



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

THAIS BORGES DAMACENA

PERTURBAÇÕES DESCONTÍNUAS DE SISTEMAS SUAVES

CAMPINAS
2016

THAIS BORGES DAMACENA

**PERTURBAÇÕES DESCONTÍNUAS DE SISTEMAS
SUAVES**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Univer-
sidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de
Doutora em matemática.

Orientador: Marco Antonio Teixeira

Coorientador: Ricardo Miranda Martins

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELA ALUNA THAIS BORGES DAMA-
CENA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCO ANTO-
NIO TEIXEIRA.

**Campinas
2016**

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140670/2014-9; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

D18p Damacena, Thais Borges, 1988-
Perturbações descontínuas de sistemas suaves / Thais Borges
Damacena. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Marco Antonio Teixeira.
Coorientador: Ricardo Miranda Martins.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Filippov, Sistemas de. 2. Teoria da bifurcação. 3. Campos vetoriais
descontínuos. I. Teixeira, Marco Antonio, 1944-. II. Martins, Ricardo
Miranda, 1983-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Discontinuous perturbations on smooth systems

Palavras-chave em inglês:

Filippov systems

Bifurcation theory

Discontinuous vector fields

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Ricardo Miranda Martins [Coorientador]

José Régis Azevedo Varão Filho

Paulo Ricardo da Silva

Cláudio Gomes Pessoa

Ronaldo Alves Garcia

Data de defesa: 29-11-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 29 de novembro de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). PAULO RICARDO DA SILVA

Prof(a). Dr(a). CLÁUDIO GOMES PESSOA

Prof(a). Dr(a). RONALDO ALVES GARCIA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

”Mesmo quando tudo parece desabar,
cabe a mim decidir entre rir ou chorar, ir ou ficar, desistir ou lutar;
Porque descobri, no caminho incerto da vida, que o mais importante é o decidir.”
Cora Coralina

*Aos meus α -limites (meus pais).
Para meu amado marido.*

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida e por todas as oportunidades que tem me dado.

Ao professor Marco, pelos conhecimentos transmitidos, pela atenção e pela paciência durante todos esses anos de estudos.

Ao professor Ricardo, pelos conhecimentos transmitidos, pela amizade e pela atenção a qual sempre demonstrou.

Aos meus pais, que são parte fundamental da minha vida. Eles são os grandes responsáveis por eu ter chegado até aqui.

Ao meu amado marido, pelo companheirismo, amizade e apoio que me fizeram não desistir no meio do caminho.

Ao meu irmão Igor pelo encorajamento e carinho de sempre.

À todos meus amigos e familiares em Goiânia que apesar de distantes, estiveram sempre presentes, torcendo e incentivando por todos esse anos.

Aos inúmeros amigos que fiz na Unicamp. Estudantes de diversas áreas que juntos a mim enfrentaram a luta na Unicamp. Foram os momentos que passamos juntos os que mais lembrarei com carinho. Em especial, Franciana, Vania, José, Shellen, Solaine e Priscila.

À família que Deus preparou para mim aqui no estado de São Paulo. Pessoas que me acolheram e fizeram a saudade de casa suportável.

Aos colegas do Imecc, Kamila, Otávio, Anna, Wender, Fernando, Iris, Douglas Duarte e Douglas Maioli pelo conhecimento compartilhado e pelos muitos momentos alegres.

Aos professores e funcionários do IMECC/Unicamp.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

E ao Cnpq e a Capes pelo suporte financeiro.

Resumo

Certos fenômenos contínuos que ocorrem, principalmente, na Engenharia (como, por exemplo, controle de sistemas), devido a certas particularidades técnicas são modelados por equações diferenciais com o segundo membro descontínuo. Esse fato nos motivou a plantear o seguinte problema: seja X um campo vetorial suave bidimensional definido em uma variedade com bordo M numa vizinhança da origem. Podemos considerar o mergulho natural do campo X no espaço de campos de vetores suaves por partes ($Z(X) = (X, X)$). Nesse contexto, primeiramente estudamos esse mergulho restrito ao subespaço dos campos vetoriais possuindo certas propriedades simétricas (sistemas com refração). Mostramos que se X é um campo estruturalmente estável então Z também será estruturalmente estável dentro do espaço dos campos com refração, o que não acontecerá no caso geral. Nos casos onde X ocorre genericamente a um parâmetro, exibimos as respectivas formas normais e os correspondentes diagramas de bifurcação. Estudamos também o comportamento local de bifurcações genéricas locais em torno de singularidades típicas em contexto mais geral. Por fim, investigamos a existência de órbitas fechadas isoladas de uma perturbação linear descontínua de um campo vetorial $Z(X)$ quando o conjunto de descontinuidade é uma variedade algébrica no plano e X possui um centro linear na origem.

Palavras-chave: Sistemas de Filippov, Teoria da bifurcação, Campos vetoriais descontínuos.

Abstract

Certain continuous phenomena that occur mainly in Engineering (e.g. control systems) due to certain technical particularities are modeled by differential equations with discontinuous righthand sides. This fact has motivated the following problem: let X be a two-dimensional smooth vector field defined on a manifold with boundary M in a neighborhood of the origin. We can consider the natural embedding of X at the space of the piecewise smooth vector fields ($Z(X) = (X, X)$). In this context, firstly we studied this restricted embedding on the subspace of vector fields that have certain symmetry properties (refractive systems). We showed that when X is a structurally stable field, then Z will also be structurally stable in the space of refractive fields. This will not happen in the general case. When X occurs generically in one-parameter, we presented their normal forms and the corresponding bifurcation diagrams. We also studied the local behavior of local generic bifurcations around typical singularities in a more general context. Finally, we investigated the existence of isolated closed orbits of a discontinuous linear perturbation of a vector field $Z(X)$ when discontinuity set is an algebraic manifold and X has a linear center at the origin.

Keywords: Filippov systems, Bifurcation theory, Descontinuous vector fields .

Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	15
2.1	Bifurcações Genéricas em Variedades com Bordo	15
2.2	Sistemas de Filippov	16
3	Bifurcações com Vínculo	19
3.1	Campos vetoriais com um único ponto de equilíbrio fixado em M	19
3.2	Campos vetoriais com refração	22
3.2.1	Campos vetoriais estruturalmente estáveis em Ω_{Ref}	22
3.2.2	Bifurcações de sistemas suaves sobre Ω_{Ref}	24
4	Bifurcações de Sistemas Suaves sobre Ω	34
4.1	Singularidade Nodal	34
4.1.1	Estudo das bifurcações do caso Nó/Nó	38
4.1.2	Diagrama de bifurcação do caso Nó/Nó	38
4.2	Singularidade Focal	47
4.2.1	Estudo das bifurcações do caso Foco/Foco	50
4.2.2	Diagrama de bifurcação do caso Foco/Foco	52
4.3	Singularidade do Tipo Sela	64
4.3.1	Estudo das bifurcações do caso Sela/Sela	67
4.4	Singularidade Cuspidal	87
4.4.1	Estudo das bifurcações do caso Cúspide/Cúspide	88
5	Perturbação Descontínua de um Centro Linear	102
	Referências	115

Capítulo 1

Introdução

Sejam $X, Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos vetoriais suaves definidos em uma vizinhança U da origem. Considere $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que tem 0 como valor regular. Assim, $M = f^{-1}(0) \cap U$ é uma subvariedade regular de codimensão 1. A variedade M divide o aberto U em dois conjuntos abertos:

$$M^+ = \{x \in U; f(x) > 0\} \quad e \quad M^- = \{x \in U; f(x) < 0\}.$$

Denotamos por χ_M o espaço dos campos vetoriais suaves definidos em $\{x \in U; f(x) \geq 0\}$ (ou em $\{x \in U; f(x) \leq 0\}$). No capítulo 2 (seção 2.1) definimos alguns conceitos e apresentamos alguns resultados sobre campos vetoriais contínuos definidos em variedades com bordo ([16]). No trabalho [17], M.A. Teixeira estuda as singularidades genéricas para campos vetoriais desse tipo.

Seja Ω o espaço de todos os campos vetoriais suaves por partes $Z = (X, Y)$ definidos por

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se } x \in M^+ \\ Y(x) & \text{se } x \in M^- \end{cases} \quad (1.0.1)$$

A dinâmica de Z em M^+ (respectivamente, Z em M^-) é dada pelo campo vetorial X (respectivamente, Y). Convencionamos que a dinâmica de Z sobre M é dada pela convenção de Filippov (para mais detalhes, veja [6]). Chamamos M de variedade de descontinuidade. Um campo vetorial suave por partes dessa forma é chamado sistema de Filippov. No capítulo 2 (seção 2.2) estabelecemos a notação e definimos alguns conceitos sobre sistemas de Filippov que nos serão úteis no decorrer do texto.

Um grande número de problemas da mecânica, engenharia elétrica, teoria de controle automático são descritos por sistemas não-suaves (veja, por exemplo, [1], [9]) e mais recentemente, tem tido crescente uso em campos como a ecologia, economia e neurociência (veja por exemplo, [18], [13], [12], [10], [3], [8]). Por essa razão, esses sistemas tem sido objeto de estudo de um grande número de artigos.

Alguns conceitos básicos da teoria qualitativa são estabelecidos e desenvolvidos em [6]. Em [11], os autores classificaram e estudaram todas as bifurcações de codimensão um e também algumas bifurcações globais. Complementando esse trabalho, em [7], Guardia, Seara e Teixeira apresentaram uma classificação preliminar das bifurcações de codimensão dois.

Descontinuidades são usadas, entre outros, para modelar eventos, tais como impactos, que embora suaves são “altamente” não lineares (para mais detalhes veja, [14], [4]). Por exemplo, em [13] J. Leifeld estudou um exemplo envolvendo um modelo conceitual climático, o modelo de

convecção do oceano de Welander ([18]). Nesse modelo, Welander estuda a circulação oceânica dividindo o oceano em duas regiões, o oceano de superfície e o fundo do oceano. A mistura entre as duas regiões é regida por uma função definida por partes, para demonstrar uma transição abrupta entre um estado de mistura e um estado de não mistura. Esta função descontínua é uma simplificação de uma função suave correspondente que representa o oceano “real”. No trabalho [13], a autora observou que o comportamento oscilatório se encontra tanto no sistema suave quanto no suave por partes, e que embora as bifurcações não sejam exatamente as mesmas, o sistema não suave pôde dar informações sobre o comportamento do fenômeno contínuo.

Nesta direção, estabelecemos o principal objetivo de nosso trabalho: o efeito de perturbações descontínuas de um campo vetorial suave X . Assim, consideremos um campo vetorial suave X definido em uma variedade com bordo M ($X \in \chi_M$). Podemos considerar o campo X como um sistema no conjunto dos campos vetoriais descontínuos (isto é, podemos considerar $Z = (X, X) \in \Omega$). De forma mais precisa, consideramos o mergulho:

$$\Lambda : \chi_M \longrightarrow \chi_M \times \chi_M$$

$$X \longmapsto (X, X)$$

Nesse contexto uma pergunta natural surge: Existe uma relação entre a estabilidade de X sobre χ_M e a estabilidade de $Z = (X, X)$ sobre Ω ?

À seguir exibimos um exemplo onde a estabilidade estrutural de X sobre χ_M implica na estabilidade estrutural de Z sobre Ω .

Exemplo 1.0.1. Considere uma vizinhança U da origem, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$ e $M = f^{-1}(0) \cap U$. Seja $X \in \chi_M$ tal que todos os pontos $p \in M$ são pontos M-regulares (ou seja, $X(p) \neq 0$ e $Xf(p) \neq 0 \quad \forall p \in M$). Sabemos da teoria de estabilidade estrutural para campos vetoriais suaves definidos em uma variedade com bordo que X é estruturalmente estável em χ_M . Por outro lado, em [7] é provado que $Z = (X, X)$ é equivalente a

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (1.0.2)$$

em uma vizinhança U de p . Ou seja, Z é estruturalmente estável em Ω .

Embora no exemplo anterior a estabilidade de $X \in \chi_M$ tenha implicado na estabilidade de $Z = (X, X) \in \Omega$, esse fato não é verdadeiro para todos os campos vetoriais (veja o exemplo seguinte).

Exemplo 1.0.2. Sejam U , f e M como no exemplo anterior. Considere $X \in \chi_M$ tal que $Xf(0) = 0$ e $X^2f(0) > 0$, ou seja, o campo X possui contato quadrático na origem (nesse caso, chamaremos a origem de uma singularidade do tipo dobra visível). Em [16], é provado que X é estruturalmente estável em χ_M e uma forma normal para X pode ser dada por $X = (1, x)$. Por outro lado, um desdobramento genérico para $Z = (X, X)$ em Ω pode ser dado por:

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} (1, \alpha + x) & \text{se } y > 0 \\ (1, x) & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (1.0.3)$$

O diagrama de bifurcação para essa singularidade está representado na figura 1.1.

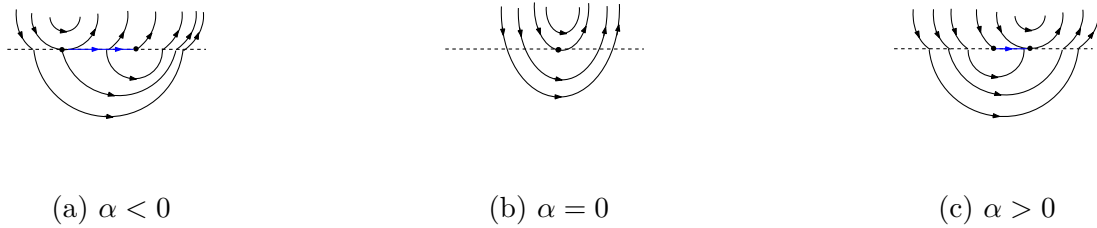


Figura 1.1: Diagrama de bifurcação do desdobramento 1.0.3

Portanto, $Z = (X, X)$ não é estruturalmente estável sobre Ω .

Tendo em mente então que a estabilidade estrutural de $X \in \chi_M$ não garantirá em geral a estabilidade estrutural de $Z = (X, X) \in \Omega$ estaremos interessados em estudar as bifurcações de $Z = (X, X)$ sobre Ω . Estudamos no capítulo 3, $Z = (X, X)$ restrito a subconjuntos dos campos vetoriais suave por partes possuindo certas propriedades simétricas. Mais especificamente, na seção 3.1, estudamos o efeito de perturbações de campos vetoriais $Z = (X, X)$ sobre o conjunto de todos os campos vetoriais $Z = (X, Y)$ tais que a origem é um ponto crítico hiperbólico não degenerado do tipo nó ou sela para os campos X e Y (denotamos esse conjunto por Ω_p). Mostramos na proposição 1 que sob certas condições, o campo vetorial $Z = (X, X)$ é estruturalmente estável em Ω_p .

Em seguida, na seção 3.2, estendemos nosso estudo para o conjunto de todos os campos vetoriais $Z = (X, Y)$ tendo a propriedade $Xf(p) = Yf(p) \forall p \in M$ (Usamos a notação $Xf(p)$ para denotar a derivada de Lie ao longo do fluxo de um campo X , dada por $Xf(p) = \langle X, \nabla f \rangle(p)$). Denotamos esse conjunto por Ω_{Ref} . Esses sistemas são conhecidos como sistemas com refração. A principal motivação para o estudo de sistemas com refração está em [5], onde o problema clássico de cálculo de variações foi transformado em classificar singularidades genéricas típicas de campos vetoriais Hamiltonianos com refração. Sistemas com refração foram estudados também em [2] onde o objetivo era classificar as singularidades de codimensão um e dois do campo vetorial tridimensional com refração $Z = (X, Y)$ quando X e Y possuem contato quadrático na origem. No teorema 3.2.1 mostramos que quando X é estruturalmente estável então $Z = (X, X)$ também será estruturalmente estável em Ω_{Ref} . Quando X tem codimensão um estudamos desdobramentos de $Z = (X, X)$ em Ω_{Ref} (veja teorema 3.2.3). Para cada um dos casos, encontramos também o diagrama de bifurcação.

No capítulo 4 estudamos desdobramentos locais de $Z = (X, X)$ sobre Ω quando X apresenta uma M -singularidade na origem (veja definição 2.1.1). Estudamos para cada um dos casos seus diagramas de bifurcação. Vimos que para os casos onde X possui uma singularidade do tipo sela ou cúspide, existem infinitas hipersuperfícies de bifurcações relacionadas com o aparecimento de órbitas heteroclínicas e homoclínicas.

Por fim, no capítulo 5 estudamos o efeito de uma perturbação descontínua em um centro linear suave quando a variedade de descontinuidade é dada pelos zeros da função $f(x, y) = xy$. Mais precisamente, estudamos campos vetoriais do tipo:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X_{\alpha, \beta}(x, y) = (-y + \alpha, x + \beta) & \text{se } xy > 0 \\ Y_{\delta, \omega}(x, y) = (-y + \delta, x + \omega) & \text{se } xy < 0 \end{cases} \quad (1.0.4)$$

Estamos interessados em investigar a existência de órbitas fechadas as quais daremos o nome de (n,k) pseudo ciclos (para mais detalhes veja a definição 5.0.1). Mostramos que é possível encontrar valores para os parâmetros de 1.0.4 de forma que o sistema $Z = (X_{\alpha,\beta}, Y_{\delta,\omega})$ possua uma única órbita fechada (veja Teorema 5.0.4).

Capítulo 2

Preliminares

Nesse capítulo vamos introduzir alguns conceitos básicos e definições os quais nos serão úteis no decorrer do texto. Apresentamos a terminologia, conceitos e alguns resultados relacionados a estabilidade de campos vetoriais definidos em uma variedade com bordo introduzidos em [16]. Posteriormente introduzimos algumas definições e convenções para campos vetoriais descontínuos, bem como apresentamos alguns resultados sobre estabilidade estrutural de tais campos.

Vamos assumir que U é uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 e que existe uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tendo 0 como um valor regular e $M = f^{-1}(0)$. A variedade M divide o aberto U em dois conjuntos:

$$\overline{M^+} = \{x \in U; f(x) \geq 0\} \quad e \quad \overline{M^-} = \{x \in U; f(x) \leq 0\}.$$

2.1 Bifurcações Genéricas em Variedades com Bordo

Denote por χ_M , o conjunto de todos os campos vetoriais suaves definidos em U e seja $X = X|_{\overline{M^+}}$ um campo vetorial em χ_M .

Definição 2.1.1. Um ponto $p \in M$ é uma singularidade do campo X se $X(p) = 0$ ou se $X(p) \neq 0$ e $Xf(p) = 0$. Quando $X(p) = 0$ dizemos que p é um ponto crítico de X . O conjunto de pontos em M onde $Xf(p) = 0$ é chamado o conjunto singular de X .

Existem dois tipos de tangências entre X e a variedade M .

Definição 2.1.2. Um campo vetorial X tem uma singularidade dobra em um ponto $p \in M$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$. Nesse caso, dizemos que o contato entre a órbita de X e M é quadrático.

Definição 2.1.3. Um campo vetorial X tem uma singularidade do tipo cúspide em um ponto $p \in M$ se $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$. Nesse caso, dizemos que o contato entre a órbita de X e M é cúbica.

Definição 2.1.4. Um campo vetorial X em um espaço topológico \mathcal{X} é dito ser estruturalmente estável sobre um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ (respectivamente relativo a \mathcal{C}) se existe uma vizinhança \mathcal{V} de X em \mathcal{X} , tal que, para todo Y na componente conexa de X em \mathcal{C} (respectivamente em $\mathcal{V} \cap \mathcal{C}$), existe um homeomorfismo $h_Y : M \rightarrow M$ aplicando arcos de órbita de Y em arcos de órbita de X , preservando sua orientação.

Denotamos por Σ_0 o conjunto de todos os campos vetoriais estruturalmente estáveis em χ_M e Σ_1 o conjunto dos campos vetoriais de codimensão 1 em χ_M .

Iremos usar nos capítulos seguintes o teorema a seguir que é provado em [16].

Teorema 2.1.5. Seja U uma vizinhança da origem, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$ e $M = f^{-1}(0)$. Então:

1. $X \in \Sigma_0$ se e somente se X é equivalente a uma das seguintes formas normais:
 - $X(x, y) = (0, 1)$ (caso regular);
 - $X(x, y) = (1, \delta x)$ with $\delta = \pm 1$ (singularidade dobra).
2. Qualquer família a um parâmetro X_λ , ($\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$) em χ_M , transversal a Σ_1 em X_0 , tem uma das seguintes formas normais:
 - $X_\lambda(x, y) = (1, \lambda + x^2)$ (singularidade cuspidal);
 - $X_\lambda(x, y) = (ax, x + by + \lambda)$, $a = \pm 1$, $b = \pm 2$ (singularidade nodal);
 - $X_\lambda(x, y) = (x, x - y + \lambda)$ (singularidade do tipo sela);
 - $X_\lambda(x, y) = (x + y, -x + y + \lambda)$ (singularidade focal).

O teorema acima nos diz que uma M -singularidade de codimensão 1 de $X \in \chi_M$ é uma cúspide ou um ponto crítico hiperbólico de X . Ainda mais, as variedades invariantes de X (estável, instável) são transversais a M .

Observação 2.1.6. Dado $X \in \Sigma_1$, as seguintes órbitas são distinguidas:

1. uma variedade invariante de um ponto de sela $p \in M$;
2. uma variedade invariante forte de um ponto nodal $p \in M$;
3. uma órbita de X tangente a M em p .

Assim, qualquer C^0 equivalência entre dois elementos de χ_M deve necessariamente preservar tais órbitas.

2.2 Sistemas de Filippov

Considere χ_M o espaço de todos os campos vetoriais suaves sobre uma variedade N munido com a topologia C^r , $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que 0 é um valor regular e $f^{-1}(0) = M$ é uma subvariedade de N . Consideramos então Ω o conjunto de todos os campos vetoriais sobre M tais que

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ Y(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \quad (2.2.1)$$

onde, $X, Y \in \chi_M$. Podemos considerar $\Omega = \chi_M \times \chi_M$ e dotarmos esse conjunto com a topologia produto. Assim nós detonamos todo elemento de Ω por $Z = (X, Y)$.

Dado $Z = (X, Y)$ em Ω , Filippov (em [6]) descreveu 3 formas básicas de dinâmica que ocorrem em M , dependendo da orientação do campo vetorial em ambos os lados da superfície M . São elas:

1. **Região de Costura (M^c):** Caracterizado por $(Xh)(Yh) > 0$. Nesse caso, a componente do campo vetorial normal a M tem a mesma direção sobre ambos os lados.
2. **Região de Escape (M^e):** Caracterizado por $Xh > 0$ e $Yh < 0$. A solução através de um ponto $p \in M$ segue a órbita do campo que tem a maior componente normal com respeito a M .
3. **Região de Deslize (M^d):** Caracterizado por $Xh < 0$ e $Yh > 0$. Nesta região definimos um campo vetorial $Z^d = Z^d(X, Y)$ (chamado campo vetorial de deslize associado a $Z = (X, Y)$) definido da seguinte maneira: Se $p \in RD$, então $Z^d(p)$ denota o vetor no cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a M . Observe que se $X(p)$ e $Y(p)$ são linearmente dependentes então p é um ponto crítico de Z^d (chamado pseudo equilíbrio de Z).

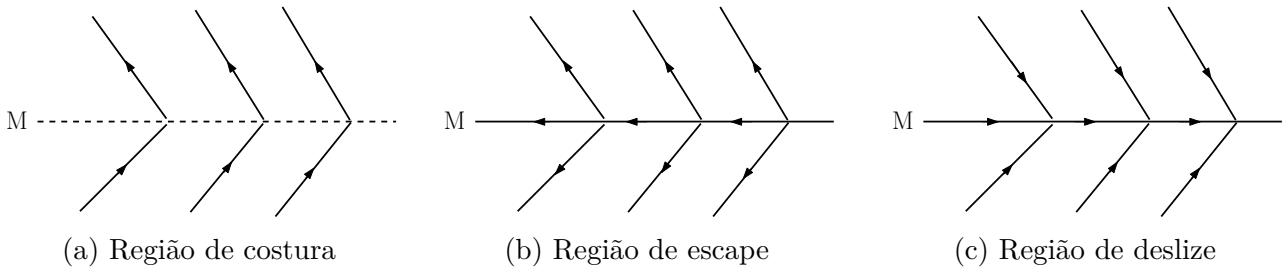


Figura 2.1: Dinâmica na variedade de descontinuidade M de um sistema bidimensional suave por partes.

$$Z^d = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)} \tag{2.2.2}$$

Definição 2.2.1. A trajetória local de um campo vetorial de Filippov da forma 2.2.1 através de um ponto p é definido como segue:

- Para $p \in M^+$ ou $p \in M^-$, a trajetória local por p é dada pela trajetória local relativa ao campo X ou Y , respectivamente.
- Para $p \in M^c$, a trajetória local de $Z = (X, Y)$ por p é dada pela concatenação dos segmentos de órbitas de X e Y .
- Para $p \in M^d \cup M^e$ existem infinitas soluções do campo $Z = (X, Y)$ que serão dadas pela solução do campo deslizante 2.2.2 ou pela concatenação de segmentos de trajetórias de X ou Y passando por p com segmento do campo vetorial deslizante 2.2.2 começando em p .

Definição 2.2.2. As singularidades de um campo vetorial de Filippov são:

- $p \in M^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou Y , isto é, $X(0) = 0$ ou $Y(0) = 0$ respectivamente.
- $p \in M^d \cup M^e$ tal que p é um pseudoequilíbrio, isto é, $Z^d(p) = 0$.
- $p \in \partial M^c \cup \partial M^d \cup \partial M^e$, isto é, os pontos de tangências (regulares e singulares).

Definição 2.2.3. Seja $Z = (X, X)$ um sistema de Filippov.

1. Se $p \notin M^+$ e $X(p) = 0$, então p é dito um ponto de equilíbrio invisível de X . Caso contrário, p é chamado ponto de equilíbrio visível de X .
2. Se $p \notin M^-$ e $Y(p) = 0$, então p é dito um ponto de equilíbrio invisível de Y . Caso contrário, p é chamado ponto de equilíbrio visível de Y .

Definição 2.2.4. Uma separatriz instável é ou:

- Uma órbita Γ que é a variedade invariante instável de um ponto de sela regular $p \in \overline{M^+}$ de X ou $p \in \overline{M^-}$ de Y , isto é,

$$\Gamma = \{q \in U \text{ tal que } \varphi_t^Z(q) \text{ é definida para } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^Z(q) = p\}.$$

Denotamos por $W^i(p)$.

- Uma órbita regular que tem uma singularidade distinguida $p \in M$ como um ponto de partida. Denotamos por $W_{\pm}^i(p)$, onde o subscrito \pm significa que ele deixa p para M^{\pm} .

Separatrizes estáveis $W^e(p)$ e $W_{\pm}^e(p)$ são definidas analogamente. Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável ela é uma separatriz de conexão.

Definição 2.2.5. Dados $Z, \tilde{Z} \in \Omega$, nós dizemos que Z e \tilde{Z} são C^0 equivalentes se existem vizinhanças abertas U e V de p em M e um homeomorfismo M -invariante $f : U \rightarrow V$ que envia órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} . Dessa definição o conceito de estabilidade estrutural em Γ^r é naturalmente obtido.

Em [7], vimos que as bifurcações locais de codimensão 1 de um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y)$ com superfície de descontinuidade $M = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ podem ser classificadas como:

1. Singularidade dobra-dobra: ambos os campos vetoriais tem uma tangência quadrática no mesmo ponto $p \in M$. Isso é, $Xf(p) = 0$, $Yf(p) = 0$, $X^2f(p) \neq 0$ e $Y^2f(p) \neq 0$.
2. Singularidade Cúspide regular: X tem um ponto cuspidal em $p \in M$ enquanto Y é transversal a M . Isto é, $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) = 0$, $X^3f(p) \neq 0$ e $Yf(p) \neq 0$.
3. Z^d tem uma singularidade sela-nó em $p \in M^d \cup M^e$. Isto é, $Z^d(p) = 0$, $(Z^d)'(p) = 0$ e $(Z^d)''(p) \neq 0$.
4. X tem um ponto crítico hiperbólico não degenerado $p \in M$ enquanto Y é transversal a M . Isto é, $X(p) = 0$, e os autovalores de $DX(p)$ tem parte real diferente de zero e $Yf(p) \neq 0$.

Capítulo 3

Bifurcações com Vínculo

Nesse capítulo estudaremos as bifurcações de $Z = (X, X)$ quando restritas a dois subconjuntos Ω_p e Ω_{Ref} de Ω tais que se $Z = (X, Y) \in \Omega_p \cup \Omega_{Ref}$ então os pontos M -singulares de X e Y coincidem numa vizinhança de um ponto $p \in M$. Como já estabelecido anteriormente, estamos denotando a variedade de descontinuidade por $M = f^{-1}(0)$. Primeiramente, consideraremos o subconjunto dos campos vetoriais $Z = (X, Y)$ tais que o ponto p é um ponto crítico hiperbólico com autovalores reais dos campos vetoriais X e Y . Em seguida, consideraremos o subconjunto dos campos vetoriais $Z = (X, Y)$ tais que para todo $p \in M$ temos $Xf(p) = Yf(p)$. É claro que nesse último caso os pontos de tangência dos campos X e Y coincidem.

3.1 Campos vetoriais com um único ponto de equilíbrio fixado em M

Considere $p \in M$, U uma vizinhança suficientemente pequena de p e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$, ou seja, $M = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. Defina χ_p da seguinte forma:

Definição 3.1.1. χ_p é o conjunto dos campos vetoriais X em χ_M tais que:

1. $X(p) = 0$;
2. os autovalores de $DX(p)$ são reais, não nulos e possuem módulos diferentes;
3. as variedades invariantes de X são transversais a M .

Denotamos por Ω_p o conjunto de todos os campos $Z = (X, Y) \in \Omega_M$ tais que $X, Y \in \chi_p$. É claro que se $X \in \chi_p$ então $Z = (X, X) \in \Omega_p$. Estamos interessados em estudar a estabilidade estrutural de $Z = (X, X)$ sobre Ω_p .

Proposição 1. *Se $X \in \chi_p$ então $Z = (X, X)$ é estruturalmente estável sobre Ω_p .*

Demonstração. Sejam $X \in \chi_M$ satisfazendo as hipóteses do teorema e λ_1 e λ_2 os autovalores de $DX(p)$. Como p é um ponto de equilíbrio hiperbólico de X (ou seja, $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$) o teorema de Hartman-Grobman (para maiores detalhes veja [15]) garante que numa vizinhança de p o campo vetorial X é equivalente a $DX(p)$.

Do estudo clássico de equações diferenciais teremos que as órbitas do campo vetorial $DX(p)$ é dada por:

$$\phi_t(c_1, c_2) = c_1 \eta^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta^2 e^{\lambda_2 t}, \quad (3.1.1)$$

onde η^1 e η^2 são os autovetores associados a λ_1 e λ_2 .

Assim teremos duas possibilidades:

1. Se $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2)$ o ponto p será um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável se os autovalores são negativos e instável se os autovalores são positivos (Esse tipo de singularidade é chamada nodal);
2. Se $\text{sgn}(\lambda_1) \neq \text{sgn}(\lambda_2)$ então as únicas soluções que passam pelo ponto p são aquelas que iniciam na reta contendo os autovetores. (Esse tipo de singularidade é chamada de sela);

Dessa forma, vamos estudar os dois casos separadamente.

- Suponha que $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Considere uma vizinhança suficientemente pequena V de $Z = (X, X)$ e seja $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in V \cap \Omega_p$.

Como $\tilde{Z} \in V \cap \Omega_p$ então p é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo nó instável para \tilde{X} e \tilde{Y} . Vamos construir um homeomorfismo h preservando M que envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z .

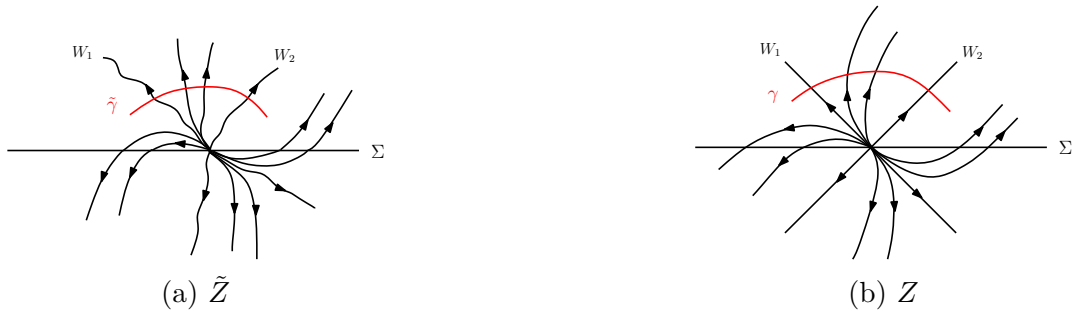


Figura 3.1: Construção do homeomorfismo h que envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z .

Sejam W_1 (respectivamente W_2) a variedade instável forte (respectivamente, fraca) de X , e W_+^1 (resp. W_+^2, W_-^1, W_-^2) a variedade instável forte de \tilde{X} (resp. variedade instável fraca de \tilde{X} , variedade instável forte de \tilde{Y} , variedade instável fraca de \tilde{Y}).

Considere também duas curvas γ e $\tilde{\gamma}$ como na figura 3.1 de forma que γ seja ortogonal as trajetórias do campo X , e $\tilde{\gamma}$ seja ortogonal as trajetórias do campo \tilde{X} .

Considere então uma função h tal que $h(q) = q \quad \forall \quad q \in M$, $h(W_{\pm}^{1,2}) = W_{1,2} \cap M^{\pm}$ e $h(\gamma) = \tilde{\gamma}$.

Assim, se $\tilde{q}_1 \in M^+$ à esquerda de W_+^1 , pelo teorema da função implícita, existe $t(\tilde{q}_1) > 0$ tal que $\varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{q}_1), \tilde{q}_1) = q_1 \in M$. Defina então $h(\tilde{q}_1) = \varphi_X(-t(\tilde{q}_1), q_1)$.



Figura 3.2: Construção do homeomorfismo h que envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z em M^+ .

Analogamente, se $\tilde{q}_2 \in M^+$ à esquerda de W_+^2 , temos que existe $t(\tilde{q}_2) < 0$ tal que $\varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{q}_2), \tilde{q}_2) = q_2 \in M$. Então $h(\tilde{q}_2) = \varphi_X(-t(\tilde{q}_2), q_2)$.

Agora, se \tilde{q} pertence a região delimitada por W_+^1 e W_+^2 , então existe $t(\tilde{q})$ (que pode ser positivo ou negativo) tal que $\varphi_{\tilde{X}}(t(\tilde{q}), \tilde{q}) = \tilde{\alpha} \in \tilde{\gamma}$. Então defina $h(\tilde{q}) = \varphi_X(-t(\tilde{q}), h(\tilde{\alpha}))$.

De forma análoga construímos h sobre a região M^- .

Assim, definimos uma função h que preserva M e envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z . Agora, para cada \tilde{x} numa vizinhança suficientemente pequena de \tilde{p} , pela construção de h , existem $s_0 \in \mathbb{R}$, x numa vizinhança de 0 tal que $\varphi_X(s_0, x) := h(\tilde{x})$. Assim, usando o teorema da dependência contínua com respeito as condições iniciais concluímos que h é contínua. Analogamente, podemos concluir que h^{-1} também é contínua e portanto h será um homeomorfismo.

- Suponha que $\text{sgn}(\lambda_1) \neq \text{sgn}(\lambda_2)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso que $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Considere uma vizinhança suficientemente pequena V de $Z = (X, X)$ e seja $\tilde{Z} = (X^+, X^-) \in V \cap \Omega_p$.

Como $\tilde{Z} \in V \cap \Omega_p$ então p é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo sela para X^+ e X^- .

Sejam W_+^s (respectivamente W_+^u, W_-^s, W_-^u) a variedade estável de X^+ (respectivamente, variedade instável de X^+ , variedade estável de X^- e variedade instável de X^-), e W^s (resp. W^u) a variedade estável (resp. instável) de X . Considere também duas curvas γ e $\tilde{\gamma}$ como na figura 3.3.

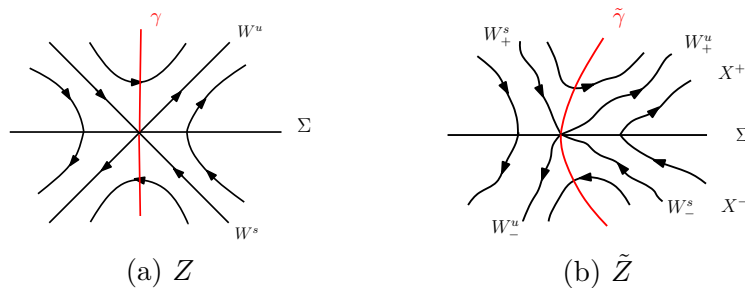


Figura 3.3: Construção do homeomorfismo h que envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z .

Iremos construir o homeomorfismo que conjuga \tilde{Z} a Z .

Considere h tal que $h(q) = q \quad \forall \quad q \in M$, $h(W_\pm^u) = W^u \cap M_\pm$, $h(W_\pm^s) = W^s \cap \Sigma_\pm$ e $h(\gamma) = \tilde{\gamma}$.

Assim, se $\tilde{q}_1 \in M^+$ à esquerda de W_+^s , temos que existe $t(\tilde{q}_1) > 0$ tal que $\varphi_{X^+}(t(\tilde{q}_1), \tilde{q}_1) = q_1 \in M$. Defina então $h(\tilde{q}_1) = \varphi_X(-t(\tilde{q}_1), q_1)$.



Figura 3.4: Construção do homeomorfismo h que envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z em M^+ .

Analogamente, se $\tilde{q}_2 \in M^+$ à esquerda de W_+^u , temos que existe $t(\tilde{q}_2) < 0$ tal que $\varphi_{X^+}(t(\tilde{q}_2), \tilde{q}_2) = q_2 \in M$. Então $h(\tilde{q}_2) = \varphi_X(-t(\tilde{q}_2), q_2)$.

Agora, se \tilde{q} pertence a região delimitada por W_+^s e W_+^u , então existe $t(\tilde{q})$ (que pode ser positivo ou negativo) tal que $\varphi_{X^+}(t(\tilde{q}), \tilde{q}) = \tilde{\alpha} \in \tilde{\gamma}$. Então defina $h(\tilde{q}) = \varphi_X(-t(\tilde{q}), h(\tilde{\alpha}))$.

De forma análoga construímos h sobre a região M_- .

Assim, definimos uma função h que preserva M e envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z . Análogo ao caso anterior, usando o teorema da dependência contínua com respeito as condições iniciais concluímos que h e h^{-1} são contínuas. Portanto h será um homeomorfismo que conjuga \tilde{Z} a Z .

□

3.2 Campos vetoriais com refração

Vamos denotar por Ω_{Ref} o conjunto de todos os campos em Ω tendo a propriedade $Xf(p) = Yf(p)$ para todo $p \in M$.

Esses sistemas são conhecidos como sistemas com refração ('refractive systems').

Se $Z = (X, Y) \in \Omega_{Ref}$, então $Xf(p)Yf(p) = Xf(p)^2 \geq 0 \forall p \in M$, ou seja, para sistemas com refração existe somente região de costura. Além disso, se $p \in M$ é um ponto singular do campo de vetores X e $Z = (X, Y) \in \Omega_{Ref}$, então p também é um ponto singular do campo de vetores Y , ou seja, o conjunto singular de X coincide com o conjunto singular de Y .

É claro que todo campo vetorial descontínuo do tipo $Z = (X, X)$ é também um campo com refração.

Estamos interessados em estudar bifurcações do campo $Z = (X, X)$ em Ω_{Ref} .

3.2.1 Campos vetoriais estruturalmente estáveis em Ω_{Ref}

Nessa seção, caracterizamos os sistemas $Z = (X, X)$ que são estruturalmente estáveis em Ω_{Ref} .

Seja X estruturalmente estável em χ_M , onde a variedade M é dada pelos zeros da função $f(x, y) = y$. Pelo teorema 2.1.5, X é equivalente a uma das seguintes formas normais:

1. $X(x, y) = (0, 1)$. Nesse caso, temos que $Xf(x, y) = 1$ e portanto X é M -regular.

2. $X(x, y) = (1, \delta x)$ com $\delta = \pm 1$. Nesse caso, $Xf(x, y) = \pm x$ e $X^2f(x, y) = \pm 1$ e portanto a origem é um ponto de dobra para o campo X .

Teorema 3.2.1. Se X é estruturalmente estável em χ_M então $Z = (X, X)$ é estruturalmente estável em Ω_{Ref} .

