Relatório Final

Equações diferenciais suaves por partes e teoria do controle

Aluno: Edson Cidral Filho - RA 215125
Orientador: Dr. Ricardo Miranda Martins

1 Introdução

O estudo da Equações Diferenciais, em especial dos Sistemas Dinâmicos, são de extrema importância para a matemática e para a ciência como um todo. Sendo caso de interesse tanto em teoria quanto prática, podemos encontrar aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento.

Dentro desta grande área é que encontramos o conjunto de equações conhecidas como Equações Diferenciais Suaves por Partes (EDSPs), cujo estudo nós permite estudar, analisar e até mesmo oferecer soluções para diversas equações diferenciais descontínuas, por meio de uma gama de métodos e ferramentas. Particularmente, a regularização e o método da média.

No primeiro semestre, foi estudado o método da regularização, conceitos básicos de teoria de controle e alguns do seus exemplos, assim como a introdução ao exemplo do relógio de pêndulo.

No segundo semestre de iniciação científica, o projeto deu enfoque na aplicação do conhecimento teórico adquirido anteriormente e em novos conceitos apresentados em [3]. Dando base suficiente para o estudo e compreensão do artigo de J Llibre e M. A. Teixeira [4] sobre a prova alternativa dos resultados obtidos por M. Denny no artigo [2] que descreve e modela o relógio de pêndulo. Assim como a solução de exemplos numéricos para mostrar a qualidade do método empregado.

2 Cronograma

- jul/19-nov/19: Estudar a dissertação [1]
- dez/19-fev/20: Estudar o artigo [2] e elaboração do relatório parcial do projeto.
- mar/20-ago/20: Estudo do capítulo 11 do livro [3] e do artigo [4], utilizando como material de suporte os livros [5], [6] e [7].
- set/20: Elaboração do relatório final do projeto.

3 Regularização de Campos Vetoriais

Essa seção tem como objetivo introduzir definições e aprofundar conceitos relacionados tanto à solução quanto ao estudo qualitativo da EDSP's. Todos conceitos e definições expostos aqui foram retirados de [1].

3.1 Regiões, Regularização e Estabilidade Estrutural

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$ e considere $f : U \to \mathbb{R}$ uma função suave (C^∞) com 0 como valor regular. Seja $S = \{f^{-1}(0)\}$, $M^- = \{f^{-1}(-\infty, 0)\}$ e $M^+ = \{f^{-1}(0, \infty)\}$.

Denotamos por χ^r o espaço dos campos vetoriais C^r sobre $U(r > 1)$.

Seja $\Omega = \Omega(U, f)$ o espaço dos campos vetoriais Z sobre U definidos por:

$$Z(q) = \begin{cases} X(q) \ se \ f(q) > 0 \\ Y(q) \ se \ f(q) < 0 \end{cases}, \ onde \ X, \ Y \ \in \ \chi^r.$$

Definição 1. Dado $p \in S$. Definimos $Xf(p) := X \cdot \nabla f(p)$ e $X^2 f(p) := X \cdot \nabla Xf(p)$. Podemos então classificar S em regiões:

Região de costura: $S^c = \{p \in X | (Xf)(Yf) > 0\}$
Região de escape: $S^e = \{p \in X | (Xf) < 0 \ e \ (Yf) > 0\}$
Região de deslize: $S^d = \{p \in X | (Xf) < 0 \ e \ (Yf) > 0\}$

Tanto em $p \in S^e$ quanto $p \in S^d$ definimos $F(Z) = F(X, Y)$, dado pelo vetor no cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a S.

Definição 2. Uma função C^∞ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **Função de Transição** quando $\varphi(t) = 0$ se $t \leq -1$, $\varphi(t) = 1$ se $t \geq 1$ e $\varphi' > 0$ se $t \in (-1, 1)$.

A partir desta função definimos o que chamamos de uma φ_ε**-Regularização** de $Z = (X, Y) \in \Omega$ como a família de campos vetoriais $Z_\varepsilon \in \chi^r$ dada por

$$Z_\varepsilon(q) = (1 - \varphi_\varepsilon(f(q)))Y(q) + \varphi_\varepsilon(f(q))X(q) \ com \ \varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Exemplo 1. Dado o sistema

$$Z(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 3 + 2sgn(y) \end{cases} em \ \mathbb{R}^2$$

vemos que $f(x, y) = y$, e temos

$$y > 0 \implies \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 5 \end{cases} \implies X(x, y) = (2, 5)$$

$$y < 0 \implies \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \implies Y(x, y) = (2, 1)$$

Temos $Xf(p) = (2, 5) \cdot (0, 1) = 5$ e $Yf(p) = (2, 1) \cdot (0, 1) = 1$, portanto, $(Xf)(Yf) > 0$ e S é região de costura. Agora montemos uma regularização:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(q) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(q)))Y(q) + \varphi_\varepsilon(f(q))X(q) \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(y))Y(q) + \varphi_\varepsilon(y)X(q) \\ &= (1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right))(2, 1) + \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)(2, 5) \\ &= (2 - 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), 1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)) + (2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), 5\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)) \\ &= (1, 1 + 4\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)) \end{aligned}$$

é φ_ε-Regularização para o campo.

Para a aplicação de tais conceitos ser efetiva, precisamos que sejam impostas condições sobre $Z(X, Y)$ para garantir a estabilidade estrutural de Z_ε para qualquer função de transição com ε suficientemente pequeno e positivo. Primeiro aplicaremos tais condições de $Z(X, Y)$ em uma subvariedade bidimensional N de U e, na seção 3.2, veremos como expandir o conceito para todo o U.

Chamaremos a fronteira de N como ∂N e a restrição de um campo vetorial X em χ^r a N como

Definição 3. Chamaremos $\Sigma^r(N)$ a classe de todos os campos de vetores $X \in \chi^r$ que satisfazem as seguintes condições:

1. Todos os pontos singulares e órbitas periódicas de X' são hiperbólicos e estão contidos no interior de N.
2. Qualquer tangência entre uma trajetória de X e ∂N é quadrática.
3. X' não tem selas nem separatrizes de tangência.

3.2 Considerações Locais

Seja $p \in S$ e $Z = (X, Y)$ um campo vetorial descontínuo.

Definição 4. Seja $p \in S^d$ (resp. $p \in S^e$) um ponto crítico de $F(Z)$. Chamaremos p de **Tipo Sela** se p é singularidade repulsora (resp. atratora) de $F(Z)$ sobre S.

Definição 5. Chamaremos $p \in S$ de **Ponto de Dobra** de $X \in \chi^r$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$, ou seja, o contato entre a órbita de X e S é quadrático.

Definição 6. Um ponto $p \in S$ é **S-Regular** de Z se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $(Xf)(Yf) > 0$ ($p \in S^c$).
2. $(Xf)(Yf) < 0$, mas
$$\det[X, Y](p) = \begin{vmatrix} X_1(p) & X_2(p) \\ Y_1(p) & Y_2(p) \end{vmatrix} \neq 0$$
(ou seja, $p \in S^e$ ou $p \in S^e$ e não é ponto crítico de $F(Z)$).

Definição 7. Dizemos que $p \in S$ é um ponto **S-Singular Elementar** de $Z = (X, Y)$ se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. p é ponto de dobra de $Z = (X, Y)$.
2. (Xf)(Yf) < 0, $det[X, Y](p) = 0$ mas $\frac{d}{dt}(det[X, Y]_{|s})(p) \neq 0$. Temos que tal condição é equivalente a dizer que p é ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$.

