambda_2 t} k_2 \end{bmatrix} = k_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u} + k_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}.$$

Ou seja, na base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , a solução do sistema é simplesmente  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t})^T$ . Portanto, analisaremos o retrato de fase das soluções no plano  $u \times v$ , isto é, o plano cujos eixos estão na direção dos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

### 1.1 $D < 0 \leq \frac{T^2}{4}$ (ponto de sela)

Veja que, se  $D < 0$ , então  $\sqrt{T^2 - 4D} = \sqrt{T^2 + 4|D|} > \sqrt{T^2} = |T|$ , portanto os autovalores possuem sinais diferentes independente do valor de  $T$ . Seja  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , vamos analisar o retrato de fase das soluções a partir de algumas escolhas de  $\mathbf{k}$ .

- Se  $\mathbf{k} = (0, 1)$ , então  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (0, e^{\lambda_2 t})^T$  e temos uma semirreta partindo de  $(0, 1)$  e se afastando da origem com o crescimento de  $t$ ;
- Se  $\mathbf{k} = (1, 0)$ , então  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (e^{\lambda_1 t}, 0)^T$  e temos uma semirreta partindo de  $(1, 0)$  e se aproximando da origem com o crescimento de  $t$ ;
- Se  $\mathbf{k} = (1, 1)$ , então  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})^T$ , logo, em módulo, a coordenada  $x(t)$  diminui e a  $y(t)$  aumenta com o crescimento de  $t$ ; veja que a solução está restrita ao primeiro quadrante, já que não há mudança de sinal.

Análises análogas podem ser feitas tomando  $\mathbf{k} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, -1)$ ,  $\mathbf{k} = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{k} = (-1, 1)$  e  $\mathbf{k} = (1, -1)$ . Note aqui que a escolha das constantes não importa, basta que seja possível analisar o que acontece com uma solução que esteja contida em cada quadrante e nos eixos. Essa será a estratégia utilizada para conhecer os retratos de fase em cada caso considerado.

Assim, para  $D < 0$ , temos um retrato de fase do tipo apresentado na figura a seguir, denominado ponto de sela.

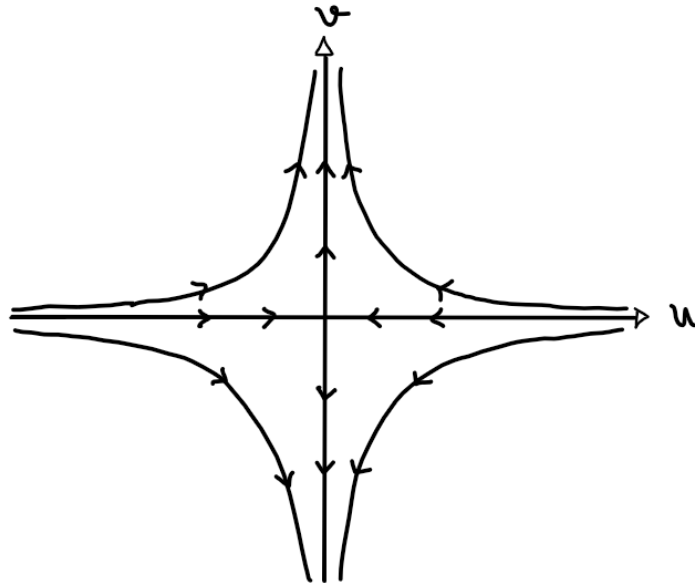


Figura 1 – Esboço do retrato de fase de ponto de sela.

1.2  $0 < D < \frac{T^2}{4}$  e  $T > 0$  (**nó repulsor**)

Ainda no caso 1, se  $0 < D < \frac{T^2}{4}$ , então  $\sqrt{T^2 - 4D} = \sqrt{T^2 - 4|D|} < \sqrt{T^2} = |T|$ . Daí, se  $T > 0$ , os autovalores são positivos e a solução se afasta da origem. Chamamos esse retrato de fase de nó repulsor, já que ambas as coordenadas aumentam em módulo.

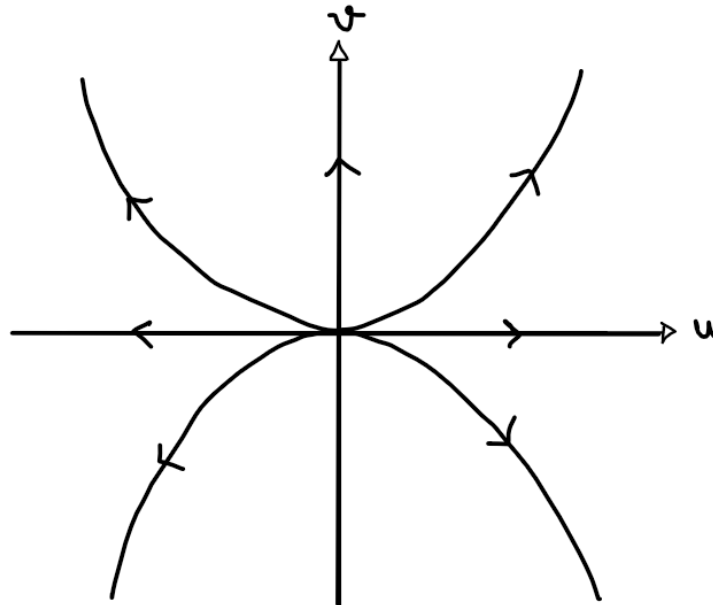


Figura 2 – Esboço do retrato de fase de nó repulsor.

1.3  $0 < D < \frac{T^2}{4}$  e  $T < 0$  (**nó atrator**)

Por outro lado, se  $T < 0$ , os autovalores são negativos e a solução se aproxima

da origem. A este retrato de fase nomeamos nó atrator, já que ambas as coordenadas diminuem em módulo.

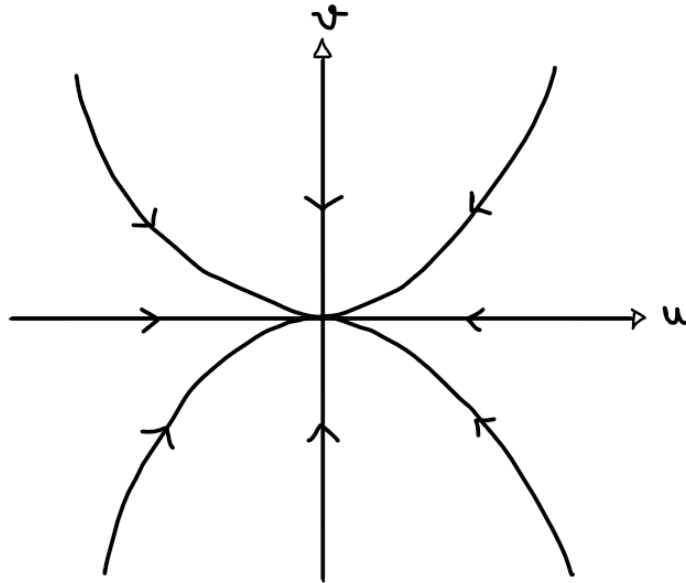


Figura 3 – Esboço do retrato de fase de nó atrator.

#### 1.4 $0 = D < \frac{T^2}{4}$ e $T > 0$ (retas de pontos instáveis)

Veja que, no caso 1, se  $0 = D < \frac{T^2}{4}$ , então  $\sqrt{T^2 - 4D} = |T|$ . Portanto, se  $T > 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = T$ , logo a solução do sistema é  $\mathbf{x}(t) = (k_1, k_2 e^{Tt})^T$  e o retrato de fase são retas verticais, chamadas retas de pontos instáveis, pois se afastam da origem, já que a segunda coordenada aumenta em módulo.

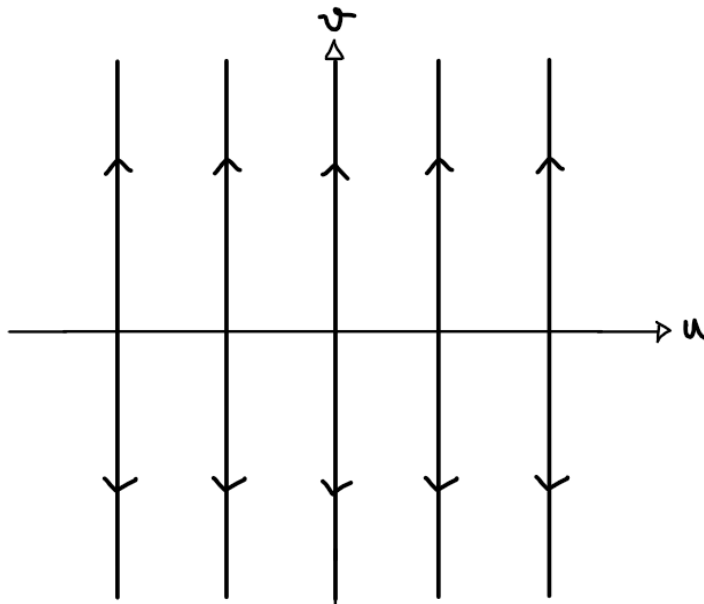


Figura 4 – Esboço do retrato de fase de retas de pontos instáveis.

#### 1.5 $0 = D < \frac{T^2}{4}$ e $T < 0$ (retas de pontos estáveis)

Já se  $T < 0$ , então  $\lambda_1 = T$  e  $\lambda_2 = 0$ , logo a solução do sistema é  $\mathbf{x}(t) = (k_1 e^{Tt}, k_2)^T$ . Assim, o retrato de fase são retas horizontais, chamadas retas de pontos estáveis, já que a segunda coordenada diminui em módulo.

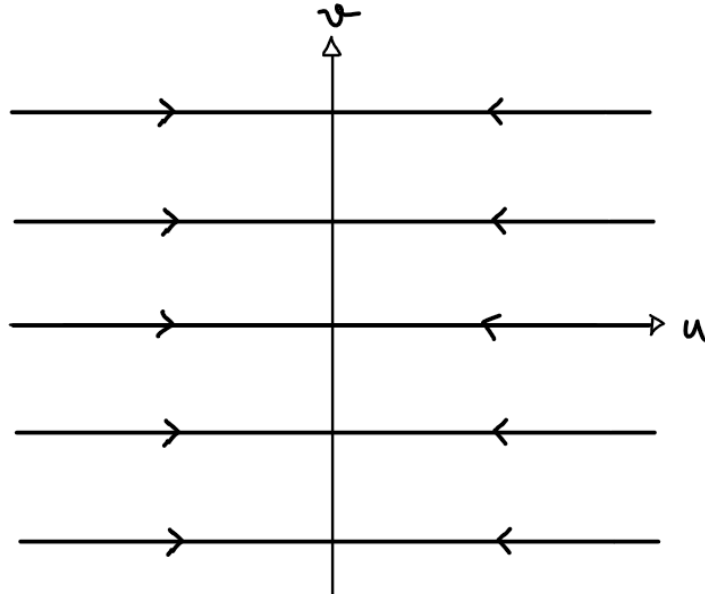


Figura 5 – Esboço do retrato de fase de retas de pontos estáveis.

$$2. T^2 - 4D = 0 \Rightarrow D = \frac{T^2}{4}$$

Por outro lado, se  $D = \frac{T^2}{4}$ , temos um autovalor real,  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = T/2$ . Se  $\dim(Ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = 2$ , isto é, se a dimensão do subespaço dos autovetores de  $\lambda$  for igual a 2, então posso escolher dois autovetores independentes associados,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ , os quais compõem uma base para o  $\mathbb{R}^2$ . Logo, existe uma matriz invertível de mudança de base  $\mathbf{M}$ , de  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  para a canônica, tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$ , com

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Contudo, sendo  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , obtemos, analogamente ao caso (1), que a solução do sistema na base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  é  $\mathbf{x}(t) = (k_1 e^{\lambda t}, k_2 e^{\lambda t})^T$ . Portanto, se  $\dim(Ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = 2$ , analisaremos o retrato de fase das soluções no plano  $u \times v$ .