Demonstração. Se X é estruturalmente estável em χ_M então pelos comentários anteriores, teremos que X é equivalente a $X(x, y) = (0, 1)$ ou a $X(x, y) = (1, \delta x)$. O primeiro caso, ou seja, quando X é M -regular é análogo ao feito em [7] e por isso nos atentaremos ao caso quando X possui um ponto de dobra na origem. De fato, vamos mostrar que existe uma vizinhança W de $Z = (X, X)$ de forma que se $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \Omega_{Ref} \cap W$ então \tilde{Z} é M -equivalente a Z .

Considere $X = (1, x)$ (o caso $\delta = -1$ é tratado de maneira similar). Como X é estruturalmente estável, existe uma vizinhança U em χ_M tal que se $\tilde{X} \in U$ então \tilde{X} é equivalente a X , ou seja, existe $\tilde{p} \in M$ em uma vizinhança da origem tal que $\tilde{X}f(\tilde{p}) = 0$ e $\tilde{X}^2f(\tilde{p}) > 0$. Dessa forma, existe uma vizinhança $W = U \times U$ em $\Omega = \chi_M \times \chi_M$ tal que se $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in W \cap \Omega_{Ref}$ então $\tilde{X}f(p) = 0$ (consequentemente $\tilde{Y}f(p) = 0$) e $\tilde{X}^2f(p), \tilde{Y}^2f(p) > 0$.

Vamos construir um homeomorfismo h preservando M que envia órbitas de $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ em órbitas de $Z = (X, Y)$, onde $Y = X = (1, x)$

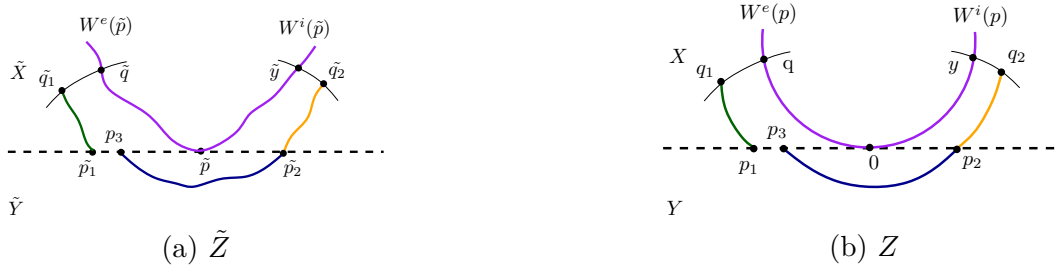


Figura 3.5: Construção do homeomorfismo h que envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z .

Identifique \tilde{p} com $p = 0$, isto é, $h(\tilde{p}) = 0$. Sejam $W^e(\tilde{p})$ uma separatriz estável de \tilde{X} (respectivamente $W^e(p)$ uma separatriz estável de X) e $W^i(\tilde{p})$ uma separatriz instável de \tilde{X} (respectivamente $W^i(p)$ uma separatriz instável de X). Identifique então $W^e(\tilde{p})$ com $W^e(p)$ por uma reparametrização pelo comprimento de arco e identifique também $W^i(\tilde{p})$ com $W^i(p)$ (isto é, $h(W^e(\tilde{p})) = W^e(p)$ e $h(W^i(\tilde{p})) = W^i(p)$). Identifique $\tilde{M}_- = \{x \in M; x < \tilde{p}\}$ com $M_- = \{x \in M; x < 0\}$ pelo comprimento de arco (ou seja, $h(\tilde{M}_-) = M_-$).

Considere $\tilde{q} \in W^e(\tilde{p})$ (respectivamente, $q \in W^e(p)$) e \tilde{T}_1 (respectivamente T_1) uma seção transversal a \tilde{X} (respectivamente X) passando por \tilde{q} (respectivamente q). Identifique \tilde{T}_1 com T_1 (isto é, $h(\tilde{T}_1) = T_1$) pelo comprimento de arco. Seja $\tilde{q}_1 \in \tilde{T}_1$ um ponto à esquerda de \tilde{q} . Usando o teorema da função implícita (TFI), existe um tempo $\tilde{t}^1 > 0$, dependendo de \tilde{q}_1 , tal que $\varphi_{\tilde{X}}(\tilde{t}^1, \tilde{q}_1) := \tilde{p}_1 \in \tilde{M}_-$. Como $h(\tilde{M}_-) = M_-$ temos que existe $p_1 \in M_-$ tal que $h(\tilde{p}_1) = p_1$. Novamente pelo TFI, existe $t_1 < 0$ (dependendo de p_1) tal que $\varphi_X(t_1, p_1) := q_1 \in T_1$.

Usando a notação $\sigma_{p_1}^{q_1}(X)$ para denotar o segmento de órbita de X ligando q_1 a p_1 , podemos então identificar $\sigma_{\tilde{p}_1}^{\tilde{q}_1}$ com $\sigma_{p_1}^{q_1}(X)$ pelo comprimento de arco (ou seja, $h(\sigma_{\tilde{p}_1}^{\tilde{q}_1}) = \sigma_{p_1}^{q_1}(X)$).

De maneira análoga, considere $\tilde{y} \in W^i(\tilde{p})$ (respectivamente, $y \in W^i(p)$) e \tilde{T}_2 (respectivamente T_2) uma seção transversal a \tilde{X} (respectivamente X) passando por \tilde{y} (respectivamente y). Identifique \tilde{T}_2 com T_2 (isto é, $h(\tilde{T}_2) = T_2$) pelo comprimento de arco. Seja $\tilde{q}_2 \in \tilde{T}_2$ um ponto à direita de \tilde{y} . Pelo TFI existe um tempo $\tilde{t}^2 < 0$, dependendo de \tilde{q}_2 , tal que

$\varphi_{\tilde{X}}(\tilde{t}_2, \tilde{q}_2) := \tilde{p}_2 \in \tilde{M}_+$. Como \tilde{p} é uma singularidade dobra, pelo TFI temos que existe $\tilde{t}_3 < 0$ tal que $\varphi_{\tilde{X}}(\tilde{t}_3, \tilde{p}_2) := \tilde{p}_3 \in \tilde{M}_-$. Assim, existe $p_3 \in M_-$ tal que $h(\tilde{p}_3) = p_3$. Como $p = 0$ é uma singularidade dobra, existe $t_3 > 0$ tal que $\varphi_Y(t_3, p_3) := p_2 \in M$. Identifique $\sigma_{\tilde{p}_3}^{\tilde{p}_2}(\tilde{Y})$ com $\sigma_{p_3}^{p_2}(Y)$ (isto é, $h(\sigma_{\tilde{p}_3}^{\tilde{p}_2}(\tilde{Y})) = \sigma_{p_3}^{p_2}(Y)$) pelo comprimento de arco.

Novamente pelo TFI, existe $t_2 > 0$ tal que $\varphi_X(t_2, p_2) := q_2 \in T_2$. Identifique então $\sigma_{\tilde{p}_2}^{\tilde{q}_2}(\tilde{X})$ com $\sigma_{p_2}^{q_2}(X)$ pelo comprimento de arco (ou seja, $h\sigma_{\tilde{p}_2}^{\tilde{q}_2}(\tilde{X}) = \sigma_{p_2}^{q_2}(X)$).

Assim, definimos uma função h que preserva M e envia órbitas de \tilde{Z} em órbitas de Z . Agora, para cada \tilde{x} numa vizinhança suficientemente pequena de \tilde{p} , pela construção de h , existem $s_0 \in \mathbb{R}$, x numa vizinhança de 0 tal que $\varphi_Z(s_0, x) := h(\tilde{x})$. Como $Z = (X, X)$, temos que $\varphi_Z(t, q) = \varphi_X(t, q)$ e portanto $h(\tilde{x}) := \varphi_Z(s_0, x)$. Assim, usando o teorema da dependência contínua com respeito as condições iniciais concluímos que h é contínua. Analogamente, podemos concluir que h^{-1} também é contínua e portanto h será um homeomorfismo. □

Teorema 3.2.2. Se $Z = (X, X)$ é estruturalmente estável em Ω_{Ref} então X é estruturalmente estável em χ_M .

Demonstração. De fato, suponha que X não seja estruturalmente estável χ_M . Então para toda vizinhança V de X em χ_M existe \tilde{X} em V tal que X não é equivalente a \tilde{X} . Logo, qualquer vizinhança $W = V_1 \times V_2$, onde $V_1, V_2 \subset V$ é tal que existe $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{X}) \in W$ de forma que Z não é equivalente a \tilde{Z} . Logo, Z não é estruturalmente estável. □

3.2.2 Bifurcações de sistemas suaves sobre Ω_{Ref}

Nessa seção caracterizaremos o sistema $Z = (X, X)$ quando X ocorre genericamente em famílias a um parâmetro. Se X ocorre genericamente a um parâmetro em χ_M , então X tem uma das formas normais listadas no teorema 2.1.5. No próximo teorema listamos perturbações para Z em Ω_{Ref} para cada um dos casos e exibimos seu diagrama de bifurcação.

Teorema 3.2.3. Seja $X \in \chi_M$ e $Z = (X, X) \in \Omega_{Ref}$. Se X ocorre genericamente em famílias a um parâmetro em χ_M então temos as seguintes perturbações para Z em Ω_{Ref} :

1. (Singularidade Cuspidal)

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} (-1, \pm x^2 + \alpha) & \text{se } y > 0 \\ (-1, \pm x^2 + \alpha) & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

2. (Singularidade Nodal)

$$Z_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} (ax + x^2 + \alpha, by - \alpha) & \text{se } x + y > 0 \\ (ax + x^2 + \beta, by - \beta) & \text{se } x + y < 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

onde, $a = \pm 1$ e $b = \pm 2$.

3. (Singularidade Focal)

$$Z_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} (-y + \beta, x + y - \beta) & \text{se } y > 0 \\ (-y + \alpha, x + y(1 + \alpha) - \beta) & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

4. (Singularidade Tipo Sela)

$$Z_{\alpha, \beta, \lambda, \mu}(x, y) = \begin{cases} (2x + x^2 + f_1, x - (1 - \lambda)y + \mu) & \text{se } y > 0 \\ ((2 + 2\alpha)x + x^2 + f_5, x - y + \mu) & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

onde,

$$f_1 = 1 - (\alpha(1 - \lambda) + (1 - \mu))^2$$

e

$$f_5 = -(\beta - \mu)^2 - 2(\beta - \mu)(1 + \alpha)$$

Demonstração. 1. Singularidade Cuspidal

Suponha que X possua um singularidade cuspidal na origem (ou seja, $Xf(0) = X^2f(0) = 0$ e $X^3f(0) \neq 0$). Segundo o teorema 2.1.5 um desdobramento para X em χ_M pode ser dado por (vamos considerar $X^3f(0) < 0$, o caso $X^3f(0) > 0$ é análogo):

$$X_\alpha = (-1, \alpha - x^2) \quad (3.2.5)$$

onde $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $M = \{(x, y); y = 0\}$.

Quando $\alpha \neq 0$ o ponto de cúspide do campo vetorial $X = X_0$ desaparece de forma que X_α é transversal a M para $\alpha < 0$. Para $\alpha > 0$ uma dobra invisível $(-\sqrt{\alpha}, 0)$ e uma dobra visível $(\sqrt{\alpha}, 0)$ aparecem.

Seja $Z_{\alpha,\beta} = (X_\alpha, Y_{\alpha,\beta})$ uma perturbação de $Z = (X_0, X_0)$ em Ω_{Ref} (onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \dots \times (-\epsilon, \epsilon)$). Como $Z_{\alpha,\beta} \in \Omega_{Ref}$ então o conjunto singular de X_α e o conjunto singular de $Y_{\alpha,\beta}$ são iguais. Além disso, como $Y_{0,0} = X_0$, então pelo teorema 2.1.5, $Y_{\alpha,\beta}$ não tem pontos singulares, ou tem um único ponto singular (que será do tipo cúspide), ou dois pontos singulares (que serão do tipo dobra). Assim, teremos que:

- Se $\alpha < 0$, X_α é transversal a M . Como o conjunto singular de $Y_{\alpha,\beta}$ coincide com o de X_α teremos então que $Y_{\alpha,\beta}$ é transversal a M para $\alpha < 0$.
- Se $\alpha > 0$, X_α possuem pontos de dobra em $(-\sqrt{\alpha}, 0)$ e $(\sqrt{\alpha}, 0)$ e portanto os únicos pontos singulares de $Y_{\alpha,\beta}$ serão nesses pontos, ou seja, os pontos $(-\sqrt{\alpha}, 0)$ e $(\sqrt{\alpha}, 0)$ serão pontos de dobra para $Y_{\alpha,\beta}$.

Pelas duas observações acima, teremos então que

$Y_{\alpha,\beta} = (-1, -x^2 + \alpha + g(\alpha, \beta)y)$, onde g é a função dada por $g(\alpha, \beta) = a_1\alpha + b_1\beta + a_2\alpha^2 + b_2\beta^2 + c_2\alpha\beta + \dots$ com a_i, b_i, c_i constantes.

- Se $\alpha = 0$, X_0 tem um único ponto singular (do tipo cúspide) na origem e portanto $Y_{0,\beta}$ deve ter um único ponto singular na origem. Como a origem é o único ponto cuspidal para $Y_{0,\beta}$ teremos então que $Y_{\alpha,\beta}^2 f(x, 0) = 0$ se e somente se, $x = 0$ e portanto, $g(\alpha, \beta) \equiv 0$.

Concluimos então que podemos tomar $Y_{\alpha,\beta} = X_\alpha$ e portanto um desdobramento para Z em Ω_{Ref} é dado por 3.2.1.

O diagrama de bifurcação é apresentado na figura 3.6:

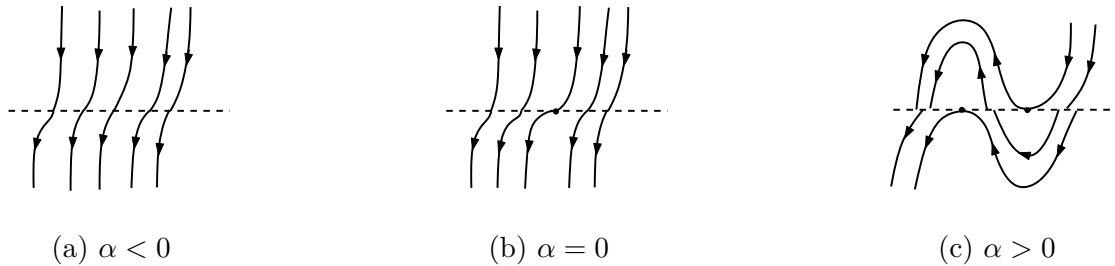


Figura 3.6: Diagrama de bifurcação do sistema 3.2.1

2. Singularidade Nodal

Suponha que X possua uma singularidade nodal na origem. Um desdobramento para X em χ_M pode ser dado por (vamos considerar o caso estável, o caso instável é estudado de maneira análoga):

$$X_\alpha = (-x + x^2 + \alpha, -2y - \alpha), \quad (3.2.6)$$

onde $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $M = \{(x, y); y = -x\}$.

Dessa forma, o campo X_α possui um ponto crítico do tipo nó que está localizado em $(x_0^X, y_0^X) = (\frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2}, -\frac{\alpha}{2})$. Esse ponto crítico será visível para $\alpha > 0$ e invisível para $\alpha < 0$. Além disso, o campo X tem uma dobra localizada em $(0, 0)$ que será visível para $\alpha > 0$ e invisível para $\alpha < 0$.

Se $Z_{\alpha,\beta} = (X_\alpha, Y_{\alpha,\beta})$ é uma perturbação de Z em Ω_{Ref} (onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \dots \times (-\epsilon, \epsilon)$), teremos que:

- $X_0 = Y_{0,0}$, e portanto, $Y = Y_{0,0}$ é um campo vetorial em χ_M que possui um ponto crítico nodal na origem. Assim, $Y_{\alpha,\beta}$ pode ser dado por $Y_{\alpha,\beta} = (-x + x^2 + f_1(\alpha, \beta), -2y + f_2(\alpha, \beta))$, onde as f_i 's são funções dadas por $f_i(\alpha, \beta) = a_1^i \alpha + b_1^i \beta + a_2^i \alpha^2 + b_2^i \beta^2 + c_2^i \alpha \beta + \dots$ com a_j^i, b_j^i, c_j^i constantes.
- o ponto $(0, 0)$ deverá ser uma dobra para o campo $Y_{\alpha,\beta}$ quando $\alpha \neq 0$, ou ainda, $Y_{\alpha,\beta} f(0, 0) = 0$. Assim, $f_1(\alpha, \beta) = -f_2(\alpha, \beta)$.

Assim, um desdobramento de $Y = Y_{0,0}$ é dado por

$$Y_\beta = (-x + x^2 + \beta, -2y - \beta), \quad (3.2.7)$$

onde $\beta \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Um desdobramento para Z em Ω_{Ref} então pode ser dado por 3.2.2. O diagrama de bifurcação de $Z_{\alpha,\beta}$ é apresentado na figura 3.7.

3. Singularidade Focal

Suponha que X possua uma singularidade focal na origem. Segundo o teorema 2.1.5 um desdobramento para X em χ_M pode ser dado por:

$$X_\beta = (-y + \beta, x + y - \beta). \quad (3.2.8)$$

onde $\beta \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $M = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$.

Dessa forma, o campo X_β possui um ponto crítico focal repulsor que está localizado em $(x_0^X, y_0^X) = (0, \beta)$. Esse ponto crítico será visível para $\beta > 0$ e invisível para $\beta < 0$. Além disso, o campo X_β possui um ponto de dobra localizado em $(\beta, 0)$ que será visível se $\beta > 0$ e invisível se $\beta < 0$.

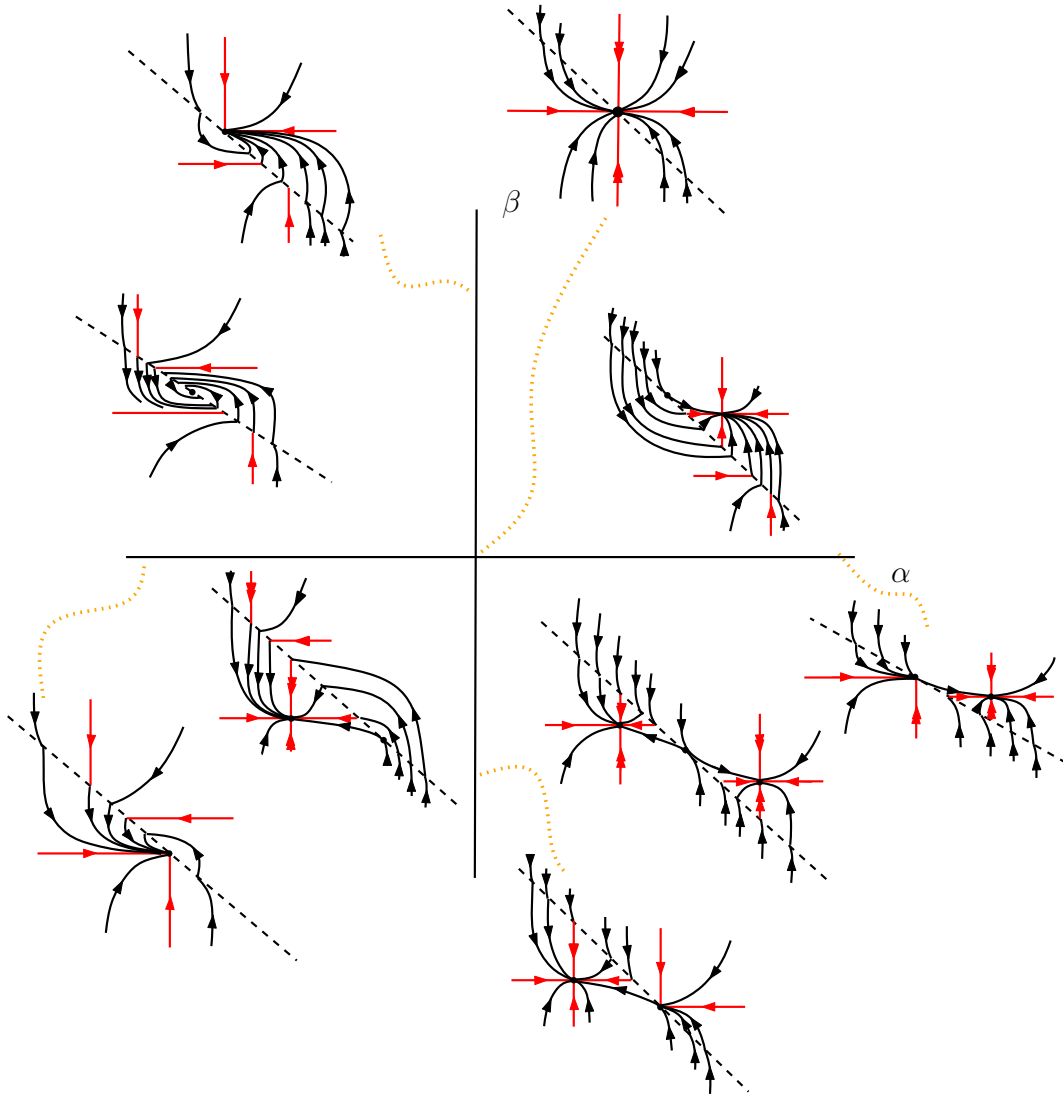


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação do sistema 3.2.2.

Seja $Z_{\alpha,\beta} = (X_\beta, Y_{\alpha,\beta})$ uma perturbação de Z em Ω_{Ref} (onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \dots \times (-\epsilon, \epsilon)$). Como o conjunto singular de X_β e de $Y_{\alpha,\beta}$ devem coincidir teremos que $(\beta, 0)$ deverá ser uma dobra para o campo $Y_{\alpha,\beta}$.

Como $M = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ então $X_\beta f(x, 0) = Y_{\alpha,\beta} f(x, 0)$ implica que $X_\beta^2(x, 0) = Y_{\alpha,\beta}^2(x, 0)$, onde $X_\beta = (X_\beta^1, X_\beta^2)$ e $Y_{\alpha,\beta} = (Y_{\alpha,\beta}^1, Y_{\alpha,\beta}^2)$. Portanto, $Y_{\alpha,\beta}^2(x, 0) = x - \beta$.

Além disso queremos que $X_0 = Y_{0,0}$, assim, $Y = Y_{0,0}$ é um campo vetorial em χ_M que possui um ponto crítico focal na origem e portanto um desdobramento de Y pode ser dado por:

$$Y_{\alpha,\beta} = (-y + \alpha, x + y(1 + \alpha) - \beta), \tag{3.2.9}$$

onde $(\alpha, \beta) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$.

Concluimos que um desdobramento de $Z = (X, X)$ em Ω_{Ref} pode ser dado por 3.2.3. O diagrama de bifurcação de Z é apresentado na figura 3.8.

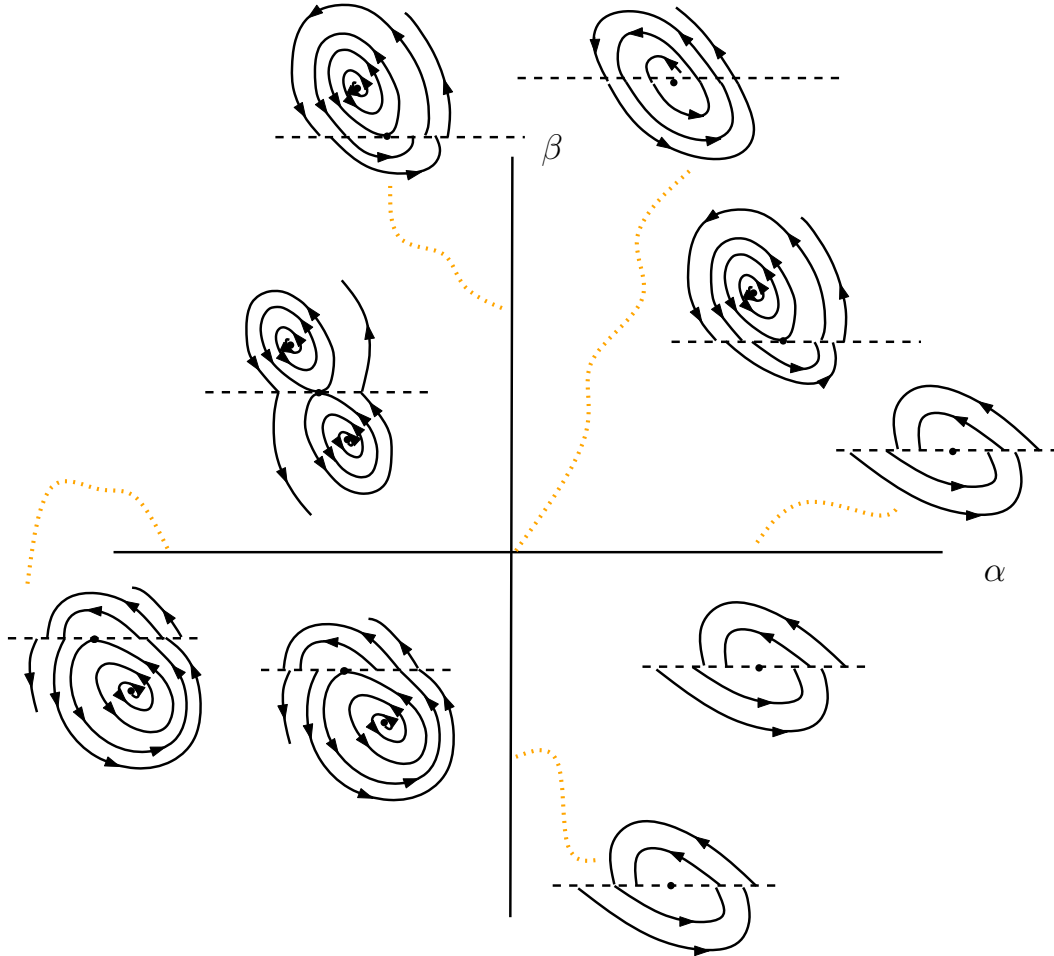


Figura 3.8: Diagrama de bifurcação do sistema 3.2.3.

4. Singularidade do Tipo Sela

Suponha que X possua um ponto crítico do tipo sela na origem.

Assim como nos casos anteriores se $Z_{\alpha,\beta}$ é um desdobramento de $Z = (X, X)$ então teremos bifurcações relacionadas a colisão do equilíbrio à variedade de descontinuidade M (chamada de boundary-equilibrium em [7]). No entanto, ao contrário dos casos anteriores, bifurcações relacionadas ao aparecimento de órbitas homoclínicas e heteroclínicas devem aparecer no desdobramento de $Z = (X, X)$ (veja por exemplo a figura 3.12). Dessa forma, precisaremos de mais parâmetros para desdobrar $Z = (X, X)$ em Ω_{Ref} . Assim, tomemos o seguinte desdobramento de X sobre χ_M :

$$X_{\alpha,\lambda,\mu}(x, y) = (2x + x^2 + f_1, x - (1 - \lambda)y + \mu) \quad (3.2.10)$$

onde $f_1 = 1 - (\alpha(1 - \lambda) + (1 - \mu))^2$.

Dessa forma, $X_{\alpha,\lambda,\mu}$ possui um ponto de equilíbrio do tipo sela localizado em

$$(x_0^X, y_0^X) = (\alpha(1 - \lambda) - \mu, \alpha), \quad (3.2.11)$$

o qual será visível para $\alpha > 0$ e invisível para $\alpha < 0$. Além disso, o campo $X_{\alpha,\lambda,\mu}$ possui um ponto de dobra localizado em $(-\mu, 0)$.

Portanto, se $Z_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} = (X_{\alpha,\lambda,\mu}, Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu})$ é uma perturbação de Z em Ω_{Ref} teremos que:

- como os pontos singulares dos campos $X_{\alpha,\lambda,\mu}$ e $Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}$ coincidem então $Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}f(x, 0) = X_{\alpha,\lambda,\mu}f(x, 0) = x + \mu$. Portanto, $Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(x, 0) = (Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^1(x, 0), x + \mu)$.
- como $X_0 = Y_0$ então, $Y = Y_0$ possui um ponto de equilíbrio de tipo sela localizado na origem. Assim, um desdobramento de Y em χ_M pode ser dado por:
 $Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} = ((2 + 2\alpha)x + x^2 + f_5, x - y + \mu)$, onde $f_5 = -(\beta - \mu)^2 - 2(\beta - \mu)(1 + \alpha)$.

Assim, um desdobramento de $Z = (X, X)$ em Ω_{Ref} pode ser dado por 3.2.4.

Na sequência vamos estudar as bifurcações de 3.2.4.

O campo $Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} = ((2 + 2\alpha)x + x^2 + f_5, x - y + \mu)$ possui um ponto de equilíbrio do tipo sela localizado em

$$(x_0^Y, y_0^Y) = (\beta - \mu, \beta), \quad (3.2.12)$$

o qual será visível para $\beta < 0$ e invisível para $\beta > 0$.

Quando $\alpha = 0$, o ponto de equilíbrio do campo X está sobre M . Nesse caso, o hiperplano $\{(0, \beta, \lambda, \mu); \beta = 0\}$ é a única bifurcação local do desdobramento $Z_{0,\beta,\lambda,\mu}$ sobre Ω_{Ref} . Essa bifurcação está relacionada a colisão do ponto de equilíbrio do campo $Y_{0,\beta,\lambda,\mu}$ com a variedade M . O diagrama de bifurcação é apresentado em 3.9.

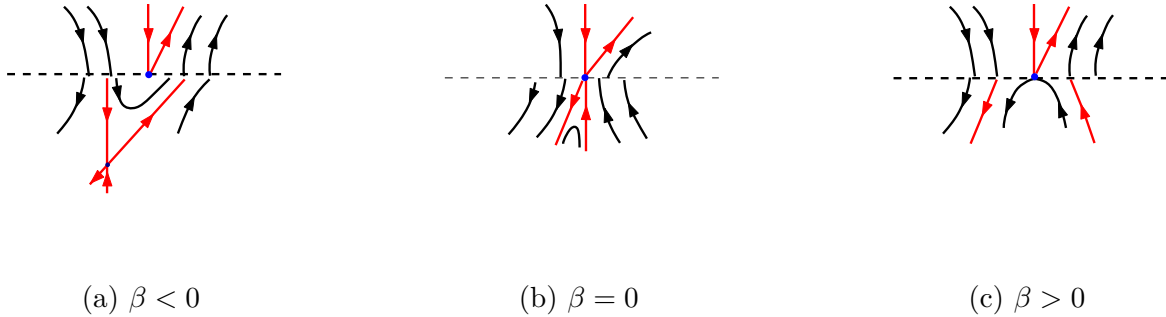
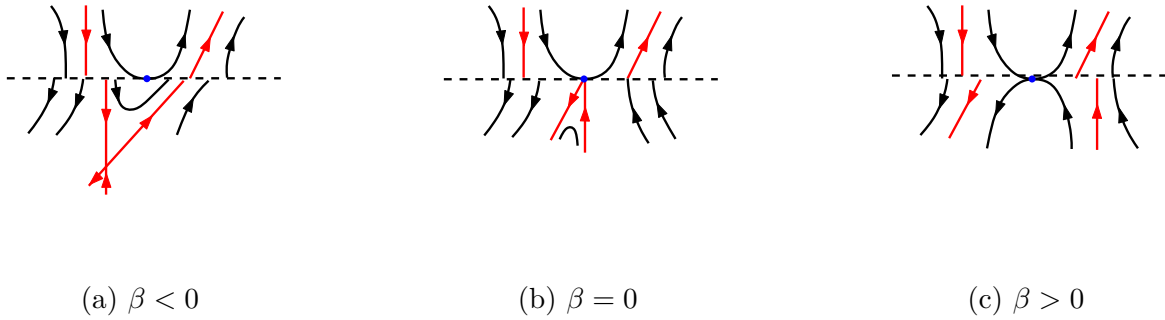


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação de 3.2.4 para $\alpha = 0$.

Quando $\alpha < 0$, o ponto de equilíbrio do campo X é invisível. Nesse caso, o hiperplano $\{(0, \beta, \lambda, \mu); \beta = 0\}$ é a única bifurcação sobre Ω_{Ref} . Essa bifurcação também está relacionada a colisão do ponto de equilíbrio do campo $Y_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}$ com a variedade M . O diagrama de bifurcação é apresentado em 3.10.

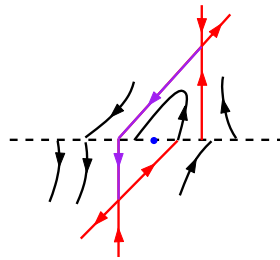

 Figura 3.10: Diagrama de bifurcação de 3.2.4 para $\alpha < 0$.

Quando $\alpha > 0$, o ponto de equilíbrio do campo X é visível. Nesse caso, o hiperplano $\{(0, \beta, \lambda, \mu); \beta = 0\}$ é uma bifurcação sobre Ω_{Ref} . Quando $\beta < 0$, precisamos estudar as posições das variedades invariantes do campo X em relação às do campo Y . Dessa forma surgem duas hipersuperfícies de bifurcação relacionadas ao aparecimento de órbitas heteroclínicas. De fato,

(a) Sobre a superfície

$$\eta_1 = \{(\alpha, \beta, \lambda, \mu); \mu = \frac{\beta - (2\lambda - 2)\alpha^2 + 2\alpha}{2\alpha}\}, \quad (3.2.13)$$

temos o surgimento de uma órbita heteroclínica (ou seja, existe $p \in M$ tal que $W_u^X \cap W_s^Y = \{p\}$). A dinâmica sobre essa superfície é apresentada na figura 3.11.


 Figura 3.11: Dinâmica do sistema 3.2.4 sobre a superfície η_1 .

(b) Sobre a superfície

$$\eta_2 = \{(\alpha, \beta, \lambda, \mu); \mu = \frac{\alpha(1 - \lambda) + 2\beta^2 + (2\alpha + 2)\beta}{2\beta}\}, \quad (3.2.14)$$

temos o surgimento de uma órbita heteroclínica ($W_s^X \cap W_u^Y = \{p\}$, onde $p = W_s^X \cap M$). A dinâmica sobre essa superfície é apresentada na figura 3.12.

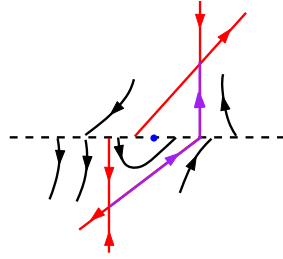
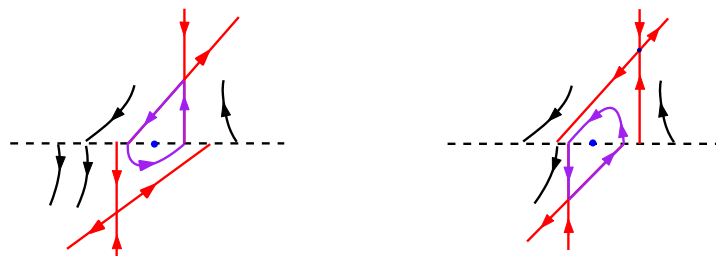


Figura 3.12: Dinâmica do sistema 3.2.4 sobre a superfície η_2

Finalmente, estudamos as regiões delimitadas por essas hipersuperfícies.

Chamaremos a interseção da variedade instável do campo X com a variedade de descontinuidade M por \bar{x}^X (respectivamente, do campo Y por \bar{x}^Y). Teremos as seguintes hipersuperfícies de bifurcação numa vizinhança de η_1 e η_2 relacionadas ao aparecimento de órbitas homoclínicas.

- (a) Na região delimitada por $x_0^Y < \bar{x}^X$ e $x_0^X < \bar{x}^Y$ existe valor dos parâmetros suficientemente pequenos para os quais se $x_1 = \varphi_{t_1}(\bar{x}^X) \cap M$ então $x_1 - x_0^X < 0$ e valores de parâmetros para os quais $x_1 - x_0^X > 0$. Pelo teorema do valor intermediário, teremos então que existem $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ para os quais $x_1 - x_0^X = 0$ (veja figura 3.13). E portanto, teremos nessa região o surgimento de uma hipersuperfície η_3 de bifurcação relacionada ao aparecimento de uma órbita homoclínica da sela do campo X .
- (b) Na região delimitada por $x_0^Y > \bar{x}^X$ e $x_0^X > \bar{x}^Y$ existe valor dos parâmetros suficientemente pequenos para os quais se $x_1 = \varphi_{t_1}(\bar{x}^Y) \cap M$ então $x_1 - x_0^Y < 0$ e valores de parâmetros para os quais $x_1 - x_0^Y > 0$. Pelo teorema do valor intermediário, teremos então que existem $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ para os quais $x_1 - x_0^Y = 0$ (veja figura 3.13). E portanto, teremos nessa região o surgimento de uma hipersuperfície η_4 de bifurcação relacionada ao aparecimento de uma órbita homoclínica da sela do campo Y .



(a) $x_0^Y < \bar{x}^X$ e $x_0^X < \bar{x}^Y$

(b) $x_0^Y > \bar{x}^X$ e $x_0^X > \bar{x}^Y$

Figura 3.13: Dinâmica do sistema 3.2.4 sobre as superfícies η_3 e η_4 .

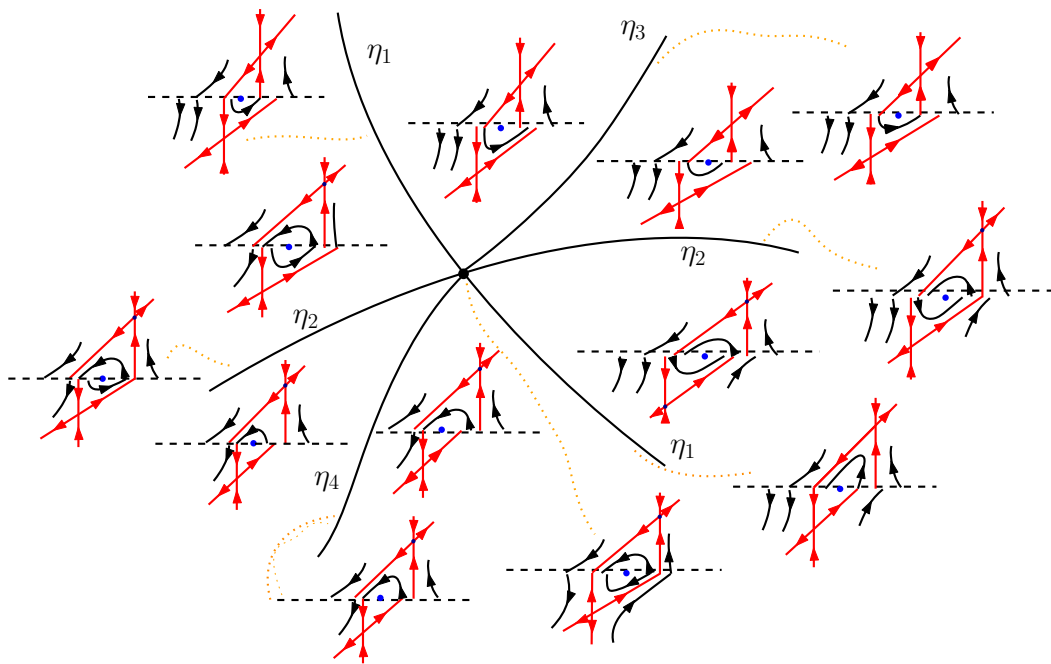


Figura 3.14: Diagrama de bifurcação do sistema 3.2.4 quando $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

□

Capítulo 4

Bifurcações de Sistemas Suaves sobre Ω

Seja f uma função suave tal que 0 é um valor regular e considere um campo vetorial suave X definido em uma variedade com bordo $M = f^{-1}(0)$ de forma que X possua um ponto crítico hiperbólico ou uma tangência (quadrática ou cúbica) na origem. Assim, a origem será para o campo X uma das seguintes possibilidades:

1. um ponto singular do tipo dobra;
2. um ponto singular do tipo cúspide;
3. um ponto crítico do tipo nó;
4. um ponto crítico do tipo foco;
5. um ponto crítico do tipo sela.

Nesse capítulo vamos considerar o mergulho de X (para cada um dos tipos acima) sobre Ω e então estudar perturbações de $Z = (X, X)$.

Observamos que o caso em que o ponto singular é do tipo dobra já foi estudado em [11], onde é chamado de VI_1 e nesse trabalho foi apresentado no exemplo 1.0.2. Portanto, nas próximas seções daremos atenção aos outros casos.