Lema 1. Seja $p \in U$ ponto S-Regular de $Z = (X, Y)$. Então existe vizinhança V de p de U e ε_0 tal que $\forall\ \varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε não possui pontos críticos em V.

Lema 2. Seja p ponto de dobra de $Z = (X, Y)$. Temos que existe ε_0 tal que $\forall\ \varepsilon < \varepsilon_0$ teremos que: se p é ponto de dobra de X (resp Y) então

1. O contato entre as curvas $\{Xf = 0\}$ (resp. $\{Yf = 0\}$) e $\{Z_\varepsilon f = 0\}$ no nível $\{f = \varepsilon\}$ (resp. $\{f = -\varepsilon\}$) é quadrático.
2. Qualquer trajetória de Z_ε passando através de qualquer ponto q próximo de p em U com $f(q) = -\varepsilon$ (resp. $f(q) = \varepsilon$) encontra o nível $\{f(q) = \varepsilon_0\}$ (resp. $\{f(q) = -\varepsilon_0\}$).
3. Sobre a curva $\{Z_\varepsilon f(q) = 0\}$ o contato entre Z_ε e a curva $\{f = \varepsilon\}$ é quadrático.
4. Z_ε não possui pontos críticos numa vizinhança de p.

Definição 8. Assumindo as hipóteses e notações do lema anterior. Se $Xf(p) = 0$, $Yf(p) \neq 0$ e $X^2f(p) > 0$ consideramos sobre a curva $\gamma_\varepsilon = \{f = \varepsilon\}$ os conjuntos conjuntos abertos $\gamma_\varepsilon^- = \{Z_\varepsilon < 0\}$ e $\gamma_\varepsilon^+ = \{Z_\varepsilon > 0\}$. Definimos uma aplicação C^r

$$h_\varepsilon : \gamma_\varepsilon^- \to \gamma_\varepsilon^+$$

tal que u e $h_\varepsilon(u)$ estejam na mesma trajetória de Z_ε. Esta aplicação é C^r próxima da identidade.

Lema 3. Assumindo as hipóteses do lema 2 e notações da definição 8. Então nestas condições, para qualquer $u \in \gamma_\varepsilon^-$ temos que:
$$\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(u) = 0$$

Lema 4. Dado $Z = (X, Y)$ seja p ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$. Então existe ε_0 tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε tem próximo de p um ponto crítico que é sela hiperbólico ou um nó hiperbólico. Deste modo os auto-espaços associados à esta singularidade são transversais às curvas $\{f = \varepsilon\}$ e $\{f = -\varepsilon\}$.

Definição 9. Uma **S-Conexão de Sela** de $Z = (X, Y)$ em Ω é uma órbita γ de Z conectando ou um ponto de sela crítico de X ou Y e um ponto crítico de $F(Z)$ do tipo sela ou dois pontos de sela críticos de $F(Z)$, ou dois pontos de sela críticos de X ou/e Y de tal modo que é permitido aos seus pontos interiores encontrar S somente em S^c.

Corolário 1. Seja $Z = (X, Y)$ em Ω. Assumimos que X e Y estão em $\Sigma^r(U)$, todas as S-singularidades de Z são genéricas e Z não possui S-conexões de sela. Temos que existe um ε_0 tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ nós temos

1. Todo ponto crítico de Z_ε são hiperbólicos.
2. Z_ε não tem conexões de sela.

Definição 10. Dizemos que uma curva fechada γ, formada por partes de órbitas regulares de Xem M^+e órbitas regulares de Y em M^- é uma **Órbita S-Periódica** de $Z = (X, Y)$ se γ intersecta S somente em S^c e cada parte é transversal a S.

Definição 11. Dada uma Órbita S-Periódica

$$\gamma = \bigcup_{i=0}^{k} \gamma_i \ com \ \gamma_{2i} \in M^+, \ \gamma_{2i+1} \in M^-,$$

e

$$\gamma_j \cap S = \{p_j\} \cup \{p_{j+1}\}$$

podemos definir uma coleção de germes em p_j de C^r-Transformações de Poincaré

$$\eta_j : (S, p_j) \to (S, p_{j+1}), \ j = 0, \ 1, \ldots, \ k \ (associado \ a \ X \ ou \ Y)$$

tal que a função primeiro retorno associada é dada por:

$$\eta = \eta_k \circ \eta_{k-1} \circ \cdots \circ \eta_0 \ com \ \eta(p_0) = p_0.$$

Definição 12. Uma Órbita S-Periódica γ de Z é **Elementar** se a função primeiro retorno associada (em qualquer ponto $p \in \gamma$) satisfaz: $\eta'(p) \neq 1$.

Lema 5. Seja γ Órbita S-Periódica Elementar de $Z = (X, Y)$. Então existe uma vizinhança V de γ em U e um ε_0 tais que para $\varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε contém uma única órbita periódica em V, que é hiperbólica.

Definição 13. Uma curva fechada γ é **Gráfico** de $Z = (X, Y)$ se ela é formada por partes de órbitas regulares de $F(Z)$ e/ou partes de órbitas regulares de X em M^+ e/ou partes de órbitas regulares de Y em M^-.

Se um gráfico de $Z = (X, Y)$ coincide com S, ele é chamado de simples. Neste caso, S é S^e ou S^d de Z.

Lema 6. Seja γ gráfico simples de $Z = (X, Y)$. Então existe uma vizinhança V de γ em U e um ε_0 tais que para $\varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε contém uma única órbita periódica em V, que é hiperbólica.

Dado $Z = (X, Y)$, um gráfico singular está contido em M^+ ou em M^-. Vamos defini-lo apenas em M^+, focando também na análise em S^d, os outros casos são semelhantes. Seja Q uma região conexa e compacta em U com fronteira não-vazia. Denotaremos $Q^+ = \{M^+\} \cap Q$ e $Q^- = \{M^-\} \cap Q$.

Definição 14. Um Gráfico Singular $\gamma \in Q$ é caracterizado pela existência de uma curva consistindo de um arco S_1 de S e uma parte τ_0 de uma órbita de X em $M+$ tal que:

- $S_1 = S \cap Q$ é formado por dois pontos (chamados α e β). Nós definimos a orientação deste arco como sendo $S_1 = [\alpha; \beta]$. Escolhemos algum ponto (chamado 0) contido em S_1 e denotamos $I = (\alpha; \beta), I^- = (\alpha; 0)$ e $I^+ = (0; \beta)$.

- Assumimos que sobre Y não existem pontos críticos em Q^-, e X não possui pontos críticos em S_1. Além disso, em $S_1, Xf(u) = 0$ somente se $u = 0,\ e\ X^2f(0) > 0$.
- $Yf \neq 0\ e\ det[X,Y] \neq 0$ em $(\alpha;\beta)$.
- $(det[X,Y](\alpha))^2 + (det[X,Y](\beta))^2 \neq 0\ e\ se\ \beta \in \partial S^d$ então

$$det[X,Y](\beta) = 0\ mas\ D(det[X,Y]_{|s}(\beta)) \neq 0$$

  Se $Yf > 0$ sobre I então $I^+ \in S^d\ em\ Z$.

- Órbita de X passando através de 0, denotada por γ_0, está contida em Q^+ de tal modo que ela intersecta $S_1\ em\ \mu_0 \in (0;\beta)$.

  Podemos observar que se o arco $I^+ \in S^d\ em\ Z$, deduzimos que β é ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$.