No entanto, se  $\dim(Ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = 1$ , então não é possível obter dois autovetores independentes. Neste caso, através de uma mudança de base, podemos deixar a matriz  $\mathbf{A}$  na Forma de Jordan, a qual iremos elucidar a seguir para o caso  $2 \times 2$ .

Seja  $\mathbf{u}$  um autovetor de  $\lambda$ , isto é,  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u} \in Ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ , sendo  $\mathbf{u}$  um gerador de  $Ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ . Pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos que  $\dim(Im(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) + \dim(Ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = 2$ , logo  $\dim(Im(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = 1$ . Seja  $\mathbf{w} \in Im(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ , logo  $\mathbf{w}$  é um gerador desse subespaço e

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} = (\alpha + \lambda)\mathbf{w}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como  $\lambda$  é o único autovalor de  $\mathbf{A}$ , então  $\alpha + \lambda = \lambda \Rightarrow \alpha = 0$ , ou seja,  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = 0$ . Daí,  $\mathbf{w} \in \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ , então  $\mathbf{w} = \beta \mathbf{u}$ . Portanto,  $\mathbf{u} \in \text{Im}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ .

Com isso, tome  $\mathbf{v}$  tal que  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , isto é,  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ . Logo, existe uma matriz invertível de mudança de base  $\mathbf{M}$ , de  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  para a canônica, tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$ , com

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Com isso, a solução do sistema pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{t}}\mathbf{c} = \mathbf{M}e^{\mathbf{D}\mathbf{t}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{c}.$$

Tomando  $\mathbf{k} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c} = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$  e sabendo que

$$e^{\mathbf{D}\mathbf{t}} = e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix},$$

segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{t}) &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(e^{\lambda t}k_1 + te^{\lambda t}k_2) + v_1e^{\lambda t}k_2 \\ u_2(e^{\lambda t}k_1 + te^{\lambda t}k_2) + v_2e^{\lambda t}k_2 \end{bmatrix} \\ &= (k_1e^{\lambda t} + k_2te^{\lambda t})\mathbf{u} + k_2e^{\lambda t}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ou seja, na base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , a solução do sistema é simplesmente  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (k_1e^{\lambda t} + k_2te^{\lambda t}, k_2e^{\lambda t})^T$ . Portanto, analisaremos o retrato de fase das soluções no plano  $u \times v$ , isto é, o plano cujos eixos estão na direção dos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

### 2.1 $D = \frac{T^2}{4}$ , $T > 0$ e $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 2$ (retas se afastando da origem)

Veja que, neste caso, temos na base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  convencionada acima a solução  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (k_1e^{\lambda t}, k_2e^{\lambda t})^T$  e, como  $T > 0$ , então  $\lambda = T/2 > 0$ . Assim, as coordenadas são iguais para todos  $t$  e ambas crescem em módulo com o aumento de  $t$ , obtendo como retrato de fase retas se afastando da origem.

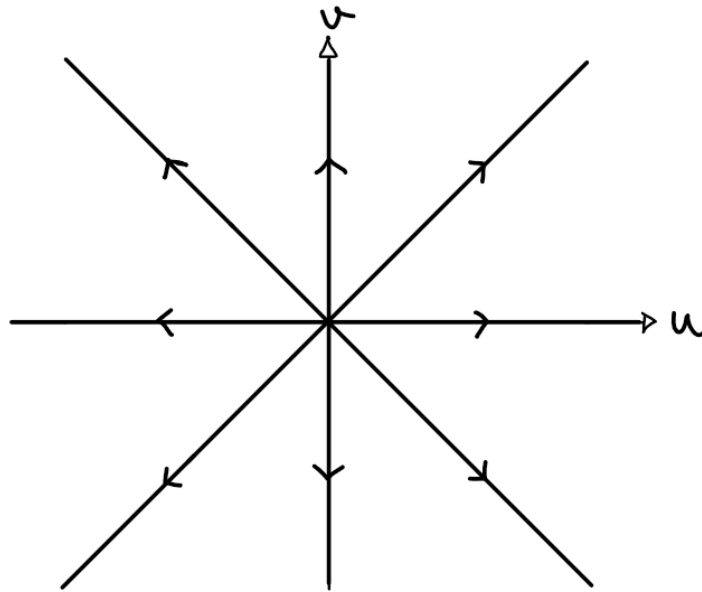


Figura 6 – Esboço do retrato de fase de retas se afastando da origem.

2.2  $D = \frac{T^2}{4}$ ,  $T < 0$  e  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 2$  (**retas se aproximando da origem**)

Por outro lado, se  $T < 0$ , então  $\lambda < 0$  e ambas as coordenadas diminuem em módulo com o aumento de  $t$ , logo obtemos retas se aproximando da origem.

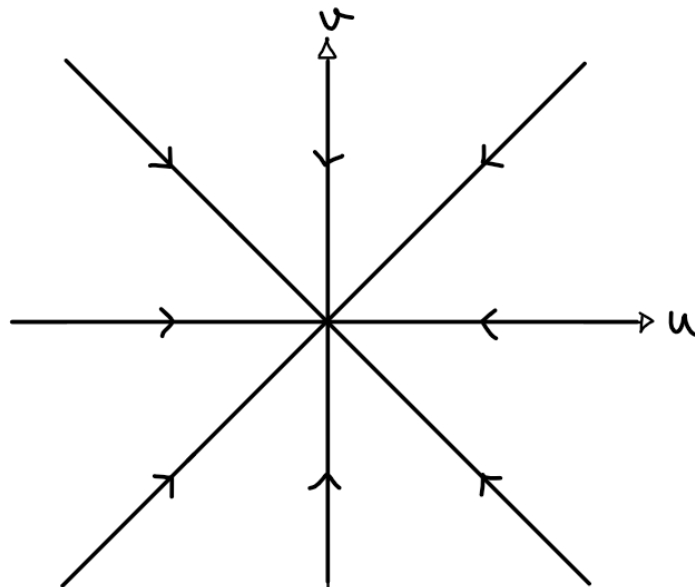


Figura 7 – Esboço do retrato de fase de retas se aproximando da origem.

2.3  $D = \frac{T^2}{4} = 0$  e  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 2$  (**pontos singulares**)

Agora, temos  $\lambda = 0$  e a solução na base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  convencional é  $(k_1, k_2)$ , ou seja, pontos singulares.

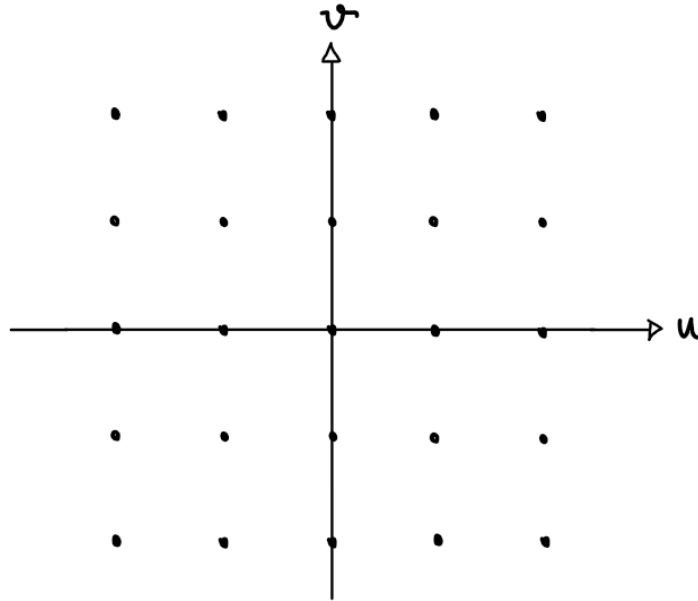


Figura 8 – Esboço do retrato de fase de pontos singulares.

2.4  $D = \frac{T^2}{4}$ ,  $T > 0$  e  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 1$  (**nó repulsor degenerado**)

Neste caso, usando a solução  $\mathbf{x}(t) = (k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}, k_2 e^{\lambda t})^T$  na base convencional, podemos chegar ao esboço abaixo através de algum software de gráficos e escolhendo valores arbitrários para as constantes, respeitando o fato de que  $\lambda > 0$ , logo as órbitas se afastam da origem. Observe que no eixo  $\mathbf{u}$ , isto é, para  $k_2 = 0$ , temos retas se afastando da origem. Nomeamos esse retrato de fase de nó repulsor degenerado.

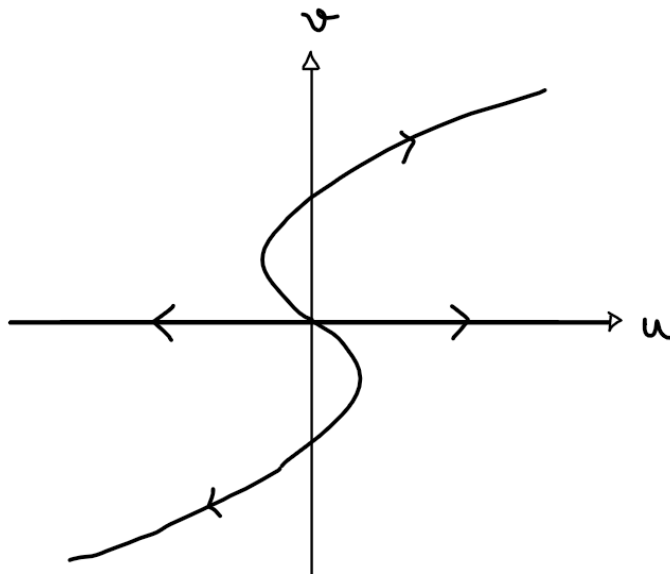


Figura 9 – Esboço do retrato de fase de nó repulsor degenerado.

2.5  $D = \frac{T^2}{4}$ ,  $T < 0$  e  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 1$  (**nó atrator degenerado**)



Processo análogo foi feito para obter o esboço abaixo, observando que agora temos  $\lambda < 0$ , ou seja, as órbitas se aproximam da origem. Nomeamos esse retrato de fase de nó atrator degenerado.

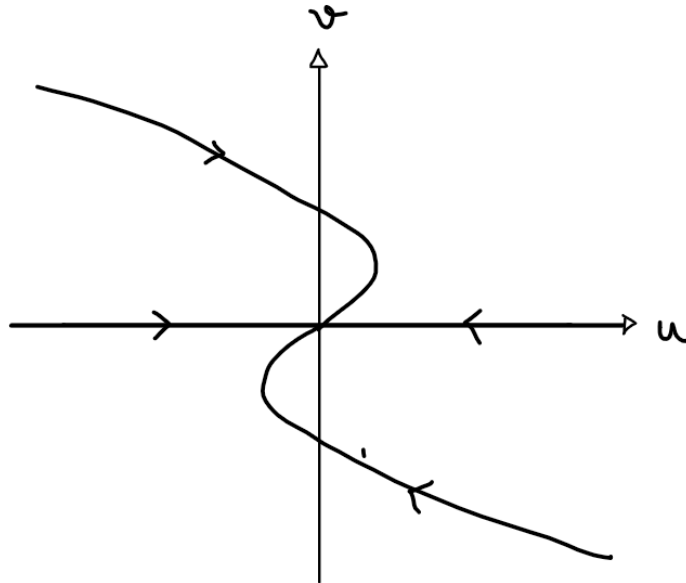


Figura 10 – Esboço do retrato de fase de nó atrator degenerado.