4.1 Singularidade Nodal

Consideremos um campo vetorial suave X que possui um ponto crítico do tipo nó atrator localizado em $N = (0, 0)$. Precisamos considerar algumas condições de genericidade para o campo X : os autovalores são diferentes e os autoespaços associados a esses autovalores devem ser transversais a variedade de descontinuidade M (veja observação 4.1.1). Escolhemos coordenadas tais que a linearização de X em N seja diagonal (para mais detalhes veja [7]) e assim $M = \{(x, y); x + y = 0\}$ e

$$X = (-x + x^2, -2y). \quad (4.1.1)$$

Observação 4.1.1. Os autovalores de $DX(N)$ devem ser diferentes e os autoespaços associados a esses autovalores devem ser transversais a variedade de descontinuidade pois a falha dessas condições leva a bifurcações locais de maior codimensão.

Por exemplo, se $X(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ e $f(x, y) = x + y$, então $Xf(x, y) = \lambda x + \lambda y$. Assim, $Xf(x, -x) = 0$ para todo x . Ou seja, todo $p \in M$ é uma singularidade do campo X e portanto X não é um campo vetorial de codimensão 1 em χ_M (para mais detalhes sobre campos vetoriais definidos em variedades com bordo veja [16]). Da mesma forma, se por exemplo $X(x, y) = (-x, -2y)$ e $f(x, y) = x^2 + y$ (ou seja, a variedade de descontinuidade é tangente ao autoespaço fraco de $DX(N)$) então $Xf(x, y) = -2x^2 - y$ e portanto, todos os pontos $p \in M$ são pontos singulares do campo X e novamente X não será um campo vetorial de codimensão 1 em χ_M .

Um desdobramento de X em χ_M é dado por

$$X_\alpha = (-x + x^2 + \alpha, -2y - \alpha) \tag{4.1.2}$$

e seu diagrama de bifurcação sobre χ_M é apresentado na figura 4.1.

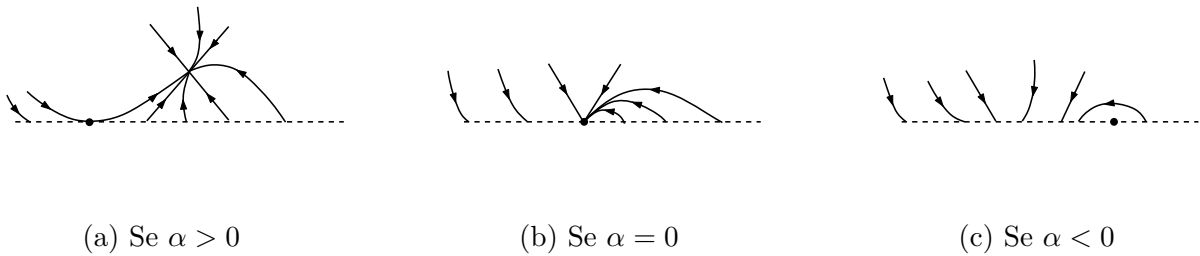


Figura 4.1: Diagrama de bifurcação do sistema 4.1.2 sobre χ_M .

Consideremos então o mergulho de X sobre Ω dado por $Z = (X, X)$. A dinâmica de $Z = (X, X)$ é ilustrada na figura 4.2.

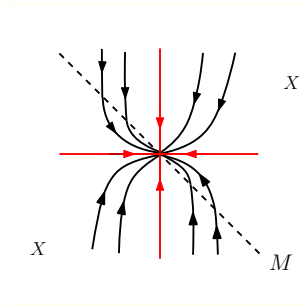


Figura 4.2: Retrato de fase de uma Bifurcação do tipo Nó/Nó

Se $Z_{\alpha,\lambda} = (X_\alpha, Y_\lambda)$ é uma perturbação de $Z = (X, X)$ em Ω (onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \dots \times (-\epsilon, \epsilon)$) então $Y_0 = X_0 = (-x + x^2, -2y)$. O sistema $Z_{\alpha,\lambda}$ deverá ter além da bifurcação relacionada a colisão do ponto crítico do campo X_α com a variedade M (quando $\alpha = 0$), uma bifurcação relacionada a colisão do ponto crítico do campo Y_λ com a variedade de descontinuidade M e bifurcações relacionadas a colisão da dobra do campo X_α com a dobra do campo Y_λ (bifurcações dobra-dobra).

Assim, consideremos a perturbação de $Z = (X, X)$ dada pela família a três parâmetros de campos vetoriais:

$$Z_{\alpha,\beta,\mu}(x, y) = \begin{cases} X_\alpha = (-x + x^2 + \alpha, -2y - \alpha) & \text{se } x + y > 0 \\ Y_{\beta,\mu} = (-x + x^2 + \beta, -2y + \mu - \beta) & \text{se } x + y < 0 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

O campo vetorial X_α possui um ponto de equilíbrio, do tipo nó, que se localiza em

$$(x_0^X, y_0^X) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\alpha}, -\frac{\alpha}{2}\right), \quad (4.1.4)$$

que é visível para $\alpha > 0$ e invisível para $\alpha < 0$ (Quando $\alpha = 0$ o ponto crítico de X_α está em M). Além disso, escolhemos os parâmetros do desdobramento 4.1.3 de forma que quando (x_0^X, y_0^X) não está em M , isto é, quando $\alpha \neq 0$, o ponto de dobra de X_α que surge está localizado em $(F^+, -F^+) = (0, 0)$.

O campo $Y_{\beta,\mu}$ tem um ponto crítico, do tipo nó, que se localiza em

$$(x_0^Y, y_0^Y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta}, \frac{\mu-\beta}{2}\right), \quad (4.1.5)$$

que é visível para $(1+\mu-\beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ e invisível para $(1+\mu-\beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ (Quando $(1+\mu-\beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ o ponto crítico de $Y_{\beta,\mu}$ está em M). Além disso, quando (x_0^Y, y_0^Y) não está em M , isto é, quando $(1+\mu-\beta)^2 - 1 + 4\beta \neq 0$, o ponto de dobra de $Y_{\beta,\mu}$ que surge está localizado em $(F^-, -F^-)$, onde $F^- = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu}$.

Na região $\{(x, y); (x, y) \in M \text{ e } X_\alpha(x, y)Y_{\beta,\mu}(x, y) < 0\}$ temos definido uma dinâmica sobre a variedade de descontinuidade dada pelo campo de deslize:

$$Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(x) = \frac{(\alpha - \beta + \mu)x^2 + (\alpha - \beta - \mu)x + \alpha\mu}{\mu} \quad (4.1.6)$$

Temos o seguinte resultado para o campo vetorial de deslize.

Proposição 2. *Se $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2)$ então, o campo vetorial de deslize 4.1.6 sofrerá uma bifurcação do tipo sela-nó. Se $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2)$ então, o campo vetorial de deslize 4.1.6 possuirá um ponto crítico p do tipo nó. Mais precisamente,*

1. *Se $\alpha > 0$ e $1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2 > 0$ então p é um pseudo nó atrator para $\mu < 0$ e um pseudo nó repulsor para $\mu > 0$.*
2. *Se $\alpha < 0$ e $1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2 < 0$ então p é um pseudo nó repulsor para $\mu < 0$ e um pseudo nó atrator para $\mu > 0$.*

Demonstração. Observe que $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(F^+) = \alpha$ e $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(F^-) = \beta - \mu + 1 - \sqrt{1-4\mu}$. Assim,

1. se $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2)$ então

$$\text{sgn}(Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(F^+)) = \text{sgn}(\alpha) = -\text{sgn}(1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2) = -\text{sgn}(\beta - \mu + 1 - \sqrt{1-4\mu}) = -\text{sgn}(Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(F^-)).$$

Ou seja, $\text{sgn}(Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(F^+)) = -\text{sgn}(Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(F^-))$. Então, pelo teorema do valor intermediário, se $\mu < 0$ (respectivamente, se $\mu > 0$) existirá um valor $x = p \in (F^+, F^-)$ (respectivamente, $x = p \in (F^-, F^+)$) tal que $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(p) = 0$, isto é, existirá um pseudo nó atrator (respectivamente, pseudo nó repulsor) para o campo $Z_{\alpha,\beta,\mu}$.

Os comportamentos para o campo vetorial de deslize estão ilustrados nas figuras 4.3, 4.4.

2. se $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(1-4\beta - (1+\mu-\beta)^2)$ então $\mu + \alpha - \beta \neq 0$.

Dessa forma, sobre a superfície $(4\mu - 1)\alpha^2 + (4\mu^2 + (-4\beta + 2)\mu + 2\beta)\alpha - (\beta + \mu)^2 = 0$, teremos que

$$Z_{\alpha,\beta,\mu}^s(p) = 0,$$

$$(Z_{\alpha,\beta,\mu}^s)'(p) = 0 \quad \text{e}$$

$$(Z_{\alpha,\beta,\mu}^s)''(p) \neq 0.$$

onde $p = -\frac{-\mu+\alpha-\beta}{2(\mu+\alpha-\beta)}$. Ou seja, sobre a superfície $(4\mu - 1)\alpha^2 + (4\mu^2 + (-4\beta + 2)\mu + 2\beta)\alpha - (\beta + \mu)^2 = 0$, o campo vetorial de deslize sofre uma bifurcação do tipo sela-nó.

Os comportamentos para o campo vetorial de deslize estão ilustrados nas figuras 4.5, 4.6.

□



Figura 4.3: Comportamento do campo $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s$ para $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$.



Figura 4.4: Comportamento do campo $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s$ para $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$.

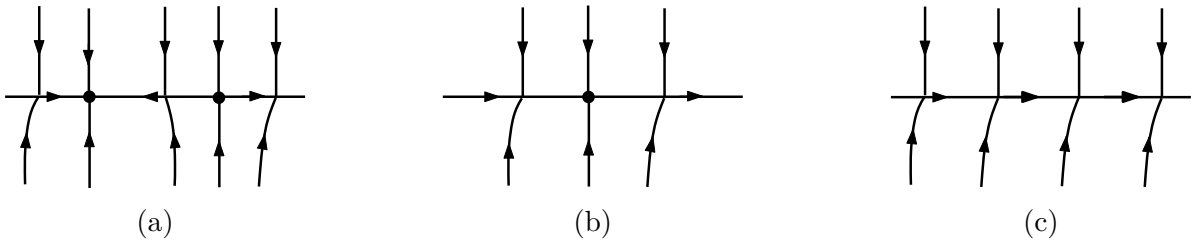


Figura 4.5: Comportamento do campo $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s$ para $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$

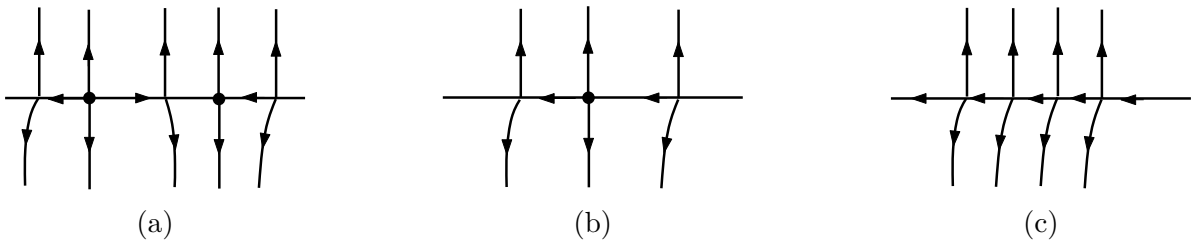


Figura 4.6: Comportamento do campo $Z_{\alpha,\beta,\mu}^s$ para $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$

4.1.1 Estudo das bifurcações do caso Nó/Nó

O plano $\eta_1 = \{(\alpha, \beta, \mu); \alpha = 0\}$ corresponde a duas bifurcações (distintas) do tipo **nó-bordo**. Para $\mu > 0$, $F^- \in \partial M^d$ e portanto, esse plano corresponde a uma bifurcação do tipo BN_1 estudada em [11], enquanto, para $\mu < 0$, $F^- \in \partial M^e$, e portanto uma bifurcação nó-bordo do tipo BN_2 .

A superfície $\eta_2 = \{(\alpha, \beta, \mu); (1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0\}$ corresponde a duas bifurcações (distintas) do tipo **nó-bordo**. Para $\beta > 0$, $F^+ \in \partial M^e$ e portanto, esse plano corresponde a uma bifurcação do tipo BN_2 estudada em [11], enquanto, para $\beta < 0$, $F^+ \in \partial M^d$, e portanto uma bifurcação nó-bordo do tipo BN_1 .

O plano $\eta_3 = \{(\alpha, \beta, \mu); \mu = 0\}$ corresponde a quatro bifurcações (distintas) de codimensão 1 do tipo **dobra-dobra**. Para $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ teremos que as dobras do campo X , F^+ , e do campo Y , F^- são visíveis e serão do tipo VV_2 estudada em [11]. Para $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ teremos que as dobras do campo X , F^+ , e do campo Y , F^- são invisíveis e serão do tipo II_2 . Para $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ ou $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ teremos bifurcações do tipo dobra-dobra visível/invisível do tipo VI_1 .

A superfície $\eta_4 = \{(\alpha, \beta, \mu); (4\mu - 1)\alpha^2 + (4\mu^2 + (-4\beta + 2)\mu + 2\beta)\alpha - (\beta + \mu)^2 = 0\}$ corresponde a bifurcação do tipo **Sela-Nó** para o campo de deslize pela proposição 2.

Nessas quatro superfícies ocorrem as únicas bifurcações locais do sistema 4.1.3.

Na próxima seção estudamos os retratos de fase do sistema 4.1.3 nas regiões delimitadas pelas superfícies citadas anteriormente.

4.1.2 Diagrama de bifurcação do caso Nó/Nó

Teorema 4.1.2. 1. Se $\mu = 0$ em 4.1.3 então seu diagrama de bifurcação nos parâmetros (α, β) contém essencialmente 8 retratos de fase distintos.

2. Existe $\mu_0 > 0$ tal que se $0 < \mu < \mu_0$ em 4.1.3 então seu diagrama de bifurcação nos parâmetros (α, β) contém essencialmente 21 retratos de fase distintos.
3. Existe $\mu_0 > 0$ tal que se $-\mu_0 < \mu < 0$ em 4.1.3 então seu diagrama de bifurcação nos parâmetros (α, β) contém essencialmente 21 retratos de fase distintos.

O diagrama de bifurcação do sistema 4.1.3 é apresentado na figura 4.27.

Demonstração. Se $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ então os pontos críticos do campo X e do campo Y são visíveis. Sobre a superfície $\mu = 0$ teremos uma bifurcação dobra-dobra visível. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.7.

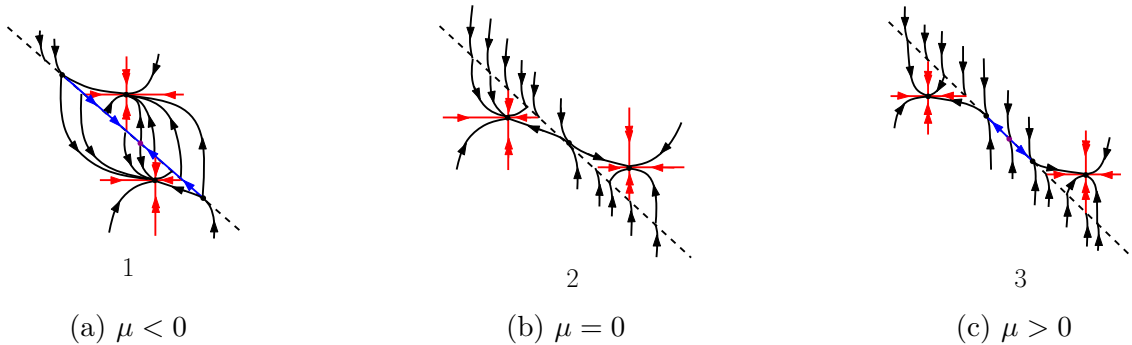


Figura 4.7: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$.

Se $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ então o ponto crítico do campo X é visível e o ponto crítico do campo Y está sobre M . Sobre η_4 existirá uma bifurcação sela-nó para o campo vetorial deslizante. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.8 para $\mu > 0$ e na figura 4.9 para $\mu < 0$.

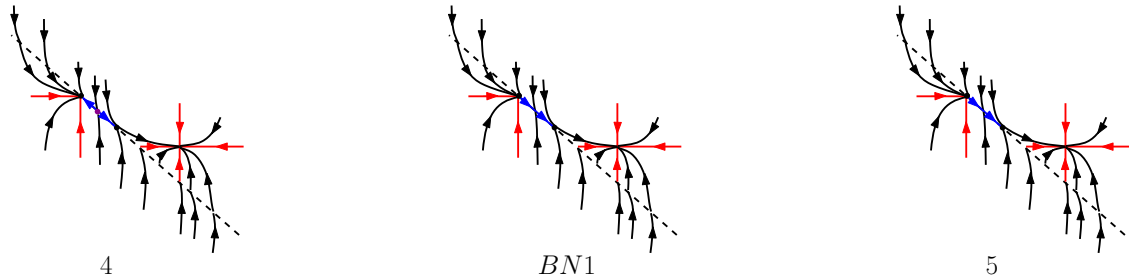


Figura 4.8: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ para $\mu > 0$.

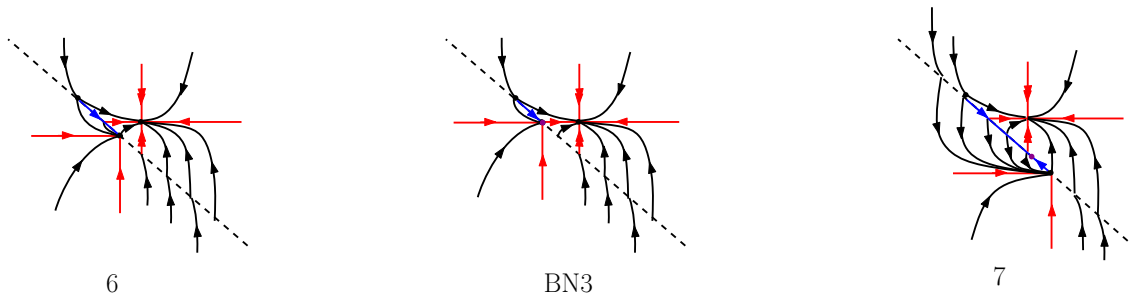


Figura 4.9: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ para $\mu < 0$.

Para $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ então o ponto crítico do campo X é visível e o ponto crítico do campo Y é invisível. Sobre a superfície $\mu = 0$ teremos uma bifurcação dobra-dobra visível. Sobre η_4 existirá uma bifurcação sela-nó para o campo vetorial deslizante. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.10 para $\mu > 0$ e na figura 4.12 para $\mu < 0$. Quando $\mu = 0$ a dinâmica é apresentada na figura 4.11.

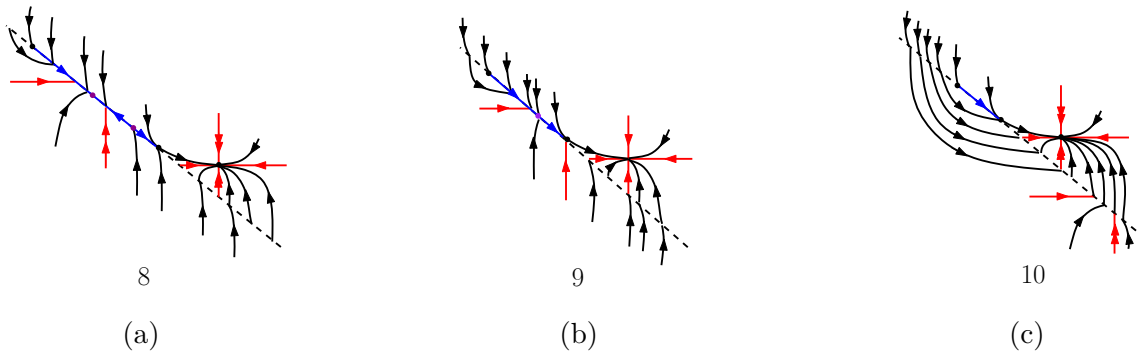


Figura 4.10: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ para $\mu > 0$.

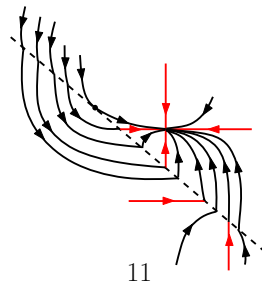


Figura 4.11

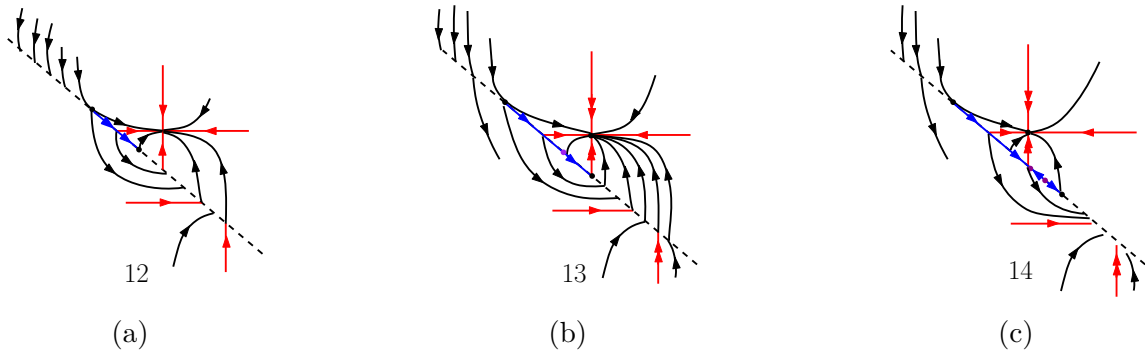


Figura 4.12: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha > 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ para $\mu < 0$.

Para $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ então o ponto crítico do campo X está em M e o ponto crítico do campo Y é invisível. Sobre η_4 existirá uma bifurcação sela-nó para o campo vetorial deslizante. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.13 para $\mu > 0$ e na figura 4.15 para $\mu < 0$. Quando $\mu = 0$ a dinâmica é apresentada na figura 4.14.

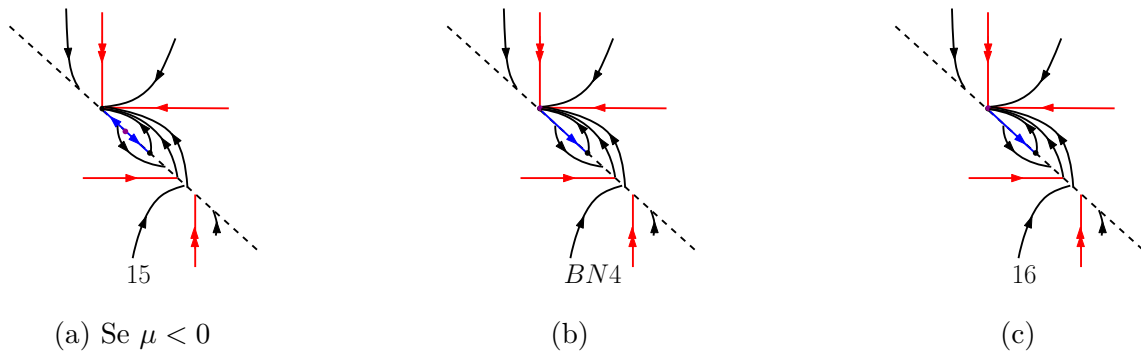


Figura 4.13: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ para $\mu < 0$.

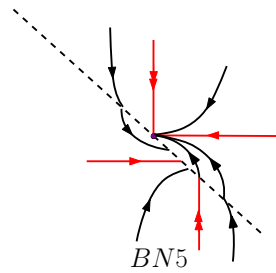


Figura 4.14: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ para $\mu = 0$.

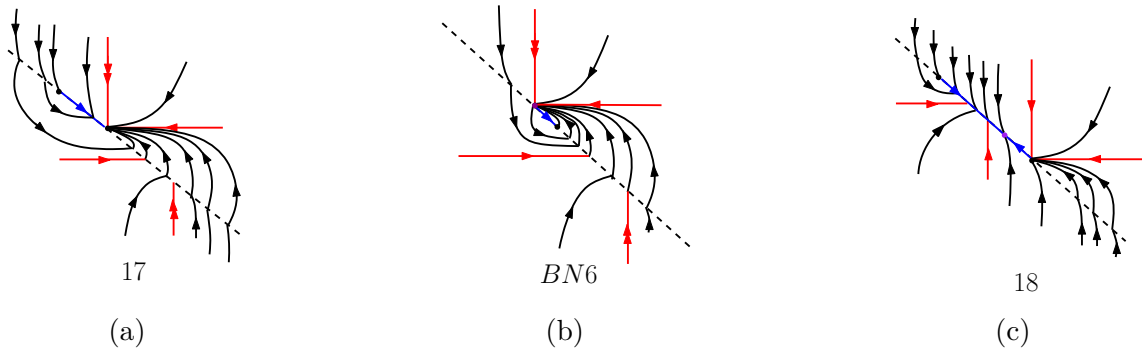


Figura 4.15: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ para $\mu > 0$

Para $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ então os pontos críticos dos campos X e Y estão em M . As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.16.



Figura 4.16: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$.

Para $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ então o ponto crítico do campo X está em M e o ponto crítico do campo Y é visível. Sobre η_4 existirá uma bifurcação sela-nó para o campo vetorial deslizante. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.17 para $\mu > 0$ e na figura 4.19 para $\mu < 0$. Quando $\mu = 0$ a dinâmica é apresentada na figura 4.18.

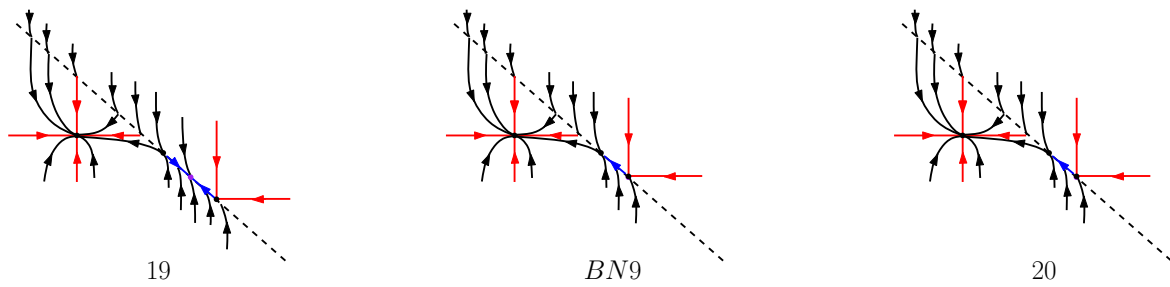


Figura 4.17: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ para $\mu > 0$

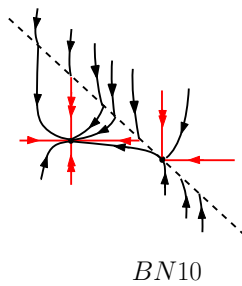


Figura 4.18: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ para $\mu = 0$.

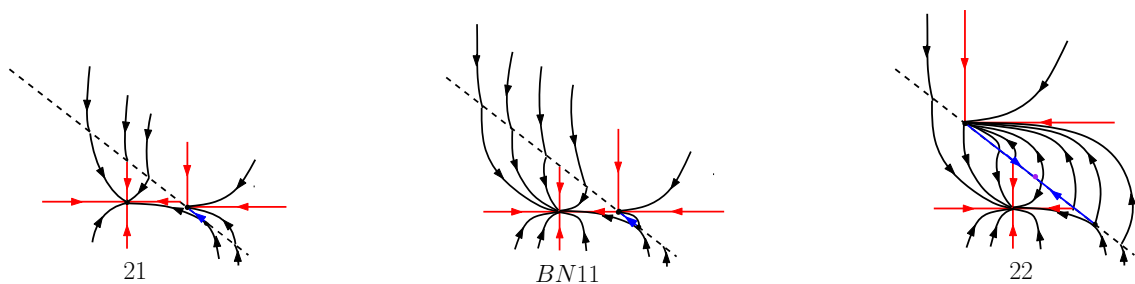


Figura 4.19: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha = 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ para $\mu < 0$.

Para $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ então o ponto crítico do campo X é invisível e o ponto crítico do campo Y é visível. Sobre η_4 existirá uma bifurcação sela-nó para o campo vetorial deslizante. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.22 para $\mu > 0$ e na figura 4.20 para $\mu < 0$. Quando $\mu = 0$ a dinâmica é apresentada na figura 4.21.

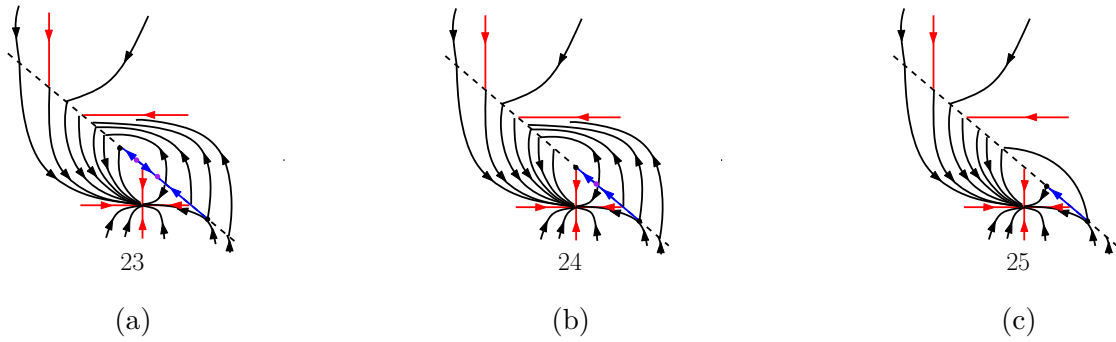


Figura 4.20: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ para $\mu < 0$.

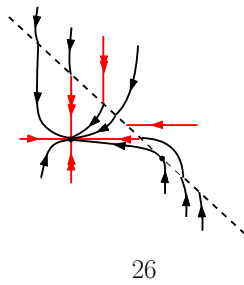


Figura 4.21: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ para $\mu = 0$.

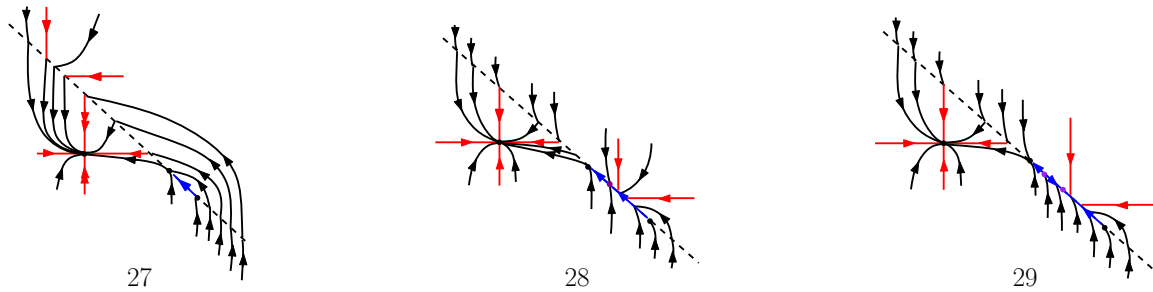


Figura 4.22: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta < 0$ para $\mu > 0$.

Para $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ então o ponto crítico do campo X é invisível e o ponto crítico do campo Y está sobre M . Sobre η_4 existirá uma bifurcação sela-nó para o campo vetorial deslizante. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.23 para $\mu > 0$ e na figura 4.25 para $\mu < 0$. Quando $\mu = 0$ a dinâmica é apresentada na figura 4.24.

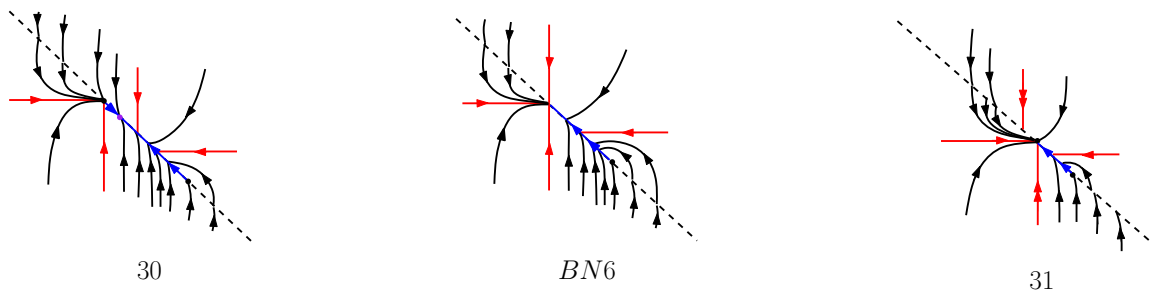


Figura 4.23: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ para $\mu > 0$.

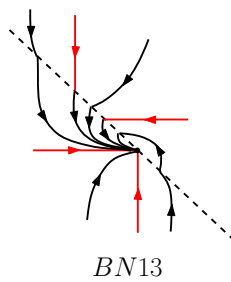


Figura 4.24: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ para $\mu = 0$.

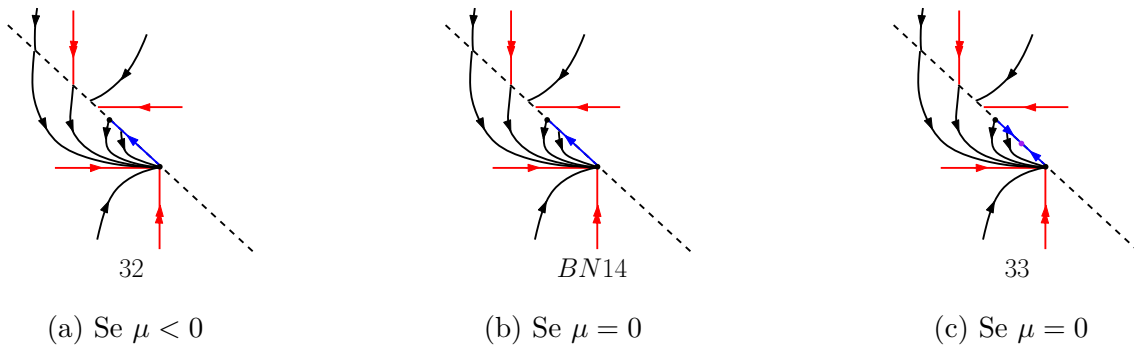


Figura 4.25: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta = 0$ para $\mu < 0$.

Se $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$ então os pontos críticos do campo X e do campo Y são invisíveis. Sobre a superfície $\mu = 0$ teremos uma bifurcação dobra-dobra invisível. As possíveis dinâmicas são listadas na figura 4.26.

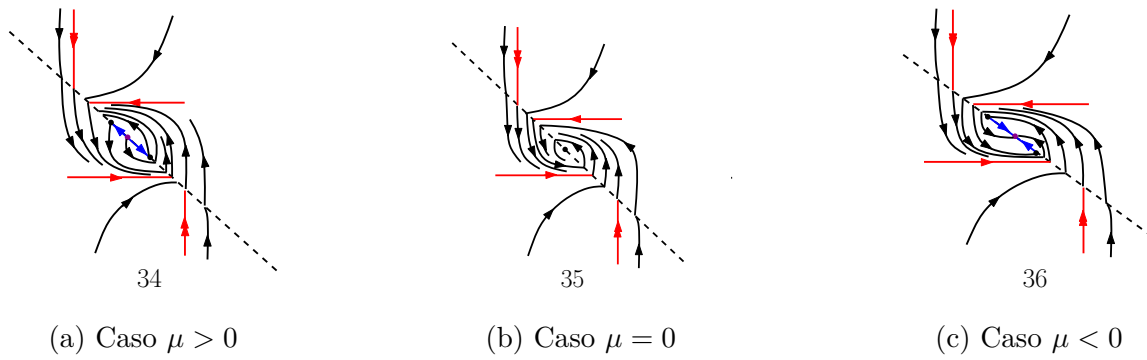


Figura 4.26: Dinâmica do sistema 4.1.3 quando $\alpha < 0$ e $(1 + \mu - \beta)^2 - 1 + 4\beta > 0$.

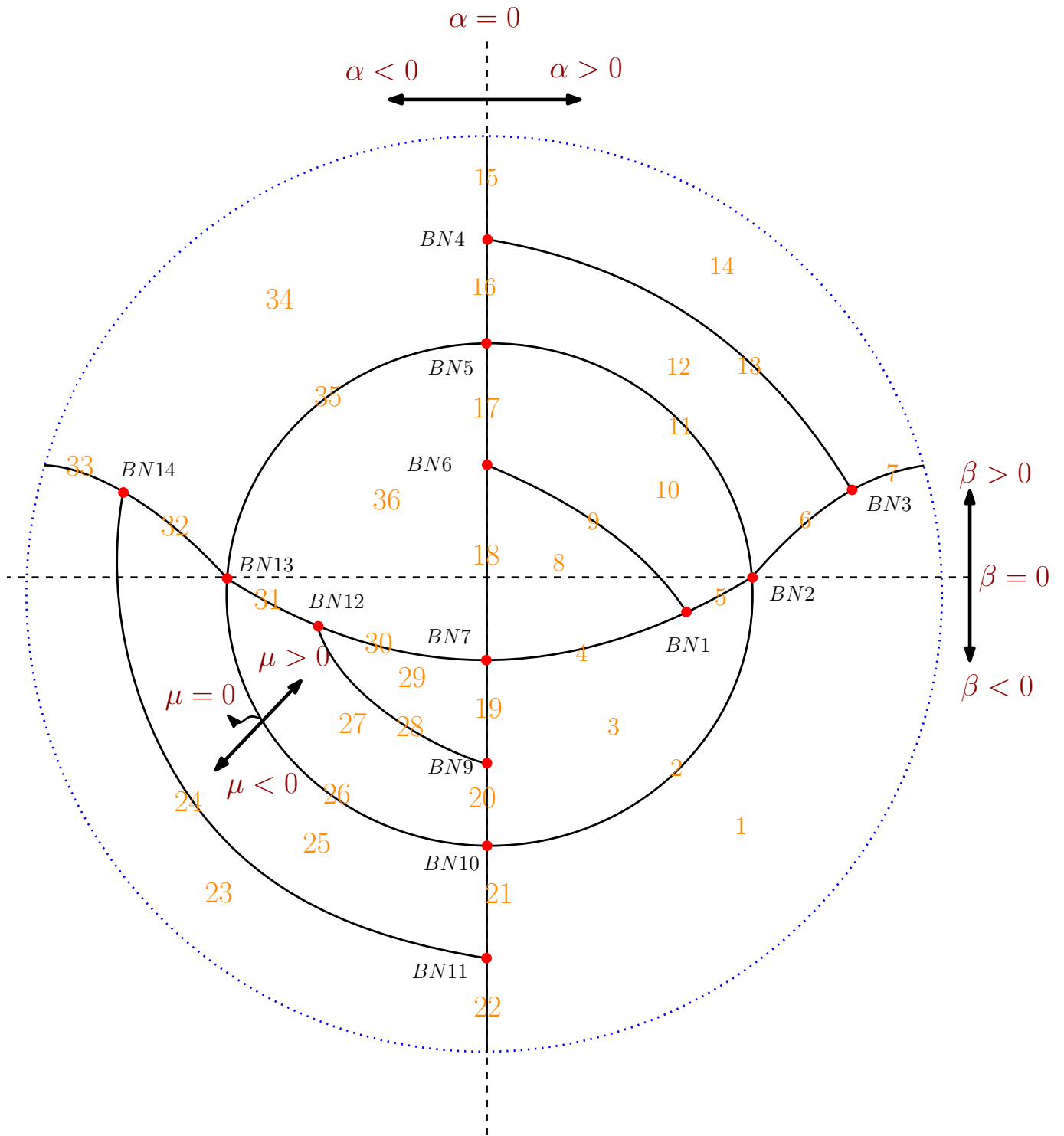


Figura 4.27: Diagrama de bifurcação do sistema 4.1.3.

□

4.2 Singularidade Focal

Consideremos um campo vetorial suave X que possui um ponto crítico do tipo foco hiperbólico localizado em $F = (0, 0)$. Nessa seção vamos estudar o caso onde F é repulsor (o caso onde F é um foco atrator é estudado de maneira análoga). Escolhemos coordenadas de forma que $M = \{(x, y); y = 0\}$ e

$$X(x, y) = (-y, x + y) \quad (4.2.1)$$

Um desdobramento de X em χ_M é dado por

$$X_\alpha = (-y + \alpha, x + y) \quad (4.2.2)$$

e seu diagrama de bifurcação sobre χ_M é apresentado na figura 4.28.

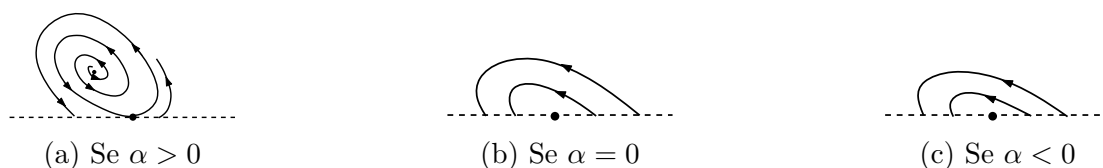


Figura 4.28: Diagrama de bifurcação do sistema 4.1.2 sobre χ_M .