Definição 15. Dizemos que γ_0 é **Gráfico Elementar** de $Z = (X,Y)$ se é singular e intersecta S no interior de $I = (\alpha;\beta)$

Lema 7. Seja γ é gráfico elementar de $Z = (X,Y)$. Então existe uma vizinhança V de γ em U e um ε_0 tais que para $\varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε contém uma única órbita periódica em V, que é hiperbólica.

Definição 16. Dizemos que uma órbita de Z é **Simples** se encontra S somente em $\overline{S^c}$.

Definição 17. Seja G a classe de todos os campos $Z = (X,Y) \in \Omega$ para os quais as seguintes condições são satisfeitas:

1. $X\ e\ Y$ estão em $\Sigma^r(M^+)$ e em $\Sigma^r(M^-)$, respectivamente.
2. Todas as S-Singularidades e S-Órbitas Periódicas de Z são elementares.
3. Nenhuma órbita simples de Z conecta um ponto de dobra de Z e um ponto crítico de $F(Z)$ ou dois pontos de dobra de Z.
4. Z não possui S-Conexões de Sela.
5. Os gráficos de Z são simples ou elementares.

Temos que todas essas definições e lemas dessa seção tem como um de seus objetivos principais provar o seguinte teorema:

Teorema: Seja $Z = (X,Y)$ em G. Então existe um número positivo ε_0 tal que para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε está em $\Sigma^r(U)$.

Este resultado é uma uma consequência direta do Corolário 1 e dos Lemas 5, 6 e 7.

4 Exemplo de Teoria do Controle

Utilizaremos de um dos problemas de Teoria do Controle, extraído e simplificado de [1], para ilustrar a aplicação da regularização de EDSP's na busca por soluções de equações de controladores.

4.1 Piloto Automático de Duas Posições para Barcos

Seja φ o desvio de um barco de seu curso pré-determinado. Desconsideremos o deslocamento lateral do barco durante sua rotação, e levando em conta os momentos $M = M(\psi)$ gerado pelo leme e $-H\frac{d\varphi}{dt}$, momentos das forças resistência, temos que, se I é o momento de inércia do barco em relação ao seu eixo vertical principal, a equação de rotação do barco tem a forma

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + H\frac{d\varphi}{dt} = M$$

Como o barco não tem estabilidade em seu curso, precisamos de um aparelho que possa gerar um equilíbrio estável em $\varphi = 0$, um controlador simples para tal tarefa, é chamado "Piloto Automático de Duas Posições", no qual o leme assume duas posições $\psi = \pm\psi_0$ que acaba por gerar momentos $M = \pm M_0$. O programa mais simples para esse controlador seria colocá-lo em função de φ e $\frac{d\varphi}{dt}$ e fazê-lo mudar a posição do leme quando o valor de seu desvio passa por $\varphi = 0$. Entretanto, é notável que seria mais efetivo mudar o curso antes de passar pelo curso desejado ($\varphi = 0$).

Utilizaremos o método chamado "Velocidade de Correção", a qual se baseia na combinação linear do desvio φ e da velocidade angular $\dot{\varphi}$ se reduzindo a zero.

$$\sigma = \varphi + b\frac{d\varphi}{dt}$$

Para $b > 0$, percebe-se que o leme mudará de posição antes do barco passar por $\varphi = 0$, como queremos. Por meio de detectores, o piloto automático detecta a mudança de sinal de σ, acionando uma chave toda vez que isso acontece, a chave por sua vez faz com que o aparelho desloque o leme para uma das posições extremas $\psi = \pm\psi_0$. Observemos que o leme está a bombordo ($\psi = -\psi_0$, $M = -M_0$) para $\sigma < 0$ e a estibordo ($\psi = +\psi_0$, $M = +M_0$) para $\sigma > 0$. Entretanto, em $\sigma = 0$, a chave desliga o aparelho, permitindo que o leme tome qualquer posição entre os seus extremos.

Escrevemos as equações do controlador com duas posições e do aparelho de pilotagem com correção de pilotagem da forma

$$M = M_0 Z\left(\varphi + b\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

onde

$$Z(\sigma) = \begin{cases} -1 \ se \ \sigma > 0 \\ +1 \ se \ \sigma < 0 \end{cases} \ e \ \ |Z(0)| \leq 1.$$

O Retrato de Fase

Primeiramente vamos simplificar as equações

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + H\frac{d\varphi}{dt} = M \ \ e \ \ M = M_0 Z\left(\varphi + b\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

do sistema introduzindo as variáveis $x, \ t^* \ e \ z$ definidas pelas relações

$$\varphi = Ax, \quad t = Tt^* \ \ e \ \ M = M_0 z$$

onde

$$A = \frac{M_0 I}{H^2} \ \ e \ \ T = \frac{I}{H}.$$

Então as equações do sistema tomam a forma

$$\ddot{x} + \dot{x} = z \ \ e \ \ z = Z(x + ky)$$

onde

$$k = \frac{b}{T} = b\frac{H}{I}$$

Como nos interessamos no caso de pequenos desvios, adicionamos a restrição $|\varphi| < \pi$, escolhemos o plano então para representar o retrato de fase do sistema. Vamos escrever $\dot{x} = y$. Então o plano x, y se divide pela Reta de Chaveamento

$$(*) \quad S = \{x + ky = 0\}$$

em duas regiões, denotadas por (i) e (ii). Temos então, na região (i) $(x + ky > 0)$ e na região (ii) $(x + ky < 0)$, respectivamente os campos vetoriais:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases}$$

Seguindo a notação anteriormente usada, definimos $f(x, y) = x + ky$ e denotamos (i) e (ii) por X e Y, respectivamente. Logo, temos que:

1. $\nabla f = (1, k)$

2. $Xf = X \cdot \nabla f = y(1-k) - k$
3. $Yf = Y \cdot \nabla f = y(1-k) + k$
4. $X^2 f = X \cdot \nabla Xf = y(k-1) - (1-k)$
5. $Y^2 f = Y \cdot \nabla Yf = y(k-1) + (1-k)$
6. $det[X, Y] = 2y$

De posse destes valores, seguiremos com a identificação de cada região da Reta de Chaveamento S e analisando a existência de Singularidades:

- **Região de Costura:**

$$(Xf)(Yf) > 0 \implies y > \frac{k}{1-k} \quad ou \quad y < \frac{-k}{1-k}$$

- **Região de Escape:**

$$\left.\begin{array}{l} Xf > 0 \\ Yf < 0 \end{array}\right\} \implies y > \frac{k}{1-k} \quad e \quad y < \frac{-k}{1-k}$$

  Contradição, não há Região de Escape

- **Região de Deslizamento:**

$$\left.\begin{array}{l} Xf < 0 \\ Xf > 0 \end{array}\right\} \implies y < \frac{k}{1-k} \quad ou \quad y > \frac{-k}{1-k}$$

- **Pontos Singulares para o Campo X:** Não existem singularidades para o campo X
- **Pontos Singulares para o Campo Y:** Não existem singularidades para o campo Y
- **Pontos Singulares para a Reta de Chaveamento:**

  1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo X:**

  $$Xf(Px) = 0 \implies y = \frac{k}{1-k}$$

  Substituindo em $(*)$, temos que

  $$x = -\frac{k^2}{1-k}$$

  Logo o ponto

  $$Px = \left(-\frac{k^2}{1-k}, \frac{k}{1-k}\right)$$

  é um possível candidato a Ponto de Dobra em relação ao Campo X. Observando que

  $$Yf(Px) = 2k \neq 0 \quad e \quad X^2 f(Px) = -1 \neq 0$$

  concluímos que Px é Ponto de Dobra em relação ao Campo X.