2.6  $D = \frac{T^2}{4} = 0$  e  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 1$  (**pontos singulares**)

Por fim, neste caso temos  $\lambda = 0$  e a solução na base convencional é  $(k_1 + k_2 t, k_2)$ , ou seja, a segunda coordenada é constante, mas a primeira aumenta ou diminui conforme a escolha de  $k_2$ . Assim, o retrato de fase consiste em, para  $k_2 \neq 0$ , semirretas horizontais partindo de  $(k_1, k_2)$  que se aproximam da origem, se  $k_2 < 0$ , ou se afastam, se  $k_2 > 0$ , além de pontos singulares do tipo  $(k_1, 0)$ .

3.  $T^2 - 4D < 0 \Rightarrow D > \frac{T^2}{4}$

Se  $D > \frac{T^2}{4}$ , temos dois autovalores complexos e distintos,  $\lambda_1 = a - bi$  e  $\lambda_2 = a + bi$ , com  $a = T/2$  e  $b = \sqrt{4D - T^2}/2$  constantes reais, tendo autovetores associados  $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{w}i$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{w}i$ , respectivamente. Note que

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{w}i) = (a - bi)(\mathbf{z} - \mathbf{w}i) \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{A}\mathbf{w}i = (a\mathbf{z} - b\mathbf{w}) - (b\mathbf{z} + a\mathbf{w})i.$$

Daí, segue que  $\mathbf{A}\mathbf{z} = a\mathbf{z} - b\mathbf{w}$  e  $\mathbf{A}\mathbf{w} = b\mathbf{z} + a\mathbf{w}$ . Logo, existe uma matriz invertível de mudança de base  $\mathbf{M}$ , de  $\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\}$  para a canônica, tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$ , com

$$M = \begin{bmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Em que  $\mathbf{D}$  é chamada Forma de Jordan Real da matriz  $\mathbf{A}$ . Com isso, na base  $\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\}$  e tomando  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , a solução do sistema pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{D}\mathbf{t}}\mathbf{k} = e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}t} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} e^{at} \cos(bt) & -e^{at} \sin(bt) \\ e^{at} \sin(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, na base  $\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ , temos a solução  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{at}(k_1 \cos(bt) - k_2 \sin(bt), k_1 \sin(bt) + k_2 \cos(bt))$  para o sistema.

### 3.1 $D > \frac{T^2}{4}$ e $T > 0$ (foco repulsor)

Note que se  $T > 0$ , então  $a > 0$ . Para ter uma noção do retrato de fase, tomemos  $\mathbf{k} = (1, 0)$ . Daí, a solução do sistema é  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{at}(\cos(bt), \sin(bt))$ , ou seja, uma espiral, cujo raio aumenta com o aumento de  $t$ , a qual chamamos foco repulsor.

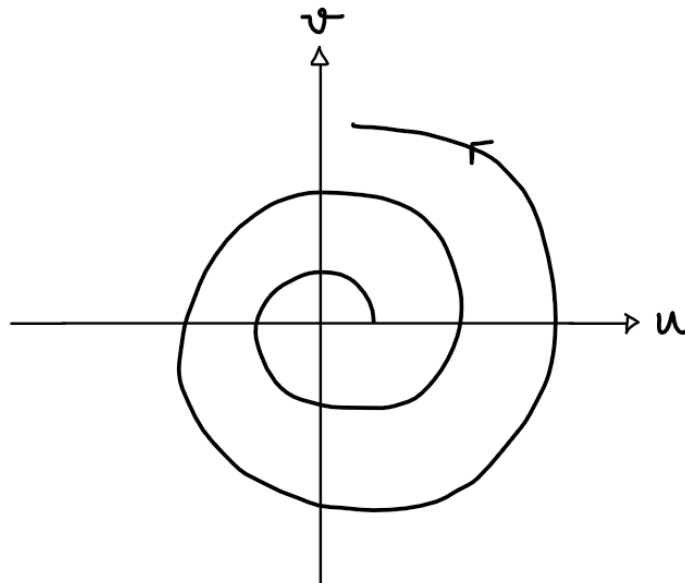


Figura 11 – Esboço do retrato de fase de foco repulsor.

### 3.2 $D > \frac{T^2}{4}$ e $T < 0$ (foco atrator)

Analogamente ao item anterior, observamos apenas que aqui teremos  $a < 0$ , ou seja, o raio da espiral diminui com o aumento de  $t$ , nomeando esse retrato de fase de foco atrator.

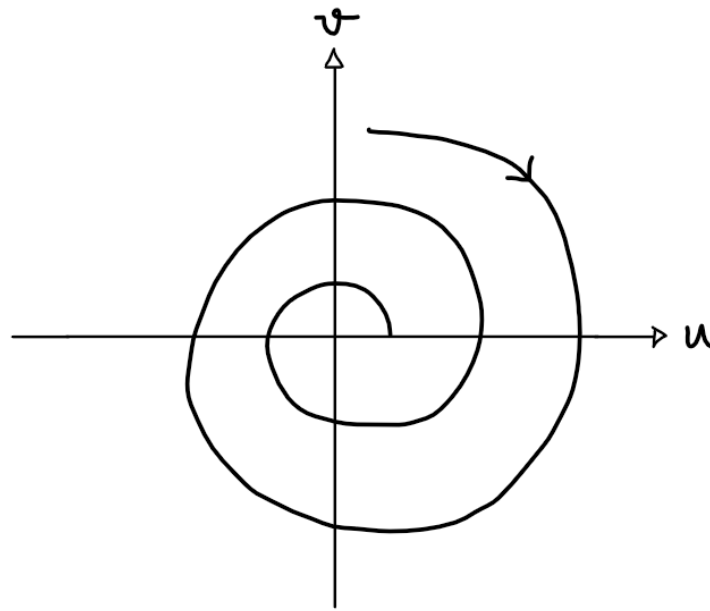


Figura 12 – Esboço do retrato de fase de foco atrator.

### 3.3 $D > \frac{T^2}{4}$ e $T = 0$ (centro)

Finalmente, se  $T = 0$ , então  $a = 0$  e o raio da espiral não varia, ou seja, temos na verdade circunferências com centro da origem, sendo este retrato de fase denominado centro.

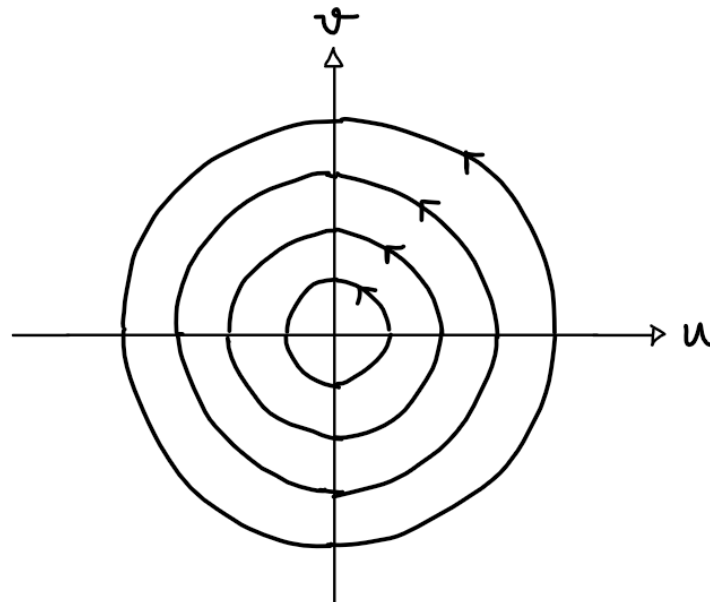


Figura 13 – Esboço do retrato de fase de centro.



## 2 Ciclos limite e resultados importantes

De acordo com Strogatz (1994, p. 196)(1), um ciclo limite é uma trajetória fechada e isolada. Ser isolada significa que as trajetórias vizinhas não são fechadas, mas sim espiralam para perto ou para longe do ciclo limite. Nesse sentido, se todas elas se aproximam, o ciclo limite é chamado estável ou atrativo; do contrário, é chamado instável e até mesmo semi-estável, quando uma trajetória vizinha se aproxima e outra se afasta. Ciclos limites são importantes na modelagem de sistemas que exibem oscilações autossustentadas, isto é, que não requerem uma força externa para regularização do movimento periódico, de modo que se o sistema é ligeiramente perturbado, ele retorna ao ciclo padrão.

Veja que ciclos limite estão presentes exclusivamente em sistemas não lineares. Isso porque, apesar de um sistema linear poder conter trajetórias fechadas, estas não serão isoladas. Para melhor elucidar, considere um sistema linear que tenha uma solução periódica  $\mathbf{x}$ ; daí,  $c\mathbf{x}$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , também é solução, sendo a escolha de  $c$  dependente das condições iniciais do problema, como o caso do centro discutido na seção anterior. Isso indica que uma leve perturbação no sistema altera a amplitude da solução permanentemente, enquanto os ciclos limites possuem oscilações determinadas pela estrutura do sistema em si, sem forte dependência das condições iniciais.

Nesta seção apresentaremos alguns teoremas sobre a existência do ciclo limite em sistemas de equações diferenciais, tendo como referências principais (1) e (2).

### 2.1 Sistema gradiente

Um sistema gradiente com função potencial  $V$  é um sistema que pode ser escrito da forma  $\mathbf{x}' = -\nabla V$ , onde  $V(\mathbf{x})$  é uma função contínua, diferenciável e escalar de valor único.

**Teorema 2.1.** *Órbitas fechadas são impossíveis em sistemas gradientes.*

Veja que, do Teorema 2.1, garante-se que se o sistema for gradiente, então não possui ciclo limite, já que não possui nem mesmo órbita fechada.

### 2.2 Funções de Liapunov

Seja o sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , com um ponto fixado em  $\mathbf{x}^*$ . Uma função de Liapunov é uma função real  $V(\mathbf{x})$  continuamente diferenciável, isto é, suas derivadas parciais existem e são contínuas, e que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $V$  é definida positivamente, com  $V(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$  e  $V(\mathbf{x}^*) = 0$
2. Todas as trajetórias "descem" em direção a  $\mathbf{x}^*$ , ou seja,  $V' < 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$

É como uma função de energia, que decresce ao longo da trajetória até tornar-se nula. Daí, para todas as condições iniciais,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$  quando  $t \rightarrow \infty$  e o sistema não tem órbitas fechadas, portanto não possui ciclo limite. O problema aqui é que funções desse tipo são difíceis de serem construídas, mas somas de quadradas podem funcionar.

## 2.3 Critério de Dulac

Seja  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  um campo vetorial continuamente diferenciável definido em um subconjunto simplesmente conexo  $R$  no plano. Se existir uma função real  $g(\mathbf{x})$  continuamente diferenciável tal que  $\nabla \cdot (g\mathbf{x}')$  tem mesmo sinal por todo  $R$ , então não existem órbitas fechadas contidas inteiramente em  $R$ .

Novamente, neste caso não há ciclo limite, porém também não há algoritmo para encontrar a função  $g$ . Possíveis escolhas:  $g(x, y) = 1$ ,  $1/x^a y^b$ ,  $e^{ax}$ ,  $e^{ay}$ .

$$\text{Observação: } \nabla \cdot (g\mathbf{x}') = \frac{\partial}{\partial x}(gx') + \frac{\partial}{\partial y}(gy')$$

## 2.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

**Teorema 2.2.** *Suponha que*

1.  $R$  é um subconjunto fechado e limitado do plano;
2.  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo  $R$ ;
3.  $R$  não contém pontos fixos; e
4. Existe uma trajetória  $C$  que é confinada em  $R$ , isto é, começa em  $R$  e permanece em  $R$ .