Consideremos então o mergulho de X sobre Ω dado por $Z = (X, X)$. A dinâmica de Z é ilustrada na figura 4.29.

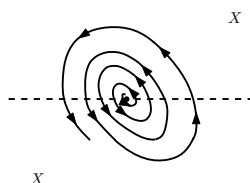


Figura 4.29: Retrato de fase de uma bifurcação do tipo Foco/Foco

Se $Z_{\alpha,\lambda} = (X_\alpha, Y_\lambda)$ é uma perturbação de $Z = (X, X)$ em Ω (onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \dots \times (-\epsilon, \epsilon)$) então $Y_0 = X_0 = (-y, x + y)$. O sistema $Z_{\alpha,\lambda}$ deverá ter uma bifurcação relacionada a colisão do ponto crítico do campo X_α com a variedade M (quando $\alpha = 0$), uma bifurcação relacionada a colisão do ponto crítico do campo Y_λ com a variedade de descontinuidade M e bifurcações relacionadas a colisão da dobra do campo X_α com a dobra do campo Y_λ (bifurcações dobra-dobra). Podemos tomar então $\lambda = (\beta, \mu)$ e $Y_{\beta,\mu} = (\beta x - y + \mu, x + y - \beta)$, onde o parâmetro β controla a posição relativa entre a dobra do campo X_α e a dobra do campo $Y_{\beta,\mu}$ e o parâmetro μ controla a distância entre o ponto crítico do campo $Y_{\beta,\mu}$ e a variedade de descontinuidade M .

Assim, consideremos a família a três parâmetros de campos vetoriais dada por:

$$Z_{\alpha,\beta,\mu}(x, y) = \begin{cases} X_\alpha = (-y + \alpha, x + y) & \text{se } y > 0 \\ Y_{\beta,\mu} = (\beta x - y + \mu, x + y - \beta) & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

O campo vetorial X_α possui um ponto de equilíbrio, do tipo foco, que se localiza em

$$(x_0^X, y_0^X) = (-\alpha, \alpha). \quad (4.2.4)$$

que é visível para $\alpha > 0$ e invisível para $\alpha < 0$ (Quando $\alpha = 0$ o ponto crítico de X_α está em M). Além disso, escolhamos os parâmetros do desdobramento 4.2.3 de forma que quando (x_0^X, y_0^X) não está em M , isto é, quando $\alpha \neq 0$, o ponto de dobra de X_α que surge está localizado em $(F^+, 0) = (0, 0)$.

O campo $Y_{\beta, \mu}$ tem um ponto crítico, do tipo foco, que se localiza em

$$(x_0^Y, y_0^Y) = \left(\frac{\beta - \mu}{\beta + 1}, \frac{\beta^2 + \mu}{\beta + 1} \right). \quad (4.2.5)$$

que é visível para $\beta^2 + \mu < 0$ e invisível para $\beta^2 + \mu > 0$ (Quando $\beta^2 + \mu = 0$ o ponto crítico de $Y_{\beta, \mu}$ está em M). Além disso, quando (x_0^Y, y_0^Y) não está em M , isto é, quando $\beta^2 + \mu \neq 0$, o ponto de dobra de $Y_{\beta, \mu}$ que surge está localizado em $(F^-, 0)$, onde $F^- = \beta$.

Na região $\{(x, y); (x, y) \in M \text{ e } X_\alpha f(x, y) Y_{\beta, \mu} f(x, y) < 0\}$ (ou seja, na região $\{(x, 0); x(x - \beta) < 0\}$) temos definido uma dinâmica sobre a variedade de descontinuidade dada pelo campo de deslize:

$$Z_{\alpha, \beta, \mu}^d(x) = \frac{\beta x^2 - (\alpha - \mu)x + \alpha\beta}{\beta} \quad (4.2.6)$$

Temos o seguinte resultado para o campo vetorial de deslize.

Proposição 3. *Se $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\beta^2 + \mu)$ então o campo vetorial de deslize 4.2.6 não possui ponto crítico. Se $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(\beta^2 + \mu)$ então o campo vetorial de deslize 4.2.6 possuirá um ponto crítico p do tipo nó. Mais precisamente,*

1. *Se $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$ então p é um pseudo nó atrator (respectivamente, pseudo nó repulsor) quando $\beta > 0$ (respectivamente, $\beta < 0$).*
2. *Se $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$ então p é um pseudo nó repulsor (respectivamente, pseudo nó atrator) quando $\beta > 0$ (respectivamente, $\beta < 0$).*

Demonstração. Observe que $Z_{\alpha, \beta, \mu}^d(F^+) = \alpha$ e $Z_{\alpha, \beta, \mu}^d(F^-) = \beta^2 + \mu$. Assim,

1. se $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(\beta^2 + \mu)$ então

$$\text{sgn}(Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(F^+)) = \text{sgn}(\alpha) = -\text{sgn}(\beta^2 - \mu) = -\text{sgn}(Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(F^-)).$$

Ou seja, $\text{sgn}(Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(F^+)) = -\text{sgn}(Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(F^-))$. Então, pelo teorema do valor intermediário, se $\beta > 0$ (respectivamente, se $\beta < 0$) existirá um valor $x = p \in (F^+, F^-)$ (respectivamente, $x = p \in (F^-, F^+)$) tal que $Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(p) = 0$, isto é, existirá um pseudo nó para o campo $Z_{\alpha, \beta, \mu}$. Os comportamentos para o campo vetorial de deslize estão ilustrados nas figuras 4.30, 4.31.

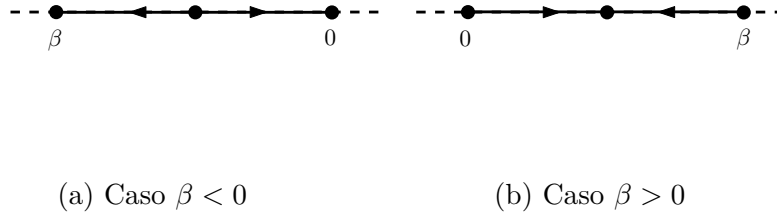


Figura 4.30: Dinâmica do campo vetorial 4.2.6 quando $\alpha > 0 > \beta^2 + \mu$

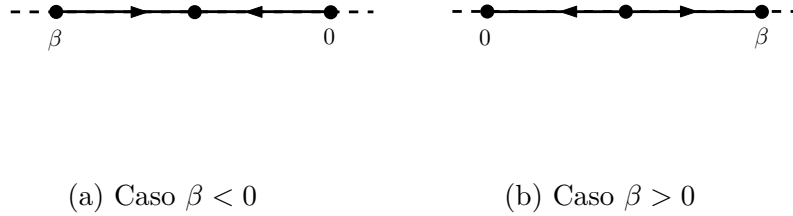


Figura 4.31: Dinâmica do campo vetorial 4.2.6 $\alpha < 0 < \beta^2 + \mu$

2. se $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\beta^2 + \mu)$ então $\text{sgn}(Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(F^+)) = \text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\beta^2 - \mu) = \text{sgn}(Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(F^-))$.
 Suponha $\alpha < 0$ e portanto $\beta^2 + \mu < 0$, assim, teremos que $Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(x) < 0 \forall x \in M^d \cup M^e$ (veja figura 4.32).

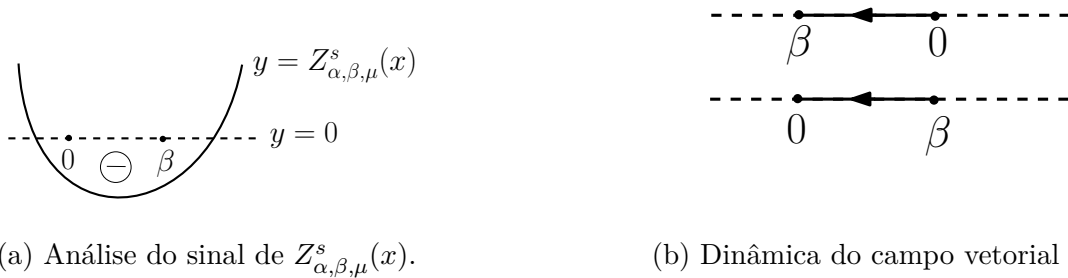


Figura 4.32: Análise do campo vetorial 4.2.6 quando $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$.

Suponha $\alpha > 0$ e portanto $\beta^2 + \mu > 0$, teremos as possibilidades para $y = Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(x)$ listadas na figura 4.33. Observe que se $\beta > 0$ (o caso $\beta < 0$ é tratado de maneira análoga) então $Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(x) > 0 \forall x \in M^d \cup M^e$. De fato, se existe um único $x_0 \in (0, \beta)$ tal que $Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(x_0) = 0$ então $(Z^s)'_{\alpha, \beta, \mu}(x_0) = 0$. Assim, teríamos que $x_0 = \sqrt{\alpha} > \beta$, e portanto, $x_0 \notin RE \cup RE$. Se existem x_1 e x_2 que satisfazem $Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(x) = 0$ então $x_{1,2} = \frac{(\alpha - \mu) \pm \sqrt{(\alpha - \mu)^2 - 4\alpha\beta^2}}{2\beta}$. Logo,

se $\alpha - \mu < 0$ então $x_2 < 0$ e portanto $x_{1,2} \notin M^e \cup M^d$. Se $\alpha - \mu > 0$ então $x_1 > \beta$ e portanto $x_{1,2} \notin M^e \cup M^d$. O comportamento para o campo vetorial de deslize para $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$ está ilustrada na figura 4.34.

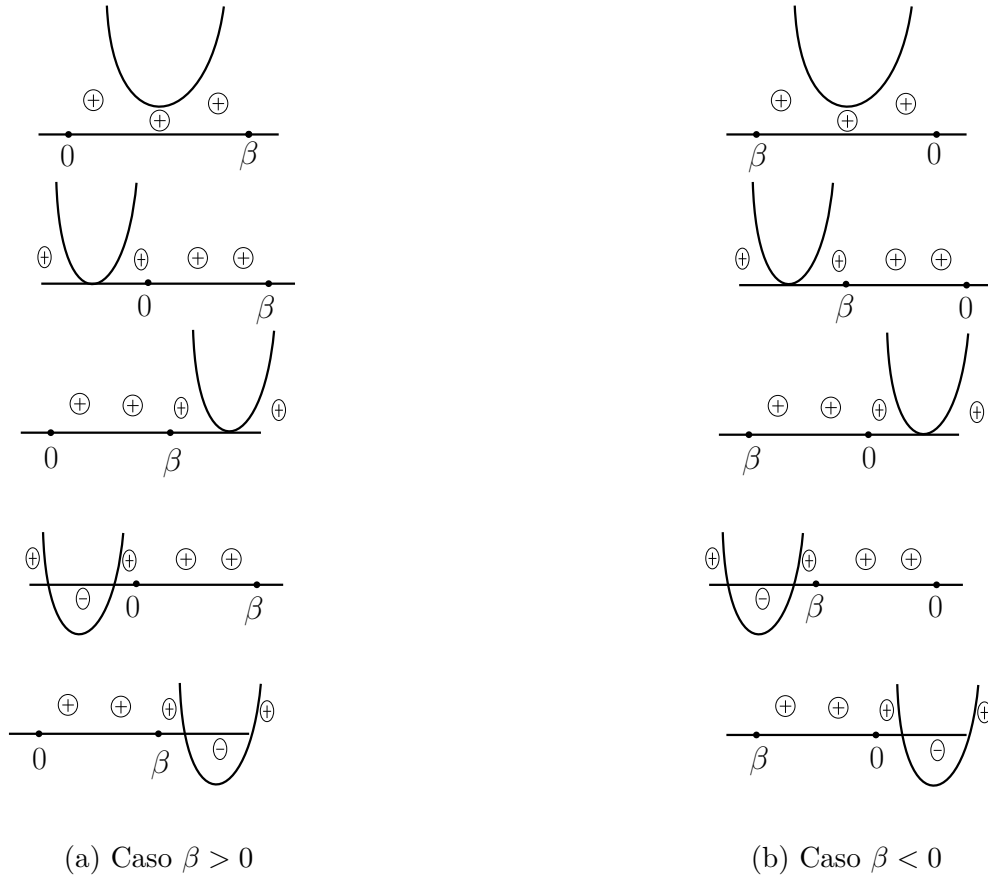


Figura 4.33: Análise do sinal de $Z_{\alpha, \beta, \mu}^s(x)$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.



Figura 4.34: Dinâmica do campo vetorial 4.2.6 quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.

□

4.2.1 Estudo das bifurcações do caso Foco/Foco

Primeiramente vamos estudar a existência de bifurcações locais do desdobramento 4.2.3.

O plano $\{(\alpha, \beta, \mu); \alpha = 0\}$ corresponde a duas bifurcações (distintas) do tipo **foco-bordo**. Para $\beta > 0$, $(x_0^X, y_0^X) \in \partial M^e$ e portanto, esse plano corresponde a uma bifurcação do tipo $BF5$ estudada em [11], enquanto, para $\beta < 0$, $(x_0^X, y_0^X) \in \partial M^d$, e portanto uma bifurcação foco-bordo do tipo $BF3$.

A superfície $\{(\alpha, \beta, \mu); \beta^2 + \mu = 0\}$ corresponde a duas bifurcações (distintas) do tipo **foco-bordo**. Para $\beta > 0$, $(x_0^Y, y_0^Y) \in \partial M^e$ e portanto, esse plano corresponde a uma bifurcação do tipo $BF5$ estudada em [11], enquanto, para $\beta < 0$, $(x_0^Y, y_0^Y) \in \partial M^d$, e portanto uma bifurcação foco-bordo do tipo $BF3$.

O plano $\{(\alpha, \beta, \mu); \beta = 0\}$ corresponde a quatro bifurcações (distintas) do tipo **dobradobra**. Para $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$ teremos que as dobras do campo X_α, F^+ , e do campo $Y_{\beta, \mu}, F^-$, são visíveis e serão do tipo VV_2 estudada em [11]. Para $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$ teremos que as dobras do campo X_α, F^+ , e do campo $Y_{\beta, \mu}, F^-$, são invisíveis e serão do tipo II_2 . Para $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$ ou $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$ teremos bifurcações do tipo dobra-dobra visível/invisível do tipo VI_1 .

Nessas três superfícies ocorrem as únicas bifurcações locais desse desdobramento.

Passamos a estudar a existência de bifurcações globais do desdobramento 4.2.3. Assim, estudaremos as regiões delimitadas pelas superfícies de bifurcações locais mencionadas acima. O diagrama de bifurcação de 4.2.3 está representado nas figuras 4.67 (para $\beta < 0$) e 4.68 (para $\beta > 0$). Observamos que para $\beta = 0$ as dobras dos campos X e Y coincidem e portanto teremos as mesmas dinâmicas do estudo do caso com refração.

Teorema 4.2.1. Existem 8 superfícies $\alpha = \eta_1, \alpha = \eta_2, \alpha = \eta_3, \alpha = \eta_4, \alpha = \xi_1, \alpha = \xi_2, \alpha = \xi_3, \alpha = \xi_4$ onde 4.2.3 tem 4 bifurcações globais de codimensão 1 caracterizadas por:

1. Se $\alpha = \eta_1$ então existe uma conexão heteroclínica entre as dobras F^+ e F^- , ou seja, $W_-^i(F^-) \equiv W_-^e(F^+)$.
2. Se $\alpha = \eta_2$ então existe uma conexão heteroclínica entre as dobras F^+ e F^- , ou seja, $W_+^i(F^+) \equiv W_+^e(F^-)$.
3. Se $\alpha = \eta_3$ então existe uma conexão heteroclínica entre a dobra F^- e o pseudo nó p , ou seja, $W_-^i(F^-) \equiv W_-^e(p)$.
4. Se $\alpha = \eta_4$ então existe uma conexão homoclínica da dobra F^- , ou seja, $W_+^e(F^-) \equiv W_-^i(F^-)$.
5. Se $\alpha = \xi_1$ então existe uma conexão homoclínica da dobra F^+ , ou seja, $W_+^i(F^+) \equiv W_-^e(F^+)$.
6. Se $\alpha = \xi_2$ então existe uma conexão homoclínica do pseudo nó p , ou seja, $W_+^i(p) \equiv W_-^e(p)$.
7. Se $\alpha = \xi_3$ então existe uma conexão homoclínica do pseudo nó p , ou seja, $W_-^i(p) \equiv W_+^e(p)$.
8. Se $\alpha = \xi_4$ então existe uma conexão heteroclínica entre a dobra F^+ e o pseudo nó p , ou seja, $W_+^i(F^+) \equiv W_+^e(p)$.

Demonstração. Seja $x \geq 0$, então a órbita de X_α partindo de $(x, 0)$ é dada por

$$\varphi_t^X(x, 0) = (e^{\frac{t}{2}}(\frac{\sqrt{3}}{3}(\alpha-x) \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + (\alpha+x) \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2})) - \alpha, e^{\frac{t}{2}}((\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3}x) \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) - x \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + \alpha)) \quad (4.2.7)$$

Existe $t_0 > 0$ (menor possível) tal que $e^{\frac{t_0}{2}}((\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3}x) \sin(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}) - x \cos(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}) + \alpha) = 0$, ou seja, $\varphi_{t_0}^X(x, 0) \in M$. Definimos então, a função $\phi_X(x) = \varphi_{t_0}^X(x, 0)$. Essa função é chamada mapa de primeiro retorno do campo vetorial X para a variedade de descontinuidade M .

Em particular, quando $\alpha > 0$ e para $x = F^+$, teremos

$$\varphi_t^X(0, 0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}ae^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + ae^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \alpha, \frac{\sqrt{3}}{3}ae^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - ae^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \alpha\right). \quad (4.2.8)$$

Ou ainda, $\varphi_t^X(0, 0) = (f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha))$. É fácil ver que $f_1(4.9, \alpha) > 0 > f_2(5.1, \alpha)$ para todo $\alpha > 0$. Como para cada α , $f_2(t, \alpha)$ é contínua temos que existe $t_0 \in (4.9, 5.1)$ tal que $f_2(t_0, \alpha) = 0$.

Logo,

$$\varphi_{t_0}^X(0, 0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}ae^{\frac{t_0}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}\right) + ae^{\frac{t_0}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}\right) - \alpha, 0\right) \quad (4.2.9)$$

Assim, se $\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}ae^{\frac{t_0}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}\right) + ae^{\frac{t_0}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}\right) - \alpha$ teremos uma conexão heteroclínica entre as dobras F^+ e F^- . Chamaremos essa superfície de $\alpha = \eta_2$.

Se $p = \frac{\sqrt{3}}{3}ae^{\frac{t_0}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}\right) + ae^{\frac{t_0}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t_0}{2}\right) - \alpha$ teremos uma conexão heteroclínica entre a dobra F^+ e o pseudo nó p . Chamaremos essa superfície de $\alpha = \xi_4$.

Analogamente, existe um mapa de primeiro retorno do campo vetorial Y para a variedade de descontinuidade M . De fato, para cada $x \leq \beta$ existe um menor tempo, $t > 0$, tal que $\varphi_t^Y(x, 0) \in M$. Definimos, então $\phi_Y(x) = \varphi_t^Y(x, 0)$. Análogo ao campo X , existirá uma superfície η_1 tal que, se $\alpha = \eta_1$ então teremos uma conexão heteroclínica entre as dobras F^+ e F^- , e se $\alpha = \eta_3$ então teremos uma conexão heteroclínica entre a dobra F^- e o pseudo nó p .

As demais superfícies de bifurcações estarão relacionadas ao aparecimento de órbitas homoclínicas. Seja $\phi(x) = \phi_Y \circ \phi_X(x)$ o mapa de segundo retorno. Então, se $\phi(F^+) = 0$, teremos uma órbita homoclínica para a dobra F^+ . Chamaremos essa superfície de $\alpha = \xi_1$. Analogamente, existirá uma superfície dada por $\phi(F^-) = F^-$ que chamaremos $\alpha = \eta_4$ que está relacionada ao aparecimento de órbita homoclínica para a dobra F^- .

□

Na próxima seção estudamos as possíveis dinâmicas entre as superfícies de bifurcação relacionadas no teorema anterior.

4.2.2 Diagrama de bifurcação do caso Foco/Foco

Nessa seção vamos estudar cada uma das regiões delimitadas pelas superfícies de bifurcação.

Quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$ temos que a superfície $\{(\mu, \beta, \alpha); \beta = 0\}$ corresponde a uma bifurcação do tipo dobra-dobra visível. Então numa vizinhança dessa superfícies teremos as dinâmicas da figura 4.35.

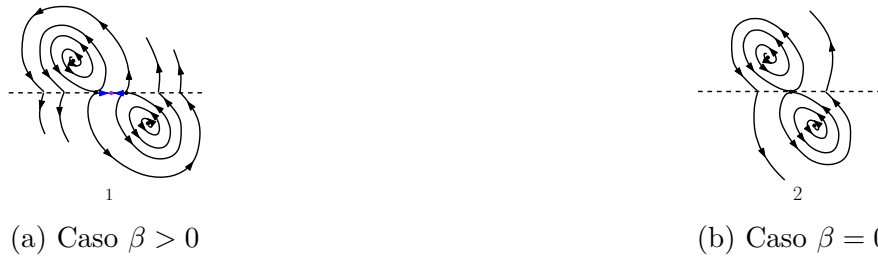


Figura 4.35: Dinâmica do sistema 4.2.3 quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta \geq 0$.

Além disso, se $\beta < 0$, teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_1$ e uma bifurcação sobre $\mu = \eta_2$ relacionadas a conexão heteroclínica entre as dobras F^+ e F^- . Mais especificamente,

1. Se $\mu > \eta_2$ então teremos as dinâmicas da figura 4.36 numa vizinhança da origem.



Figura 4.36: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_1$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta > 0$.

Se além disso $\alpha > \eta_1$ então teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_3$ relacionada a conexão homoclínica do pseudo equilíbrio p e uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_1$ relacionada a conexão homoclínica da dobra F^+ . Mais especificamente, teremos que:

- Se $\alpha < \xi_1$ então teremos as dinâmicas da figura 4.37.

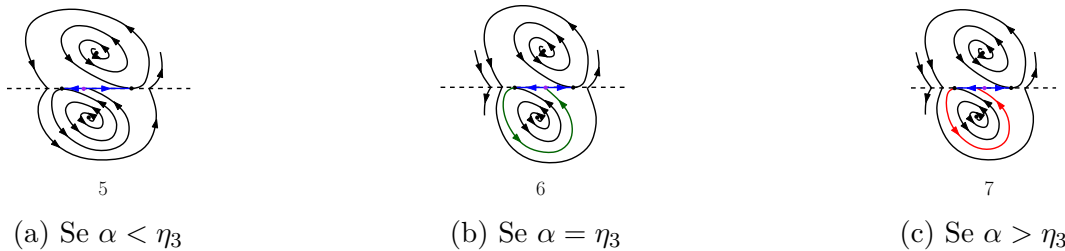


Figura 4.37: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_3$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta > 0$.

- Se $\alpha = \xi_1$ então teremos as dinâmicas da figura 4.38

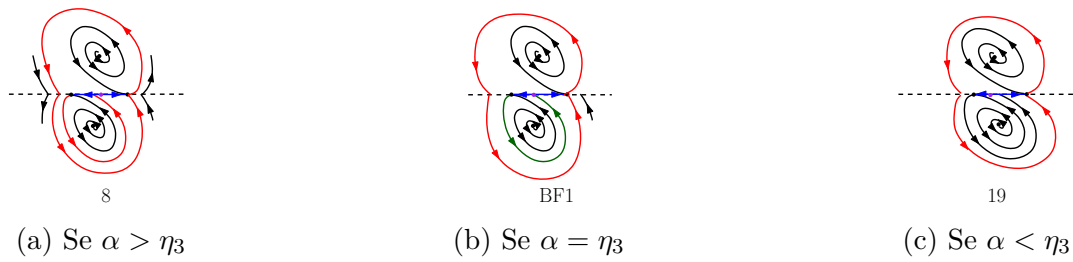


Figura 4.38: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_3$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta > 0$.

- Se $\alpha > \xi_1$ então teremos ainda uma bifurcação sobre as superfícies $\alpha = \xi_2$ e $\alpha = \eta_3$ relacionada a conexões homoclínicas do pseudo equilíbrio p . As possíveis dinâmicas numa vizinhança dessa superfície são apresentadas nas figuras 4.39 e 4.40.

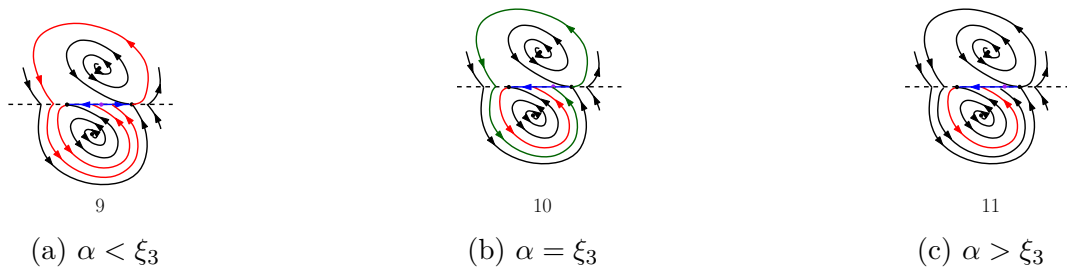


Figura 4.39: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_3$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta > 0$, $\alpha > \eta_3$



Figura 4.40: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_3$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$ e $\alpha > x_{i_1}$.

2. Se $\alpha = \eta_2$ então teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_3$ e sobre $\alpha = \eta_1$.

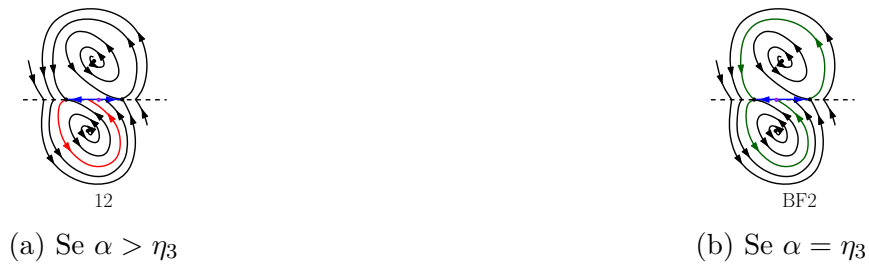


Figura 4.41: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_3$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

E se além disso $\alpha < \eta_3$, teremos ainda uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_1$ apresentada na figura 4.42.

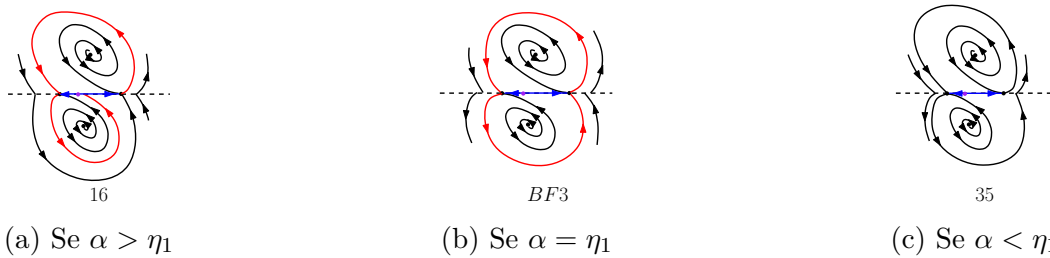


Figura 4.42: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_1$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta > 0$.

3. Se $\alpha < \eta_2$ então teremos um bifurcação sobre $\alpha = \eta_3$. Observe que para $\alpha > \eta_3$ teremos a dinâmica apresentada na figura 4.43.

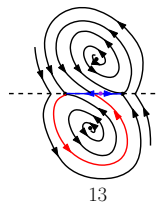


Figura 4.43: Dinâmica do sistema 4.2.3 quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$ e $\alpha > \eta_3$.

Para $\alpha = \eta_3$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_4$ relacionada a conexão heteroclínica entre a dobra F^+ e o pseudo equilíbrio p . As possíveis dinâmicas estão apresentadas na figura 4.44.

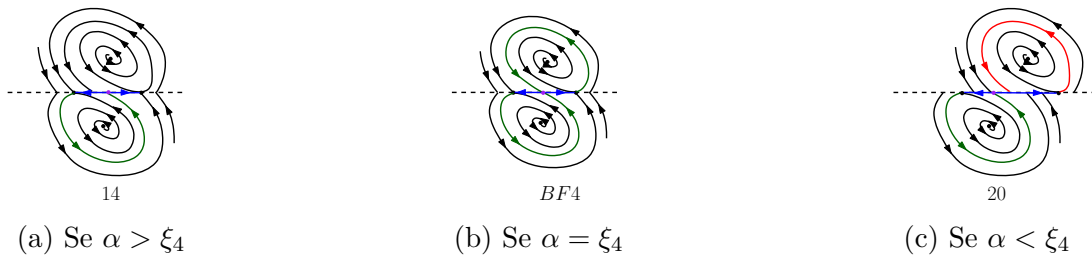


Figura 4.44: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_4$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

Para $\alpha < \eta_3$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_1$. Além disso,

- Se $\alpha > \eta_1$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_4$ apresentada na figura 4.45.

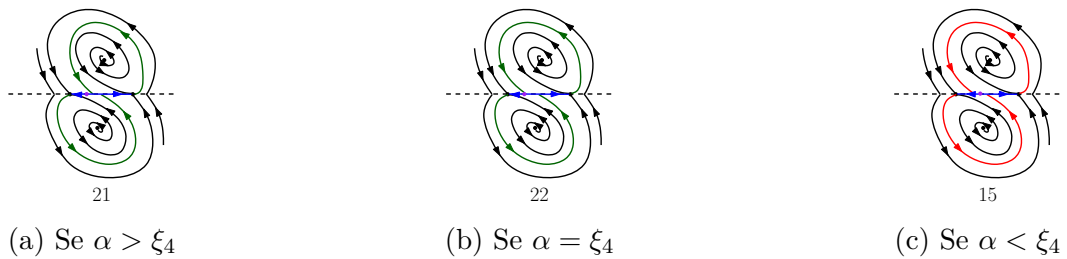


Figura 4.45: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_4$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

- Se $\alpha = \eta_1$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_4$ apresentada na figura 4.46.

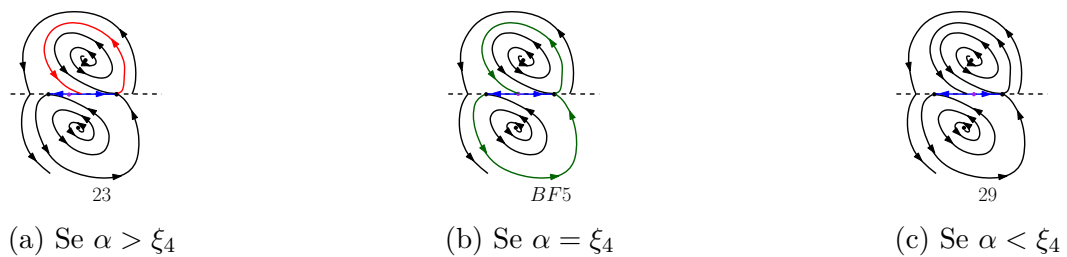


Figura 4.46: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_4$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

- Se $\alpha < \eta_1$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_4$ relacionada a conexão homoclínica da dobra F^- e uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_2$ relacionada a conexão homoclínica do pseudo equilíbrio p , além da bifurcação sobre $\alpha = \xi_4$. Assim:
 - Se $\alpha > \eta_4$ então teremos a bifurcação apresentada na figura 4.47 para $\alpha > \xi_4$.

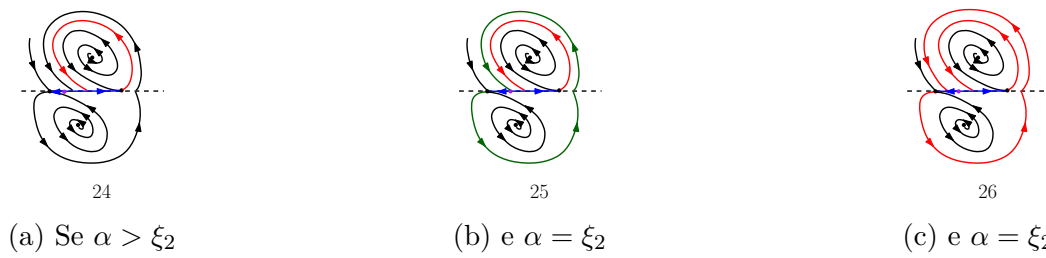


Figura 4.47: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_2$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

Se $\alpha \leq \xi_4$ então teremos ainda as possíveis dinâmicas apresentadas na figura 4.48.



Figura 4.48: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_4$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

– Se $\alpha = \eta_4$ então teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_4$ apresentada na figura 4.49.

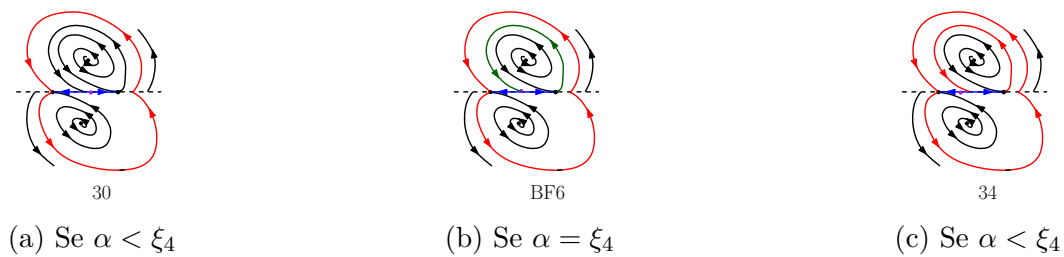


Figura 4.49: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_4$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

– Por fim, se $\alpha < \eta_4$ então teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_4$ apresentada na figura 4.50.

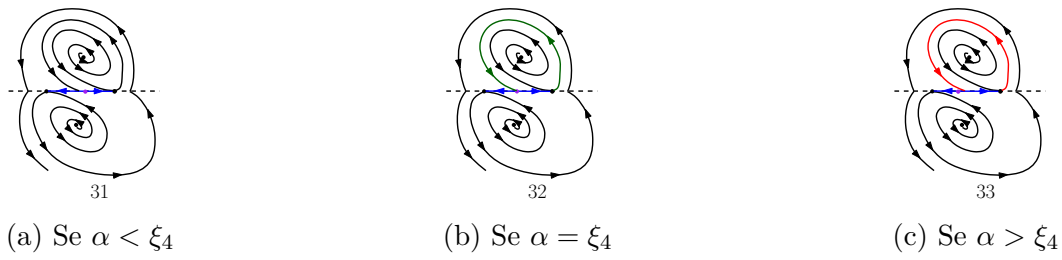


Figura 4.50: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_4$ quando $\alpha > 0$, $\beta^2 + \mu < 0$, $\beta > 0$.

Quando $\alpha \leq 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$ temos que a superfície $\{(\alpha, \beta, \mu; \beta = 0)\}$ corresponde a uma bifurcação dobra-dobra invisível/visível. Assim, vamos estudar a dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança dessa bifurcação.

1. Para $\beta < 0$, sobre $\alpha = \eta_4$ temos uma bifurcação apresentada nas figuras 4.51 para $\alpha = 0$ e em 4.52 para $\alpha < 0$.

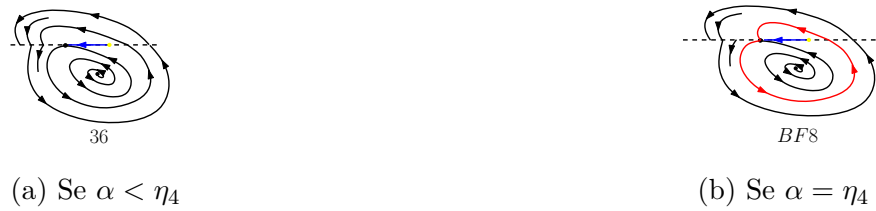


Figura 4.51: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_4$ quando $\alpha = 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta < 0$.



Figura 4.52: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_4$ quando $\alpha < 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta < 0$.

Além disso, para $\alpha > \eta_4$ teremos uma bifurcação em $\alpha = \eta_1$. As possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.53 para $\alpha = 0$ e em 4.54 para $\alpha < 0$.

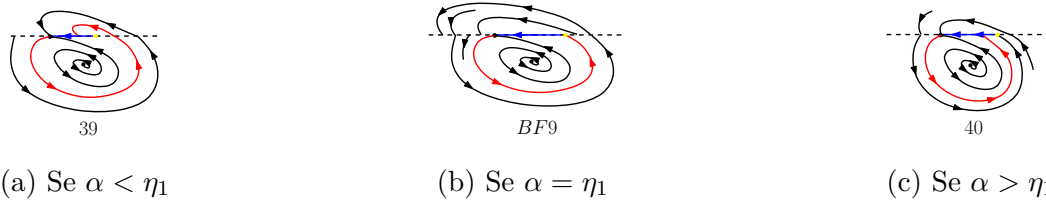


Figura 4.53: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_1$ quando $\alpha = 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta < 0$.

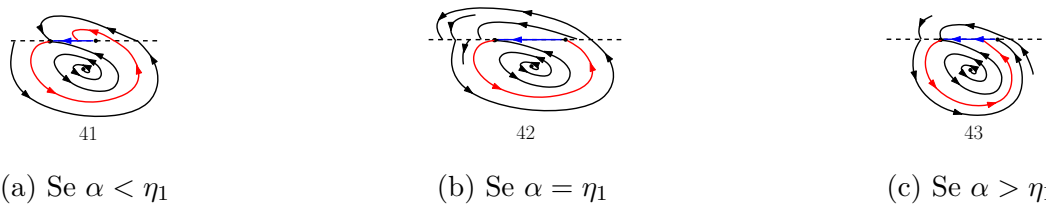


Figura 4.54: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_1$ quando $\alpha < 0$, $\beta^2 + \mu < 0$ e $\beta < 0$.

2. Se $\beta \geq 0$ então as possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.55 para $\alpha = 0$ e na figura 4.56 para $\alpha < 0$.



Figura 4.55: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha = 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$.



Figura 4.56: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu < 0$.

Quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu \geq 0$ teremos uma bifurcação em $\beta = 0$. As possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.57.



Figura 4.57: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu = 0$.



Figura 4.58: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.

Além disso para $\beta < 0$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \eta_2$ e uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_1$. Mais precisamente,

- Se $\alpha > \eta_2$ teremos uma bifurcação sobre $\alpha = \xi_1$. As possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.59 para $\beta^2 + \mu > 0$ e na figura 4.60 para $\beta^2 + \mu = 0$.

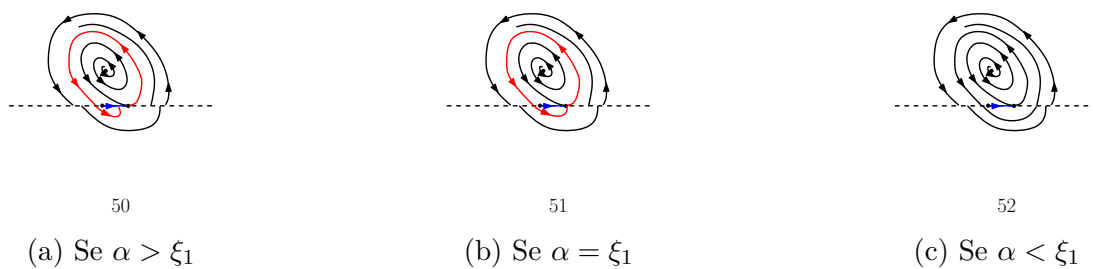


Figura 4.59: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_1$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.

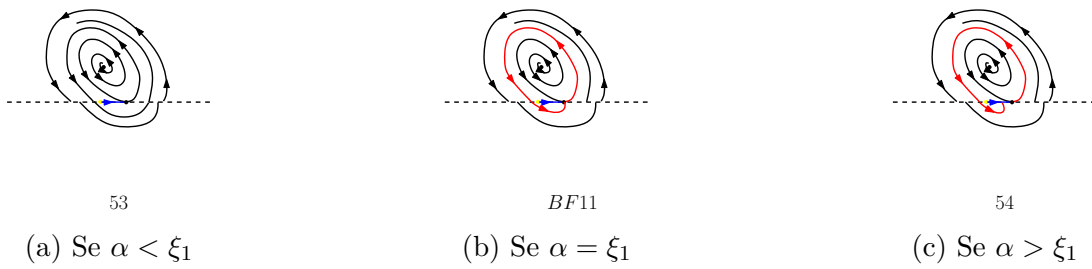


Figura 4.60: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \xi_1$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu = 0$.