  2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo Y:**

  $$Yf(Py) = 0 \implies y = -\frac{k}{1-k}$$

  Substituindo em $(*)$, temos que

  $$x = \frac{k^2}{1-k}$$

  Logo o ponto

  $$Py = \left(\frac{k^2}{1-k}, -\frac{k}{1-k}\right)$$

  é um possível candidato a Ponto de Dobra em relação ao Campo Y. Observando que

  $$Yf(Py) = 2k \neq 0 \quad e \quad Y^2 f(Py) = -1 \neq 0$$

  concluímos que Py é Ponto de Dobra em relação ao Campo Y.

3. **Pontos Críticos:**

$$Xf(Pc)\cdot Yf(Pc)<0 \implies -\frac{k}{1-k}<y<\frac{k}{1-k}$$

Logo, caso haja, o Ponto Crítico estará na Região de Deslizamento.
Agora

$$det[X,Y](Pc)=0 \implies 2y=0 \implies y=0$$

Substituindo em $(*)$, temos que

$$x=0$$

Então a origem é um possível candidato a Ponto Crítico. Temos que podemos escrever os campos X e Y e função de t como:

$$\begin{cases}\dot{x}= & \alpha_1 e^{-t}-1\\ \dot{y}= -\alpha_1 e^{-t}\end{cases} \quad e \quad \begin{cases}\dot{x} & = & \alpha_2 e^{-t} & + & 1\\ \dot{y} & = & -\alpha_2 e^{-t}\end{cases}$$

Portanto

$$det[X,Y]=(\alpha_1+\alpha_2)e^{-t}$$

Temos

$$\frac{d}{dt}det[X,Y]=-(\alpha_1+\alpha_2)e^{-t}\neq 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

De onde

$$\frac{d}{dt}det[X,Y](Pc)\neq 0$$

Concluímos então que a origem é Ponto Crítico de S.

Temos que pela função $F(Z)$, a origem é um Ponto Crítico Atrator. Tais equações darão forma aos retratos de fase ($0<k<1$ e $1<k$) em [1]

A Regularização

Podemos agora aplicar a regularização no modelo que acabamos de ver, lembremos a função de transição

$$\varphi_\varepsilon(t)=\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

onde $\varphi(t)=0$ se $t\leq -1$, $\varphi(t)=1$ se $t\geq 1$ e $\varphi'>0$ se $t\in(-1,1)$.

Apliquemos na função:

$$\begin{aligned}Z_\varepsilon(q)&=(1-\varphi_\varepsilon(f(q)))Y(q)+\varphi_\varepsilon(f(q))X(q)\\ &=(1-\varphi_\varepsilon(f(x,y)))Y(x,y)+\varphi_\varepsilon(f(x,y))X(x,y)\\ &=(1-\varphi_\varepsilon(x+ky))(y,-y+1)+\varphi_\varepsilon(x+ky)(y,-y-1)\\ &=(y,1-y-2\varphi_\varepsilon(x+ky))\\ &=\left(y,1-y-2\varphi(\frac{x+ky}{\varepsilon})\right)\end{aligned}$$

é uma φ_ε-Regularização para o modelo.

Reescrevendo numa forma mais organizada, teremos

$$Z_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=1-y-2\varphi(\frac{x+ky}{\varepsilon})\end{cases}$$

Estabelecemos a direção das órbitas para o campo regularizado por meio do tipo de região em S. No modelo, teremos S^d no intervalo $y=\left(-\frac{k}{1-k},\frac{k}{1-k}\right)$ e S^c no intervalo $y\neq\left[-\frac{k}{1-k},\frac{k}{1-k}\right]$, no primeiro caso, as órbitas são transversais a S e, no segundo caso, aproximam-se assintoticamente de S. Quanto ao ponto singular hiperbólico (nó atrator), ele continuará existindo no Campo $Z_\varepsilon(x,y)$ e continuará sendo um nó atrator, mas sua posição dependerá da escolha da função de transição φ. Assim obtemos os retratos de fase regularizados apresentados em [1].

5 Teorema da Média

Para sintetizar os resultados dos estudos realizados no segundo semestre, iremos expor os teoremas (encontrados em [3]) que servem de base para o uso do Método da Média (*Averaging Method*), assim como o próprio método e um exemplo numérico simples de sua utilização. Por fim, usaremos o modelo do relógio de pêndulo para dar uma aplicação prática ao método.

5.1 Função Média e Soluções Periódicas

Consideraremos o problema de valor inicial dado pela equação

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) + \varepsilon^2 g(t,x,\varepsilon), \ x(0) = x_0. \tag{1}$$

Aqui vamos assumir que $f(t,x)$ é uma função periódica de período T na variável t.

Definição 18. A função promediada associada a $f(t,x)$ é definida por

$$f_0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s,y)ds.$$

Portanto, obtemos um novo problema de valor inicial o qual será dado por

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y), \ y(0) = x_0. \tag{2}$$

Estudaremos como a solução $y(t)$ de (2) se relaciona com a solução $x(t)$ de (1):

Teorema 1. Levando em consideração os problemas (1) e (2), com $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$. Se

i. as funções f, g e $\partial f/\partial x$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M (a qual não depende de ε) em $[0,\infty) \times D$;

ii. g é Lipschitz contínua em x para $x \in D$;

iii. $f(t,x)$ tem período T em t com função promediada $f_0(x)$;

iv. $y(t)$ está contido num subconjunto contido em D.

Então $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ numa escala de tempo $1/\varepsilon$.

Agora que sabemos que o uso da função promediada traz soluções próximas do problema de valor inicial original, dadas as condições certas, podemos achar soluções periódicas para o problema apresentado. Para isso, faremos uso do próximo teorema:

Teorema 2. Considerando novamente a equação da forma

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) + \varepsilon^2 g(t,x,\varepsilon)$$

com $x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$. Supondo que $f(t,x)$ e $g(t,x,\varepsilon)$ têm período T em t, e considerando a equação promediada

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y),$$

vamos supor que

i. as funções $f, g, \partial f/\partial x, \partial^2 f/\partial x^2$ e $\partial g/\partial x$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M (a qual não depende de ε) em $[0,\infty) \times D, \ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

ii. $f(t,x)$ tem período T em t com função promediada $f_0(x)$; T é uma constante que independe de ε;

Se p é solução da equação promediada $f_0(y) = 0$, com

$$|\partial f_0(y)/\partial y|_{y=p} \neq 0$$

então existe uma solução $\varphi(t, \varepsilon)$ com periodicidade T próxima da esfera de raio p tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(t, \varepsilon) = p.$$

Exemplo 2. Com base nesses teoremas, acharemos como construir a função promediada cuja solução se aproxima da solução do sistema de forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x, y) \end{cases}, \text{ onde } P, Q \text{ são funções contínuas.} \tag{3}$$

Para colocar a equação numa forma que possamos aplicar os teoremas, precisaremos fazer uma substituição e manipulações nos termos. Começamos com a substituição: $x = r \cdot cos(\theta), y = r \cdot sen(\theta)$, o que resulta em