*Então ou  $C$  é uma órbita fechada ou  $C$  espirala em direção a uma órbita fechada conforme  $t \rightarrow \infty$ . Em ambos os casos,  $R$  contém uma órbita fechada.*

Para satisfazer a condição (4), podemos construir uma região  $R$  como sendo um conjunto fechado e conexo tal que o campo vetorial aponte para dentro da região ao longo de toda a fronteira de  $R$ .

## 2.5 The Fivefold Way

Nesta seção vamos exibir, conforme Coleman (1983, p. 263), um teste para a existência de ciclo em um sistema do tipo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $F$  e  $G$  são funções continuamente diferenciáveis em uma região  $R$  do plano  $xy$ . O método foi nomeado "The Fivefold Way" e não requer que o sistema já tenha sido resolvido. A solução de 2.1 é um par de funções  $(x(t), y(t))$ , denotado também por  $z(P, t)$ , onde  $P = (x(0), y(0))$  é o ponto inicial da solução, com  $\Gamma$  sendo a órbita correspondente, ou apenas  $z(t)$  se o ponto inicial for indiferente. Denotaremos o conjunto  $\{z(P, t) : t \geq 0\}$  como sendo a semi-órbita positiva de  $P$ ,  $\Gamma_P^+$ , ou simplesmente  $\Gamma^+$ , se não depender do ponto inicial, e analogamente definimos  $\Gamma_P^-$  e  $\Gamma^-$ .

**Definição 2.5.1.** Seja  $\Gamma_P^+$  uma semi-órbita positiva. Então o conjunto omega-limite,  $\omega(\Gamma^+)$ , é o conjunto  $Q$  tal que, para alguma sequência temporal crescente,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , temos que  $z(t_n) \rightarrow Q$  quando  $t_n \rightarrow \infty$ . Analogamente definimos o conjunto alfa-limite, mas para uma sequência temporal decrescente tal que  $t_n \rightarrow -\infty$ .

Vale notar que os conjuntos limite acima definidos são independentes da escolha do ponto inicial. Dizemos que, se  $\Gamma \neq \omega(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  é positivamente assintótica para  $\omega(\Gamma)$  quando  $t \rightarrow \infty$  e negativamente assintótica para  $\alpha(\Gamma)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Vamos definir ainda o que é um gráfico de ciclo.

**Definição 2.5.2.** Um gráfico de ciclo é uma união de órbitas conectadas tais que

1. o gráfico de ciclo contém um número finito e não nulo de pontos críticos;
2. se  $P_1, \dots, P_n$  são os pontos críticos desse gráfico de ciclo, então existem órbitas, que não são pontos críticos,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , do gráfico de ciclo tais que

$$\begin{aligned} \alpha(\Gamma_i) &= P_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \omega(\Gamma_i) &= P_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

onde  $P_{n+1} \equiv P_1$ ;

3. cada conjunto limite de cada órbita no gráfico de ciclo é um ponto crítico dele.

Assim, um gráfico de ciclo é basicamente órbitas, que não sejam pontos críticos, conectadas entre si, de modo que o ponto de conexão entre elas é um ponto crítico e a órbita final é fechada. Finalmente, temos o seguinte resultado de Poincaré e Bendixson:

**Teorema 2.3.** *Seja  $\Gamma^+$  uma semi-órbita positiva e limitada de 2.1 e suponha que 2.1 tenha um número finito de pontos críticos. Então exatamente uma das cinco alternativas seguintes é verdadeira:*

1.  $\Gamma$  é um ponto crítico;
2.  $\Gamma$  é positivamente assintótica para um ponto crítico;
3.  $\Gamma$  é um ciclo;
4.  $\Gamma$  é positivamente assintótica para um ciclo;
5.  $\Gamma$  é positivamente assintótica para um gráfico de ciclo.

Com isso, concluimos que existe um ciclo se houver uma semi-órbita positiva  $\Gamma^+$  que é limitada e cujo conjunto limite positivo  $\omega(\Gamma)$  não contém pontos críticos, ou seja,  $\omega(\Gamma)$  é um ciclo. Para verificar que o conjunto omega-limite não possui pontos críticos, vamos introduzir ainda outra definição.

**Definição 2.5.3.** Um ponto crítico  $P$  de 2.1 é repulsor se existir uma região circular  $D$  centrada em  $P$  tal que

1. para todo  $Q \in D$ ,  $z(t, Q) \rightarrow P$  quando  $t \rightarrow \infty$ ,
2. para todo  $Q \in D$  e toda sequência  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  e  $z(t_n, Q)$  é definido, temos que  $z(t_n, Q) \not\rightarrow P$ .

Logo, um ponto crítico repulsor  $P$  é simplesmente um ponto crítico tal que toda órbita cujo ponto inicial pertence à determinada região circular em torno de  $P$ , se afasta de  $P$  com o aumento de  $t$ . A seguir, um teste simples para saber se um ponto crítico  $(x_0, y_0)$  de 2.1 é repulsor. Sejam

$$a = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad c = \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad d = \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

Então,  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico repulsor se  $a + d > 0$  e  $ad - bc > 0$ .

Portando, a ideia é usar o "fivefold way" juntamente ao teste de repulsão para deduzir a existência de um ciclo. Para isso, basta determinar uma região circular  $R$  centrada em um ponto crítico  $P$  que seja repulsor, de modo que nela não haja outros pontos críticos e que nenhuma órbita que inicie no seu interior saia dela, analisando a derivada na fronteira. Daí, como  $P$  é repulsor, esse ponto não pertence a  $\omega(\Gamma_P^+)$  e, como  $R$  não contém outros pontos críticos, segue do teorema 2.3 que  $\omega(\Gamma_P^+)$  é um ciclo.



## 2.6 Sistemas de Van der Pol e Lienard

Sejam  $F$  e  $G$  duas funções suaves. A equação diferencial

$$x'' + F'(x)x' + G'(x) = 0 \quad (2.2)$$

é chamada equação de Lienard. Definindo  $y(t) = x(t)' + F(x(t))$  e  $g(x(t)) = G'(x(t))$ , segue que  $y'(t) = x''(t) + F'(x(t))x'(t) = -G'(x(t))$ , logo obtemos o sistema equivalente à 2.2

$$x' = y - F(x), y' = -g(x)$$

A equação de Van der Pol, apresentada abaixo, é o mais famoso exemplo de equação de Lienard, com  $F(x) = c(X^3/3 - x)$  e  $G(x) = x^2/2$

$$x'' + c(x^2 - 1)x' + x = 0$$

**Teorema 2.4.** *Sejam  $F$  e  $g$  funções suaves e ímpares tais que*

- $g(x) > 0$  para  $x > 0$ ,
- $F$  tem exatamente três zeros  $0, -a$  e  $a$ ,
- $F'(0) < 0$ ,  $F'(x) \geq 0$  para  $x > a$  e
- $F(x) \rightarrow \infty$  para  $x \rightarrow \infty$

*Então o sistema de Lienard*

$$x' = y - F(x), y' = -g(x)$$

*tem exatamente um ciclo limite e este ciclo é estavel.*

Vamos trazer um início de prova do teorema anterior. Considere uma órbita que começa no ponto  $P_0 = (0, y_0)$ , com  $y_0 > 0$ . Como  $g$  é contínua e ímpar, isto é,  $g(-x) = -g(x)$ , segue que  $g(0) = 0$ , daí no eixo  $y$  temos  $y' = 0$ . Além disso, em  $P_0$ , temos  $x' = y_0 - F(0) = y_0 > 0$ , ou seja, no ponto  $P_0$  campo vetorial é horizontal para a direita.

Nesse sentido, para  $x > 0$  e  $y > F(x)$ , note que  $x' = y - F(x) > 0$  e, por hipótese,  $y' = -g(x) < 0$ , ou seja, a coordenada  $x$  aumenta e a  $y$  diminui, logo a órbita vai para a direita e para baixo, até intersectar o gráfico de  $y = F(x)$ .

Daí, para  $x > 0$  e  $y = F(x)$ , temos que  $x' = 0$  e  $y' < 0$ , assim o campo vetorial é vertical para baixo. Em seguida, para  $x > 0$  e  $y < F(x)$ , segue que  $x' < 0$  e  $y' < 0$ , logo

a órbita vai para a esquerda e para baixo, com ambas as coordenadas diminuindo, até encontrar o eixo  $y$ . Finalmente, por simetria, já que  $g$  e  $F$  são funções ímpares, o processo se repete para  $x < 0$ .

Para uma prova completa, restaria ainda mostrar que o caminho formado é fechado, ou seja, a órbita passa novamente por  $P_0$ , e único. Abaixo, um esboço dá a ideia do que foi apresentado acima.

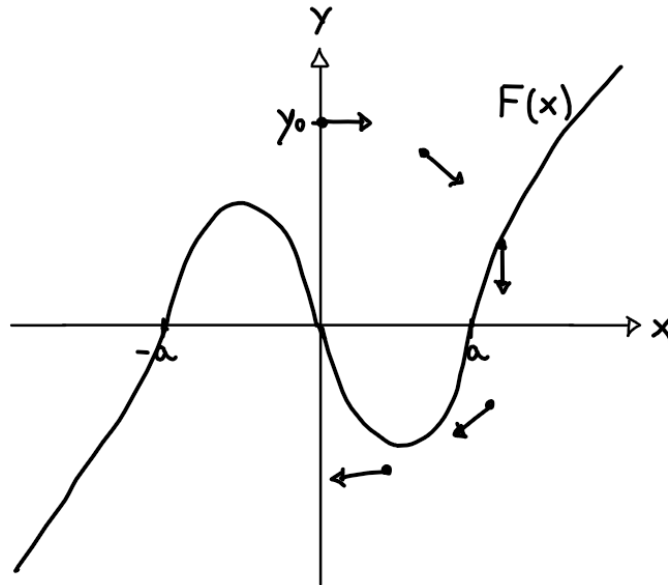


Figura 14 – Esboço da ideia de prova do Teorema 2.4.

## 2.7 Mudança de coordenadas para análise de ciclos limite

A seguir vamos apresentar uma forma interessante de analisar a existência de ciclos limite. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2.3)$$

Realizando mudança para as coordenadas polares  $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$  e  $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ , temos

$$\begin{cases} x' = r' \cos(\theta) - r \sin(\theta) \theta' = r \cos(\theta) - r \sin(\theta) - r \cos(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)), \\ y' = r' \sin(\theta) + r \cos(\theta) \theta' = r \cos(\theta) + r \sin(\theta) - r \sin(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)). \end{cases}$$

Com isso, obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta - r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Finalmente, resolvendo o sistema acima, segue que

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Do sistema acima, veja que a variação de  $\theta$  é constante e positiva. Além disso, se  $r = 1$ , então  $r' = 0$  e o raio  $r$  é constante, ou seja, temos um ciclo fechado. Por outro lado, se  $0 < r < 1$ , então  $r' > 0$  e o raio aumenta conforme  $t$  aumenta e, se  $r > 1$ , então  $r' < 0$  e o raio diminui conforme  $t$  aumenta. Assim, temos algo parecido com o esboço abaixo, no qual há um ciclo limite estável/atrativo de raio unitário.