- Se $\alpha \leq \eta_2$ então temos as dinâmicas apresentadas na figura 4.61 para $\beta^2 + \mu > 0$ e em 4.62 para $\beta^2 + \mu = 0$.

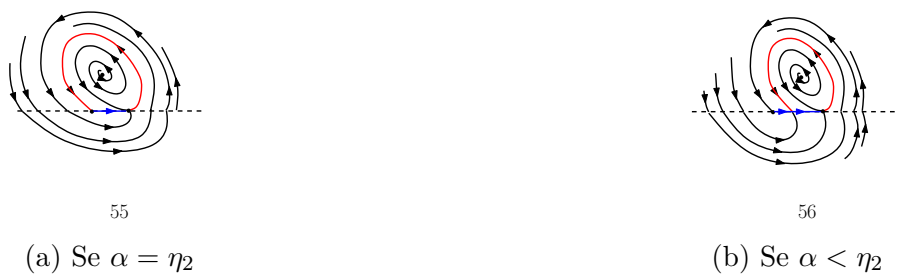


Figura 4.61: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_2$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.



Figura 4.62: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\alpha = \eta_2$ quando $\alpha > 0$ e $\beta^2 + \mu = 0$.

Quando $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu = 0$ teremos uma bifurcação sobre a superfície $\beta = 0$. As possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.63.

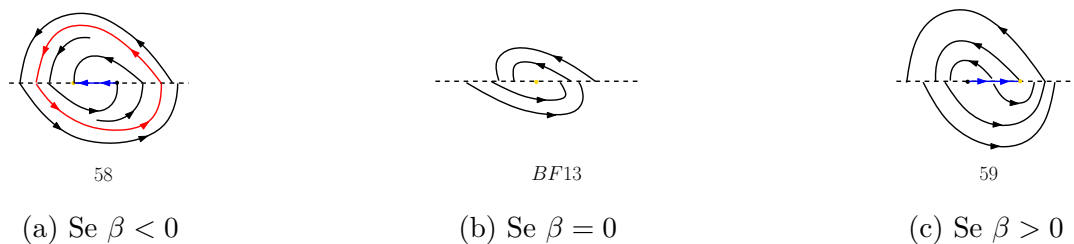


Figura 4.63: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu = 0$.

Quando $\alpha = 0$ e $\beta^2 + \mu \geq 0$ teremos uma bifurcação dobra-dobra sobre a superfície $\beta = 0$. As possíveis dinâmicas estão apresentadas na figura 4.64 para $\beta^2 + \mu = 0$ e $\beta \neq 0$ (se $\beta = 0$ teremos o caso suave $\alpha = \beta = \mu = 0$ representado pela figura 4.29) e na figura 4.65 para $\beta^2 + \mu > 0$.



Figura 4.64: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha = 0$ e $\beta^2 + \mu = 0$.

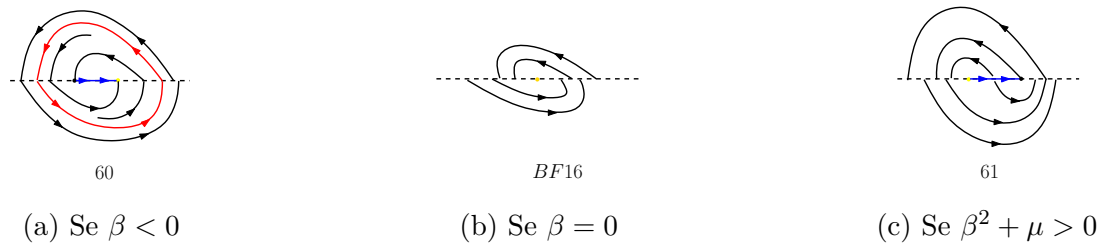


Figura 4.65: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha = 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.

Quando $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$ teremos uma bifurcação dobra-dobra em $\beta = 0$ representada pela figura 4.66.

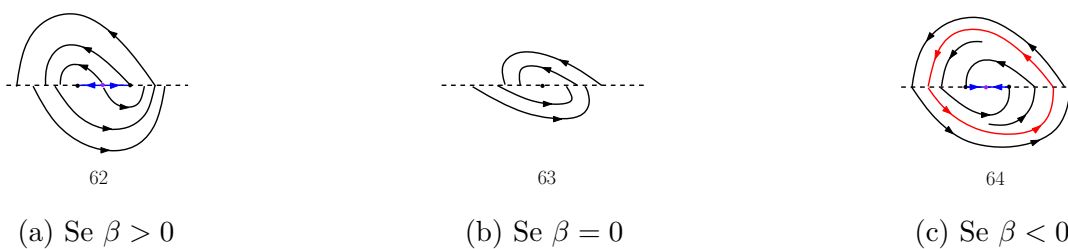


Figura 4.66: Dinâmica do sistema 4.2.3 numa vizinhança de $\beta = 0$ quando $\alpha < 0$ e $\beta^2 + \mu > 0$.

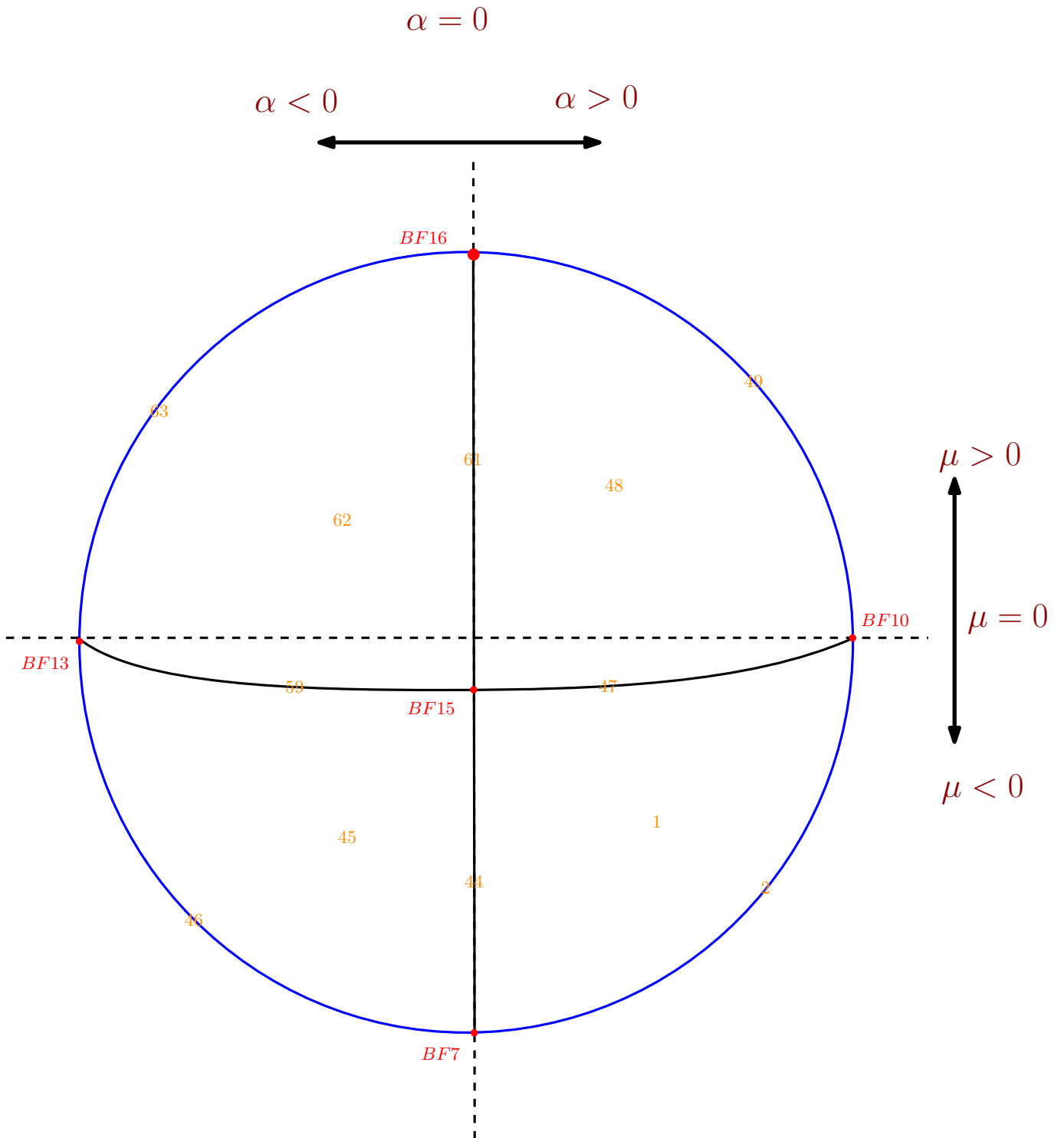


Figura 4.67: Diagrama de bifurcação do sistema 4.2.3 para $\beta > 0$.

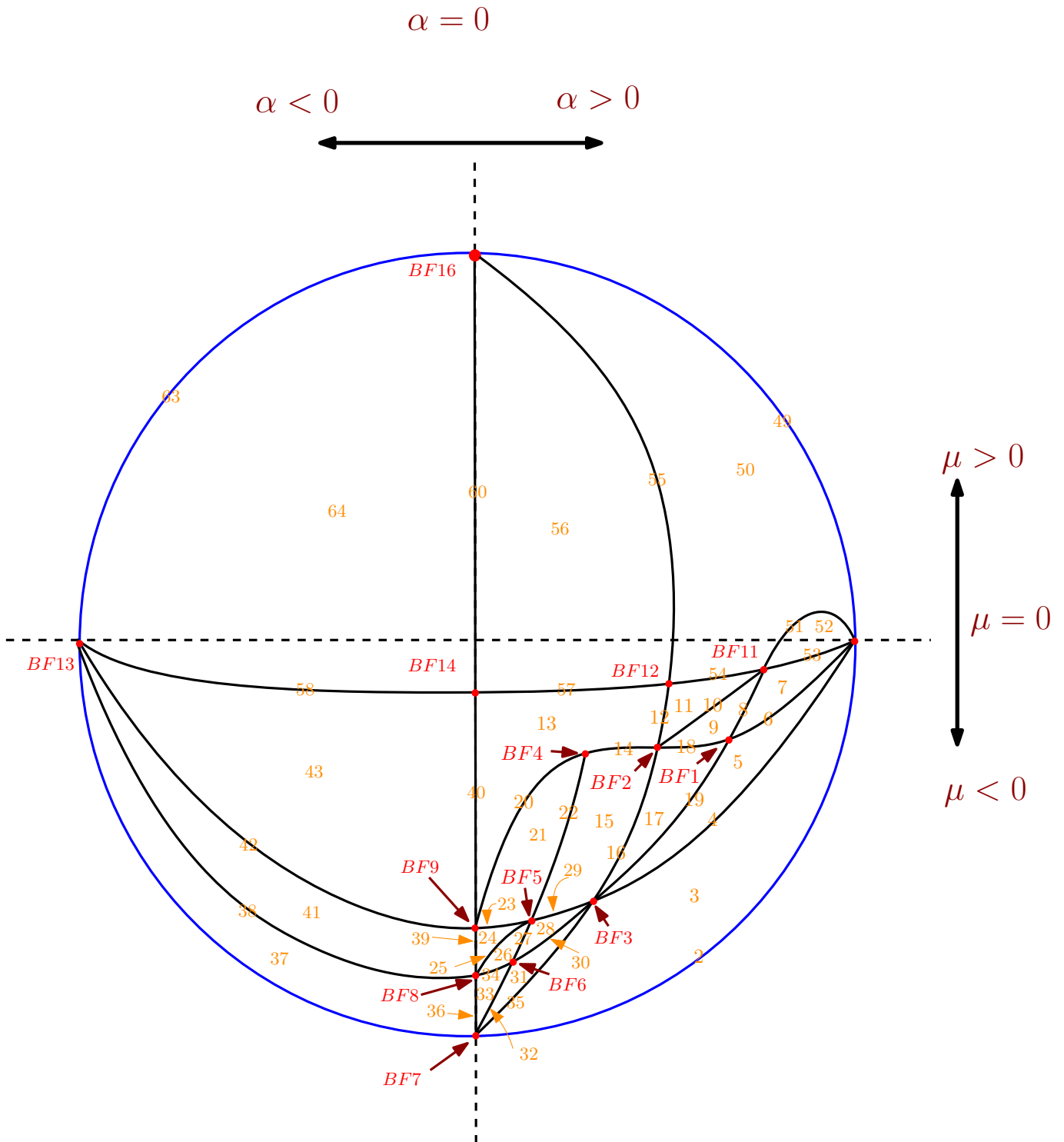


Figura 4.68: Diagrama de bifurcação do sistema 4.2.3 para $\beta < 0$.

4.3 Singularidade do Tipo Sela

Consideremos um campo vetorial suave X que possui um ponto crítico do tipo sela localizado em $S = (0, 0)$. Precisamos considerar algumas condições de genericidade para o campo

X : os módulos dos autovalores são diferentes e os autoespaços associados a esses autovalores devem ser transversais a variedade de descontinuidade M (veja observação 4.3.1). É claro que a singularidade pode apresentar diferentes comportamentos dependendo de qual autovalor tem módulo maior. Nessa seção estudaremos o caso onde o autovalor positivo tem módulo maior do que o negativo. O outro caso é estudado de maneira análoga. Escolhemos coordenadas tais que $M = \{(x, y); x + y = 0\}$ e

$$X_0 = (2x + x^2, x - y). \tag{4.3.1}$$

Observação 4.3.1. Para obtermos uma bifurcação de codimensão 1 do tipo sela-bordo devemos impor que os autoespaços sejam transversais a variedade de descontinuidade. De fato, seja Z o campo vetorial em Ω dado por:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X = (x, -y) & \text{se } x^2 + y > 0 \\ Y = (1, 1) & \text{se } x^2 + y < 0 \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Nesse caso o autoespaço instável do campo vetorial X é tangente a variedade M . Em [7] os autores mostraram que o desdobramento de Z em Ω é dado por:

$$Z_{\mu, \epsilon}(x, y) = \begin{cases} (x, -y + \mu) & \text{se } x^2 + \epsilon x + y > 0 \\ (1, 1) & \text{se } x^2 + \epsilon x + y < 0 \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Portanto, a codimensão dessa singularidade é dois.

Consideremos então o mergulho de X sobre Ω dado por $Z = (X, X)$. A dinâmica de $Z = (X, X)$ é ilustrada na figura 4.69.

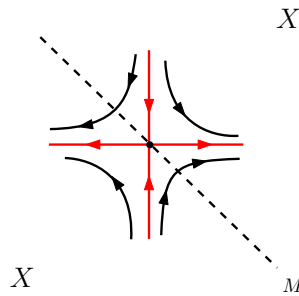


Figura 4.69: Retrato de fase de uma Bifurcação do tipo Sela/Sela

Se $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ é uma perturbação de $Z = (X, X)$ em Ω então \tilde{Z} deverá ter uma bifurcação relacionada a colisão do ponto crítico do campo \tilde{X} (respectivamente, \tilde{Y}) com a variedade M , bifurcações relacionadas a colisão da dobra do campo \tilde{X} com a dobra do campo \tilde{Y} (bifurcações dobra-dobra) e bifurcações relacionadas a conexões das variedades invariantes do campo \tilde{X} com as variedades invariantes do campo \tilde{Y} .

Consideremos então a família a cinco parâmetros de campos vetoriais dada por:

$$Z_{\alpha, \beta, \mu, \lambda, \epsilon}(x, y) = \begin{cases} X = (2x + x^2 + f_1, x - (1 - f_2)y) & \text{se } x + y > 0 \\ Y = ((2 + 2\mu)x + x^2 + f_3, x - y + \epsilon) & \text{se } x + y < 0 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

onde,

$$f_1 = \alpha(1 - f_2)(-2 - (1 - f_2)\alpha)$$

$$f_2 = \frac{\lambda + \alpha}{\alpha - 1}$$

$$f_3 = (\epsilon - \beta)(-\epsilon + \beta + 2\mu + 2)$$

O campo vetorial X possui um ponto de equilíbrio, do tipo sela, que se localiza em

$$(x_0^X, y_0^X) = ((1 - f_2)\alpha, \alpha), \quad (4.3.5)$$

que é visível para $\alpha > 0$ e invisível para $\alpha < 0$ (Quando $\alpha = 0$ o ponto crítico de X está em M). Além disso, escolhemos os parâmetros do desdobramento 4.1.3 de forma que quando (x_0^X, y_0^X) não está em M , isto é, quando $\alpha \neq 0$, o ponto de dobra de X que surge está localizado em $(F^+, -F^+)$, onde,

$$F^+ = \frac{-3\alpha + 4 + \lambda - \sqrt{4\alpha^2\lambda^2 + 5\alpha^2 + 2\alpha\lambda + \lambda^2 - 16\alpha + 8\lambda + 16}}{2}. \quad (4.3.6)$$

Quando $\alpha > 0$, o campo vetorial X possui uma separatriz instável W_i^+ dada pela variedade instável da sela. Assim, pelo teorema da função inversa, existe $v_i^+ \in M$ e $t < 0$ tal que $\phi_t^X(v_i^+) \in W_i^+$. De fato, v_i^+ será dado por

$$v_i^+ = -\frac{2(\alpha - 1)(\lambda - 1)\alpha}{2\alpha\lambda - 3\alpha - \lambda + 4} \quad (4.3.7)$$

Analogamente, o campo vetorial X possui uma separatriz estável W_e^+ dada pela variedade estável da sela do campo X . Pela forma normal que tomamos para o desdobramento 4.3.4, teremos que $v_e^+ = x_0^X$.

O campo Y tem um ponto crítico, do tipo sela, que se localiza em

$$(x_0^Y, y_0^Y) = (\beta - \epsilon, \beta), \quad (4.3.8)$$

que é visível para $2\beta - \epsilon < 0$ e invisível para $2\beta - \epsilon > 0$ (Quando $2\beta - \epsilon = 0$ o ponto crítico de Y está em M). Além disso, quando (x_0^Y, y_0^Y) não está em M , isto é, quando $2\beta - \epsilon \neq 0$, o ponto de dobra de Y que surge está localizado em $(F^-, -F^-)$, onde,

$$F^- = -2 - \mu + \sqrt{\beta^2 - 2\beta\epsilon + 2\beta\mu + \epsilon^2 - 2\epsilon\mu + \mu^2 + 2\beta - 3\epsilon + 4\mu + 4}. \quad (4.3.9)$$

Quando $2\beta - \mu < 0$ o campo vetorial Y possui uma separatriz instável W_i^- dada pela variedade instável da sela do campo Y . Assim, pelo teorema da função inversa, existe $v_i^- \in M$ e $t < 0$ tal que $\phi_t^Y(v_i^-) \in W_i^-$. De fato, v_i^- será dado por

$$v_i^- = \frac{-(2\beta^2 - 2\beta\epsilon + 2\beta\mu + 2\beta + \epsilon)}{2(2 + \beta - \epsilon + \mu)} \quad (4.3.10)$$

Analogamente, o campo vetorial Y possui uma separatriz estável W_e^- dada pela variedade estável da sela do campo Y . Pela forma normal que tomamos para o desdobramento 4.3.4, teremos que $v_e^- = x_0^Y$.

Na região $R = \{(x, y); (x, y) \in M \text{ e } Xf(x, y)Yf(x, y) < 0\}$ temos definido uma dinâmica sobre a variedade de descontinuidade dada pelo campo:

$$Z_{\alpha, \beta, \mu, \lambda, \epsilon}^s(x) = \frac{f_2 x^3 + ((2 + 2\mu)f_2 + \epsilon - 4\mu)x^2 + (f_2 f_3 + 2\epsilon + 2f_1 - 2f_3)x + \epsilon f_1}{(2\mu + f_2)x + \epsilon - f_1 + f_3} \quad (4.3.11)$$

A região R será dada por (F^+, F^-) e será uma região de escape se $F^+ < F^-$. Para $F^- < F^+$ teremos que a região $R = (F^-, F^+)$ será uma região de deslize.

Caso $\alpha > 0$ e $2\beta - \epsilon < 0$ então o campo vetorial de deslize terá um pseudo nó p repulsor se $F^+ < F^-$ e um pseudo nó atrator se $F^+ > F^-$. Caso $\alpha < 0$ e $2\beta - \epsilon > 0$ então o campo vetorial de deslize terá um pseudo nó p repulsor $F^+ > F^-$ e um pseudo nó atrator se $F^+ < F^-$. Para os outros casos, o campo vetorial deslizante não terá equilíbrios.

4.3.1 Estudo das bifurcações do caso Sela/Sela

Vamos inicialmente estudar a existência de bifurcações locais de $Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda}$.

Proposição 4. Para $(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda)$ suficientemente pequenos o sistema $Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda}$ em 4.3.4 sofre as seguintes bifurcações locais:

1. Uma bifurcação do tipo **sela-bordo** sobre a hipersuperfície $\xi_1 = \{(\alpha, \beta, \mu, \lambda, \epsilon); \alpha = 0\}$.
2. Uma bifurcação do tipo **bordo-sela** sobre a hipersuperfície $\xi_2 = \{(\alpha, \beta, \mu, \lambda, \epsilon); 2\beta - \mu = 0\}$.
3. Uma bifurcação do tipo **dobra-dobra** sobre a hipersuperfície ξ_3 dada por

$$\alpha^2 p_2 + \alpha p_3 + \beta(-4\epsilon + 4 + 2\beta) + 2\epsilon^2 - \lambda^2 - 6\epsilon - 4\lambda + \sqrt{p_1}(\lambda + \alpha) = 0 \quad (4.3.12)$$

onde,

$$p_1 = 4\alpha^2 \lambda^2 + 5\alpha^2 + 2\alpha\lambda + \lambda^2 - 16\alpha + 8\lambda + 16.$$

$$p_2 = (2\beta(\beta - 2\epsilon + 2) + 2\epsilon(\epsilon - 3) - \lambda^2 + 5)$$

$$p_3 = (4\beta(-\beta + 2\epsilon - 2) + 4\epsilon(-\epsilon + 3) - 2\lambda - 8)$$

As hipersuperfícies ξ_1 e ξ_2 separam \mathbb{R}^5 em 4 regiões dependentes da posição dos pontos críticos dos campos X e Y em relação à variedade de descontinuidade M . Quando o ponto crítico do campo vetorial X e de Y são visíveis teremos uma rica possibilidade de dinâmicas. Assim, para facilitar o estudo das bifurcações locais, vamos estudar essas regiões separadamente.

Proposição 5. Se $\alpha \leq 0$ o sistema 4.3.4 possui essencialmente 26 retratos de fase distintos.

Demonstração. Caso $\alpha < 0$, então o ponto crítico (x_0^X, y_0^X) de X é invisível, e portanto surge uma singularidade do tipo dobra visível para o campo X em $(F^+, -F^+)$. Nesse caso teremos as três seguintes possibilidades para o campo Y :

1. Se $2\beta - \mu > 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y é invisível. Nesse caso surge uma singularidade do tipo dobra visível para o campo Y em $(F^-, -F^-)$. Teremos então uma bifurcação do tipo dobra-dobra visível sobre ξ_3 e portanto, numa vizinhança dessa bifurcação teremos as dinâmicas da figura 4.70.

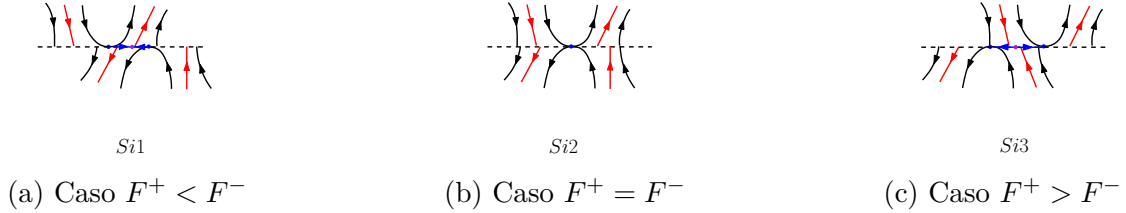


Figura 4.70: Diagrama de bifurcação de 4.3.4 quando $\alpha < 0$ e $2\beta - \mu > 0$

2. Se $2\beta - \mu = 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y está em M . Assim, teremos as dinâmicas da figura 4.71.

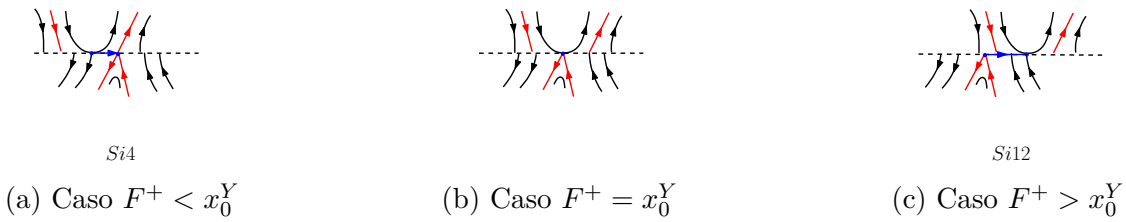


Figura 4.71: Diagrama de bifurcação de 4.3.4 quando $\alpha < 0$ e $2\beta - \mu = 0$

3. Se $2\beta - \mu < 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y é visível. Nesse caso surge uma singularidade do tipo dobra invisível para o campo Y em $(F^-, -F^-)$. Teremos então uma bifurcação do tipo dobra-dobra visível-invisível sobre ξ_3 (a dinâmica sobre ξ_3 é apresentada na figura 4.72).

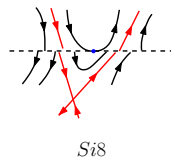


Figura 4.72: Dinâmica do campo definido em 4.3.4 quando $\alpha < 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^+ = F^-$.

Numa vizinhança de ξ_3 teremos ainda duas hipersuperfícies de bifurcações relacionadas com conexão entre o ponto crítico do campo Y e a singularidade dobra do campo X . De

fato, sobre a hipersuperfície ξ_4 dada por

$$\epsilon = \frac{\alpha(-2\beta^2 - 2\beta\mu + \beta + 3\mu + 6) + \beta(2\beta - \lambda + 2\beta - 2) - \lambda(\mu + 2) - 4\mu - 8 + \sqrt{q_1}(\beta + \mu + 2)}{-2\alpha\beta + \sqrt{q_1} + 4\alpha + 2\beta - \lambda - 5} \quad (4.3.13)$$

onde $q_1 = (2\alpha - 4)^2 + (\alpha + \lambda)^2 + 4\alpha^2\lambda + 8\lambda$, teremos uma conexão entre F^+ e v_i^- (isto é, $W_i^- \equiv W_i^-(F^+)$) (veja figura 4.73.b). Sobre a hipersuperfície ξ_5 dada por

$$\beta = -\frac{(-2\alpha\epsilon + \sqrt{4\alpha^2\lambda^2 + 5\alpha^2 + 2\alpha\lambda + \lambda^2 - 16\alpha + 8\lambda + 16} + 3\alpha + 2\epsilon - \lambda - 4)}{2(\alpha - 1)} \quad (4.3.14)$$

teremos uma conexão entre F^+ e v_e^- (isto é, $W_e^- \equiv W_e^-(F^+)$) (veja figura 4.74.b). Numa vizinhança dessas hipersuperfícies teremos as dinâmicas da figura 4.73 se $F^- < F^+$ e as dinâmicas da figura 4.74 se $F^+ < F^-$.

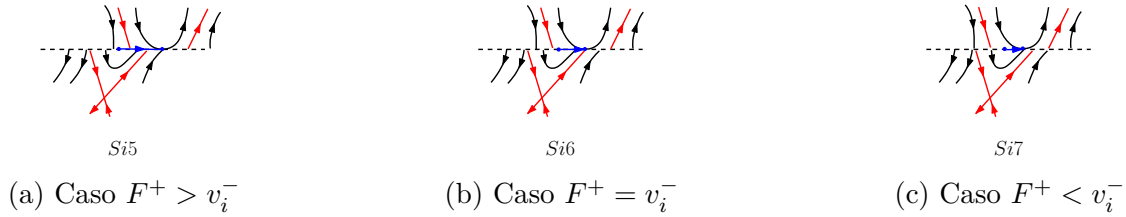


Figura 4.73: Dinâmica de 4.3.4 quando $\alpha < 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^- < F^+$

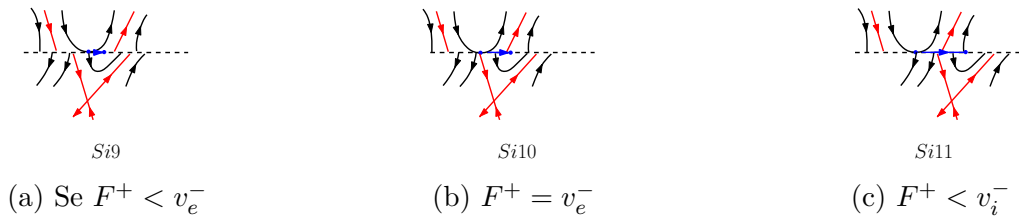


Figura 4.74: Dinâmica de 4.3.4 quando $\alpha < 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^- > F^+$

Caso $\alpha = 0$, então o ponto crítico (x_0^X, y_0^X) está em M . Nesse caso teremos as três seguintes possibilidades para o campo Y :

1. Se $2\beta - \mu > 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y é invisível. Nesse caso surge uma singularidade do tipo dobra visível para o campo Y em $(F^-, -F^-)$. Teremos então uma bifurcação sobre ξ_3 quando $x_0^X = F^-$. Numa vizinhança dessa bifurcação teremos as dinâmicas da figura 4.75.

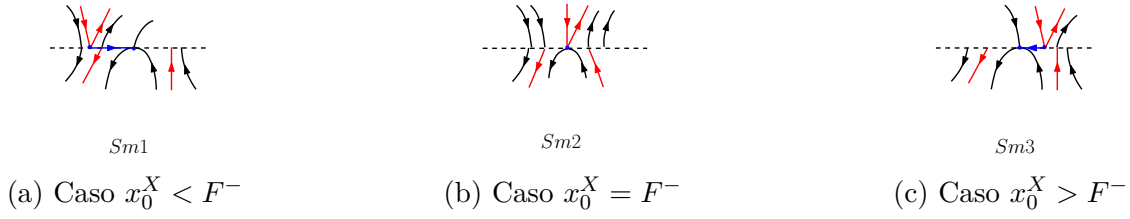


Figura 4.75: Diagrama de bifurcação de 4.3.4 quando $\alpha = 0$ e $2\beta - \mu > 0$

2. Se $2\beta - \mu = 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y está na variedade de descontinuidade M . Nesse caso teremos então uma bifurcação sobre ξ_3 quando $x_0^X = x_0^Y$. Observe que nesse caso, teremos o caso suave $Z = (X, X)$ dado pela figura 4.3.1. Numa vizinhança de ξ_3 teremos as dinâmicas da figura 4.76.

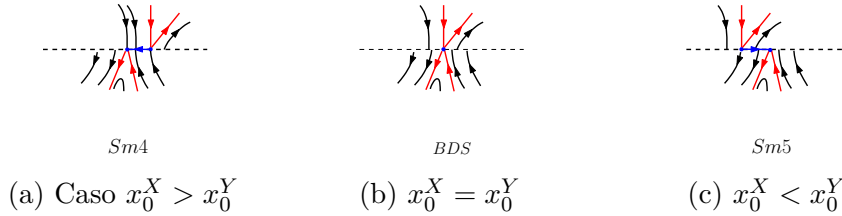


Figura 4.76: Diagrama de bifurcação de 4.3.4 quando $\alpha = 0$ e $2\beta - \mu = 0$

3. Se $2\beta - \mu < 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y é visível. Nesse caso surge uma singularidade do tipo dobra invisível para o campo Y em $(F^-, -F^-)$. Teremos então uma bifurcação sobre ξ_3 dada por $x_0^X = F^-$ (a dinâmica sobre ξ_3 é apresentada na figura 4.77).

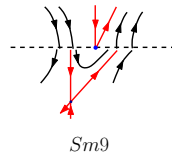


Figura 4.77: Dinâmica de 4.3.4 quando $\alpha = 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $x_0^X = F^-$.

Numa vizinhança de ξ_3 teremos ainda duas hipersuperfícies de bifurcações relacionadas com conexão entre o ponto crítico do campo Y e o ponto crítico do campo X . De fato, sobre a hipersuperfície dada por ξ_4 teremos uma conexão entre x_0^X e v_i^- (isto é, $W_i^- \equiv W_i^-(x_0^X)$), veja figura 4.79.b. Sobre a hipersuperfície dada por ξ_5 teremos uma conexão entre x_0^X e v_e^- (isto é, $W_e^- \equiv W_i^-(x_0^X)$), veja figura 4.78.b. Numa vizinhança dessas hipersuperfícies teremos as dinâmicas da figura 4.79 se $F^- < x_0^X$ e as dinâmicas da figura 4.78 se $x_0^X < F^-$.

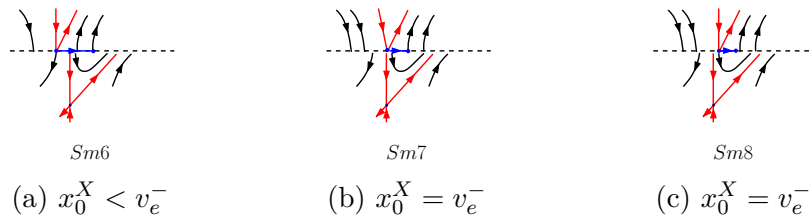


Figura 4.78: Dinâmica de 4.3.4 quando $\alpha = 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^- > x_0^X$.

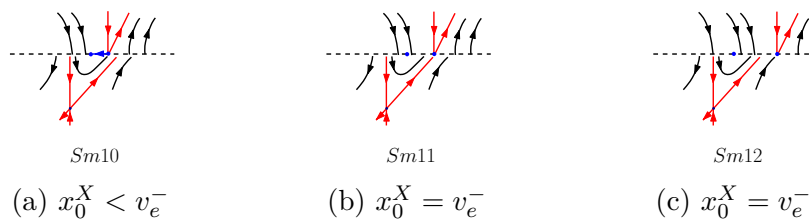


Figura 4.79: Dinâmica de 4.3.4 quando $\alpha = 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^- < x_0^X$.

Por fim, obtemos o diagrama de bifurcação do desdobramento 4.3.4 para $\alpha \geq 0$ fazendo a interseção de uma hipersfera em \mathbb{R}^5 com raio suficientemente pequeno com as hipersuperfícies de bifurcações $\xi_{1,2,3,4,5}$, (veja figura 4.80).

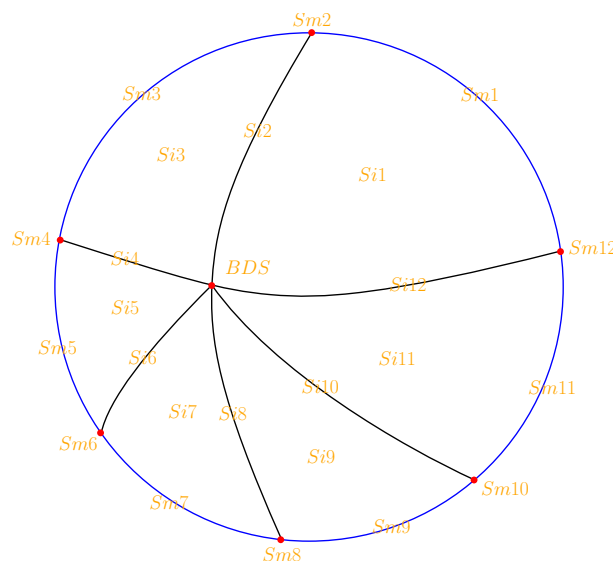


Figura 4.80: Diagrama de bifurcação do sistema 4.3.4 para $\alpha \geq 0$.

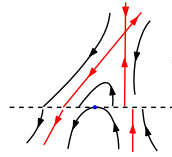
□

Proposição 6. *Se $\alpha > 0$ o sistema 4.3.4 possui infinitos retratos de fase distintos.*

Se $\alpha > 0$ então o ponto crítico (x_0^X, y_0^X) de X é visível. Nesse caso teremos uma rica dinâmica quando o ponto crítico do campo Y também for visível. Para facilitar o estudo desse caso estudaremos essa região (parte hachurada no diagrama de bifurcação 4.87) separadamente.

Lema 4.3.2. Se $\alpha > 0$ e $2\beta - \mu \geq 0$ então o sistema 4.3.4 possui essencialmente 14 retratos de fase distintos.

Demonstração. De fato, se $2\beta - \mu > 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) do campo Y é invisível, e portanto surge uma singularidade do tipo dobra visível para o campo Y em $(F^-, -F^-)$. Teremos então uma bifurcação do tipo dobra-dobra invisível-visível sobre ξ_3 e portanto, sobre ξ_3 teremos a dinâmica da figura 4.81.



Sv4

 Figura 4.81: Dinâmica de 4.3.4 sobre ξ_3 quando $\alpha > 0$, $2\beta - \mu > 0$.

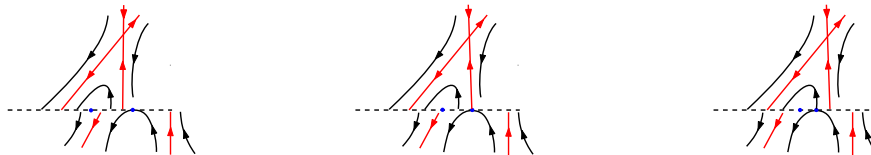
Numa vizinhança de ξ_3 teremos ainda duas hipersuperfícies de bifurcações relacionadas com a conexão do ponto crítico de X com a dobra de Y . De fato, sobre a hipersuperfície ξ_6 dada por

$$\lambda = \frac{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\epsilon + 2\beta\mu + \epsilon^2 - 2\epsilon\mu + \mu^2 + 2\beta - 3\epsilon + 4\mu + 4}(3\alpha - 4) + 2\alpha^2 - 3\alpha\mu - 8\alpha + 4\mu + 8}{2 + (2\alpha - 1)\sqrt{\beta^2 - 2\beta\epsilon + 2\beta\mu + \epsilon^2 - 2\epsilon\mu + \mu^2 + 2\beta - 3\epsilon + 4\mu + 4} + 2\alpha^2 - 2\alpha\mu - 6\alpha + \mu} \quad (4.3.15)$$

teremos uma conexão entre F^- e v_i^+ (isto é, $W_i^+ \equiv W_i^+(F^-)$) (veja figura 4.83.b). Sobre a hipersuperfície ξ_7 dada por

$$\alpha = \frac{-2 - \mu + \sqrt{\beta^2 - 2\beta\epsilon + 2\beta\mu + \epsilon^2 - 2\epsilon\mu + \mu^2 + 2\beta - 3\epsilon + 4\mu + 4}}{-1 + \sqrt{\beta^2 - 2\beta\epsilon + 2\beta\mu + \epsilon^2 - 2\epsilon\mu + \mu^2 + 2\beta - 3\epsilon + 4\mu + 4} + \lambda - \mu} \quad (4.3.16)$$

teremos uma conexão entre F^- e v_e^+ (isto é, $W_e^+ \equiv W_e^+(F^-)$) (veja figura 4.82.b). Numa vizinhança dessas hipersuperfícies teremos as dinâmicas da figura 4.83 se $F^- < F^+$ e as dinâmicas da figura 4.82 se $F^+ < F^-$.



Sv1

Sv2

Sv3

 (a) Caso $v_e^+ < F^-$

 (b) Caso $v_e^+ = F^-$

 (c) Caso $v_e^+ > F^-$

 Figura 4.82: Dinâmica do sistema 4.3.4 quando $\alpha > 0$, $2\beta - \mu > 0$ e $F^+ < F^-$.

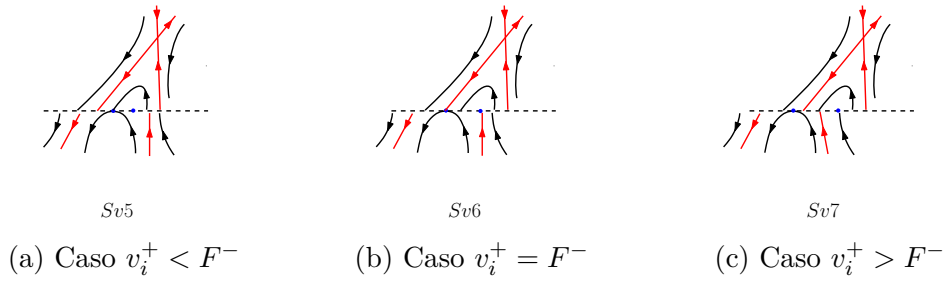


Figura 4.83: Dinâmica do sistema 4.3.4 quando $\alpha > 0$, $2\beta - \mu > 0$ e $F^+ > F^-$.