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \cdot sen(\theta) + r \cdot cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

colocando em forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -r \cdot sen(\theta) \\ sen(\theta) & r \cdot cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cdot cos(\theta) & r \cdot sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

substituindo em $\dot{x}, \dot{y}$, de acordo com (3),

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cdot cos(\theta) & r \cdot sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \cdot sen(\theta) + \varepsilon P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) \\ r \cdot cos(\theta) \ + \varepsilon Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) \end{pmatrix}$$

multiplicando as matrizes e simplificando, temos

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \ [cos(\theta) \cdot P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) + sen(\theta) \cdot Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta))] \\ 1 + \frac{\varepsilon}{r}[-sen(\theta) \cdot P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) + cos(\theta) \cdot Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta))] \end{pmatrix}$$

voltamos a forma de sistema de equações, agora dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \varepsilon \Big[cos(\theta) \cdot P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) + sen(\theta) \cdot Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) \Big] \\ \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 + \dfrac{\varepsilon}{r} \Big[-sen(\theta) \cdot P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) + cos(\theta) \cdot Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) \Big] \end{cases}$$

tratando as derivadas como quocientes, dividimos $\dot{r}$ por $\dot{\theta}$, obtendo

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{\varepsilon \Big[cos(\theta) \cdot P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) + sen(\theta) \cdot Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) \Big]}{1 + \dfrac{\varepsilon}{r} \Big[-sen(\theta) \cdot P(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) + cos(\theta) \cdot Q(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)) \Big]}$$

agora definimos $h(r, \theta, \varepsilon) = dr/d\theta$, queremos que a equação fique na forma $\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon)$ utilizada no teorema da média, para isso faremos o polinômio de Taylor de primeira ordem desta função h centrada em $\varepsilon = 0$, fixando r e θ,

$$h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \Big[cos(\theta) \cdot P(r, \theta) + sen(\theta) \cdot Q(r, \theta) \Big]}{1 + \dfrac{\varepsilon}{r} \Big[-sen(\theta) \cdot P(r, \theta) + cos(\theta) \cdot Q(r, \theta) \Big]}$$

$$\frac{dh(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\Big[cos(\theta) \cdot P(r, \theta) + sen(\theta) \cdot Q(r, \theta) \Big]}{\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{r} \Big[-sen(\theta) \cdot P(r, \theta) + cos(\theta) \cdot Q(r, \theta) \Big] \right)^2}$$

$$h(\varepsilon) = h(0) + \varepsilon h'(0) + O(\varepsilon^2), \text{ temos que } h(0) = 0, \text{ logo}$$

$$h(\varepsilon) = \varepsilon \ \Big[cos(\theta) \cdot P(r, \theta) + sen(\theta) \cdot Q(r, \theta) \Big] + O(\varepsilon^2)$$

A partir desta forma, definimos $f(r,\theta) = cos(\theta) \cdot P(r,\theta) + sen(\theta) \cdot Q(r,\theta)$ e assumimos que P, Q são funções 2π-periódicas em θ, segue que f é 2π-periódica em θ e assim chegamos a função média dada por $f_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta$.

Portanto, pelo teorema 2, se existe raiz p, onde $|\partial f_0(y)/\partial y|_{y=p} \neq 0$, então existe solução $\varphi(t,\varepsilon)$ entorno do círculo de raio p tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(t,\varepsilon) = p.$$

Definição 19. Dada uma sequência de $\{t_n\}$, $\varepsilon > 0$ e uma família de soluções Ψ de um sistema dinâmico, temos que um ciclo limite L é definido como

i. atrator, se para toda solução $\varphi(t) \in \Psi$ com $\varphi(0)$ ε-próximo de L temos que quando $t_n \to \infty$ então $\varphi(t_n) \to x \in L$

ii. repulsor, se para toda solução $\varphi(t) \in \Psi$ com $\varphi(0)$ ε-próximo de L temos que quando $t_n \to -\infty$ então $\varphi(t_n) \to x \in L$

Para casos onde há mais de um ciclo limite, é suficiente assumir $\varepsilon < min\{d(L_i, L_j)\}$, onde $d(L_i, L_j)$ seria a menor distância entre quaisquer dois pontos de ciclos limites distintos.

5.2 Número Máximo de Ciclos Limites

Estudaremos o caso onde P, Q são polinômios nas variáveis x, y de grau finito, onde mostraremos uma maneira de determinar o número máximo de ciclos limites que podemos achar pelo método da média, dados os graus de P, Q.

Proposição 1. Dado um sistema dinâmico com $x \in D \subset R^n, t \geq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = \quad x + \varepsilon Q(x,y) \end{cases}, \text{ onde } P, Q \text{ são polinômios finitos e ao menos um não-nulo.}$$

Então, o teorema da média pode mostrar no máximo $\frac{m-1}{2}$ ciclos limites na solução deste sistema, onde m é o maior ímpar tal que $m \leq max\{deg(P), deg(Q)\}$.

Demonstração 1. Como P, Q são polinômios finitos em variáveis x, y, sabemos que existe um $n = max\{deg(P), deg(Q)\}$ e podemos reescrever os polinômios como

$$\begin{cases} P(x,y) \;=\; P_n(x,y) \;=\; \sum_{i+j=0}^{n} a_{i,j} \cdot x^i y^j \\ Q(x,y) \;=\; Q_n(x,y) \;=\; \sum_{i+j=0}^{n} b_{i,j} \cdot x^i y^j \end{cases}$$

Ao fazer a mudança de coordenadas $x = r \cdot cos(\theta), y = r \cdot sen(\theta)$, obteremos que

$$\begin{cases} P_n(r,\theta) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{i,j} r^{i+j} \cdot cos(\theta)^i sen(\theta)^j \\ Q_n(r,\theta) = \sum_{i+j=0}^{n} b_{i,j} r^{i+j} \cdot cos(\theta)^i sen(\theta)^j \end{cases}$$

é fácil ver que P_n e Q_n são funções 2π-periódicas em θ, portanto, podemos utilizar o resultado anterior para criar a função média para este sistema.

Definido $f(r,\theta) = cos(\theta) \cdot P_n(r,\theta) + sen(\theta) \cdot Q_n(r,\theta)$, temos que a função média será dada por

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta, \text{ abrindo } f(r,\theta), \text{ teremos}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Bigg[\sum_{i+j=0}^{n} a_{i,j} r^{i+j} \cdot cos(\theta)^{i+1} sen(\theta)^j + \sum_{i+j=0}^{n} b_{i,j} r^{i+j} \cdot cos(\theta)^i sen(\theta)^{j+1} \Bigg] d\theta,$$

porém, temos que $\int_0^{2\pi} cos(\theta)^i sen(\theta)^j d\theta = 0 \Leftrightarrow i \equiv 1 \ (mod \ 2) \ ou \ j \equiv 1 \ (mod \ 2)$, segue que $\int_0^{2\pi} cos(\theta)^i sen(\theta)^j d\theta \neq 0 \Leftrightarrow i \equiv j \equiv 0 \ (mod \ 2)$. Portanto, tomando m ímpar $\in \mathbb{N} \mid n-1 \leq m \leq n$, temos

$$
\begin{aligned}
f_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{\frac{m-1}{2}} \Bigg[a_{2i+1,2j} r^{2i+2j+1} \cdot cos(\theta)^{2i+2} sen(\theta)^{2j} \\
&\qquad + b_{2i,2j+1} r^{2i+2j+1} \cdot cos(\theta)^{2i} sen(\theta)^{2j+2} \Bigg] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{i+j=0}^{\frac{m-1}{2}} (r^{2i+2j+1}) \Bigg[a_{2i+1,2j} \int_0^{2\pi} cos(\theta)^{2i+2} sen(\theta)^{2j} d\theta \\
&\qquad + b_{2i,2j+1} \int_0^{2\pi} cos(\theta)^{2i} sen(\theta)^{2j+2} d\theta \Bigg]
\end{aligned} \tag{4}
$$