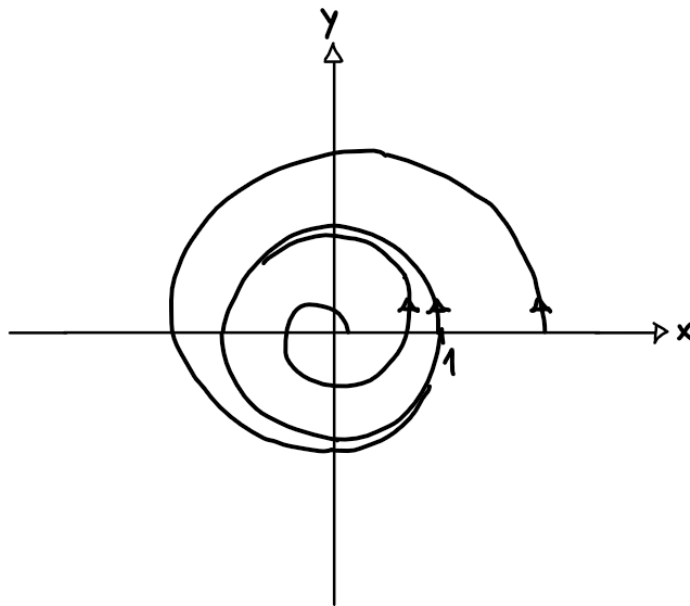


Figura 15 – Retrato de fase do sistema 2.3.

Podemos ainda generalizar problemas desse tipo, conforme Coleman (1983, p. 285). Considere o sistema em coordenadas polares abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)(4 - r^2)\dots(N^2 - r^2), & r \geq 0, \quad N \text{ inteiro positivo,} \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

O sistema 2.4 corresponde à um sistema em coordenadas retangulares da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \end{cases}$$

onde  $X(x, y)$  e  $Y(x, y)$  são polinômios em  $x$  e  $y$  de grau  $2N + 1$ . Para verificar isso, basta observar que, sendo  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , temos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = r(1-r^2)\dots(N^2-r^2)\cos\theta - r\sin\theta \\
&= (1-x^2-y^2)\dots(N^2-x^2-y^2)x - y, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = r(1-r^2)\dots(N^2-r^2)\sin\theta + r\cos\theta \\
&= (1-x^2-y^2)\dots(N^2-x^2-y^2)y + x.
\end{aligned}$$

Como temos a multiplicação entre  $N$  polinômios de grau 2 e um de grau 1, o grau desse polinômio final é  $2N + 1$ . Contudo, o sistema tem um único ponto crítico na origem,  $N$  ciclos isolados,  $r \equiv 1, r \equiv 2, \dots, r \equiv N$ , e nenhum ciclo não isolado. Para verificar esses fatos, observe que, a variação de  $\theta$  é constante e, se  $r = 1, r = 2, \dots, r = N$ , então o raio é constante e temos ciclos fechados. Não obstante, se  $0 < r < 1, 1 < r < 2, \dots, N - 1 < r < N, N < r$ , segue que o raio varia e portanto as órbitas espiralam para perto ou para longe dos ciclos, a depender do sinal, caracterizando ciclos limite.

### 3 Equações de Lotka-Volterra

De acordo com Gatto (2009, p. 3) (3), interações biológicas entre organismos são um tema central da ecologia, tendo um papel fundamental na dinâmica no espaço e tempo das populações e comunidades. Conforme Braun (1983, p. 221) (4), na década de 1920 o biólogo italiano Umberto D'Ancona estava estudando variações na população de várias espécies de peixes que interagem entre si. Analisando dados, notou um grande aumento da porcentagem de seláquios (tubarões, raias etc.) durante o período da Primeira Guerra Mundial. Ele atribuiu à isso a intensa redução da pescaria durante esse período, mas ainda buscava entender como a intensidade da pesca afeta as populações de peixes.

Veja que os seláquios são predadores, dependentes de suas presas para sobreviver. Contudo, a teoria de D'Ancona apenas mostra que o número de seláquios aumenta quando a intensidade de pescaria diminui, mas não explica porquê menos pesca é mais benéfico aos predadores do que para suas presas. Neste momento, entra em cena o matemático italiano Vito Volterra, com a função de formular um modelo matemático para a evolução da população de seláquios e suas presas.

Assim, ele definiu  $x(t)$  como sendo a população de presas e  $y(t)$  a de predadores, no sentido de número de indivíduos. Apesar de serem valores discretos, para grandes populações, o aumento de algumas unidades em um curto período de tempo é uma quantidade "infinitesimal" em relação ao total. Logo trataremos como mudanças contínuas no tempo, "suavizando" ainda as curvas para tornar  $x$  e  $y$  funções diferenciáveis do tempo. Assumi também que as presas não competem intensamente entre si pela sua alimentação, logo na ausência de seláquios essa população cresce conforme a lei de Malthusian:  $x' = ax$ ,  $a$  constante positiva. Além disso, considerou-se que o número de contatos por unidade de tempo entre predadores e presas é  $bxy$ , para alguma constante positiva  $b$ . Portanto,  $x' = ax - bxy$ . Analogamente para os predadores, estes têm um decréscimo natural  $cy$  proporcional ao seu tamanho e aumentam a taxa  $dxy$  proporcionalmente ao seu tamanho  $y$  e suprimento de comida  $x$ . Contudo, suponha que (5):

- a população de presas tenha alimento em abundância;
- a alimentação dos predadores dependa inteiramente do tamanho da população de presas;
- a taxa de mudança do tamanho de cada população dependa do seu tamanho;
- o ambiente não muda em favor de cada espécie e adaptações genéticas são inconsequentes;

- e os predadores têm apetite limitado.

Nesse sentido, as Equações de Lotka-Volterra, ou Equações de Presa-Predador, descrevem a dinâmica dessas populações e são apresentadas a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy. \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $x$  é o número de presas,  $y$  o número de predadores e  $t$  representa o tempo. Além disso,  $a, b, c$  e  $d$  são parâmetros reais positivos determinados conforme a interação entre as presas e os predadores. Matricialmente, sendo  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  e  $f(\mathbf{x}) = (ax - bxy, -cy + dxy)^T$ , podemos reescrever 3.1 como  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ .

Qualitativamente, percebemos que  $a$  representa a taxa de aumento do número de presas em relação ao seu tamanho, já que possui alimentos em abundância, enquanto  $b$  seria a taxa de mortalidade das mesmas em função apenas da interação com os predadores. Por outro lado, como a alimentação dos predadores depende exclusivamente das presas,  $d$  apresenta-se como a taxa de aumento dessa população em razão da sua interação com as presas, já  $c$  a taxa de mortalidade dos predadores por razões naturais.

**Definição 3.0.1.** (6) Se  $\bar{x}$  é um zero de  $f$ , isto é,  $f(\bar{x}) = 0$ , então  $x(t) \equiv \bar{x}$  é solução de  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$  e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto  $\bar{x}$  é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.

Observe que 3.1 possui duas soluções de equilíbrio,  $x(t) = 0, y(t) = 0$  e  $x(t) = c/d, y(t) = a/b$ , que podem ser obtidas por

$$f(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x = 0 \text{ ou } y = a/b) \text{ e } (y = 0 \text{ ou } x = c/d) \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = c/d \text{ e } y = a/b).$$

Além disso, o sistema também possui a família de soluções  $x(t) = x_0 e^{at}, y(t) = 0$  e  $x(t) = 0, y(t) = y_0 e^{-ct}$ . Podemos obtê-las como mostra a seguir.

Da primeira equação de 3.1, segue que

$$\begin{aligned} x' = (a - by)x &\Rightarrow \frac{x'}{x} = a - by \Rightarrow \int \frac{x'}{x} dt = \int (a - by) dt \Rightarrow \\ \ln(x) &= at - b \int y(t) dt + K_x \Rightarrow x = e^{at - b \int y(t) dt + K_x}, \end{aligned}$$

com  $K_x$  constante. Para  $y(t) = 0$ , temos  $x(t) = e^{at+K_x} = e^{K_x}e^{at} = x_0e^{at}$ , com  $x_0 = e^{K_x}$ , e a segunda equação de 3.1 também é satisfeita. Analogamente, obtemos as soluções  $x(t) = 0, y(t) = y_0e^{-ct}$ . Essas órbitas de 3.1 implicam que toda solução que começar no primeiro quadrante, permanecerá lá para todo tempo futuro.

As órbitas de 3.1 para  $x, y \neq 0$ , são as curvas solução da equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Veja que essa equação é separável, logo obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{a - by}{y} dy &= \int \frac{-c + dx}{x} dx \Rightarrow a \ln(y) - by = -c \ln(x) + dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow a \ln(y) - by + c \ln(x) - dx &= C \Rightarrow \exp(a \ln(y) - by + c \ln(x) - dx) = \exp(C) \\ &\Rightarrow \frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K, \quad K = \exp(C). \end{aligned}$$

Portanto, as órbitas de 3.1 são a família de curvas definidas por

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K, \quad (3.2)$$

para alguma constante  $K$ . Mostraremos a seguir que essas curvas são fechadas.

**Lema 1.** *A equação 3.2 define uma família de curvas fechadas para  $x, y > 0$ .*

*Demonstração.* Vamos determinar o comportamento de  $f(y) = y^a/e^{by}$  e  $g(x) = x^c/e^{dx}$ . Veja que  $f(0) = f(\infty) = 0$  e  $f$  atinge seu valor máximo  $M_y = (a/b)^a/e^a$  em  $y = a/b$ , pois  $f'(y) = 0, y > 0 \Rightarrow y = a/b$  e  $f''(a/b) < 0$ . Analogamente,  $g$  atinge seu valor máximo  $M_x = (c/d)^c/e^c$  em  $x = c/d$ .

Podemos concluir que 3.2 não tem solução  $x, y > 0$  para  $K > M_x M_y$ , isto é,  $f(y)g(x) \leq M_x M_y$ , possuindo a solução singular  $x = c/d$  e  $y = a/b$  para  $K = M_x M_y$ . Vamos então considerar apenas o caso  $K = \lambda M_y$ , com  $0 < \lambda < M_x$ . Veja que  $g(x) = x^c/e^{dx} = \lambda$  possui uma solução  $x = x_m < c/d$  e uma solução  $x = x_M > c/d$ . Daí, considere a equação

$$f(y) = y^a/e^{by} = \left[ \frac{\lambda}{x^c/e^{dx}} \right] M_y. \quad (3.3)$$

- Se  $x < x_m$  ou  $x > x_M$ , então  $x^c/e^{dx} < \lambda$  e 3.3 implica que  $f(y) > M_y$ , logo não existe solução  $y$ ;

- se  $x = x_m$  ou  $x = x_M$ , então  $x^c/e^{dx} = \lambda$  e 3.3 implica que  $f(y) = M_y$ , logo  $y = a/b$ ;
- se  $x_m < x < x_M$ , então  $x^c/e^{dx} > \lambda$  e 3.3 implica que  $f(y) < M_y$ , logo existem duas soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , uma maior que  $a/b$  e outra menor. Conforme  $x$  se aproxima de  $x_m$  ou  $x_M$ ,  $y_1$  e  $y_2$  se aproximam de  $a/b$ .

Consequentemente, as curvas definidas por 3.2 são fechadas para  $x, y > 0$ . Além disso, nenhuma dessas curvas, com exceção de  $x = c/d, y = a/b$ , contém pontos de equilíbrio de 3.1. Daí, todas as soluções  $x(t), y(t)$  de 3.1, com  $x(0), y(0) > 0$ , são funções periódicas do tempo.

□

Antes de incluir os efeitos da pesca ao modelo, vamos realizar a seguir simulações computacionais referentes à equação 3.1.