Se $2\beta - \mu = 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) do campo Y está em M . Nesse caso teremos uma bifurcação relacionada a conexão da dobra de X e o ponto crítico de Y . De fato, sobre ξ_3 teremos a dinâmica apresentada na figura 4.84.

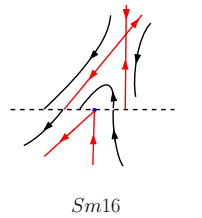


Figura 4.84: Dinâmica de 4.3.4 sobre ξ_3 quando $\alpha > 0$, $2\beta - \mu = 0$.

Numa vizinhança de ξ_3 teremos ainda duas hipersuperfícies de bifurcações relacionadas com conexão entre o ponto crítico do campo Y e o ponto crítico do campo X . De fato, sobre a hipersuperfície dada por ξ_7 em 4.3.16 teremos uma conexão entre x_0^Y e v_e^+ (isto é, $W_e^+ \equiv W_i^+(x_0^Y)$), veja figura 4.85.b. Sobre a hipersuperfície dada por ξ_6 em 4.3.15 teremos uma conexão entre x_0^Y e v_i^+ (isto é, $W_i^+ \equiv W_i^+(x_0^Y)$), veja figura 4.86.b. Numa vizinhança dessas hipersuperfícies teremos as dinâmicas da figura 4.86 se $F^+ < x_0^Y$ e as dinâmicas da figura 4.85 se $x_0^Y < F^+$.

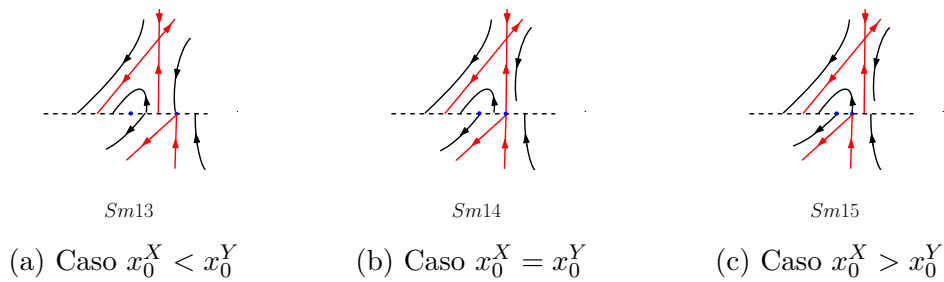
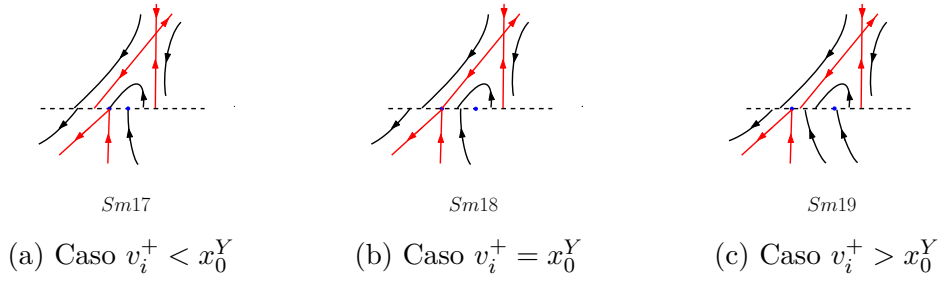
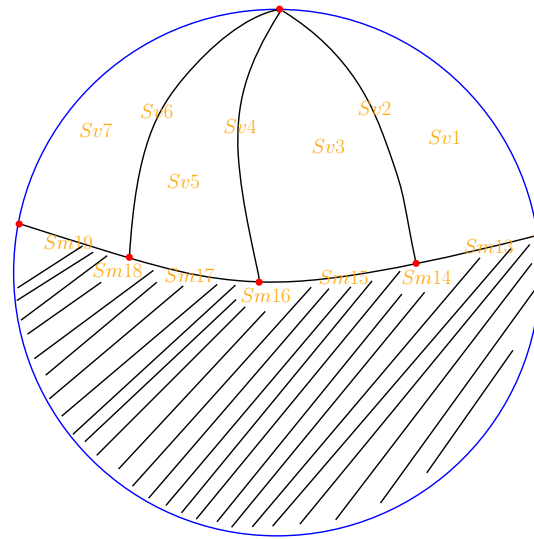


Figura 4.85: Dinâmica do sistema 4.3.4 quando $\alpha > 0$, $2\mu - \beta = 0$ e $x_0^Y < F^+$


 Figura 4.86: Dinâmica do sistema 4.3.4 quando $\alpha > 0$, $2\mu - \beta = 0$ e $x_0^Y > F^+$

O diagrama de bifurcação do desdobramento 4.3.4 para $\alpha > 0$ e $2\beta - \mu \geq 0$ está representado na figura 4.87.


 Figura 4.87: Diagrama de bifurcação do sistemas 4.3.4 para $\alpha > 0$ e $2\beta - \mu \geq 0$

□

Se $2\beta - \mu < 0$ então o ponto crítico (x_0^Y, y_0^Y) de Y é visível. Nesse caso teremos o aparecimento de bifurcações relacionadas a conexão homoclínica e heteroclínica dos pontos críticos de X e Y . Sobre a hipersuperfície dada por

$$\xi_8 = \{(\alpha, \beta, \mu, \lambda, \epsilon); \beta = -\frac{(2\alpha^2\lambda - 2\alpha\epsilon\lambda - 2\alpha^2 + 3\alpha\epsilon - 2\alpha\lambda + \epsilon\lambda + 2\alpha - 4\epsilon)}{2\alpha\lambda - 3\alpha - \lambda + 4}\} \quad (4.3.17)$$

teremos uma conexão heteroclínica entre os pontos críticos de X e Y (ou seja, $v_e^- = v_i^+$). Sobre a hipersuperfície dada por

$$\xi_9 = \{(\alpha, \beta, \mu, \lambda, \epsilon); \lambda = \frac{2\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta\epsilon + 2\alpha\beta\mu + 3\alpha\epsilon - 2\alpha\mu - 2\beta^2 + 2\beta\epsilon - 2\beta\mu - 4\alpha - 2\beta - \epsilon}{2(\alpha(2 - \epsilon + \beta + \mu))}\} \quad (4.3.18)$$

teremos uma conexão heteroclínica entre os pontos críticos de Y e X (ou seja, $v_e^+ = v_i^-$). Quando estamos sobre a interseção das hipersuperfícies ξ_3 , ξ_8 e ξ_9 teremos uma bifurcação de codimensão 3. Essa bifurcação está representada na figura 4.88.

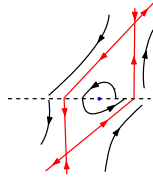


Figura 4.88: Dinâmica do sistema 4.3.4 sobre a interseção de ξ_3 , ξ_8 e ξ_9 quando $\alpha > 0$ e $2\beta - \mu < 0$.

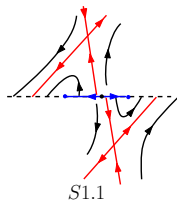
Vamos dividir o estudo do caso $\alpha > 0$ e $2\beta - \mu < 0$ pela posição relativa dos pontos de dobra dos campos X e Y . Observamos que quando $F^+ = F^-$ (ou seja, sobre ξ_3) teremos uma bifurcação dobra-dobra, e além disso, o estudo e consequentemente as possíveis dinâmicas são análogos ao caso com refração feito na seção 3.2.

Lema 4.3.3. Se $\alpha > 0$, $2\beta - \mu < 0$, $F^+ < F^-$ e $v_e^+ < F^-$ o sistema 4.3.4 possui 7 retratos de fase distintos.

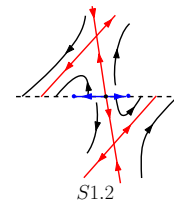
Demonstração. De fato, teremos nessa região uma hipersuperfície de bifurcação dada por

$$\xi_{10} = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda); \lambda = -\frac{\alpha\beta - \alpha\epsilon + \alpha - \beta + \epsilon}{\alpha}\} \quad (4.3.19)$$

relacionada a conexão entre variedade estável de X e a variedade instável de Y (isto é, $v_e^- = v_e^+$ (veja figura 4.89)). Numa vizinhança dessa hipersuperfície teremos ainda as bifurcações ξ_5 dada pela conexão de F^+ com v_e^- (veja figura 4.90) e ξ_8 dada pela conexão heteroclínica $v_i^+ = v_e^-$ (veja figura 4.92).

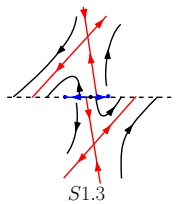


(a) Caso $v_e^+ < v_e^-$

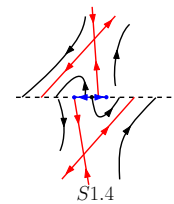


(b) Caso $v_e^+ = v_e^-$, ou seja, sobre ξ_{10}

Figura 4.89: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_{10} para $F^+ < F^-$ e $v_e^+ < F^-$.



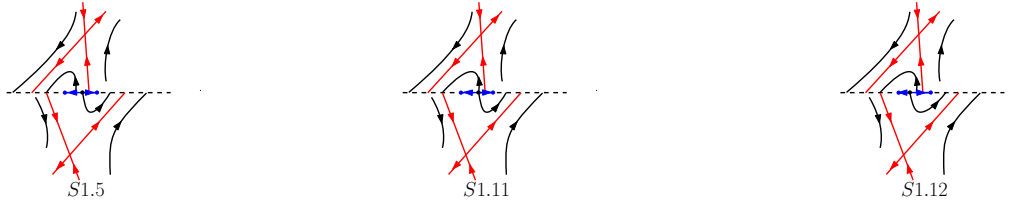
(a) Caso $v_e^+ > v_e^- > F^+$



(b) Caso $v_e^- = F^+$, ou seja, sobre ξ_5 .

Figura 4.90: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_5 para $F^+ < F^-$ e $v_e^+ < F^-$.

Existe ainda uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do pseudo equilíbrio p com o ponto crítico do tipo sela do campo Y . Seja $(S_0, 0) = \varphi_{t_0}^Y(v_e^-)$, onde $t_0 \in \mathbb{R}^-$. Assim as possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.91.



(a) Caso $v_i^+ < v_e^- < F^+$ e $S_0 < p$. (b) Caso $S_0 = p$ (c) Caso $S_0 > p$.

Figura 4.91: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_5 para $F^+ < F^-$ e $v_e^+ < F^-$.



(a) Caso $v_i^+ = v_e^-$, ou seja, sobre ξ_8 (b) Caso $v_i^+ > v_e^-$

Figura 4.92: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_8 para $F^+ < F^-$ e $v_e^+ < F^-$.

□

Lema 4.3.4. Se $\alpha > 0$, $2\beta - \mu < 0$, $F^+ < F^-$ e $v_e^+ = F^-$ o sistema 4.3.4 possui 7 retratos de fase distintos.

Demonstração. Nessa região teremos uma bifurcação sobre ξ_5 relacionada a conexão entre a dobra de X e o ponto crítico de Y (veja figura 4.93). Além disso, quando $v_e^- < F^+$ teremos ainda uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do pseudo equilíbrio p com o ponto crítico do tipo sela do campo Y . Seja $(S_0, 0) = \varphi_{t_0}^Y(v_e^-)$, onde $t_0 \in \mathbb{R}^-$. Assim as possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.94.



(a) Caso $v_e^- > F^+$ (b) Caso $v_e^- = F^+$, ou seja, sobre ξ_5 .

Figura 4.93: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_5 para $F^+ < F^-$ e $v_i^+ < v_e^+ = F^-$.

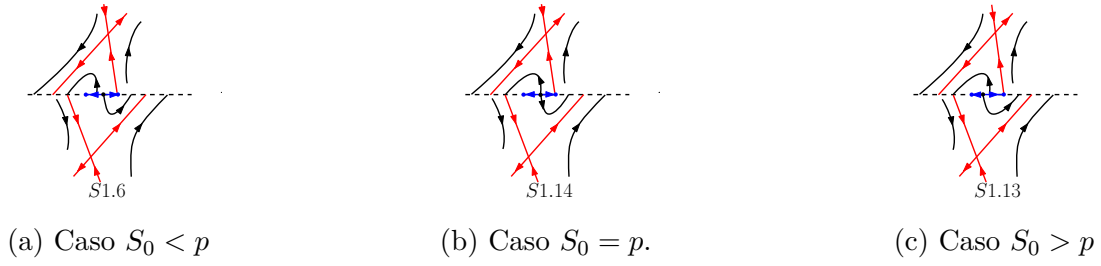


Figura 4.94: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_5 para $F^+ < F^-$, $v_e^+ = F^-$, $v_i^+ < v_e^- < F^+$.

Por fim, teremos ainda nessa região uma bifurcação relacionada a conexão heteroclínica sobre ξ_8 . As possíveis dinâmicas estão representadas na figura 4.95.

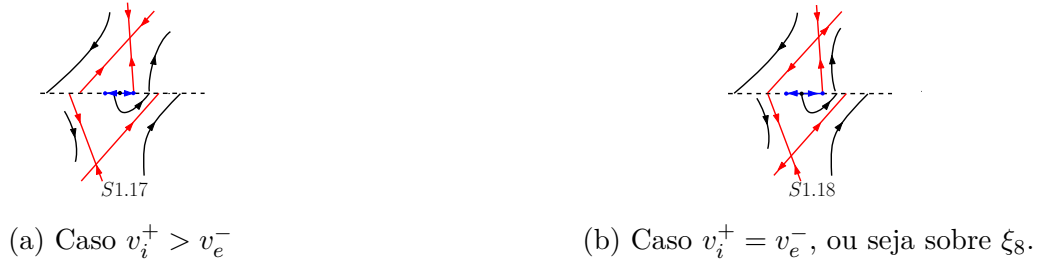


Figura 4.95: Dinâmica do sistema 4.3.4 numa vizinhança de ξ_8 para $F^+ < F^-$, $v_e^+ = F^-$, $v_i^+ \leq v_e^-$.

□

Lema 4.3.5. Se $\alpha > 0$, $2\beta - \mu < 0$, $F^+ < F^-$ e $v_e^+ > F^-$ então o sistema 4.3.4 possuem infinitos retratos de fase distintos. Mais especificamente,

1. Se $v_e^+ \geq v_i^-$ e $v_e^- < v_i^+$ então o sistema 4.3.4 possui 2 retratos de fase distintos.
2. Se $v_e^+ = v_i^-$ e $v_e^- < v_i^+$ então o sistema 4.3.4 possui infinitos retratos de fase distintos.
3. Se $v_e^- = v_i^+$ e $v_e^+ < v_i^-$ então o sistema 4.3.4 possui infinitos retratos de fase distintos.
4. Se $v_e^+ < v_i^-$ e $v_e^- < v_i^+$ então existe uma hipersuperfície ξ_{11} de bifurcação sobre a qual temos uma conexão homoclínica do ponto crítico do tipo sela do campo X . Além disso, existe uma família de hipersuperfícies $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$ no espaço dos parâmetros que se acumula na hipersuperfície ξ_{11} . Nessas hipersuperfícies ocorrem as seguintes bifurcações:
 - (a) Se $n = 4k$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_-^i(x_0) \equiv W^e(S^+)$;
 - (b) Se $n = 4k + 1$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_-^i(F^+) \equiv W^e(S^+)$;
 - (c) Se $n = 4k + 2$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_+^i(x_0) \equiv W^e(S^+)$;

- (d) Se $n = 4k + 3$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_+^i(F^-) \equiv W^e(S^+)$;

Chamamos essa região no diagrama de bifurcação 4.101 de região $R1$.

5. Se $v_e^+ > v_i^-$ e $v_e^- > v_i^+$ então existe uma hipersuperfície ξ_{12} de bifurcação sobre a qual temos uma conexão homoclínica do ponto crítico do tipo sela do campo Y . Além disso, existe uma família de hipersuperfícies $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ no espaço dos parâmetros que se acumula na hipersuperfície ξ_{12} . Nessas hipersuperfícies ocorrem as seguintes bifurcações:

- (a) Se $n = 4k$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_+^i(x_0) \equiv W^e(S^-)$;
- (b) Se $n = 4k + 1$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_+^i(F^+) \equiv W^e(S^-)$;
- (c) Se $n = 4k + 2$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_-^i(x_0) \equiv W^e(S^-)$;
- (d) Se $n = 4k + 3$ com $k \geq 0$ então ocorre uma bifurcação relacionada a conexão $W_-^i(F^-) \equiv W^e(S^-)$;

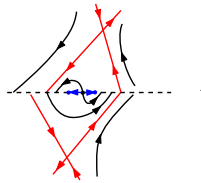
Chamamos essa região no diagrama de bifurcação 4.101 de região $R2$.

6. Na região limitada por $v_e^+ < v_i^-$ e $v_e^- > v_i^+$ teremos que a família de hipersuperfícies $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$ se acumulam na hipersuperfície ξ_9 e a família de hipersuperfícies $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ se acumulam na hipersuperfície ξ_8 . Nessa região, portanto, ocorrem as bifurcações mencionadas nas proposições anteriores em concomitância.

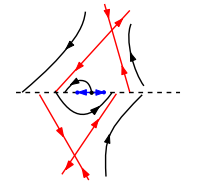
Chamamos essa região no diagrama de bifurcação 4.101 de região $R3$.

As regiões $R1$, $R2$ e $R3$ estão representadas nas figuras 4.102 e 4.103.

Demonstração. 1. As possíveis dinâmicas são apresentadas na figura 4.96.



(a) Caso $v_e^+ > v_i^-$



(b) Caso $v_e^+ = v_i^-$

Figura 4.96: Dinâmica do sistema 4.3.4 quando $v_e^+ \geq v_i^-$ e $v_e^- < v_i^+$.

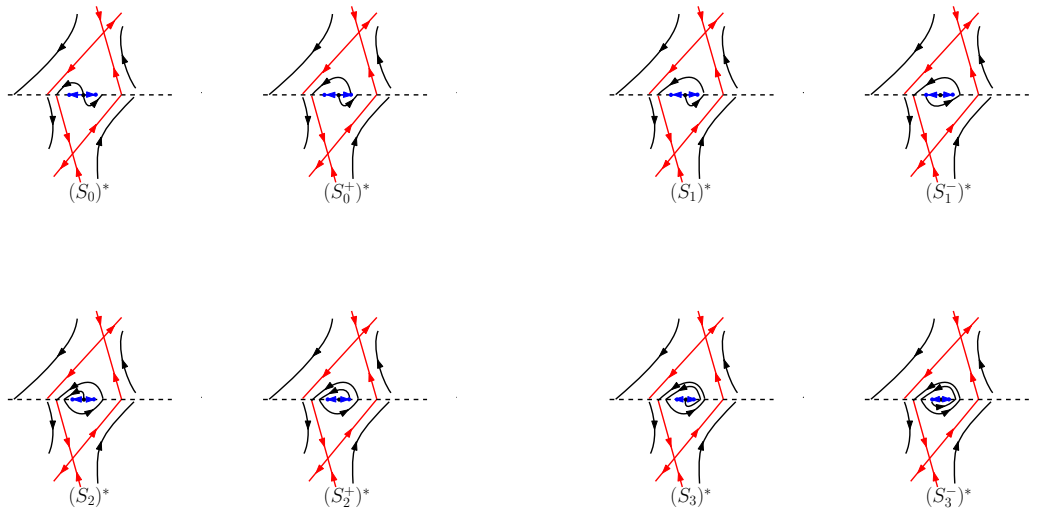
2. Seja $v_i^+ = v_e^-$ e $v_i^+ > v_e^-$. Considere a órbita $\varphi_t^X(v_e^-)$ do sistema 4.3.4 partindo do ponto v_e^- pelo campo X . Seja $t_0 \in \mathbb{R}^-$ tal que $\varphi_{t_0}^X(v_e^-) = (x_0, -x_0)$. Existem valores de parâmetros suficientemente pequenos tais que $x_0 < p$ e valores tais que $x_0 > p$. Pelo teorema do valor intermediário teremos que existe uma hipersuperfície $(S_0)^*$ sobre a qual $\varphi_{t_0}^X(v_e^-) = p$. Da mesma forma, existirá uma hipersuperfície $(S_0^+)^*$ sobre a qual $\varphi_{t_0}^X(v_e^-) = F^-$.

Se $(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda)$ são tais que $x_0 > p$, então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^-$ tais que $\varphi_{t_2}^X \circ \varphi_{t_1}^Y(x_0, -x_0) = (x_1, -x_1)$. Análogo ao anterior, pelo teorema do valor intermediário existem hipersuperfícies $(S_1)^*$ e $(S_1^-)^*$ tais que $x_1 = p$ e $x_1 = F^-$ respectivamente.

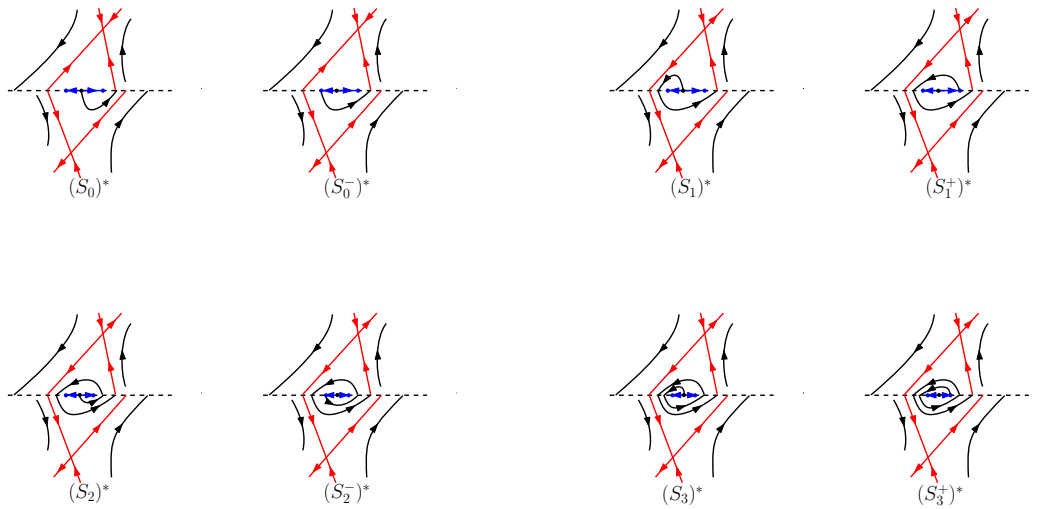
Esse procedimento pode ser repetido iterativamente de maneira que obtemos uma sequência de hipersuperfícies $(S_k)^*$ sobre as quais:

- Se $k = 2n$ então a órbita partindo do pseudo equilíbrio (pelo campo vetorial Y) cruza a variedade de descontinuidade $2n$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y .
- Se $k = 2n + 1$ então a órbita partindo do pseudo equilíbrio (pelo campo vetorial X) cruza a variedade de descontinuidade $2n + 1$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y .

Obtemos também uma sequência de hipersuperfícies $(S_{2n}^-)^*$ sobre as quais a órbita partindo do ponto de dobra do campo X (pelo campo Y) cruza a variedade de descontinuidade $2n$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y . Respectivamente, sobre $(S_{2n+1}^+)^*$ a órbita partindo do ponto de dobra do campo Y (pelo campo X) cruza a variedade de descontinuidade $2n + 1$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y .



3. O estudo é feito de maneira análoga ao caso anterior. Apresentamos na figura abaixo exemplos de dinâmicas que aparecem nessa região.



4. De fato, suponha que $v_e^- < v_i^+$ e $v_e^+ < v_i^-$. Seja $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi_{t_0}^Y = (x_0, -x_0)$. Existem valores suficientemente pequenos de $(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda)$ tais que $x_0 < v_e^+$ e valores tais que $x_0 > v_e^-$. Assim, pelo teorema do valor intermediário existe uma hipersuperfície ξ_{11} sobre a qual $x_0 = v_e^-$, e portanto, existirá uma conexão homoclínica do ponto crítico da sela do campo X (veja figura 4.97).



Figura 4.97: Dinâmica do sistemas 4.3.4 numa vizinhança de ξ_{11} .

Quando $x_0 > v_e^-$ encontramos uma sequência de hipersuperfícies como no caso (2). Vamos descrever os diferentes comportamentos na região $R1$ no sentido anti-horário. No diagrama de bifurcação na região $R1$, vamos usar a seguinte notação:

- Usaremos S_{2n} para representar a hipersuperfície sobre a qual a órbita partindo do pseudo equilíbrio (pelo campo vetorial Y) cruza a variedade de descontinuidade $2n$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial X .
- Usaremos S_{2n+1} para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do pseudo equilíbrio (pelo campo vetorial X) cruza a variedade de descontinuidade $2n + 1$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y .
- Usaremos S_{2n}^- para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do ponto de dobra do campo X , F^+ , cruza a variedade de descontinuidade $2n$ vezes.
- Usaremos S_{2n+1}^+ para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do ponto de dobra do campo Y , F^- , cruza a variedade de descontinuidade $2n + 1$ vezes.

A hipersuperfície de bifurcação η_0 é uma separatriz de conexão entre o pseudo equilíbrio p e a sela S^+ do tipo $W^e(S^+) \equiv W_-^i(p)$. Em η_1 teremos uma separatriz de conexão entre a dobra do campo X e a sela S^+ , portanto, $W^e(S^+) \equiv W_-^i(F^+)$. Em η_2 teremos novamente uma separatriz de conexão entre o pseudo equilíbrio p e a sela S^+ porém agora do tipo $W^e(S^+) \equiv W_+^i(p)$ (nesse caso, a órbita partindo do pseudo equilíbrio pelo campo vetorial X cruza a variedade M uma vez antes de encontrar a variedade estável de X). Em η_3 teremos uma separatriz de conexão entre a dobra do campo Y e a sela S^+ , portanto $W^e(S^+) \equiv W_+^i(F^-)$ (nesse caso, a órbita partindo da dobra F^- pelo campo vetorial X cruza a variedade M uma vez antes de encontrar a variedade estável de X). Esse procedimento se repete obtendo assim, uma sequência de hipersuperfícies que correspondem a bifurcações dadas por conexões de separatrizes que diferem apenas da quantidade de vezes que a órbita cruza a variedade M antes de interceptar a variedade estável do campo X . Essas hipersuperfícies acumulam em ξ_{11} onde existe uma conexão homoclínica da sela S^+ . A figura 4.98 apresenta as diferentes dinâmicas nessa região.

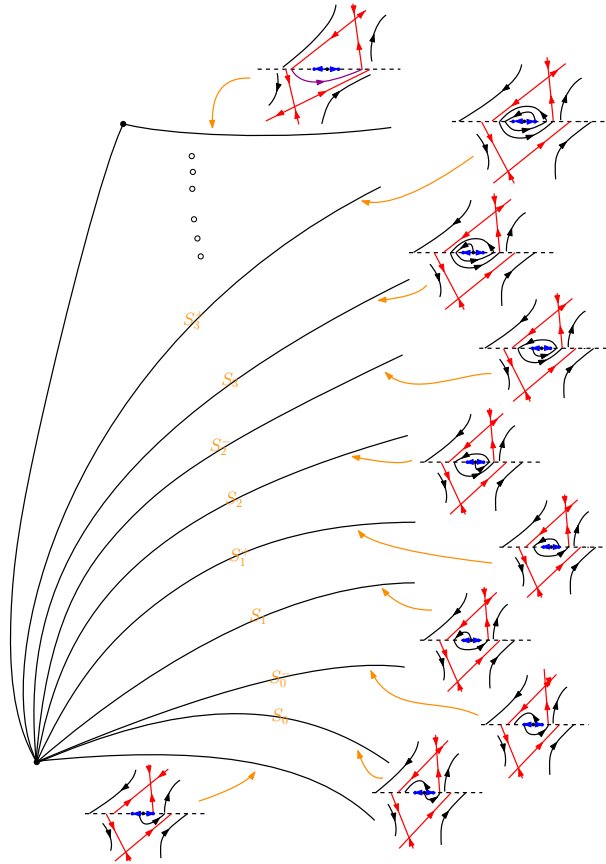


Figura 4.98: Diferentes dinâmicas na região $R1$. Nessa região existe infinitas hipersuperfícies de bifurcação de codimensão 1 $(\eta_n)_{n \geq 0}$ que se acumulam na hipersuperfície ξ_{11} .

5. Para esse caso o estudo é feito de maneira análoga ao caso (4). A figura 4.100 apresenta as diferentes dinâmicas nessa região. Utilizamos a seguinte notação:

- Usaremos S_{2n} para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do pseudo equilíbrio (pelo campo vetorial X) cruza a variedade de descontinuidade $2n$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y .

- Usaremos S_{2n+1} para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do pseudo equilíbrio (pelo campo vetorial Y) cruza a variedade de descontinuidade $2n + 1$ vezes antes de encontrar a variedade estável do campo vetorial Y .
- Usaremos S_{2n}^- para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do ponto de dobra do campo Y , F^- , cruza a variedade de descontinuidade $2n$ vezes.
- Usaremos S_{2n+1}^+ para representar a superfície sobre a qual a órbita partindo do ponto de dobra do campo X , F^+ , cruza a variedade de descontinuidade $2n + 1$ vezes.

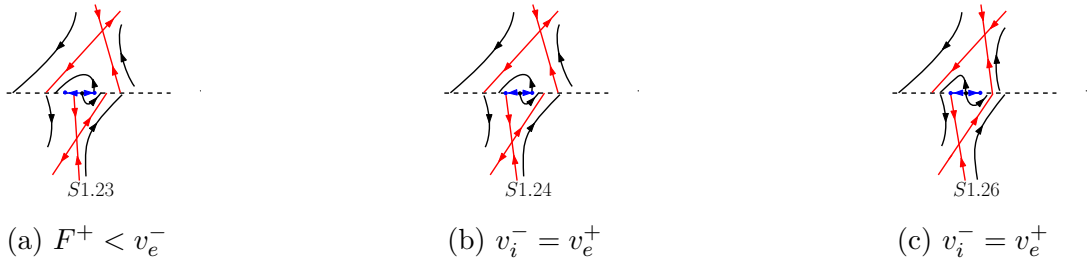


Figura 4.99: Se $v_e^- = F^+$

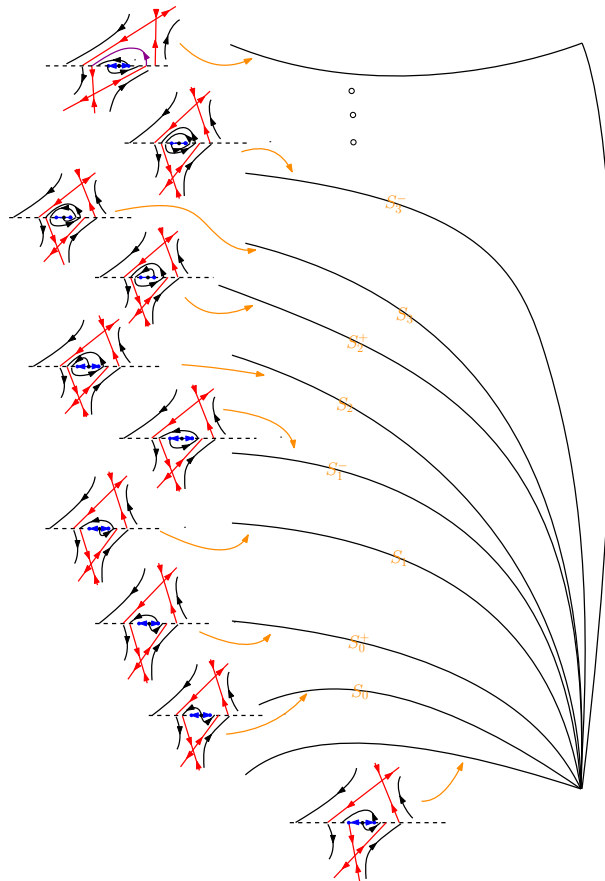


Figura 4.100: Diferentes dinâmicas na região $R2$. Nessa região existe infinitas hipersuperfícies de bifurcação de codimensão 1 $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ que se acumulam na hipersuperfície ξ_{12} .

□

O diagrama de bifurcação para $\alpha > 0$, $2\beta - \mu < 0$ é apresentado na figura 4.101, e as regiões $R1$, $R2$ e $R3$ são apresentadas na figura 4.102.

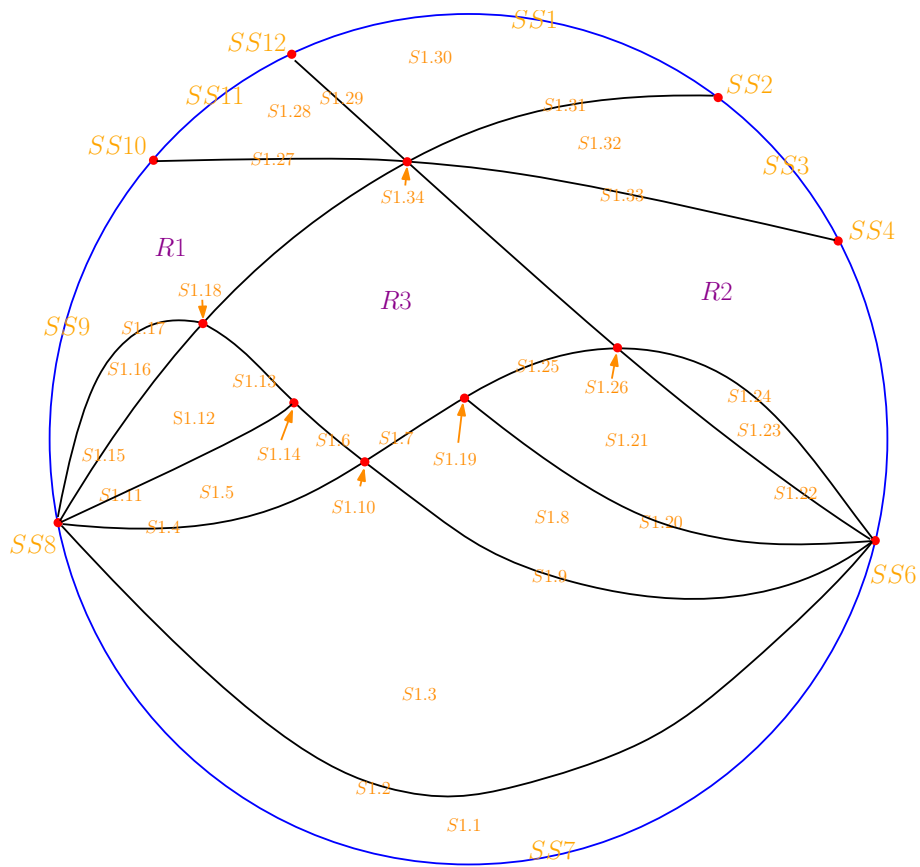


Figura 4.101: Diagrama de bifurcação do sistema 4.3.4 quando $\alpha > 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^+ < F^-$.

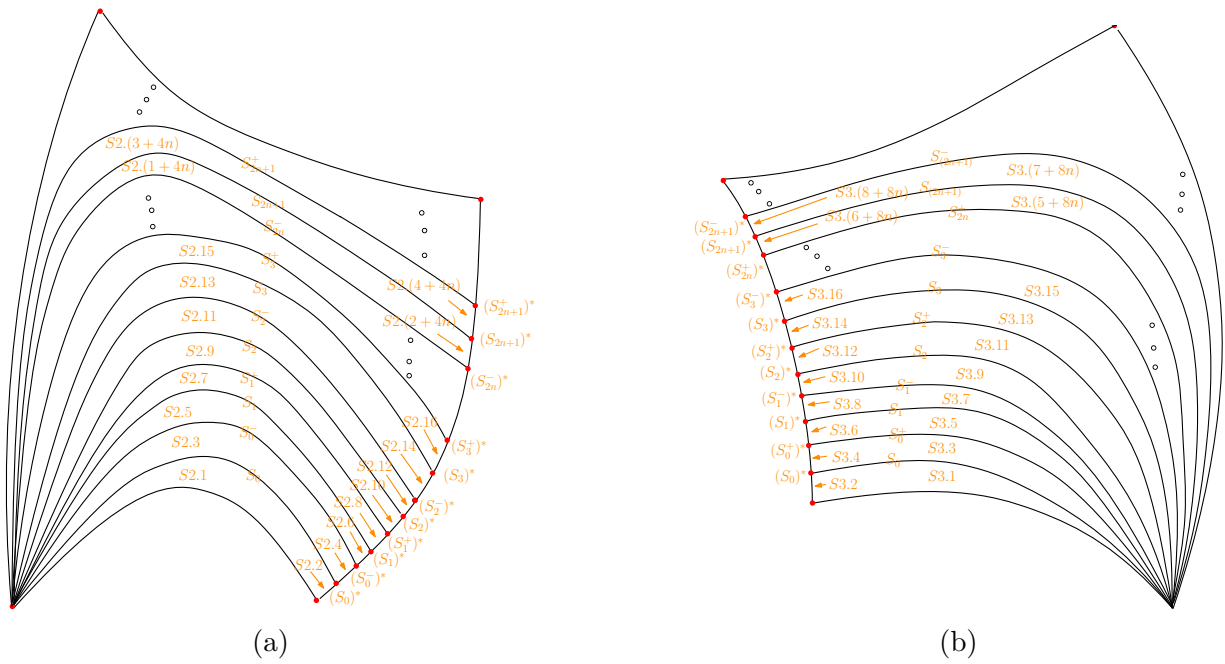


Figura 4.102

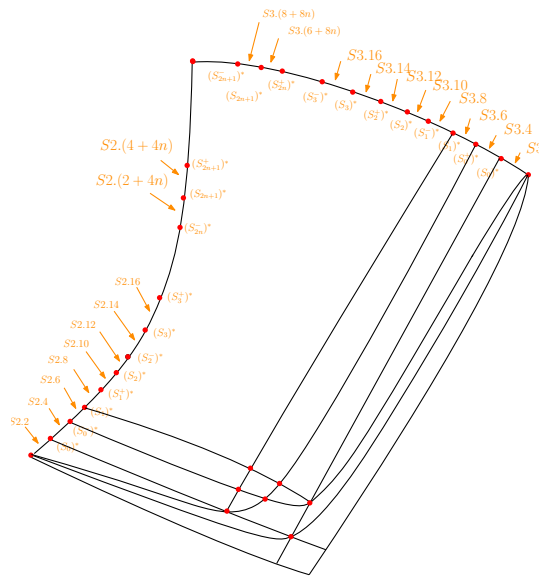


Figura 4.103

O caso quando $F^+ > F^-$ é estudado de maneira análoga ao anterior. O diagrama de bifurcação para esse caso está representado na figura 4.104.