para simplificar a notação, definimos os coeficientes $c_{2i+1,2j} = a_{2i+1,2j} \int_0^{2\pi} cos(\theta)^{2i+2} sen(\theta)^{2j} d\theta$ e $d_{2i,2j+1} = b_{2i,2j+1} \int_0^{2\pi} cos(\theta)^{2i} sen(\theta)^{2j+2} d\theta$, obtemos

$$
\begin{aligned}
f_0(r) &= \sum_{i+j=0}^{\frac{m-1}{2}} r^{2i+2j+1} \frac{(c_{2i+1,2j} + d_{2i,2j+1})}{2\pi}, \text{ escolhendo } k_\xi = \sum_{2i+2j+1=\xi} \frac{(c_{2i+1,2j} + d_{2i,2j+1})}{2\pi}, \\
&= \sum_{\xi \in I} k_\xi r^\xi = k_1 r + k_3 r^3 + k_5 r^5 + ... + k_m r^m, \text{ onde } I = \{1, 3, 5, ..., m\}.
\end{aligned}
$$

Dado que os coeficientes k_ξ são independentes entre si, podemos escolhê-los de modo conveniente tal que dado $\xi \in I$ temos que:

$$Sgn(k_\xi) = (-1)^{\frac{\xi-1}{2}} Sgn(k_1),$$

ou seja, os sinais dos coeficientes não-nulos de $f_0(r)$ serão alternados ordenadamente, portanto, teremos ao todo $\frac{m-1}{2}$ mudanças seguidas de sinais e podemos usar a Regra de Sinais de Descartes obtendo que para toda equação desta forma, teremos, no máximo, $\frac{m-1}{2}$ raízes positivas, por fim, precisamos apenas mostrar que sempre existe, pelo menos, um polinômio de grau m que satisfaça esta quantidade de raízes.

Simples, construímos o polinômio

$$M(r) = r \prod_{l=1}^{\frac{m-1}{2}} (r^2 - l^2), \tag{5}$$

logo, pela construção de M(r), temos que o seu conjunto de soluções reais positivas será dado por $S_+ = \{l > 0 | M(l) = 0\} = \{1, 2, ..., \frac{m-1}{2}\}$ e, pelo teorema da média, teremos então a existência de um ciclo limite próximo a cada círculo de raio $r_0 \in S_+$.

Concluímos que podemos achar, no máximo, $\frac{m-1}{2}$ ciclos limites utilizando o método da média para o sistema dinâmico dado. □

5.3 Exemplo e Solução Numérica

Exemplo 3. Dado um sistema dinâmico com $x \in D \subset R^n$:

$$
\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_{11}(x,y) \\ \dot{y} = \ \ x + \varepsilon Q_{11}(x,y) \end{cases}, \text{ onde } \begin{cases} P_{11}(x,y) = & \sum_{i+j=0}^{11} a_{i,j} \cdot x^i y^j \\ Q_{11}(x,y) = & \sum_{i+j=0}^{11} b_{i,j} \cdot x^i y^j \end{cases}
$$

Achemos um conjunto de coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ tal que este sistema tenha o máximo de ciclos limites, por simplicidade, vamos nos restringir aos coeficientes $a_{i,0}$ e $b_{0,j}$, ou seja, teremos $P_{11}(x,y) = \sum_{i=0}^{11} a_{i,0} \cdot x^i$ e $Q_{11}(x,y) = \sum_{j=0}^{11} b_{0,j} \cdot y^j$.

Como o sistema dado se encaixa na forma usada na proposição 1, sabendo que $n = max\{deg(P_{11}, Q_{11}\} = 11$, temos que o maior ímpar m tal que $m \leq 11$ é o próprio $m = 11$, portanto, pela equação (4), sua função será dada por

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=0}^{5}(r^{2s+1})\left[a_{2s+1,0}\int_0^{2\pi} cos(\theta)^{2s+2}d\theta + b_{0,2s+1}\int_0^{2\pi} sen(\theta)^{2s+2}d\theta\right],$$

resolvendo as integrais, caímos na equação

$$\begin{aligned} f_0(r) = \frac{1}{2\pi}\Big[&(a_{1,0}+b_{0,1})\pi r + (a_{3,0}+b_{0,3})\pi\frac{3}{4}r^3 + (a_{5,0}+b_{0,5})\pi\frac{5}{8}r^5 \\ &+(a_{7,0}+b_{0,7})\pi\frac{35}{64}r^7 + (a_{9,0}+b_{0,9})\pi\frac{63}{128}r^9 + (a_{11,0}+b_{0,11})\pi\frac{231}{512}r^{11}\Big], \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} f_0(r) = &(a_{1,0}+b_{0,1})\frac{1}{2}r + (a_{3,0}+b_{0,3})\frac{3}{8}r^3 + (a_{5,0}+b_{0,5})\frac{5}{16}r^5 \\ &+(a_{7,0}+b_{0,7})\frac{35}{128}r^7 + (a_{9,0}+b_{0,9})\frac{63}{256}r^9 + (a_{11,0}+b_{0,11})\frac{231}{1024}r^{11}. \end{aligned}$$

Usando uma construção parecida com a do polinômio M(r) em (5), teremos o polinômio

$$M(r) = \frac{1}{2}r\prod_{l=1}^{5}(r^2 - l) = -120r + 274r^3 - 225r^5 + 85r^7 - 15r^9 + r^{11},$$

Escolhendo os coeficientes

$$\begin{cases} a_{1,0} = b_{0,1} = & -120 \\ a_{3,0} = b_{0,3} = & \frac{1096}{3} \\ a_{5,0} = b_{0,5} = & -360 \end{cases} \begin{cases} a_{7,0} = b_{0,7} = & \frac{1088}{7} \\ a_{9,0} = b_{0,9} = & \frac{-640}{21} \\ a_{11,0} = b_{0,11} = & \frac{512}{231} \end{cases}$$

teremos que $M(r) = f_0(r)$, e o conjunto de raízes positivas de f_0 será dado pelo conjunto $S_+ = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 4, \sqrt{5}\}$.

Portanto, pelo Teorema da Média, existe um ciclo limite entorno de cada círculo de raio $r_0 \in S_+$ e achamos um conjunto de coeficientes tais que o sistema possui $\frac{m-1}{2}$ ciclos limites, seu máximo.