### 3.1 Simulações computacionais

Vamos realizar simulações computacionais de alguns retratos de fase da equações 3.1 para escolhas arbitrárias dos parâmetros, com o objetivo de analisar o comportamento das populações. Para tanto, utilizaremos um Método Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, conforme desenvolvido em (7), implementado em *Octave*. e apresentado a seguir.

```
# Metodo de Runge Kurra - 4a ordem
# Eq Lotka-Volterra

# parametros
a = 1.1;      # alpha
b = 0.4;      # beta
d = 0.1;      # delta
g = 0.4;      # gamma

# y' = f(t,y) (funcao vetorial)
f = @(t,y) [a*y(1) - b*y(1)*y(2); d*y(1)*y(2) - g*y(2)];

# condicao inicial
y0 = [10; 10];
t0 = 0;
tf = 100;
```



```
# passos de discretizacao
h = 0.1;

# numero de pontos
N = (tf-t0)/h + 1;

# malha
t = linspace(t0,tf,N);

# solucao
y = zeros(2,N);
y(:,1) = y0;

for n=1:(N-1);
    k1 = h*f(t(n),y(:,n));
    k2 = h*f(t(n)+0.5*h,y(:,n)+0.5*k1);
    k3 = h*f(t(n)+0.5*h,y(:,n)+0.5*k2);
    k4 = h*f(t(n)+h,y(:,n)+k3);
    y(:,n+1) = y(:,n) + 1/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
endfor

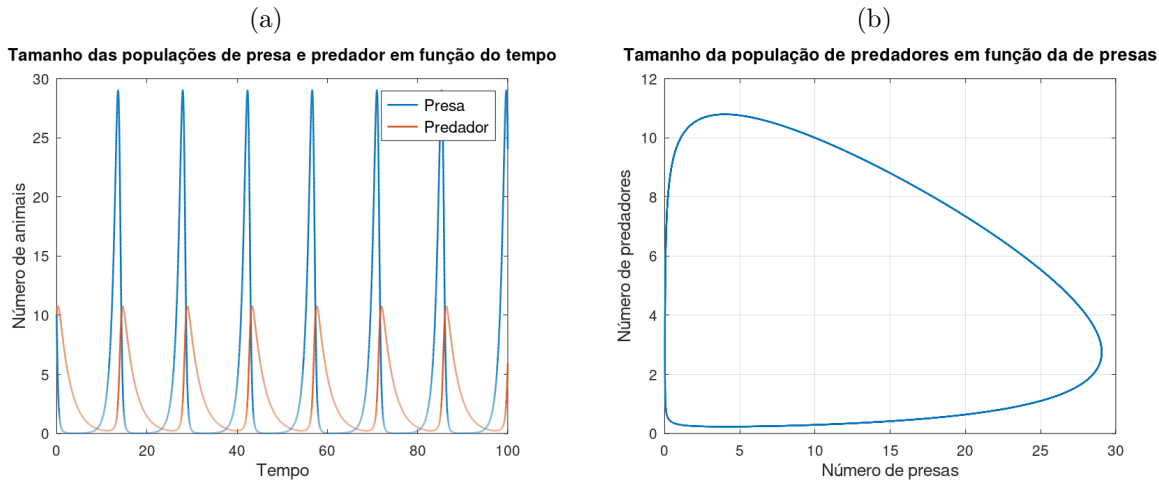
# graficos

figure(1)
plot(t,y(1,:), 'LineWidth', [1.2], t,y(2,:), 'LineWidth', [1.2])
title('Tamanho das populações de presa e predador em função do tempo', 'FontSize', 11)
)
xlabel('Tempo', 'FontSize', 12)
ylabel('Número de animais', 'FontSize', 12)
legend('Presa', 'Predador', 'FontSize', 11)

figure(2)
plot(y(1,:), y(2,:), 'LineWidth', [1])
title('Tamanho da população de predadores em função da de presas', 'FontSize', 12)
xlabel('Número de presas', 'FontSize', 12)
ylabel('Número de predadores', 'FontSize', 12)
grid
```

Vamos utilizar como base para comparações a simulação tomando os parâmetros  $\alpha = 1.1$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\gamma = 0.4$  e a condição inicial  $(x_0, y_0) = (10, 10)$ , obtendo os gráficos apresentados a seguir:

Figura 16 – Gráficos da simulação computacional do modelo 3.1, com parâmetros  $\alpha = 1.1$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\gamma = 0.4$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (10, 10)$ .



A princípio, já podemos notar o comportamento periódico da solução. Em 16a vemos a própria periodicidade do gráfico, que está em função do tempo, estando as cristas de cada função,  $x(t)$  e  $y(t)$ , defasadas entre si. Além disso, em 16b a curva aparentemente é fechada - apesar de que, por erros em precisão finita, a curva não seja de fato fechada.

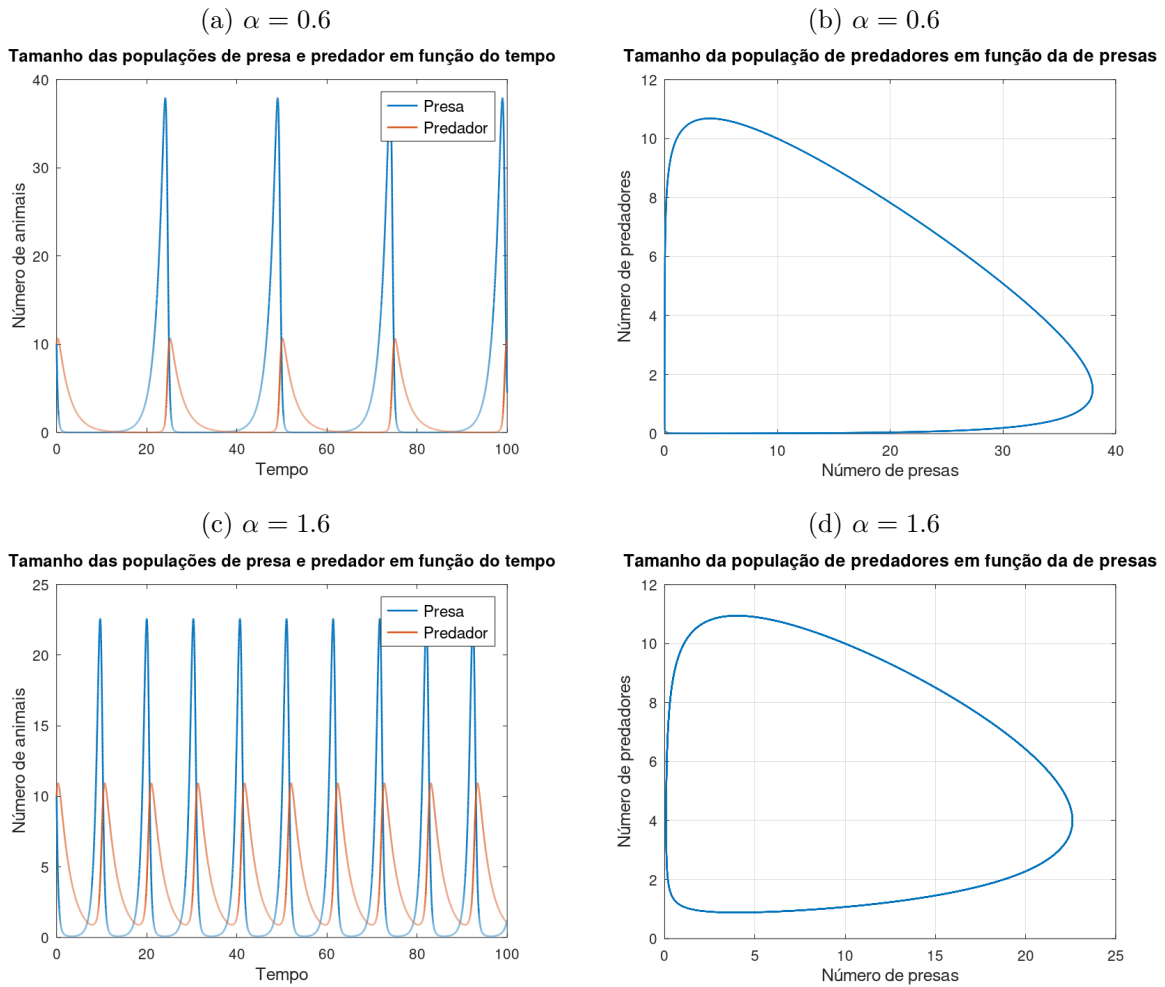
Contudo, a partir desse modelo, iremos variar o valor de cada parâmetro para tirar conclusões, ainda que leigas, em termos do comportamento das populações de espécies. Na figura 17, variamos  $\alpha$  para um valor menor,  $\alpha = 0.6$ , e para um maior,  $\alpha = 1.6$ .

Vimos anteriormente que  $\alpha$  representaria a taxa de aumento do tamanho da população de presas em relação ao seu tamanho e assumindo que possuem alimento em abundância. Diminuindo essa taxa, percebemos que, pelas figuras 17a e 17b em relação à simulação base da figura 16, o período é maior e o a amplitude máxima de presas é maior.

Podemos interpretar que, uma vez que os predadores capturam grande parte das presas disponíveis, o processo até que o tamanho da população das presas aumente novamente é mais lento, já que demoram mais para se reproduzir. Daí, os predadores, condicionados à disponibilidade de presas para alimentação, reduzem em quantidade, momento este em que as presas conseguem se reproduzir até atingir um valor máximo maior, quando voltam a serem capturadas.

Por outro lado, aumentando o valor de  $\alpha$ , conforme figuras 17c e 17d, o período é menor e a amplitude máxima de presas é menor. Como a reprodução das presas é acelerada, quando a presença de predadores na natureza é pequena em razão da indisponibilidade de presas, rapidamente o número de presas aumenta, proporcionando um período menor. Daí,

Figura 17 – Gráficos da simulação computacional do modelo 3.1, com parâmetros  $\beta = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\gamma = 0.4$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (10, 10)$ .