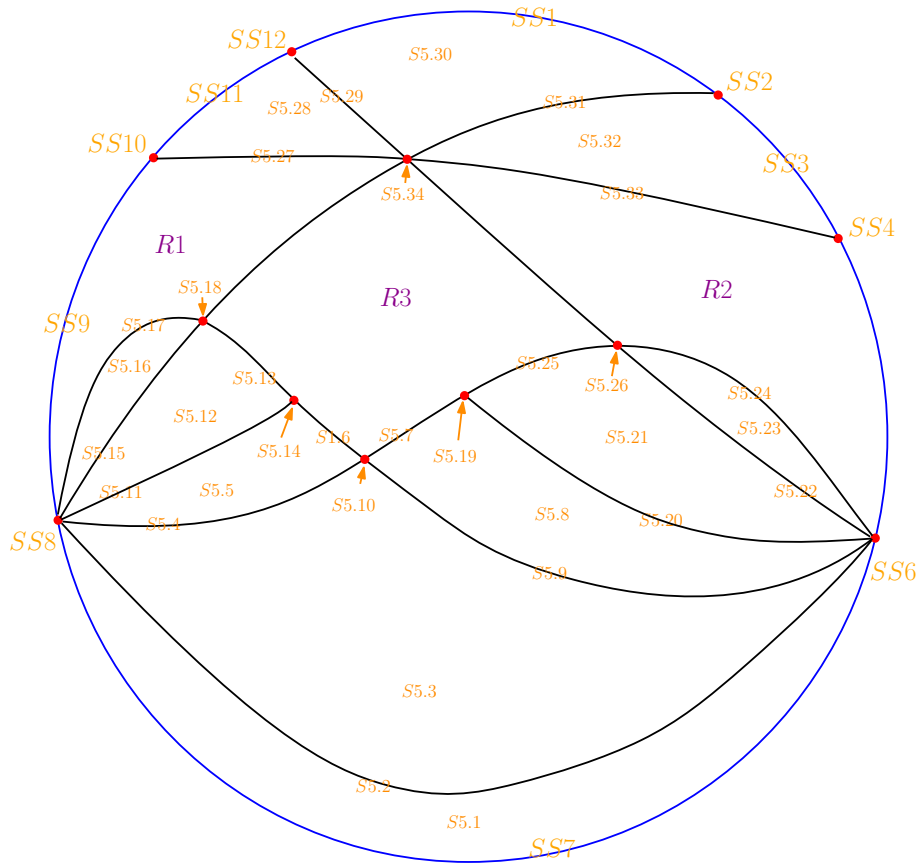
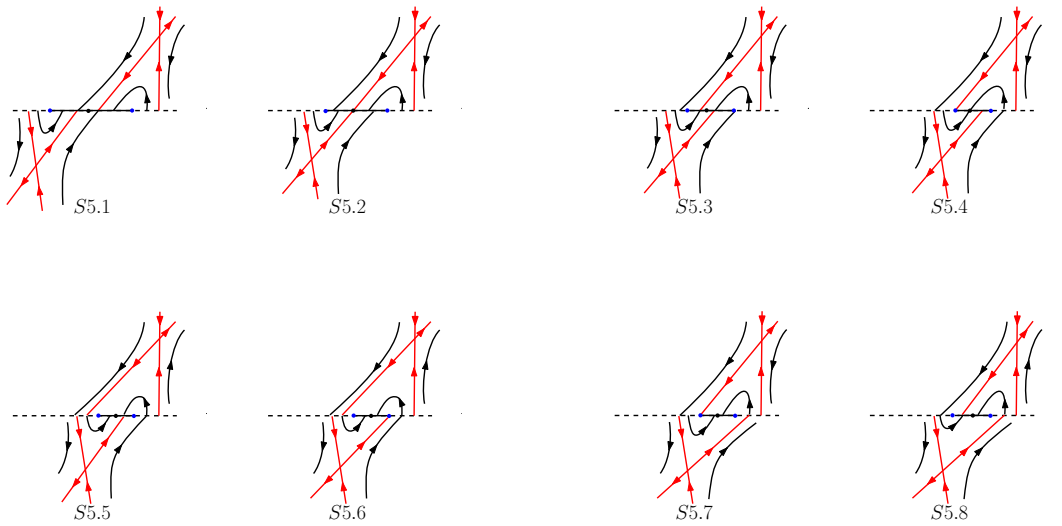
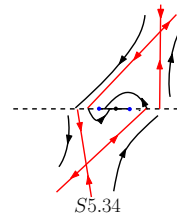
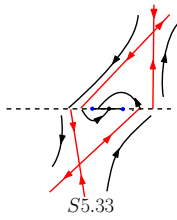


Figura 4.104: Diagrama de bifurcação do sistema 4.3.4 quando $\alpha > 0$, $2\beta - \mu < 0$ e $F^+ > F^-$.







4.4 Singularidade Cuspidal

Consideremos um campo vetorial suave X que possui um ponto crítico do tipo cúspide localizado em $C = (0, 0)$. Vamos considerar a condição de genericidade $X^3 f(C) \neq 0$. Dependendo do sinal de $X^3 f(C)$ a singularidade apresenta diferente comportamento. Nessa seção estudaremos o caso quando $X^3 f(C) < 0$. O outro caso pode ser estudado de maneira análoga. Podemos então escolher coordenadas tais que $M = \{(x, y); y = 0\}$ e

$$X = (-1, -x^2). \tag{4.4.1}$$

Pelo teorema 2.1.5, um desdobramento de X em χ_M é dado por

$$X_\alpha = (-1, -x^2 + \alpha) \tag{4.4.2}$$

Consideremos então o mergulho de X sobre Ω dado por $Z = (X, X)$. A dinâmica de $Z = (X, X)$ é ilustrada na figura 4.105.

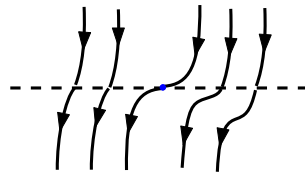


Figura 4.105: Retrato de fase de uma Bifurcação do tipo Cúspide/Cúspide

Estudaremos a família a cinco parâmetros de campos vetoriais dada por:

$$Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu}(x, y) = \begin{cases} X = (-1, -x^2 + \alpha) & \text{se } y > 0 \\ Y = (-1, -x^2 + 2\epsilon x + \beta + B(x, \beta, \epsilon, \lambda, \mu)) & \text{se } y < 0 \end{cases} \tag{4.4.3}$$

onde B é a função dada por $B(x, \beta, \epsilon, \lambda, \mu) = 0$ se $\beta + \epsilon^2 \leq 0$ e $B(x, \beta, \epsilon, \lambda, \mu) = 2(x^2 + (-2\epsilon + (\lambda + \mu)\sqrt{\epsilon^2 + \beta})x - \beta - (\lambda + \mu)(\epsilon\sqrt{\epsilon^2 + \beta} + \beta + \epsilon^2))$ se $\beta + \epsilon^2 > 0$.

O campo vetorial X terá uma singularidade do tipo cúspide em $(0, 0)$ quando $\alpha = 0$. O parâmetro α desdobra a singularidade cúspide do campo X como feito em [11], onde a singularidade cúspide é chamada de dupla tangência. Quando $\alpha \neq 0$ a cúspide desaparece de maneira que X é transversal à M para $\alpha < 0$ e para $\alpha > 0$ uma dobra invisível $(F_1^+, 0) = (-\sqrt{\alpha}, 0)$ e uma dobra visível $(F_2^+, 0) = (\sqrt{\alpha}, 0)$ surgem.

Da mesma forma, o campo vetorial Y terá uma singularidade do tipo cúspide em $(\epsilon, 0)$ quando $\beta + \epsilon^2 = 0$. Os parâmetros β e ϵ desdobram a singularidade cúspide do campo Y . Quando $\beta + \epsilon^2 \neq 0$ a cúspide desaparece de maneira que Y é transversal à M para $\beta + \epsilon^2 < 0$ e

para $\beta + \epsilon^2 > 0$ uma dobra visível $(F_1^-, 0) = (\epsilon - (1 + 2\lambda + 2\mu)\sqrt{\epsilon^2 + \beta}, 0)$ e uma dobra invisível $(F_2^-, 0) = (\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \beta}, 0)$ surgem.

Na região $\{(x, y); (x, y) \in M \text{ e } X_\alpha f(x, y)Y_{\beta, \epsilon, \lambda, \mu} f(x, y) < 0\}$ temos definido uma dinâmica sobre a variedade de descontinuidade dada pelo campo de deslize 2.2.2. Teremos o seguinte resultado para o campo vetorial deslizante do sistema 4.4.3.

Proposição 7. *A dinâmica do sistema 4.4.3 nas regiões $M^e \cup M^d$ é dada pelo campo vetorial $Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu}^s(x) = -1$.*

Demonstração. De fato, observe que $Xf(x) = -x^2 + \alpha$. Além disso, se $\beta + \epsilon^2 \leq 0$ então $Yf = -x^2 + 2\epsilon x + \beta$. Assim,

$$Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu}^s(x) = \frac{-2\epsilon x - \beta + \alpha}{2\epsilon + \beta - \alpha} = -1. \quad (4.4.4)$$

Se $\beta + \epsilon^2 > 0$ então $Yf = -(x - \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + \beta})(-x + \epsilon - (1 + 2\lambda + 2\mu)\sqrt{\epsilon^2 + \beta})$, e portanto,

$$Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu}^s(x) = \frac{(x - \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + \beta})(-x + \epsilon - (1 + 2\lambda + 2\mu)\sqrt{\epsilon^2 + \beta}) - (x^2 - \alpha)}{(x^2 - \alpha) - (x - \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + \beta})(-x + \epsilon - (1 + 2\lambda + 2\mu)\sqrt{\epsilon^2 + \beta})} = -1. \quad (4.4.5)$$

□

4.4.1 Estudo das bifurcações do caso Cúspide/Cúspide

Vamos estudar inicialmente as bifurcações locais do sistema 4.4.3.

Teorema 4.4.1. Para $(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda)$ suficientemente pequenos, o sistema $Z_{\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda}$ em 4.4.3 sofre as seguintes bifurcações:

1. Uma bifurcação sobre a hipersuperfície $\xi_1 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda); \alpha = 0\}$ relacionada ao aparecimento de uma singularidade cúspide para o campo vetorial X .
2. Uma bifurcação sobre a hipersuperfície $\xi_2 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \lambda); \beta - \epsilon^2 = 0\}$ relacionada ao aparecimento de uma singularidade cúspide para o campo vetorial Y .

As hipersuperfícies ξ_1 e ξ_2 separam o espaço dos parâmetros em 4 regiões dependentes se os campos vetoriais X e Y possuem pontos singulares numa vizinhança da origem. Quando o campo vetorial X possui dois pontos de dobra e o campo vetorial Y também possui dois pontos de dobra teremos uma rica possibilidade de dinâmicas. Vamos estudar essas regiões separadamente.

Teorema 4.4.2. Se $\beta + \epsilon^2 \leq 0$ então o sistema 4.4.3 possui essencialmente 14 retratos de fase distintos.

Demonstração. Caso $\beta + \epsilon^2 < 0$, então o campo vetorial Y é regular, ou seja, $Yf(q) \neq 0$ e $Y(q) \neq 0$ para todo $q \in M$. Nesse caso, teremos as três seguintes possibilidades para o campo X : se $\alpha < 0$ então X também será regular, se $\alpha = 0$ então X terá uma singularidade cúspide na origem e se $\alpha > 0$ então X terá duas singularidades dobra. As possíveis dinâmicas para o sistema 4.4.3 são apresentadas na figura 4.106

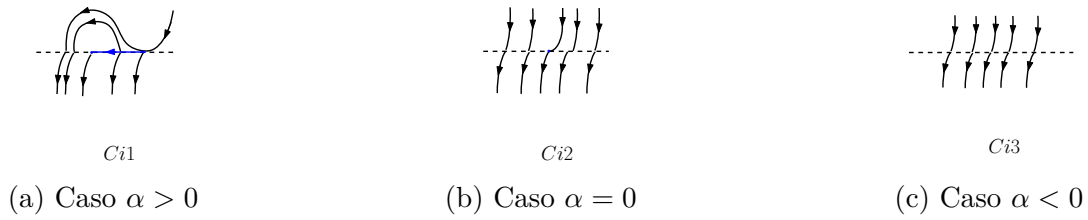


Figura 4.106: Diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 quando $\beta + \epsilon^2 < 0$.

Caso $\beta + \epsilon^2 = 0$, então o campo vetorial Y possui uma singularidade cúspide em $(\epsilon, 0)$. Além disso, quando $\alpha \geq 0$, o campo vetorial terá pontos singulares (um ponto de cúspide quando $\alpha = 0$ e dois pontos de dobra quando $\alpha > 0$). Assim, para $\alpha \geq 0$, existirão bifurcações relacionadas a conexão entre a cúspide do campo Y e os pontos singulares do campo X (veja figuras 4.107 e 4.108 para $\alpha > 0$ e figura 4.109 para $\alpha = 0$). Quando $\alpha < 0$ então teremos uma única possibilidade para a dinâmica do sistemas 4.4.3 (veja figura 4.110).

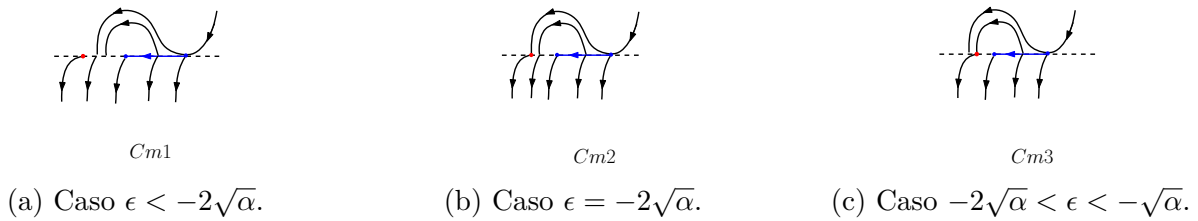


Figura 4.107

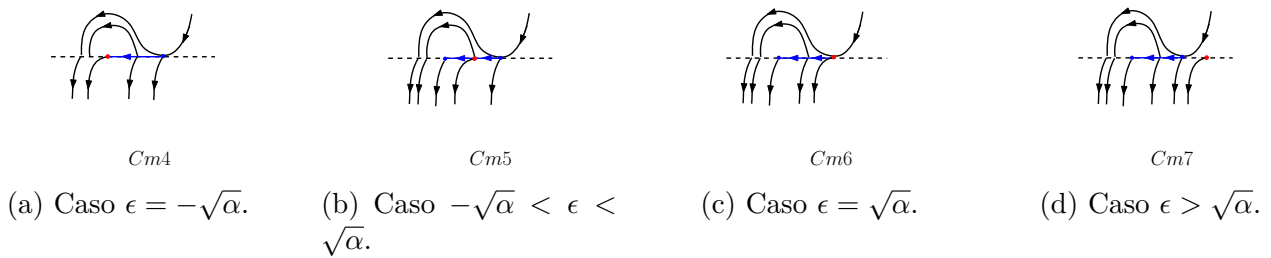


Figura 4.108: Diagrama do sistema 4.4.3 quando $\alpha > 0$ e $\beta + \epsilon^2 = 0$.

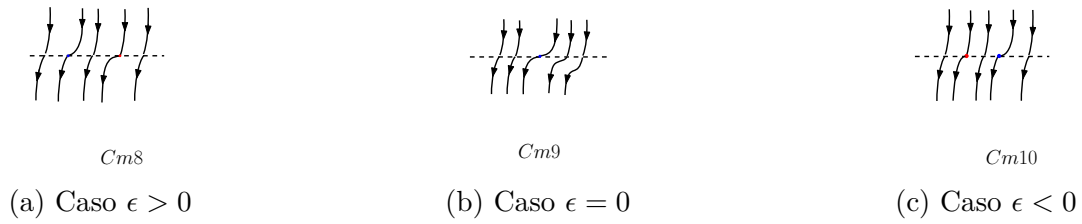


Figura 4.109: Dinâmica do sistema 4.4.3 quando $\alpha = 0$ e $\beta + \epsilon^2 = 0$.

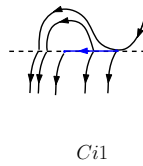


Figura 4.110: Dinâmica do sistema 4.4.3 quando $\alpha > 0$ e $\beta + \epsilon^2 = 0$.

O diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 para $\beta + \epsilon^2 \geq 0$ é apresentado na figura 4.111.

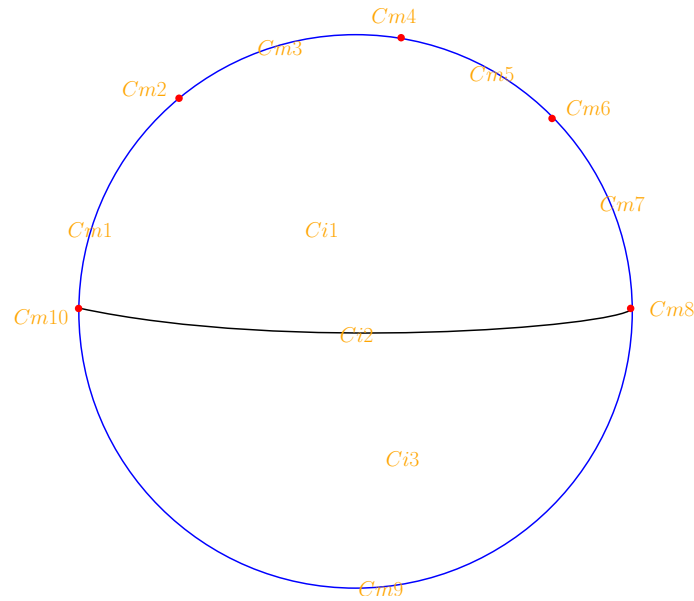


Figura 4.111: Diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 para $\beta + \epsilon^2 \leq 0$.

□

Teorema 4.4.3. Se $\beta + \epsilon^2 > 0$ então o sistema 4.4.3 possui infinitos retratos de fase distintos.

Se $\beta + \epsilon^2 > 0$ surgem duas singularidades dobra para o campo vetorial Y . Nesse caso, teremos uma rica dinâmica quando o campo vetorial X também possuir duas singularidades dobra numa vizinhança da origem (ou seja, quando $\alpha > 0$). Para facilitar o estudo, estudaremos essa região (parte hachurada no diagrama de bifurcação) separadamente.

Lema 4.4.4. Se $\beta + \epsilon^2 > 0$ e $\alpha \leq 0$ então o sistema 4.4.3 possui essencialmente 8 retratos de fase distintos.

Demonstração. O estudo nesse caso é análogo ao estudo feito na proposição 4.4.2. As possíveis dinâmicas são apresentadas no diagrama de bifurcação 4.112.

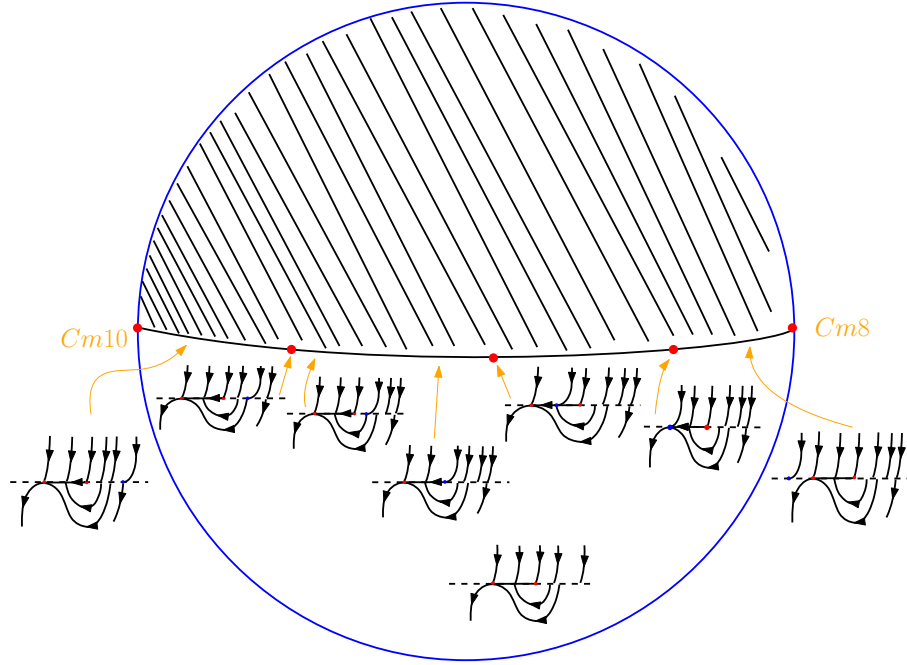


Figura 4.112: Diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 quando $\beta + \epsilon^2 > 0$ e $\alpha \leq 0$.

□

Lema 4.4.5. Se $\beta + \epsilon^2 > 0$ e $\alpha > 0$ então o sistema 4.4.3 possui infinitos retratos de fase distintos.

Demonstração. Observe que quando $\alpha > 0$ e $\beta + \epsilon^2 > 0$ a órbita pelo campo vetorial X partindo da dobra F_2^+ encontrará a variedade de descontinuidade M no ponto $x_0^+ = -2\sqrt{\alpha}$ e a órbita pelo campo vetorial Y partindo da dobra F_2^+ (com tempo negativo) encontrará a variedade de descontinuidade M no ponto

$$x_0^- = \frac{(\epsilon^2 + \beta)(\lambda + \mu + 2) + \sqrt{\epsilon^2 + \beta}}{\sqrt{\epsilon^2 + \beta}}. \quad (4.4.6)$$

Para $\alpha > 0$ e $\beta + \epsilon^2 > 0$ teremos uma bifurcação dobra-dobra invisível quando $F_1^+ = F_2^-$. Essa bifurcação ocorrerá sobre a hipersuperfície,

$$\eta_1 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu); \alpha = 2\epsilon^2 + \beta + 2\sqrt{\epsilon^2 + \beta\epsilon}\}. \quad (4.4.7)$$

Ao redor da dobra-dobra é possível definir um mapa de primeiro retorno $\phi : (F_1^+, F_2^+) \rightarrow ((F_1^+, F_2^+))$ dada por $\phi(x) = \phi_X \circ \phi_Y(x)$. A função $\phi_Y : (F_1^+, F_2^+) \rightarrow ((F_1^-, F_1^+))$ é dada por

$$\phi_Y(x) = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\epsilon^2 + \beta}(\lambda + \mu) + \frac{3}{2}\epsilon - \frac{1}{2}\sqrt{f_1}, \quad (4.4.8)$$

onde,

$$f_1 = (3\epsilon(\lambda+\mu) + \sqrt{\epsilon^2 + \beta})^2 + 9\beta(\lambda+\mu)^2 + 24(\epsilon^2 + \beta)(\lambda+\mu) + 8\epsilon^2 + 11\beta + (-6\sqrt{\epsilon^2 + \beta}(\lambda+\mu) + 6\epsilon)x - 3x^2.$$

A função $\phi_X : (F_1^-, F_1^+) \rightarrow ((F_1^+, F_2^+))$ é dada por

$$\phi_X(\tilde{x}) = -\frac{\tilde{x}}{2} - \frac{\sqrt{-3\tilde{x}^2 + 12\alpha}}{2}. \tag{4.4.9}$$

Assim, seja $\phi_Y(x) = \tilde{x}$. Considere a órbita de X partindo do ponto $(x, 0)$, assim existe $t_0 < 0$ tal que $\varphi_{t_0}^X(x, 0) = (q, 0)$. Para $F_1^+ = F_2^-$ teremos que $q - \tilde{x} > 0$. E portanto, teremos a dinâmica ilustrada na figura 4.113.

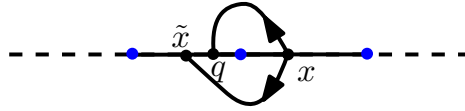
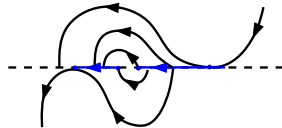


Figura 4.113: Dinâmica ao redor da dobra-dobra do sistema 4.4.3 quando $F_1^+ = F_2^-$.

Vamos dividir o estudo desse caso pela posição relativa entre o ponto de dobra F_1^+ do campo X e o ponto de dobra F_2^- do campo Y .

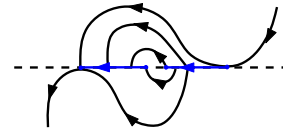
1. Considere o caso quando $F_1^+ < F_2^-$. Nesse caso existirá uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo Y , F_1^- , com o ponto x_0^+ (ou seja, $x_0^+ = F_1^-$). Essa hipersuperfície será dada por:

$$\eta_2 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu); \alpha = -\epsilon(\lambda + \mu + \frac{1}{2})\sqrt{\epsilon^2 + \beta} + (\frac{1}{4}(4\lambda^2 + (8\mu + 4)\lambda + 4\mu^2 + 4\mu + 2))\epsilon^2 + \beta(\lambda + \mu + \frac{1}{2})^2\}. \tag{4.4.10}$$



C1.1

(a) $x_0^+ < F_1^-$



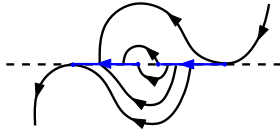
C1.2

(b) $x_0^+ = F_1^-$

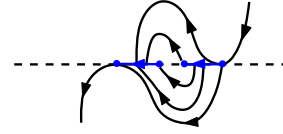
Figura 4.114: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_2 .

Quando $x_0^+ > F_1^-$ existirá uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto x_0^- (ou seja, $x_0^- = F_2^+$). Essa hipersuperfície será dada por:

$$\eta_3 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu); \alpha = \frac{(\epsilon^2 \lambda + \epsilon^2 \mu + \sqrt{\epsilon^2 + \beta} \epsilon + \beta \lambda + \beta \mu + 2\epsilon^2 + 2\beta)^2}{\epsilon^2 + \beta}\}. \quad (4.4.11)$$



C1.3

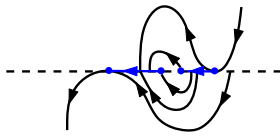
 (a) $x_0^- < F_2^+$


C1.4

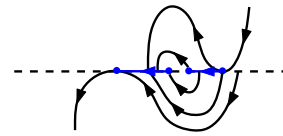
 (b) $x_0^- = F_2^+$

 Figura 4.115: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_3 .

Seja $t_1 < 0$ tal que $\varphi_{t_1}^Y(-2\sqrt{\alpha}, 0) = (x_1^+, 0)$ (ou ainda, $\varphi_{t_1}^Y(x_0^+, 0) = (x_1^+, 0)$). Para $x_0^- > F_2^+$ existirá uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto x_1^+ (ou seja, $x_1^+ = F_2^+$). Chamaremos essa hipersuperfície η_4 .



C1.5

 (a) $x_1^+ < F_2^+$


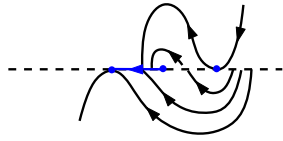
C1.6

 (b) $x_1^+ = F_2^+$

 Figura 4.116: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_4 .

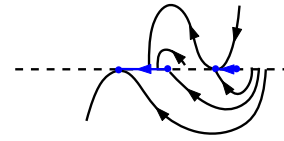
Para $x_1^+ > F_2^+$ existirá uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto de dobra do campo Y , F_2^- (ou seja, $F_2^- = F_2^+$). Essa hipersuperfície será dada por:

$$\eta_5 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu); \alpha = 2\epsilon^2 + \beta + 2\epsilon\sqrt{\epsilon^2 + \beta}\}. \quad (4.4.12)$$



C1.7

(a) $F_2^- = F_2^+$

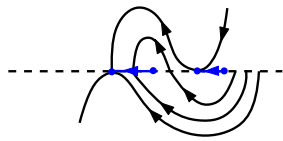


C1.8

(b) $F_2^- > F_2^+$

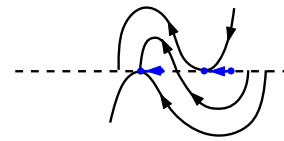
Figura 4.117: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_5 .

Para $F_2^+ < F_2^-$ teremos ainda na vizinhança de η_5 uma bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo Y , F_1^- , com o ponto x_0^+ (ou seja, $F_1^- = x_0^+$).



C1.9

(a) $F_1^- = x_0^+$

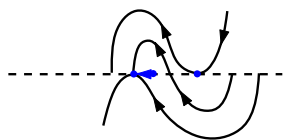


C1.10

(b) $F_1^- > x_0^+$

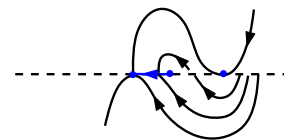
Figura 4.118: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_5 e de η_2 .

Para $F_2^+ = F_2^-$ teremos também uma bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo Y , F_1^- , com o ponto x_0^+ sobre η_2 .



C1.11

(a) $F_1^- > x_0^+$



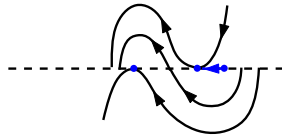
C1.12

(b) $F_1^- = x_0^+$

Figura 4.119: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_2 quando $F_2^+ = F_2^-$.

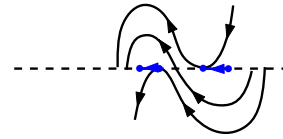
Para $F_2^+ < F_2^-$ teremos uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_1^+ , com o ponto de dobra do campo Y , F_1^- (ou seja, $F_1^- = F_1^+$). Essa hipersuperfície será dada por:

$$\eta_6 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu); \alpha = -(4(\lambda + \mu + \frac{1}{2}))\epsilon\sqrt{\epsilon^2 + \beta} + (4\lambda^2 + (8\mu + 4)\lambda + 4\mu^2 + 4\mu + 2)\epsilon^2 + 4\beta(\lambda + \mu + \frac{1}{2})^2\}. \quad (4.4.13)$$



C1.13

(a) $F_1^- = F_1^+$



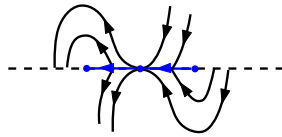
C1.14

(b) $F_1^- < F_1^+$

Figura 4.120: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_6 .

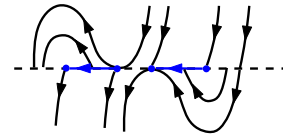
Para $F_1^- < F_1^+$ temos também uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto de dobra do campo Y , F_1^- (ou seja, $F_1^- = F_2^+$). Essa hipersuperfície será dada por:

$$\eta_7 = \{(\alpha, \beta, \epsilon, \lambda, \mu); \beta = \alpha + 2\sqrt{\alpha\epsilon}\}. \quad (4.4.14)$$



C1.15

(a) $F_1^- = F_2^+$

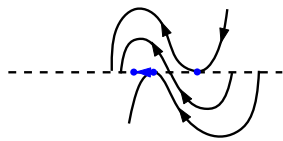


C1.16

(b) $F_1^- > F_2^+$

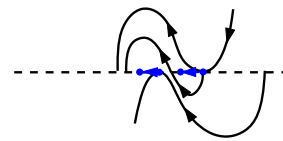
Figura 4.121: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_7 .

Para $F_1^- < F_2^+$ teremos uma bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto de dobra do campo Y , F_2^- , (ou seja, $F_2^- = F_2^+$) sobre η_5 .



C1.17

(a) $F_2^- = F_2^+$

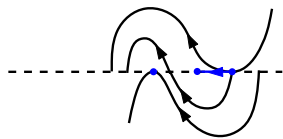


C1.18

(b) $F_2^- < F_2^+$

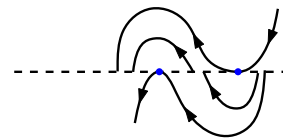
Figura 4.122: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_7 e de η_5 .

Para $F_1^+ = F_1^-$ teremos também uma bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto de dobra do campo Y , F_2^- , (ou seja, $F_2^- = F_2^+$) sobre η_5 .



C1.19

(a) $F_2^- < F_2^+$

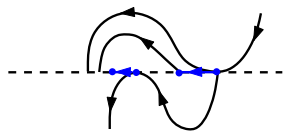


C1.20

(b) $F_2^- = F_2^+$

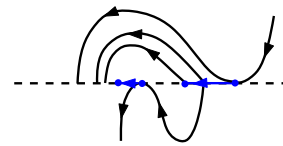
Figura 4.123: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_5 e de η_6 .

Para $F_2^- = F_2^+$ teremos uma bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto x_0^- (ou seja, $F_2^+ = x_0^-$) sobre η_3 .



C1.21

(a) $F_2^+ = x_0^-$

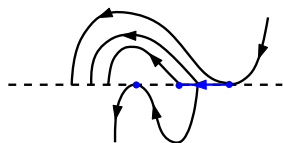


C1.22

(b) $F_2^+ > x_0^-$

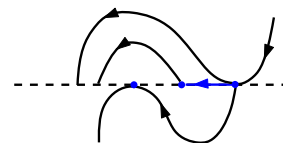
Figura 4.124: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_3 e de η_5 .

Para $F_1^+ = F_1^-$ teremos também uma bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto x_0^- (ou seja, $x_0^- = F_2^+$) sobre η_3 .



C1.23

(a) $x_0^- < F_2^+$

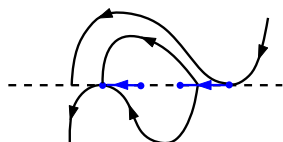


C1.24

(b) $x_0^- = F_2^+$

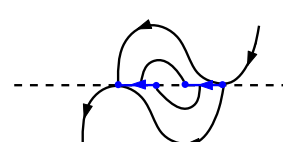
Figura 4.125: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_3 e de η_6 .

Para $x_1^+ = F_2^+$ teremos uma hipersuperfície de bifurcação relacionada com a conexão do ponto de dobra do campo X , F_2^+ , com o ponto x_0^- (ou seja, $x_0^- = F_2^+$) sobre η_3 .



C1.25

(a) $x_0^- = F_2^+$



C1.26

(b) $x_0^- = F_2^+$

Figura 4.126: Dinâmica do sistema 4.4.3 numa vizinhança de η_3 e de η_4 .

Nas regiões do diagrama de bifurcação 4.129 definidas por:

- (a) $x_1^+ > F_2^+$, $F_2^- < F_2^+$ e $F_1^- < x_0^+$ (Região 1);
- (b) $x_0^- > F_2^+$, $F_2^- < F_2^+$, $x_0^+ < F_1^-$ e $F_1^- < F_1^+$ (Região 2);
- (c) $x_0^+ < F_1^-$, $F_1^- < F_1^+$ e $x_0^- > F_2^+$ (Região 3);

existirão uma infinidade de hipersuperfícies de bifurcações.

Na região $R1$ teremos que a órbita partindo do ponto de dobra F_1^+ pelo campo vetorial Y pode encontrar a variedade de descontinuidade M um número $2n$ de vezes antes de encontrar a dobra F_2^+ . Assim estão definidos para cada n inteiro não negativo uma hipersuperfície ξ_{2n} . Da mesma forma, a órbita partindo do ponto de dobra F_2^- pelo campo vetorial X pode encontrar a variedade de descontinuidade M um número $2n + 1$ de vezes antes de encontrar a dobra F_2^+ . Para cada n definimos então uma hipersuperfície ξ_{2n+1} . Dessa forma, existe uma seqüência infinita de hipersuperfícies que se acumulam na superfície sobre a superfície η_5 onde as dobras F_2^- e a dobra F_2^+ se colapsam e a componente M^e desaparece (veja figura 4.127).

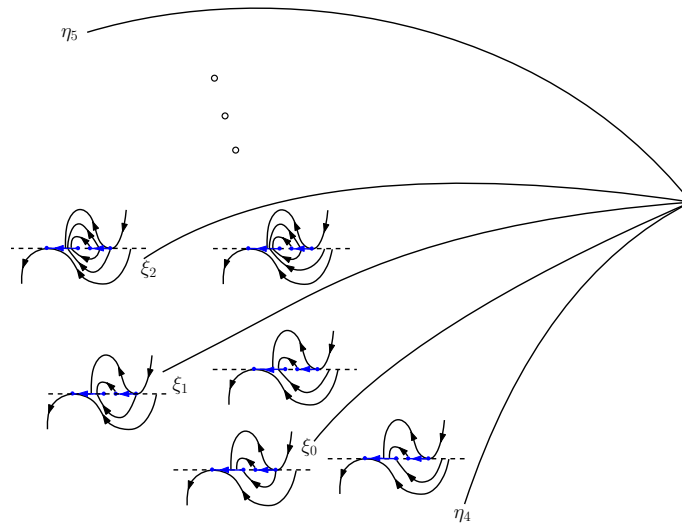


Figura 4.127: Diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 na região $R1$.

Na região $R3$ teremos que a órbita partindo do ponto de dobra F_1^+ pelo campo vetorial Y pode encontrar a variedade de descontinuidade M um número $2n + 1$ de vezes antes de encontrar a dobra F_1^- . Assim estão definidos para cada n inteiro não negativo uma hipersuperfície κ_n . Da mesma forma, a órbita partindo do ponto de dobra F_2^- pelo campo vetorial X pode encontrar a variedade de descontinuidade M um número $2n$ de vezes antes de encontrar a dobra F_1^- . Para cada n definimos então uma hipersuperfície κ_{2n+1} . Dessa forma, existe uma sequência infinita de hipersuperfícies que se acumulam na superfície sobre a superfície η_6 onde as dobras F_1^- e a dobra F_1^+ se colapsam e a componente M^d desaparece (veja figura 4.128).

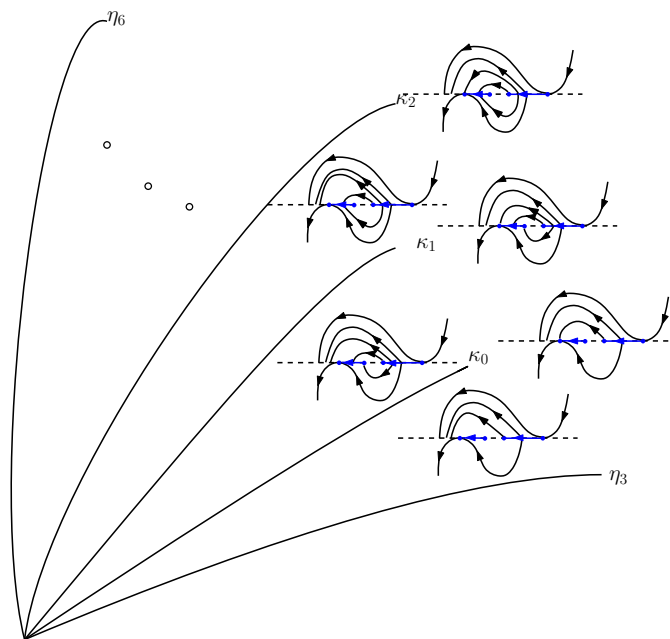


Figura 4.128: Diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 na região $R3$.

Na região $R2$ teremos as bifurcações relacionadas as hipersuperfícies ξ_n e κ_n acontecendo em concomitância.

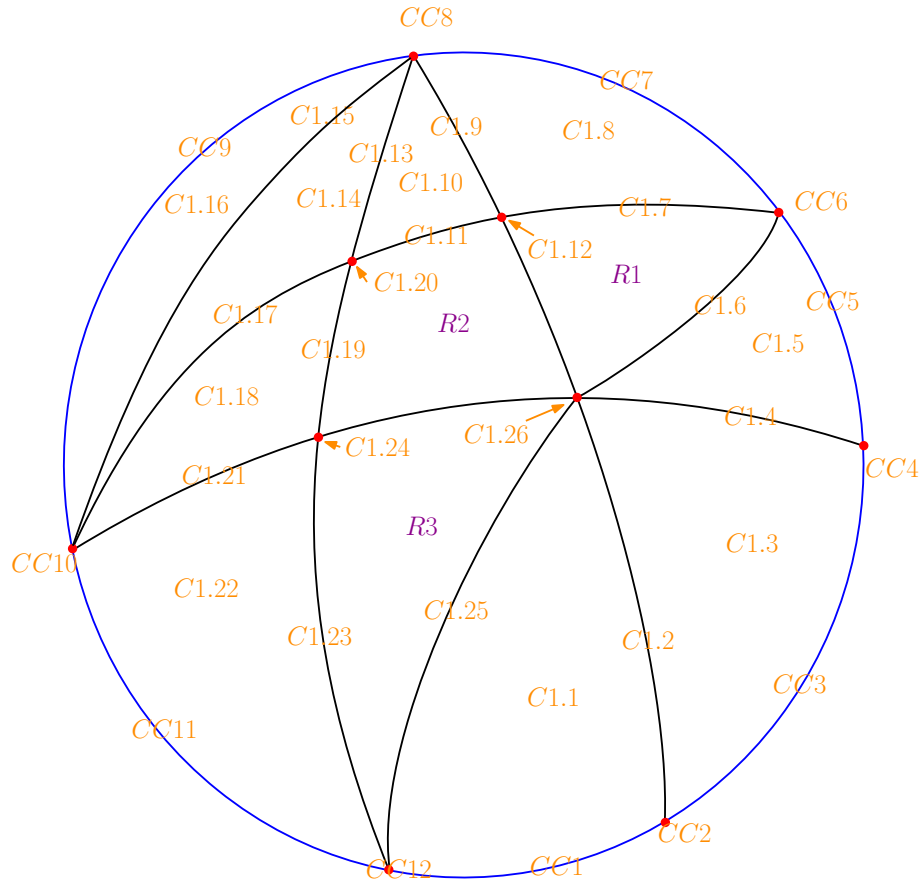


Figura 4.129: Diagrama de bifurcação do sistema 4.4.3 quando $F_1^+ < F_2^-$.

2. O caso quando $F_1^+ = F_2^-$, ou seja, sobre η_1 teremos uma bifurcação de codimensão 2. O diagrama de bifurcação para esse caso é representado na figura 4.130.