Exemplo 4. Usaremos um código em Python para calcular e construir o gráfico das soluções numéricas do exemplo 3.

```
import matplotlib._color_data as mcd
import matplotlib.colors as mcolors
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as mpatches
import matplotlib as mpl
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from scipy import *

mpl.style.use('bmh')
fig = plt.figure(figsize=(15,15))

#definimos uma função que representará nosso sistema dinâmico
def Linear(X, t):
    x,y = X
    dx = -y + 0.001*(-120*(x**1) + 1096/3*(x**3) - 360*(x**5) + 1088/7*(x**7)
     - 640/21*(x**9) + 512/231*(x**11))
    dy =  x + 0.001*(-120*(y**1) + 1096/3*(y**3) - 360*(y**5) + 1088/7*(y**7)
     - 640/21*(y**9) + 512/231*(y**11))
```

```
    return dx, dy

#definimos o espaço no qual calcularemos a função por meio do numpy
tpos = np.linspace(0, 50,1000)
tneg = np.linspace(0,-50,1000)
CIs = np.linspace(1, 5, 5)

#fazemos a resolução numérica do sistema por meio da função odeint do scipy
for P in CIs:
  xs=odeint(Linear,[math.sqrt(P-0.5),0],tpos)
  x, y = xs.T
  atr = math.sqrt(xs[-1,0]**2 + xs[-1,1]**2)
  plt.plot(x, y, lw=0.3,label='t>0', color = 'lightsalmon')
  xs=odeint(Linear,[math.sqrt(P-0.5),0],tneg)
  x, y = xs.T
  rep = math.sqrt(xs[-1,0]**2 + xs[-1,1]**2)
  plt.plot(x, y, lw=0.3,label='t<0', color = 'paleturquoise')
  if P == 5:
    xs=odeint(Linear,[math.sqrt(P+0.5),0],tneg)
    x, y = xs.T
    plt.plot(x, y, lw=0.3,label=(P,0), color = 'paleturquoise')
    xs=odeint(Linear,[math.sqrt(P),0],tneg)
    x, y = xs.T
    plt.plot(x, y, lw=2,label='t<0', color = 'mediumpurple')
    continue
  if rep < atr:
      xs=odeint(Linear,[math.sqrt(P),0],tpos)
      x, y = xs.T
      plt.plot(x, y, lw=2,label=(P,0), color = 'crimson')
  else:
      xs=odeint(Linear,[math.sqrt(P),0],tpos)
      x, y = xs.T
      plt.plot(x, y, lw=2,label=(P,0), color = 'mediumpurple')

#parâmetros do gráfico e legenda usados no matplotlib
legenda = [mpatches.Patch(color='crimson', label='Atrator'),mpatches.Patch(color='mediumpurple', label='Repulsor'),mpatches.Patch(color='paleturquoise', label='t<0'),mpatches.Patch(color='lightsalmon', label='t≥0')]
plt.legend(handles=legenda)
plt.xlabel("x",fontsize=12)
plt.ylabel("y",fontsize=12)
plt.title('Retrato de Fase',fontsize=17)
plt.tick_params(labelsize=12)
plt.xlim(-3, 3)
plt.ylim(-3, 3);

plt.savefig('gráfico.pdf')
```

Executando este código, obteremos o gráfico da figura 1, no qual podemos observar cinco ciclos limites bem definidos e que alternam entre ciclos repulsores e atratores, as soluções não-periódicas estão coloridas de acordo com o sinal de t em seus pontos, nos permitindo ver a convergência aos ciclos limites, além de ilustrar a utilidade da solução numérica em classificá-los.

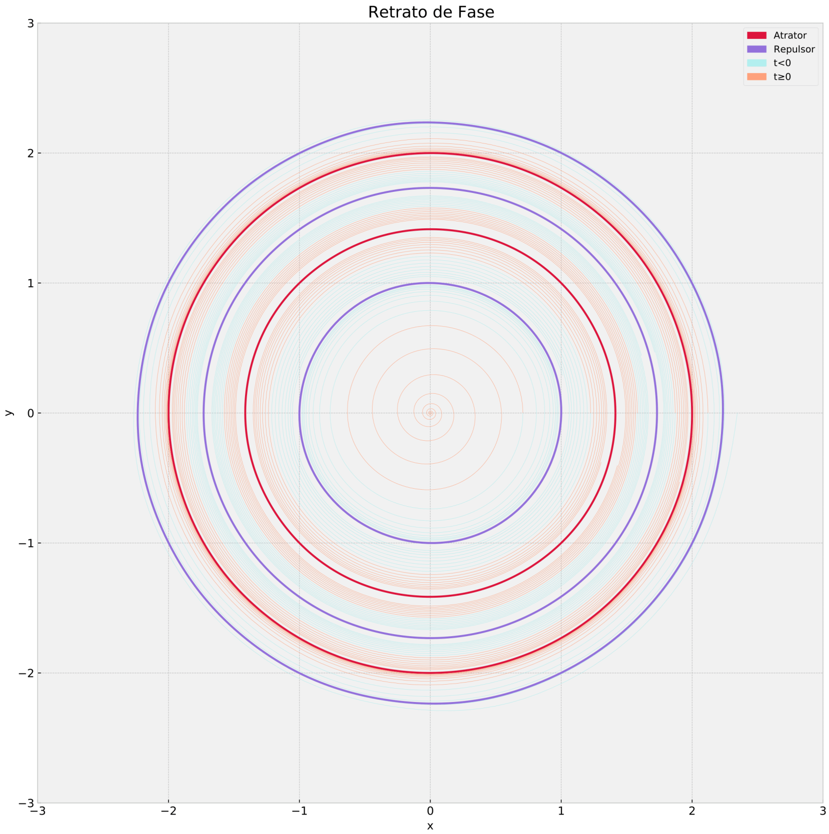

Figura 1: Cinco ciclos limites bem definidos

6 Ciclo Limite Estável de um Relógio de Pêndulo

Aqui vamos apresentar os teoremas estudados no artigo [4], para isso precisamos primeiro descrever a equação usada de modelo de relógio de pêndulo.

Temos que a equação linearizada do pêndulo é dada por

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \omega^2\theta \approx \frac{1}{\Delta t}p(t, \dot{\theta})$$

onde b é o coeficiente de atrito e a parte direita da expressão representa a influência do mecanismo de escape. Como os ângulos esperados para esse tipo de relógio são pequenos, temos que tal aproximação é ótima e serve bem como modelo. O momento angular impresso pelo mecanismo de escape é descrito pela função $p(t, \dot{\theta})$, dada por

$$p(t, \dot{\theta}) = \begin{cases} \bar{k}_+\delta(t) & \text{se } \dot{\theta} > 0 \\ \bar{k}_-\delta(t) & \text{se } \dot{\theta} < 0 \end{cases} \tag{6}$$

onde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t - 2n\pi/\omega| < \Delta t/2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

temos que $\Delta t > 0$ é pequeno, representando a fração de tempo em que ocorre o acionamento do mecanismo de escape, semelhantemente $\bar{k}_- < 0$ e $\bar{k}_+ > 0$ são os pequenos incrementos no momento angular dados pelo mesmo. Também vale notar que as derivadas na equação linearizada são em relação ao tempo t.

Vamos mostrar os teoremas em [4], assim como a forma do modelo que usaremos para montar o código para a solução de um exemplo numérico com os mesmos parâmetros que M. Denny usa em seu artigo [2].

6.1 Teoremas

Consideremos a equação dada por

$$\boldsymbol{x}'(t) = h(t, \boldsymbol{x}) + \varepsilon f(t, \boldsymbol{x}) + \varepsilon^2 g(t, \boldsymbol{x}, \varepsilon) \tag{7}$$

com $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno. Temos que as funções $h, f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ são $\mathcal{C}^2$, T-periódicas em t e D é um aberto em $\mathbb{R}^2$. Vamos assumir que o sistema não perturbado

$$\boldsymbol{x}'(t) = h(t, \boldsymbol{x}) \tag{8}$$

tem uma subvariedade de soluções periódicas.

Deixemos que $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z})$ seja uma solução de (8) tal que $\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$. Escreveremos a linearização do sistema através da sua solução $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z})$ como

$$\boldsymbol{y}'(t) = D_{\boldsymbol{x}} h(t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z}))\boldsymbol{y} \tag{9}$$

Definiremos $M_{\boldsymbol{z}}(t)$ uma matriz fundamental do sistema diferencial linear (9).