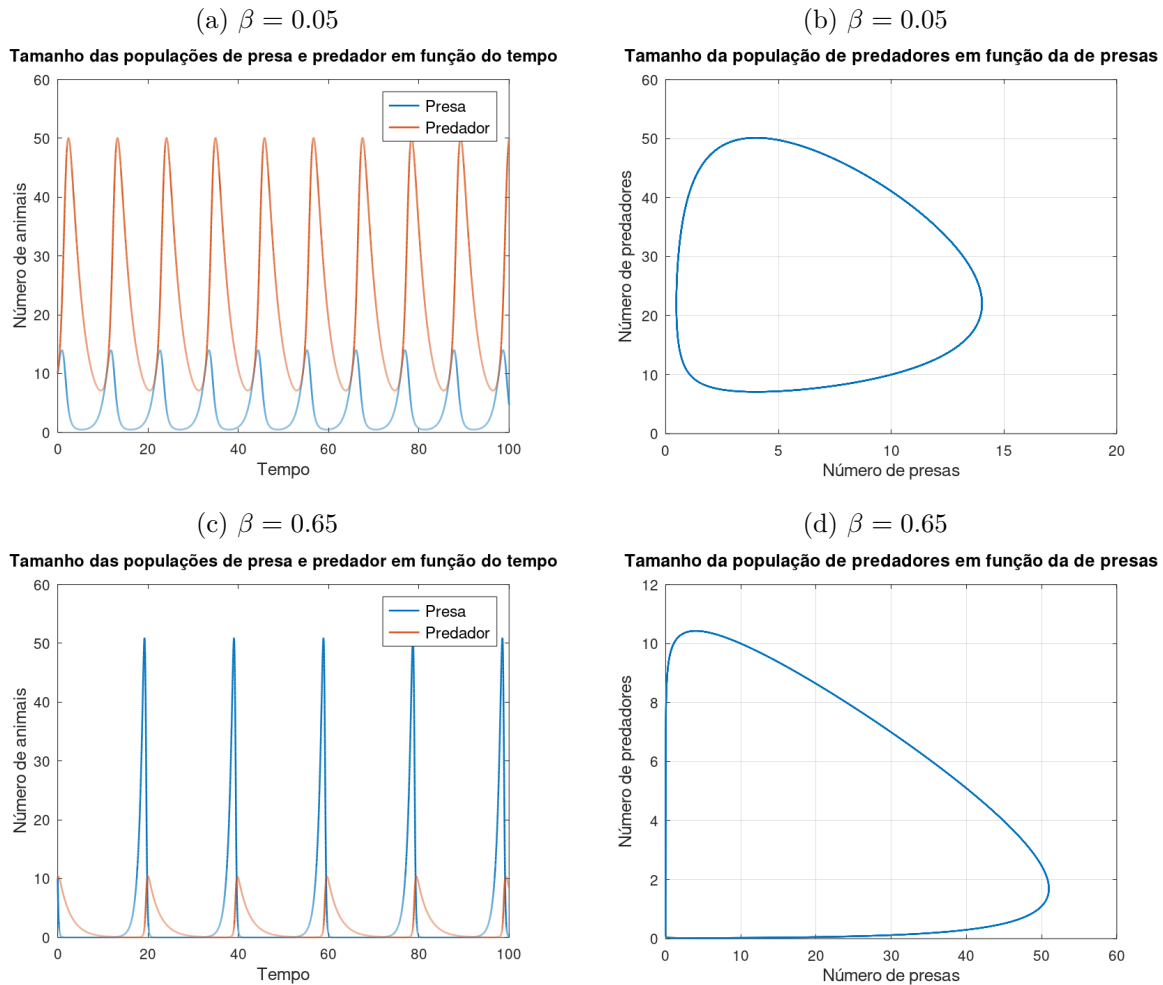


os predadores não ficam muito tempo com baixa disponibilidade de alimentos e, logo, não diminuem drasticamente de tamanho, impedindo que as presas alcancem um número alto em quantidade.

Na figura 18, variamos  $\beta$  para um valor menor,  $\beta = 0.05$ , e para um maior,  $\beta = 0.65$ . Veja que estamos reduzindo a taxa  $\beta$  de mortalidade das presas em razão da interação com os predadores, mas mantendo a taxa  $\delta$  de aumento do número de predadores pelo mesmo motivo. Como esses parâmetros estão relacionados, uma mudança proporcional em ambos não deve causar grandes mudanças no comportamento das espécies, mas não foi o caso.

Diminuindo o valor de  $\beta$ , desprende-se das figuras 18a e 18b que o período é menor e a amplitude máxima das presas é muito menor, enquanto o dos predadores é muito maior. O que provavelmente ocorre é que os predadores requerem menos presas para se saciarem, ou seja, para uma mesma quantidade inicial de presas e predadores, os predadores conseguem ganhar no sentido de aumento de tamanho. Daí, as presas nunca conseguem chegar a uma grande quantidade, já que haverá muitos predadores.

Figura 18 – Gráficos da simulação computacional do modelo 3.1, com parâmetros  $\alpha = 1.1$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\gamma = 0.4$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (10, 10)$ .

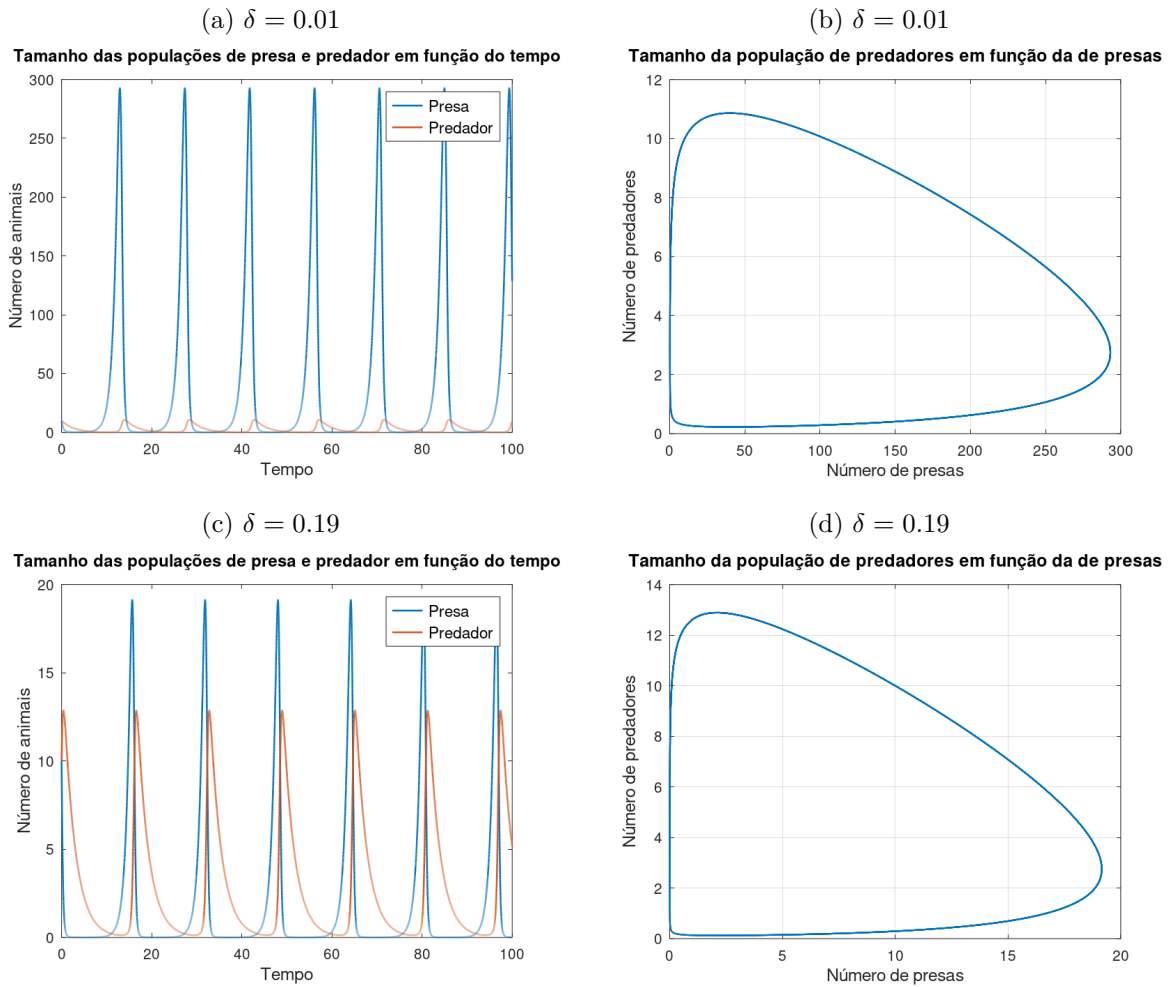


Por outro lado, aumentando a taxa  $\beta$ , vemos das figuras 18c e 18d o período é maior e a amplitude máxima das presas é maior. Afinal, aumentando a mortalidade das presas por captura, sua disponibilidade acaba mais rápido na presença dos predadores, que na ausência de presas também irão reduzir em quantidade, levando a um período maior. Neste momento, as presas são capazes de se reproduzir sem grandes interferência, mas logo o aumento dos predadores acompanha e elas voltam a reduzir.

Na figura 19, variamos  $\delta$  para um valor menor,  $\delta = 0.01$ , e para um maior,  $\delta = 0.19$ . Esse parâmetro representa a taxa de aumento da população de predadores em razão da sua interação com as presas.

Diminuindo  $\delta$ , vemos nas figuras 19a e 19b que o período não altera e a amplitude máxima do número de presas aumenta muito, em uma ordem de grandeza. Interpretou-se que, ao diminuir a taxa de fecundidade dos predadores em função da alimentação pelas presas, segue que o predador requer maior quantidade de presa para conseguir se reproduzir, logo a quantidade máxima de predadores acaba não sofrendo alteração. Por outro lado,

Figura 19 – Gráficos da simulação computacional do modelo 3.1, com parâmetros  $\alpha = 1.1$ ,  $\beta = 0.4$  e  $\gamma = 0.4$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (10, 10)$ .



quando estes estão em quantidade bastante reduzida, as presas conseguem se reproduzir com maior facilidade, já que os predadores demorarão mais a aparecer.

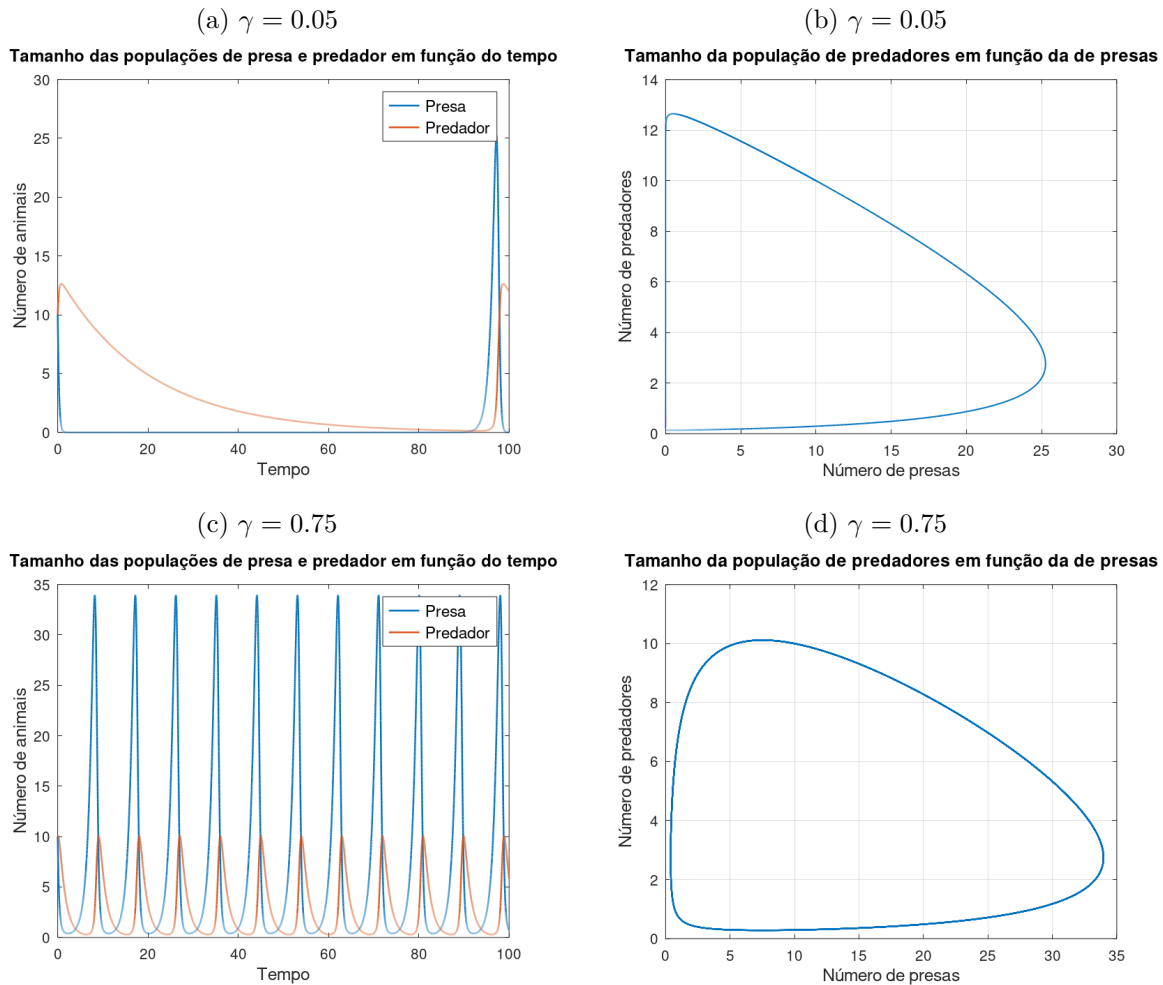
Já aumentando o valor de  $\delta$ , conforme as figuras 17c e 17d, o período levemente maior, a quantidade máxima de presas diminui e o de predadores aumenta. Aumentando este parâmetro, os predadores precisam de menos alimento (presas) para se reproduzir, levando a um maior equilíbrio na quantidade de ambos.