Teorema 3. Assumimos que existe um conjunto aberto e limitado V com $\overline{V} \subset D$ tal que para cada $\boldsymbol{z} \in \overline{V}$, a solução $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z})$ é T-periódico em t; então consideramos a função

$$f_0(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{\boldsymbol{z}}^{-1}(t, \boldsymbol{z}) f(t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z}))dt$$

i. Se existe $a \in V$ tal que $f_0(a) = 0$ e $det((df_0/dt)(a)) \neq 0$, então existe uma solução T-periódica $\varphi(t, \varepsilon) \to a$ quando $\varepsilon \to 0$.

ii. Se todos os autovalores de $(df_0/dt)(a)$ possuem módulo diferente de 1, então para $|\varepsilon| > 0$ suficiente pequeno, a solução periódica correspondente $\varphi(t, \varepsilon)$ de (7) é hiperbólica e do mesmo tipo de estabilidade do ponto singular a do sistema médio $\boldsymbol{x}'(t) = f_0(x)$.

Teorema 4. A equação diferencial

$$\ddot{\theta} + \bar{b}\dot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{1}{\Delta t} p(t, \dot{\theta}), \tag{10}$$

onde a função $p(t, \dot{\theta})$ vem de (6), para $\Delta t > 0$ suficientemente pequeno tem um ciclo limite estável que tende a órbita periódica

$$\frac{\bar{k}_+}{b\pi} sin(\omega t) \text{ se } \bar{b}\omega > 0, \qquad \frac{\bar{k}_-}{b\pi} sin(\omega t) \text{ se } \bar{b}\omega < 0$$

quando $\Delta t \to 0$.

6.2 Exemplo e Solução Numérica

Exemplo 5. A partir do sistema (10), definindo $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, $\bar{k}_- = 0$ (trataremos de um relógio de pêndulo de apenas uma batida), assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \bar{b}y + q(t, y) \end{cases} \tag{11}$$

onde

$$q(t, y) = \begin{cases} \bar{k}_+ \text{ se } y > 0 \text{ e } |t - 2n\pi/\omega| < \varepsilon/2; \\ 0. \end{cases}$$

Usaremos os mesmos parâmetros que M. Denny em [2], portanto, teremos $(\bar{b}, \bar{k}_+) = (0.22, 0.1s^{-1})$ como nossos coeficientes, o comprimento do pêndulo será $l = 1m$ e os valores iniciais $(\theta, \dot{\theta})$ serão $(10^o, 0)$. O código escrito para calcular e construir o gráfico das soluções numéricas de (11) foi

```python
import matplotlib._color_data as mcd
import matplotlib.colors as mcolors
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as mpatches
import matplotlib as mpl
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy import *

mpl.style.use('bmh')
fig = plt.figure(figsize=(15,15))

#definimos as funções que farão o impulso
def event0(T, z): s = T-((3/2)*(np.pi)/np.sqrt(9.7879)); return s
event0.direction = 1
event0.terminal = 1
def event(T, z): s = T-(2*(np.pi)/np.sqrt(9.7879)); return s
event.direction = 1
event.terminal = 1

#definimos uma função que será a base do nosso sistema dinâmico
def linear(t, z):
    x = z[0]
    y = z[1]
    dxdt = y
    dydt = -9.7879*x - 0.22*y
    dzdt = [dxdt, dydt]
    return dzdt

#aqui temos os valores iniciais, temos 10° ≅ 0.174533 rad, e o intervalo de t
z0 = [0.174533,0]
t = np.linspace(0, 5, 100000)

#aqui será realizado o plot da função e também adicionados os incrementos k_+
for p in range(0,21):
    if p == 0:
        res = solve_ivp(fun=linear, t_span=[0, 5], y0=z0,dense_output=True,t_eval=t, events=event0)
    else:
        res = solve_ivp(fun=linear, t_span=[0, 5], y0=z0,dense_output=True,t_eval=t, events=event)
    x = res.y[0, :]
    y = res.y[1, :]
    x1= res.y[0, -1]
    y1= res.y[1, -1]
    z0= [x1,y1+0.1]
    plt.plot(x*180/np.pi, y, lw=0.3, color = 'crimson')
    plt.plot(np.array([x1*180/np.pi,x1*180/np.pi]),np.array([y1,(y1+0.1)]), lw=0.3, color = 'crimson')

#parâmetros do plot
plt.xlabel("",fontsize=12)
plt.ylabel("d/dt",fontsize=12)
plt.title('Retrato de Fase',fontsize=17)
plt.tick_params(labelsize=12)
plt.savefig('pêndulo.pdf')
```

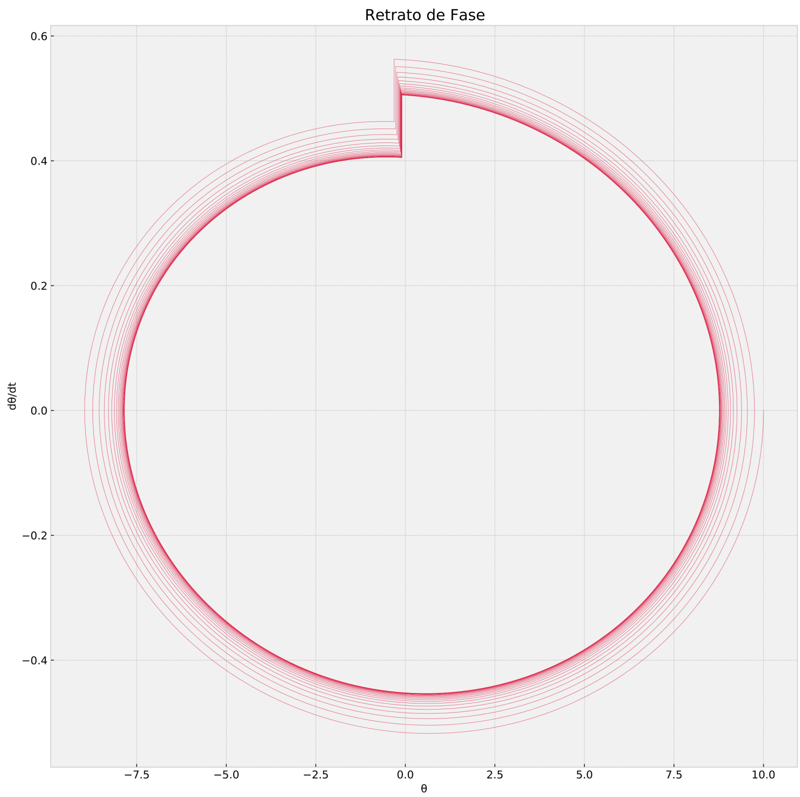

Figura 2: Um ciclo limite bem definido

Ao rodar o código, obtemos a figura 2, onde podemos ver a formação do ciclo limite estável discutido anteriormente, semelhante ao obtido no artigo [2]. Assim concluímos o exemplo e resultados obtidos durante o projeto.

Referências

[1] M. C. Verges. *Regularização e analise qualitativa de modelos da teoria do controle*. Dissertação de mestrado, Unicamp, 2003.

[2] M. Denny. *The pendulum clock: a venerable dynamical system*. Eur. J. Phys. 49-58, 2002

[3] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1990. .

[4] J. Llibre, M. A. Teixeira. *On the stable limit cycle of a weight-driven pendulum clock.*. European Journal of Physics (Print), v. 31, p. 1249-1254, 2010.

[5] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[6] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems*. Appl. Math. Sci. Series. 163, Springer, 2008.

[7] J. C. Geromel, R. H. Korogui. *Controle linear de sistemas dinâmicos*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.