Na figura 20, variamos  $\gamma$  para um valor menor,  $\gamma = 0.05$ , e para um maior,  $\gamma = 0.75$ . Esse parâmetro representa a taxa de mortalidade dos predadores por razões naturais.

Diminuindo  $\gamma$ , das figuras 17a e 17b, vemos que aumentou drasticamente o período, aumentando um pouco o a quantidade máxima de predadores e diminuindo a de presas. Se os predadores estão mais resistentes à morte, então faz sentido que a redução do seu tamanho seja mais lenta, levando a um período maior.

Já aumentando  $\gamma$ , conforme as figuras 17c e 17d, nota-se que o período reduz

Figura 20 – Gráficos da simulação computacional do modelo 3.1, com parâmetros  $\alpha = 1.1$ ,  $\beta = 0.4$  e  $\delta = 0.1$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (10, 10)$ .



bastante, enquanto a quantidade máxima de presas aumenta e a de predadores diminui. Como os predadores morrem a uma taxa maior, é esperado que o ciclo se reinicie com mais rapidez, o que ocorre quando o número de predadores é muito baixo e as presas conseguem se reproduzir.

De modo geral, observa-se que a população de predadores parece muito mais condicionada à de presas que o contrário, já que é o único fator que leva ao crescimento do seu tamanho. Além disso, o número de presas aparece com quantidade máxima maior que o de predadores na maior parte dos casos.

Contudo, um ciclo, com exceção do primeiro, inicia com um alto número de presas e baixo número de predadores, que irão se reproduzir com a disponibilidade de presas até que esta diminua, momento em que o número de predadores passa a reduzir até ser bem pequeno. Com isso, as presas conseguem perpetuar a reprodução e o ciclo inicia novamente.

## 3.2 Modelo de Lotka-Volterra incluindo efeitos da pesca

Conforme Braun (1983, p. 225) (4), a pesca diminui a população de presas a uma taxa de  $\epsilon x(t)$  e a de predadores a  $\epsilon y(t)$ , estando a constante  $\epsilon$  associada à intensidade da pesca, levando em consideração fatores como o número de barcos no mar e de redes na água. Assim, obtemos o sistema modificado para incluir os efeitos da pesca:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - \epsilon x = (a - \epsilon)x - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - \epsilon y = -(c + \epsilon)y + dxy. \end{cases} \quad (3.4)$$

Note que, para  $(a - \epsilon) > 0$  e  $(c + \epsilon) > 0$ , o sistema acima é igual ao sistema da equação 3.1. Para prosseguir na análise de D'Ancona, vale ressaltar que os dados com que ele trabalhava eram na verdade a média de um período de um ano da proporção de predadores. Assim, é interessante que obtenhamos os valores médios das soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  de 3.4, como mostra o lema abaixo.

**Lema 2.** *Seja  $x(t)$ ,  $y(t)$  uma solução periódica de 3.4 de período  $T > 0$ . Definindo os valores médios de  $x$  e  $y$  como*

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt,$$

*então  $\bar{x} = (c + \epsilon)/d$  e  $\bar{y} = (a - \epsilon)/b$ . Em outras palavras, os valores médios de  $x(t)$  e  $y(t)$  são os pontos de equilíbrio.*

*Demonstração.* Dividindo a primeira equação de 3.4 por  $x$  e integrando os dois lados em relação a  $t$ , de 0 à  $T$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{x'}{x} &= (a - \epsilon) - by \Rightarrow \int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int_0^T (a - \epsilon - by(t)) dt \\ \Rightarrow \ln(x(t)) \Big|_0^T &= (a - \epsilon)t \Big|_0^T - b \int_0^T y(t) dt \Rightarrow 0 = (a - \epsilon)T - b \int_0^T y(t) dt \\ &\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a - \epsilon}{b}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos  $\bar{x}$ . □

Com isso podemos observar que, ao diminuir o valor de  $\epsilon$ ,  $\bar{x}$  diminui e  $\bar{y}$  aumenta, ou seja, uma redução na intensidade da pesca é mais benéfica aos predadores do que às presas. Esse resultado é conhecido como princípio de Volterra e explica os dados de D'Ancona. Uma aplicação interessante desse princípio é no uso de inseticidas em populações de insetos em que presas e predadores são afetados: a tendência é que a aplicação de inseticida aumente a população de presas.

Contudo, muitos ecologistas e biólogos não aceitam o modelo 3.1 de Volterra como preciso, apontando que o comportamento oscilatório não é comumente observado nas interações predador-presa, mas sim uma tendência à um estado de equilíbrio. Um modelo mais geral para a interação predador-presa, que considera a competição intraespecífica por recursos ao acrescentar um termo quadrático, está apresentado abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2. \end{cases} \quad (3.5)$$

As soluções de 3.5 não são, em geral, periódicas, como podemos observar na simulação abaixo.

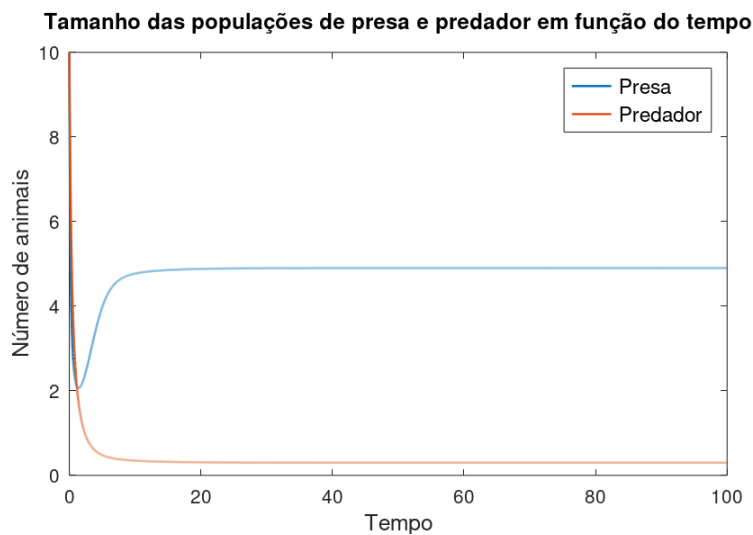


Figura 21 – Simulação numérica do modelo 3.5 com parâmetros:  $a = 1.1$ ,  $b = 0.4$ ,  $c = 0.4$ ,  $d = 0.1$ ,  $e = 0.2$  e  $f = 0.3$

Ainda assim, há controvérsias entre os cientistas. No geral, devemos ter em mente de que existem muitas interações predador-presa que não podem ser modeladas por um sistema de EDO's, enquanto outras ainda requerem mais adaptações.

Outro ponto importante a ser observado acerca do sistema 3.1 de Lotka-Volterra é que não modela um ciclo ecologicamente estável, isto é, um ciclo que é insensível à perturbações externas. Afinal, como suas órbitas são infinitos ciclos, com exceção do ponto de equilíbrio, ao ocorrer uma perturbação em um ponto  $p_1$  de um ciclo  $\Gamma_1$  no instante  $t_1$ , que leva ao ponto  $p_2$  que pertence à outro ciclo  $\Gamma_2$  nesse mesmo instante, a população permanecerá em  $\Gamma_2$  até uma nova influência externa, sem retornar ao ciclo inicial  $\Gamma_1$  naturalmente. Como os únicos ciclos populacionais que podem existir na natureza devem ser ecologicamente estáveis, isto é, isolados - em outras palavras, ciclos limite -, as equações de Lotka-Volterra apresentam ainda esse problema.



No entanto, ainda é um modelo importante para entender a dinâmica de populações, vendo a simplificação da realidade como uma forma de focar no comportamento oscilatório das populações de predador-presa. Para quem ainda não estiver satisfeito, pode-se considerar o sistema 3.5 com os coeficientes  $e$  e  $f$  positivos e pequenos o suficiente em relação aos demais. Assim, ainda teremos algo próximo de Lotka-Volterra, mas nesse caso, considerando ainda o ponto inicial próximo do ponto de equilíbrio, será uma espiral bem enrolada se aproximando lentamente do ponto de equilíbrio, parecendo como um ciclo, mas sem a instabilidade.



# Referências

- 1 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: Perseus Books Publishing, 1994. ISBN 0-201-54344-3. Citado na página 19.
- 2 MARTINS, R. M. Tópicos sobre sistemas de filipov. *Notas de aula - MM896*. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/cursos/2022-1-mm896/notas-de-aula-mm896.pdf>>. Citado na página 19.
- 3 GATTO, M. On volterra and d'ancona's footsteps: The temporal and spatial complexity of ecological interactions and networks. *Italian Journal of Zoology*, v. 76:1, p. 3–15, Mar. 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/11250000802364657>>. Citado na página 27.
- 4 LUCAS, M. B. E. A. W. F. *Modules in applied mathematics*. [S.l.: s.n.], 1983. ISBN 978-1-4612-5429-4. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 37.
- 5 H, S. K. C. Lotka – volterra model. *Dept. of Agril. Entomology, College of Agriculture, Raichur*. Disponível em: <<https://doc-14-bs-apps-viewer.googleusercontent.com/viewer/secure/pdf/1ql466q3e3mf7e2287av6l3606qd471f/fvfd5lj85m519bkvd9a71b24oe93mm61/1665661200000/gmail/07209128082304581305/ACFrOgBZH7zUf11kw09UkDz75KmZBmwLp2tp3-o8VpOtP-elgND30GcmuyAQ7YbhuOSJjnMYTAw4unBuUszaeILqqWQxEwNKSNUtgpv3gpH7ghRbV7XFuaoE4Jc=?print=true>>. Citado na página 27.
- 6 MEDEIROS, M. d. L. O. A. A. Equações diferenciais ordinárias. *Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba*. Disponível em: <[http://www.mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro\\_edo.pdf](http://www.mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro_edo.pdf)>. Citado na página 28.
- 7 BRANDI, R. de L. S. . A. C. Comparação entre métodos numéricos: Runge-kutta de quarta ordem e previsor-corretor. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 7, Dez. 2016. Disponível em: <<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjUoLztkd36AhV0RLgEHby5ACkQFnoECBkQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.fc.unesp.br%2FHome%2FDepartamentos%2FMatematica%2Frevistacqd2228%2Fv07a02-comparacao-entre-metodos-numericos.pdf&usq=AOvVaw0Liy6mEWOJJgVKbIEFJ8d>>. Citado na página 30.