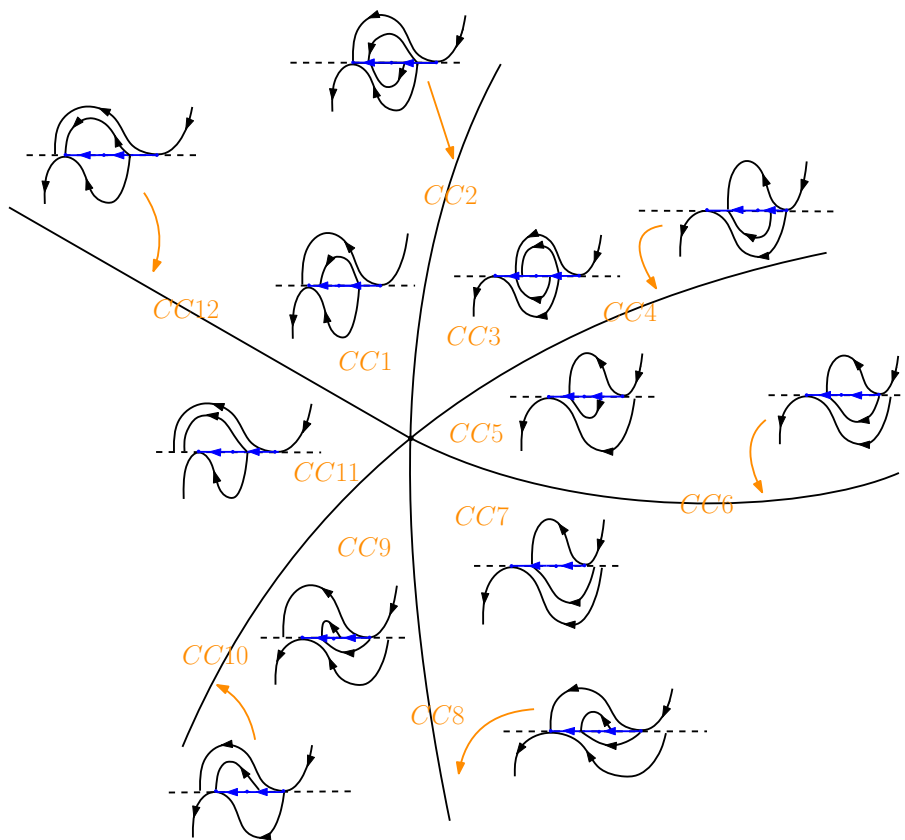


Figura 4.130

3. O caso quando $F_1^+ > F_2^-$ é estudado de maneira análoga ao caso $F_1^+ < F_2^-$.

□

Capítulo 5

Perturbação Descontínua de um Centro Linear

Seja $X_0 = (-y, x)$ e $M = f^{-1}(0)$ a variedade algébrica dada por $f(x, y) = xy$.

Assim como feito nos capítulos anteriores vamos considerar o mergulho $(X \mapsto (X, X))$, ou seja, consideremos o campo vetorial descontínuo $Z_0 = (X_0, X_0)$.

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar a existência de órbitas periódicas e pseudo ciclos quando consideramos uma perturbação linear de Z_0 .

Definição 5.0.1. Chamaremos órbitas formadas pela união de n segmentos de órbitas costurantes que possuem um número máximo k de segmentos de órbitas com mesma orientação por **(n,k)-pseudo ciclos**.

Observação 5.0.2. Observe que seguindo a definição 5.0.1:

- órbitas periódicas serão $(1, 1)$ -pseudo ciclos;
- pseudo ciclos serão (n, n) -pseudo ciclos.

Consideremos a seguinte perturbação de Z_0 :

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (-y + \alpha, x + \beta) & \text{se } xy > 0 \\ Y(x, y) = (-y + \delta, x + \omega) & \text{se } xy < 0 \end{cases} \quad (5.0.1)$$

Podemos escrever então $Z = Z_0 + H$, onde $H(\alpha, \beta, \delta, \omega)$ é a função dada por:

$$H(\alpha, \beta, \delta, \omega) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{se } xy > 0 \\ (\delta, \omega) & \text{se } xy < 0 \end{cases} \quad (5.0.2)$$

Definição 5.0.3. 1. Chamaremos de Π_1 o conjunto dado por todos os campos vetoriais $Z = Z_0 + H$ tais que o ponto crítico dos campos X e Y são visíveis, ou seja,

$$\Pi_1 = \{Z = Z_0 + H; -\alpha\beta > 0 \text{ e } -\omega\beta < 0\}; \quad (5.0.3)$$

2. Chamaremos de Π_2 o conjunto dado por todos os campos vetoriais $Z = Z_0 + H$ tais que o ponto crítico dos campos X e Y são invisíveis, ou seja,

$$\Pi_2 = \{Z = Z_0 + H; -\alpha\beta < 0 \text{ e } -\omega\beta > 0\}; \quad (5.0.4)$$

3. Chamaremos de Π_3 o conjunto dado por todos os campos vetoriais $Z = Z_0 + H$ tais que o ponto crítico do campo X é visível e o ponto crítico do campo Y é invisível, ou seja,

$$\Pi_3 = \{Z = Z_0 + H; -\alpha\beta > 0 \text{ e } -\omega\beta > 0\}; \quad (5.0.5)$$

4. Chamaremos de Π_4 o conjunto dado por todos os campos vetoriais $Z = Z_0 + H$ tais que o ponto crítico do campo X é invisível e o ponto crítico do campo Y é visível, ou seja,

$$\Pi_4 = \{Z = Z_0 + H; -\alpha\beta < 0 \text{ e } -\omega\delta < 0\}; \quad (5.0.6)$$

5. Chamaremos de Π_5 o conjunto dado por todos os campos vetoriais $Z = Z_0 + H$ tais que o ponto crítico do campo Y está na variedade de descontinuidade M , ou seja,

$$\Pi_5 = \{Z = Z_0 + H; \omega\beta = 0\}; \quad (5.0.7)$$

6. Chamaremos de Π_6 o conjunto dado por todos os campos vetoriais $Z = Z_0 + H$ tais que o ponto crítico do campo X está na variedade de descontinuidade M , ou seja,

$$\Pi_6 = \{Z = Z_0 + H; \alpha\beta = 0\}; \quad (5.0.8)$$

Seguindo a notação da definição 5.0.3 teremos os seguintes resultados.

Proposição 8. *Se $Z \in \Pi_1$, então existirão duas regiões abertas do plano tais que as órbitas de Z são todas periódicas. Além disso:*

- *Se $\alpha = \delta$ e $\beta = -\omega$ (ou $\delta = -\alpha$ e $\beta = \omega$) existirá um aberto em torno da origem tal que todas as órbitas de Z são $(4, 2)$ -pseudo ciclos e uma região aberta do plano em que todas as órbitas serão $(4, 4)$ pseudo ciclos. Se além disso*
 - $\delta < \omega$ então existirá um aberto do plano em que todas as órbitas serão $(6, 4)$ pseudo ciclos.
 - $\delta = \omega$, então não existirão (n, k) pseudo ciclos com $(n, k) \neq (1, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$.
 - $\delta > \omega$, então existirá uma região aberta do plano em que todas as órbitas serão $(2, 2)$ pseudo ciclos.
- *Existirá uma função $f = f_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = f$ então existirá um $(4, 2)$ pseudo ciclo.*
- *Existirá uma função $g = g_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = g$ então existirá um $(4, 3)$ pseudo ciclo.*
- *Existirá uma função $h = h_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = h$ então existirá um $(6, 4)$ pseudo ciclo.*
- *Para todos os outros casos, não existirão (n, k) -pseudo ciclos com $(n, k) \neq (1, 1)$.*

Demonstração. Se $-\alpha\beta > 0$ e $-\omega\delta < 0$ então $(x_0^X, y_0^X) \in M^+$ e $(x_0^Y, y_0^Y) \in M^-$, ou seja, os pontos críticos de X e Y são visíveis. Além disso, sabemos que (x_0^X, y_0^X) e (x_0^Y, y_0^Y) são centros para os campos X e Y respectivamente, então teremos duas regiões abertas no plano tais que as órbitas de Z são $(1, 1)$ pseudo ciclos.

Suponha que $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\delta)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha, \delta > 0$ (De fato, o caso $\alpha, \delta < 0$ será apenas uma rotação do caso anterior, veja figura 5.1).

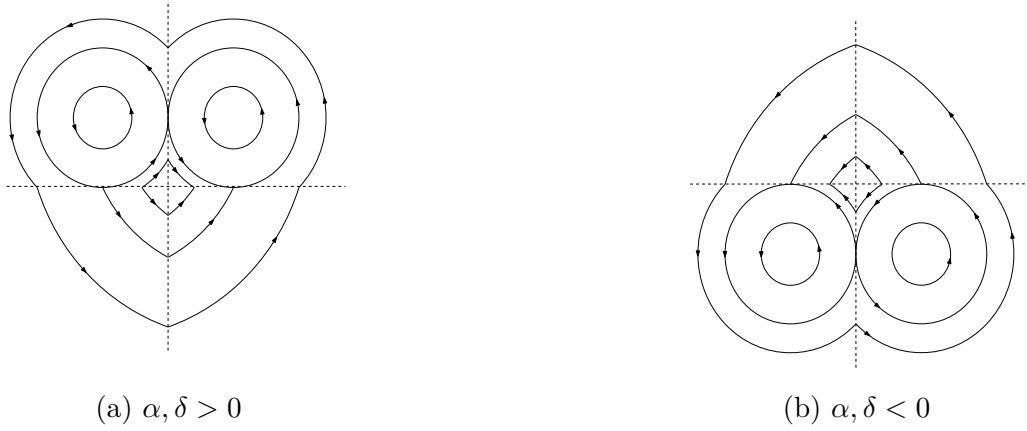


Figura 5.1

Sejam $t, \tilde{t} < 0$ tais que $\varphi_t^Y(-\beta, 0) = (0, y)$ e $\varphi_{\tilde{t}}^X(0, y) = (x, 0)$, onde $y = \delta - \sqrt{\delta^2 - 2\beta\omega + \beta^2}$ e $x = -\beta - \sqrt{-2\alpha y + \beta^2 + y^2}$.

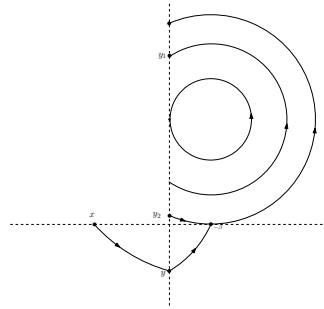


Figura 5.2

1. Se $\alpha > -\beta$, então existirão $t_1 > 0 > t_2$ e $t_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi_{t_1}^X(-\beta, 0) = (0, y_1)$, $\varphi_{t_2}^X(-\beta, 0) = (0, y_2)$ e $\varphi_{t_3}^Y(x, 0) = (0, y_3)$ onde $y_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $y_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ e

$$y_3 = \begin{cases} \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + x^2} & \text{se } x < -\omega \\ \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + x^2} & \text{se } x > -\omega \end{cases} \quad (5.0.9)$$

Assim, existirá um (n, k) pseudo ciclo se e somente se ocorrer uma das seguintes alternativas:

- $y_3 = y_2$. De fato, se $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + x^2}$ teremos um $(4, 3)$ pseudo ciclo (veja figura 5.3(a)). Se $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + x^2}$ então teremos um $(4, 2)$ pseudo ciclo (veja figura 5.3(a)).

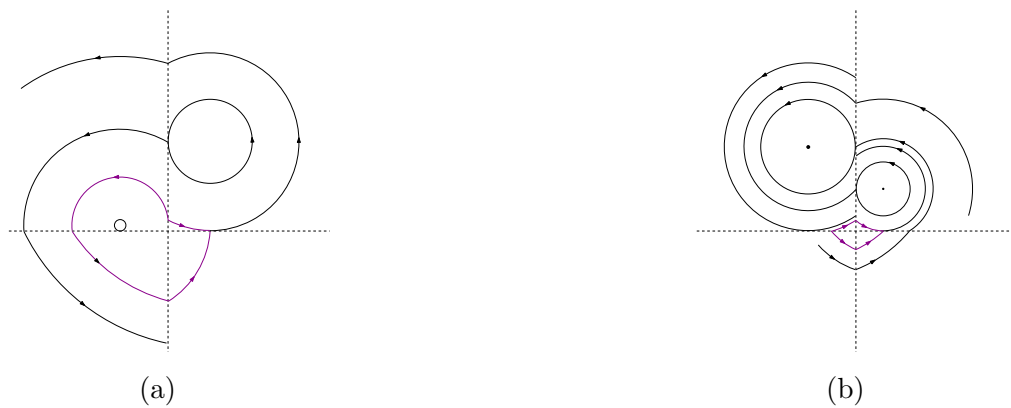


Figura 5.3

- $y_3 = y_1$. De fato, $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + x^2}$ teremos um $(4, 4)$ pseudo ciclo (veja figura 5.4(a)). Se $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + x^2}$ então teremos um $(4, 3)$ pseudo ciclo (veja figura 5.4(b)).



Figura 5.4

- $\delta = \alpha$ e $\beta = -\omega$. Aqui todas as órbitas de Z são (n, k) pseudo ciclos e satisfaz as conclusões do teorema.

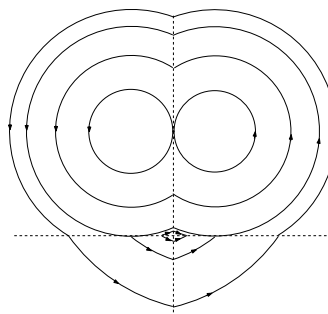


Figura 5.5: $\delta = \alpha$ e $\beta = -\omega$

2. Se $\alpha = -\beta$ então existirá um (n, k) pseudo ciclo se e somente se existir t_4 tal que $\varphi_{t_4}^Y(x, 0) = (0, \alpha)$. De fato, se $\alpha = \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + 2x^2}$ então existirá um $(4, 4)$ pseudo

ciclo (veja figura 5.6(a)). Se $\alpha = \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\omega x + 2x^2}$ então existirá um um (4, 3) pseudo ciclo (veja figura 5.6(b)).

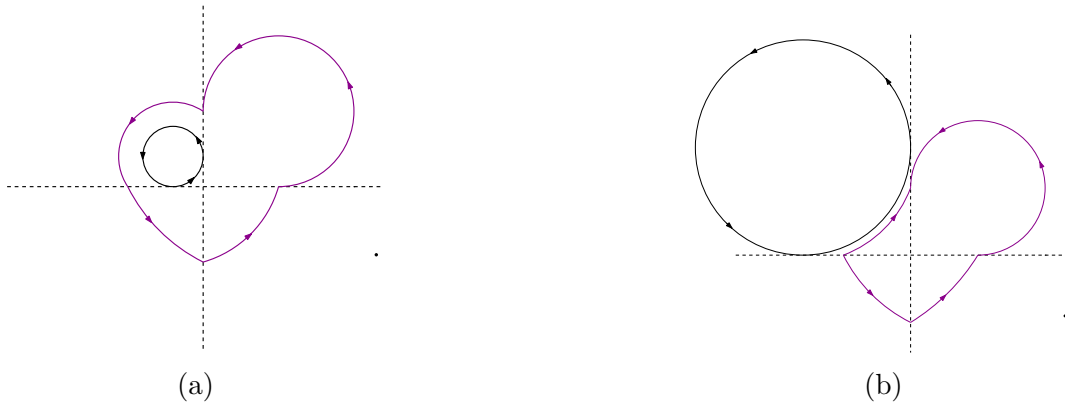


Figura 5.6

3. Se $\alpha < -\beta$, então existirão $t_1 > 0 > t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi_{t_1}^X(0, \alpha) = (x_1, 0)$, $\varphi_{t_2}^X(0, \alpha) = (x_2, 0)$ e $s_1, s_2 < 0$ tais que $\varphi_{s_1}^Y(x_1, 0) = (0, y_1)$ e $\varphi_{s_2}^Y(x_2, 0) = (0, y_2)$. Existirão também $r_1, r_2 < 0$ tais que $\varphi_{r_1}^X(0, y_2) = (\tilde{x}_1, 0)$, $\varphi_{r_2}^X(0, y_2) = (\tilde{x}_2, 0)$ e $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi_t^Y(\tilde{x}_1, 0) = (0, \tilde{y}_1)$ e $\varphi_s^Y(\tilde{x}_2, 0) = (0, \tilde{y}_2)$. Teremos que $x_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, $x_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, $y_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 + 2x_1\omega + x_1^2}$, $y_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 + 2x_2\omega + x_2^2}$, $\tilde{x}_1 = -\beta - \sqrt{-2\alpha y_1 + \beta^2 + y_1^2}$ e $\tilde{x}_2 = -\beta + \sqrt{-2\alpha y_1 + \beta^2 + y_1^2}$ (veja figura 5.7).

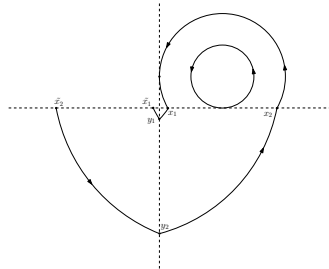


Figura 5.7

Assim, existirá um (n, k) pseudo ciclo se e somente se ocorrer uma das seguintes alternativas:

- Se $\tilde{y}_1 = \alpha$. De fato, se $\alpha = \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\omega\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2}$ teremos um (4, 3) pseudo ciclo (veja figura 5.8(a)). Se $\alpha = \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\omega\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2}$ teremos um (4, 2) pseudo ciclo (veja figura 5.8(b)).

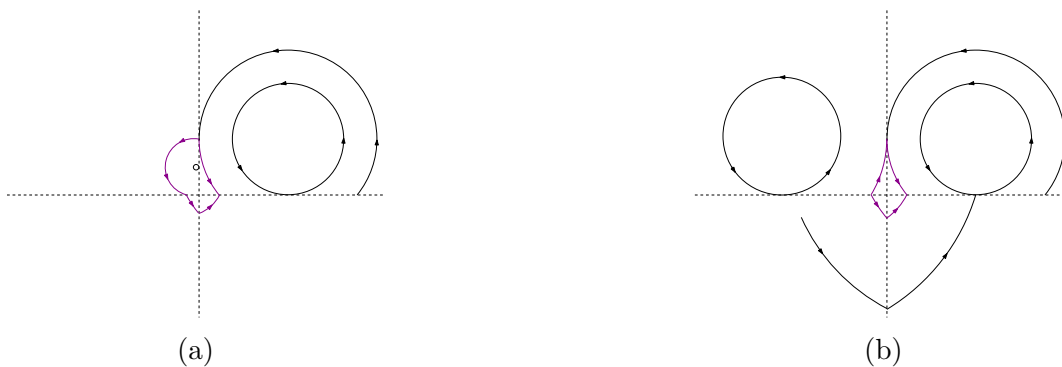


Figura 5.8

- Se $\tilde{y}_2 = \alpha$ De fato, se $\alpha = \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\omega\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2}$ teremos um (4, 4) pseudo ciclo (veja figura 5.9(a)). Se $\alpha = \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\omega\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2}$ teremos um (4, 3) pseudo ciclo (veja figura 5.9(b)).

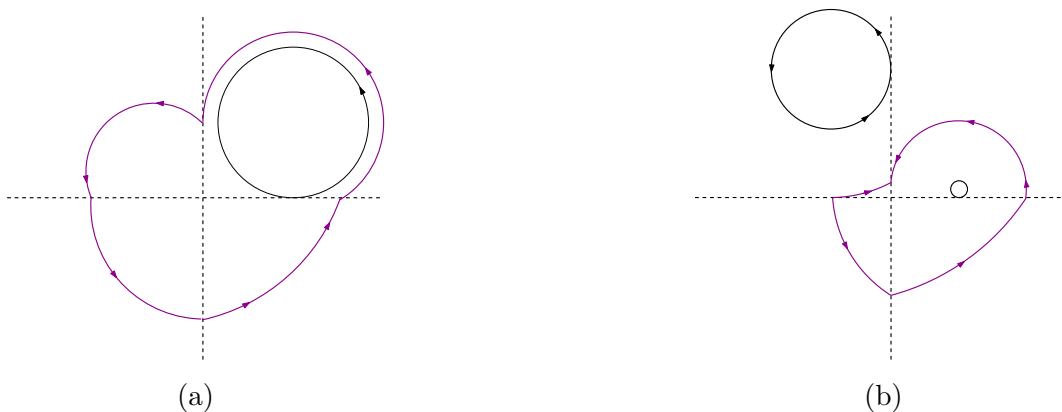


Figura 5.9

- $\delta = \alpha$ e $\beta = -\omega$. Aqui todas as órbitas de Z com exceção das órbitas que partem dos pontos de dobra $(-\omega, 0)$ e $(\alpha, 0)$ são (n, k) pseudo ciclos e satisfaz as conclusões do teorema.

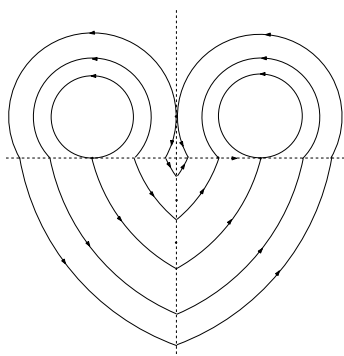


Figura 5.10: $\delta = \alpha$ e $\beta = -\omega$

Para $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(\delta)$ teremos apenas uma rotação do caso $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\delta)$ (veja figura 5.11).

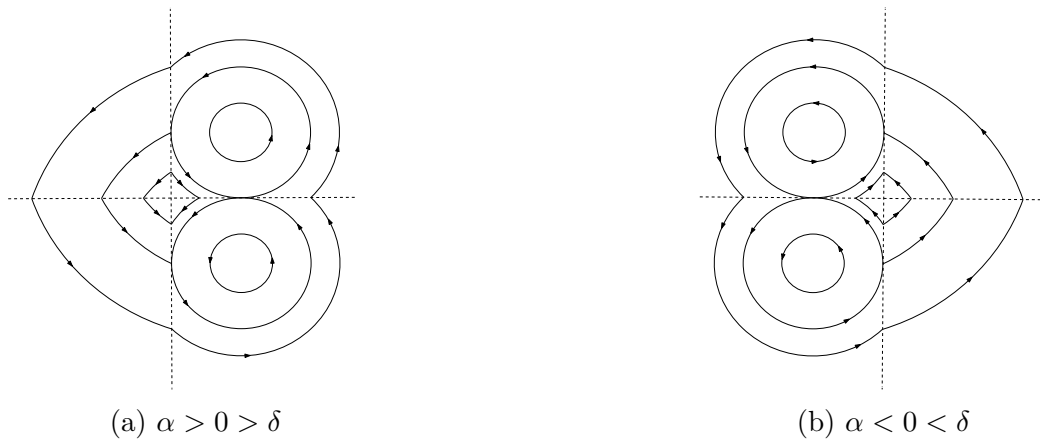


Figura 5.11

□

Proposição 9. Se $Z \in \Pi_2$ teremos que:

1. Se $\alpha = \delta$ (respectivamente $\beta = \omega$) então existirá uma região aberta do plano em que todas as órbitas de Z serão $(2, 2)$ pseudo ciclos. Além disso, se $\beta = -\omega$ (respectivamente $\alpha = -\delta$) então todas as órbitas, com exceção das órbitas que partem ou chegam dos pontos de dobras $(-\beta, 0)$ e $(-\omega, 0)$ (respectivamente $(0, \delta)$ e $(0, \alpha)$), são (n, k) pseudo ciclos. Mais precisamente, teremos um aberto do plano onde todas as órbitas são $(4, 4)$ pseudo ciclos e um aberto do plano onde todas as órbitas são $(6, 4)$ pseudo ciclos.

2. Se $\alpha \neq \delta$ (respectivamente $\beta \neq \omega$) então

- Existirá uma função $f = f_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = f$ então existirá um $(3, 3)$ pseudo ciclo.
- Existirá uma função $g = g_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = g$ então existirá um $(4, 4)$ pseudo ciclo.
- Em todos os outros casos existirá uma vizinhança da origem onde não teremos (n, k) pseudo ciclos,

Demonstração.

Nesse caso existirão $t_0 > 0$ e $t_1 < 0$ tais que $\varphi_{t_0}^X(0, 0) = (-2\beta, 0)$ e $\varphi_{t_0}^X(0, 0) = (2\alpha, 0)$. Da mesma forma, existirão $\tilde{t}_0 > 0$ e $\tilde{t}_1 < 0$ tais que $\varphi_{\tilde{t}_0}^Y(0, 0) = (-2\omega, 0)$ e $\varphi_{\tilde{t}_0}^Y(0, 0) = (2\delta, 0)$.

Suponha que $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\delta)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha, \delta < 0$ (De fato, o caso $\alpha, \delta > 0$ será apenas uma rotação do caso anterior, veja figura 5.12).

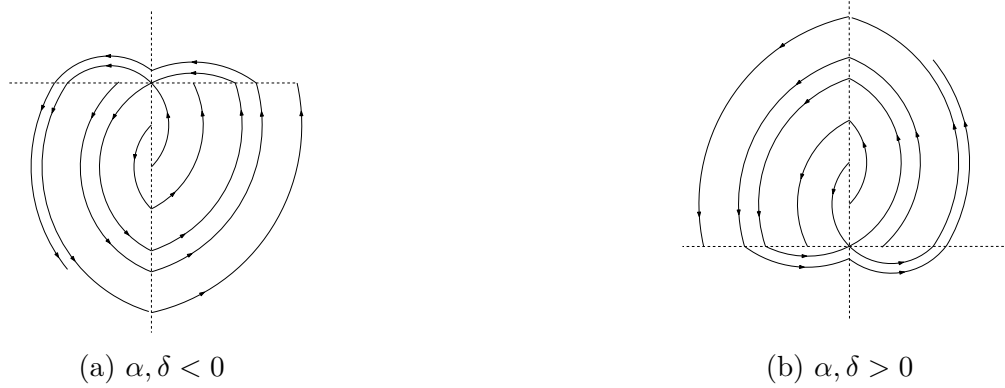


Figura 5.12

1. Se $\alpha < \delta$:

Seja t_2 tal que $\varphi_{t_2}^Y(0, 2\alpha) = (x, 0)$ e \tilde{t}_2 tal que $\varphi_{\tilde{t}_2}^X(-2\omega, 0) = (0, y)$.

- Se $x < -2\beta$ somente existirá um pseudo ciclo se existir t_3 tal que $\varphi_{t_3}^Y(0, y) = (-2\beta, 0)$. De fato, se $-\omega + \sqrt{\omega^2 + y^2 - 2y\delta} = -2\beta$, onde $y = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega + 4\omega^2}$ então existirá um (4, 4) pseudo ciclo (veja figura 5.13(a)).
- Se $x = -2\beta$ (Ou seja, se $-\omega + \sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha\delta + \omega^2} = -2\beta$) então existirá um (3,3) pseudo ciclo (veja figura 5.13(b)).
- Se $x > -2\beta$ então não existirá pseudo ciclos numa vizinhança da origem (veja figura 5.13(c)).

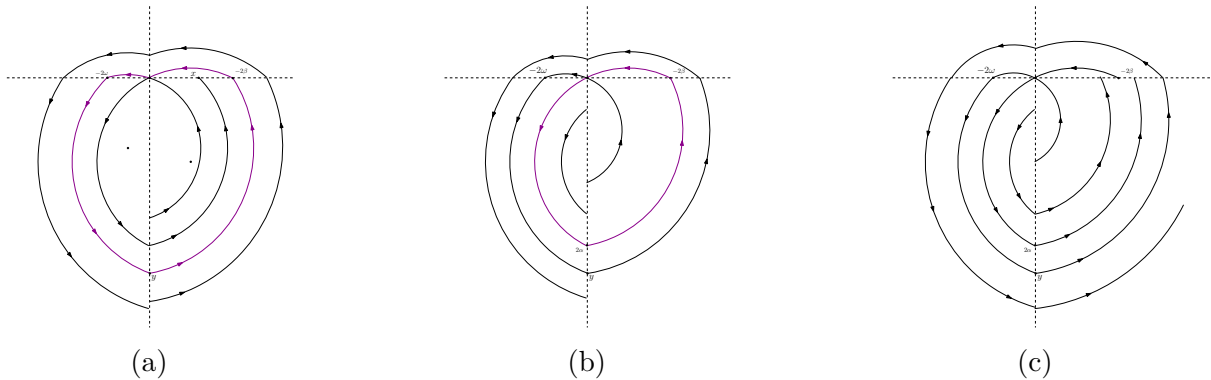


Figura 5.13

2. Se $\alpha = \delta$, então $\varphi_{t_0}^Y(0, 0) = (2\delta, 0) = \varphi_{t_0}^X(0, 0) = (2\alpha, 0)$.

Além disso, se $0 < y_0 < \alpha$, então existirá $t_3 > 0$ tal que $\varphi_{t_3}^X(0, y_0) = (0, 2\alpha - y_0)$. Existirá também $\tilde{t}_3 > 0$ tal que $\varphi_{\tilde{t}_3}^Y(0, 2\alpha - y_0) = (0, y_0)$. Ou seja, existirá uma vizinhança do ponto de dobra $(0, \alpha)$ em que todas as órbitas de Z serão (2, 2) pseudo ciclos.

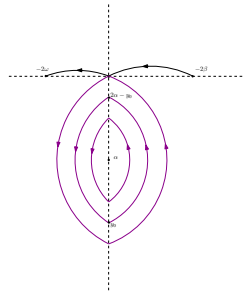


Figura 5.14

Como no caso $\alpha < \delta$, existirá $t_2 > 0$ tal que $\varphi_{t_2}^X(-2\omega, 0) = (0, y)$. Da mesma forma daquele caso somente teremos a existência de pseudo ciclos (com $(n, k) \neq (2, 2)$) se existir $t_4 > 0$ tal que $\varphi_{t_4}^Y(0, y) = (-2\beta, 0)$. De fato, isso acontecerá caso $\beta = -\omega$ e nesse caso todas as órbitas de Z com exceção das que partem ou chegam das dobras $(-\beta, 0)$ e $(-\omega, 0)$, serão (n, k) pseudo ciclos.

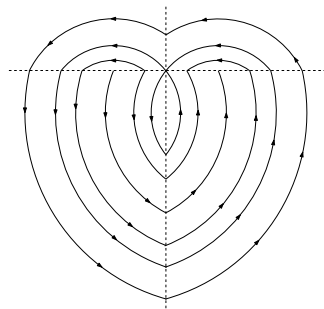


Figura 5.15

3. Se $\alpha > \delta$.

Análogo ao caso $\alpha < \delta$ (veja figura 5.16).

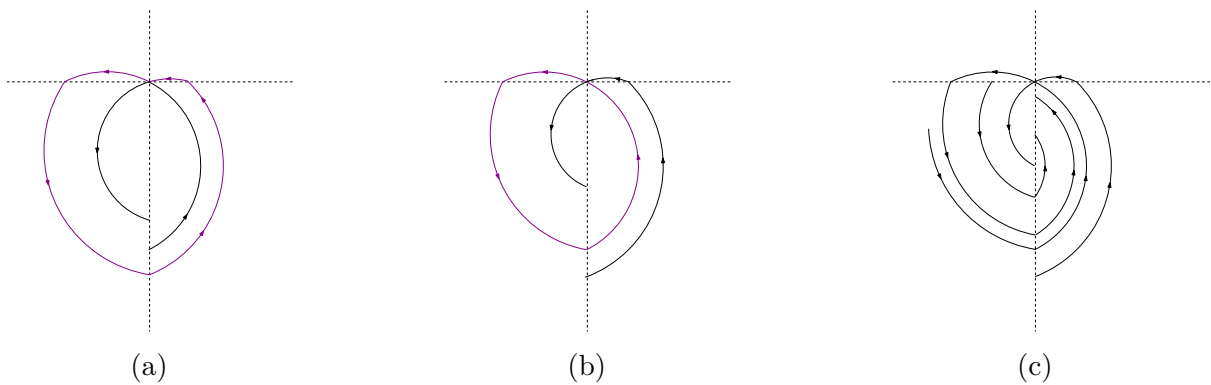


Figura 5.16

Para $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(\delta)$ teremos apenas uma rotação do caso $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\delta)$ (veja figura 5.17).

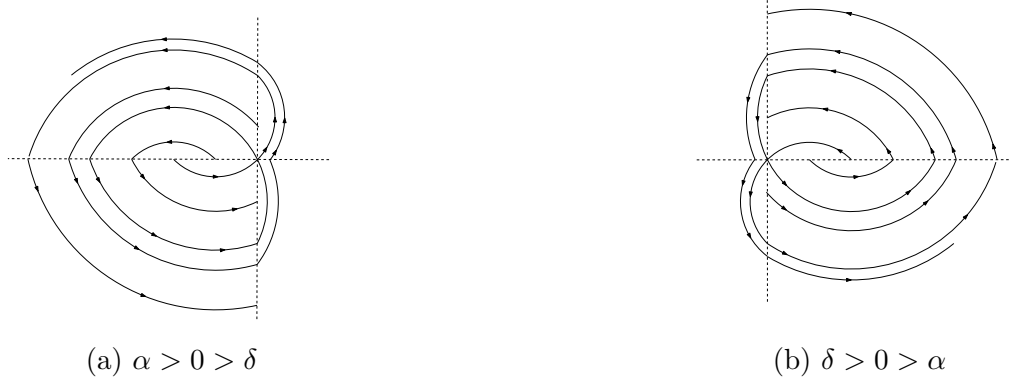


Figura 5.17

□

Proposição 10. *Se $Z \in \Pi_3$ (respectivamente se $Z \in \Pi_4$), existirá uma região aberta do plano tais que as órbitas de Z são todas periódicas. Além disso:*

1. *Caso $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(\delta)$:*

- *Se $\delta = -\omega$ e $\beta = -\alpha$ (respectivamente $\delta = \omega$, $\alpha = \beta$), então todas as órbitas com exceção das órbitas que partem ou chegam dos pontos de dobra $(-\omega, 0)$ e $(0, \delta)$ (respectivamente, $(-\beta, 0)$ e $(0, \alpha)$) são (n, k) pseudo ciclos. Mais precisamente, teremos um $(3, 3)$ pseudo ciclo, uma região aberta do plano onde todas as órbitas são $(4, 3)$ pseudo ciclos e uma região aberta do plano onde todas as órbitas são $(4, 4)$ pseudo ciclos.*
- *Existirá uma função $f = f_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = f$ então existirá um $(3, 3)$ pseudo ciclo.*
- *Existirá uma função $g = g_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = g$ então existirá um $(4, 3)$ pseudo ciclo.*
- *Existirá uma função $h = h_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = h$ então existirá um $(4, 4)$ pseudo ciclo.*
- *Em todos os outros casos existirá uma vizinhança da origem onde não teremos (n, k) pseudo ciclos, com $(n, k) \neq (1, 1)$.*

2. *Caso $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\delta)$:*

- *Se $\alpha = \delta$ e $\beta = \omega$ então $X = Y$ e portanto estamos no caso contínuo.*
- *Existirá uma função $f = f_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = f$ então existirá um $(3, 3)$ pseudo ciclo.*
- *Existirá uma função $g = g_{\beta, \delta, \omega}$ tal que se $\alpha = g$ então existirá um $(3, 2)$ pseudo ciclo.*
- *Em todos os outros casos existirá uma vizinhança da origem onde não teremos (n, k) pseudo ciclos, com $(n, k) \neq (1, 1)$.*

Demonstração. Suponha que $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\delta)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha, \delta > 0$ (De fato, o caso $\alpha, \delta < 0$ será apenas uma rotação do caso anterior, veja figura 5.18).



Figura 5.18

1. Se $\delta > \alpha$

Nesse caso para que exista um (n, k) pseudo ciclo (com $(n, k) \neq (1, 1)$) teremos que ter $\beta < -2\omega$. Além disso deverá existir $t < 0$ tal que $\varphi_t^X(0, 2\delta) = (-2\omega, 0)$. De fato, se $-2\omega = -\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\delta^2 - 4\delta\alpha}$ então existirá um $(3, 3)$ pseudo ciclo (veja figura 5.19(a)).

2. Se $\delta = \alpha$

Então para que exista um (n, k) pseudo ciclo (com $(n, k) \neq (1, 1)$) deverá existir $t < 0$ tal que $\varphi_t^X(0, 2\delta) = (-2\omega, 0)$, ou ainda, $\beta = \omega$. Aqui estaremos então no caso contínuo e portanto todas as órbitas serão (n, k) pseudo ciclos (veja figura 5.19(b)).

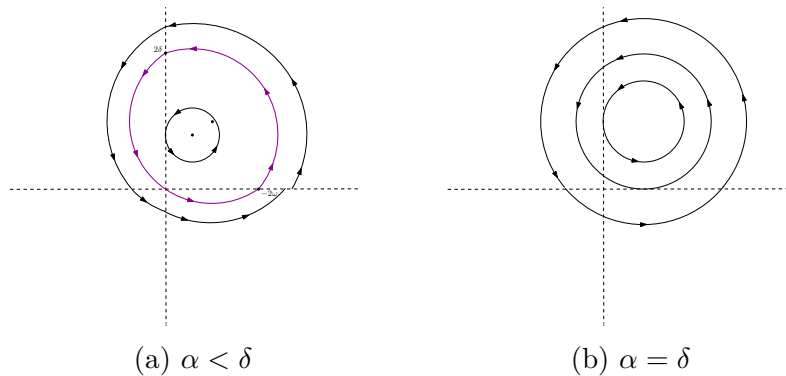


Figura 5.19

3. Se $\delta < \alpha$ então como nos casos anteriores teremos um (n, k) pseudo ciclo somente se existir $t < 0$ tal que $\varphi_t^X(0, 2\delta) = (-2\omega, 0)$.

Mais precisamente, se além disso $2\delta > \alpha$ então teremos um $(3, 3)$ pseudo ciclo (veja figura 5.20(a)). Se $2\delta = \alpha$ e $\alpha = -\beta$, então todas as órbitas de Z com exceção da órbita que parte ou chega dos pontos de dobra $(\delta, 0)$ e $(-\omega, 0)$ serão (n, k) pseudo ciclos (veja figura 5.20(b)). Se $2\delta < \alpha$ então teremos um $(3, 2)$ pseudo ciclo (veja figura 5.20(c)).

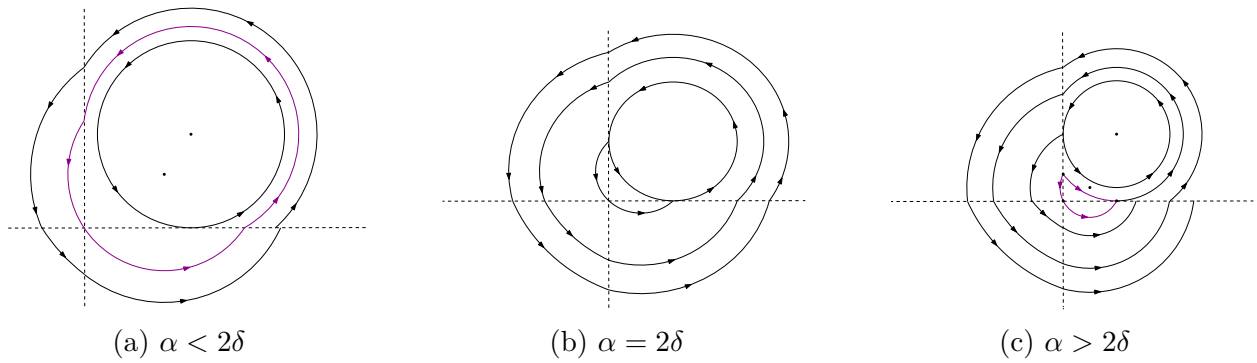


Figura 5.20: $\alpha < \delta$

Suponha que $\text{sgn}(\alpha) \neq \text{sgn}(\delta)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha > 0 > \delta$ (De fato, o caso $\alpha < 0 < \delta$ será apenas uma rotação do caso anterior, veja figura 5.21).

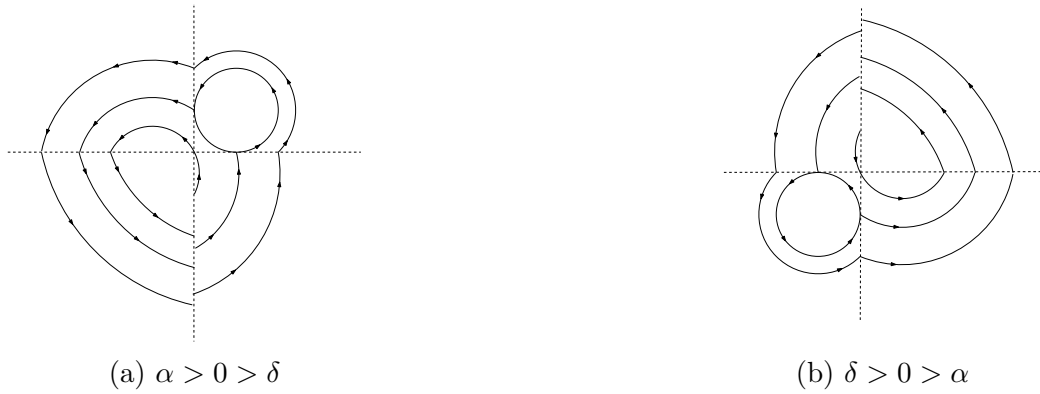


Figura 5.21

1. Se $\alpha < -\beta$ então somente existirá (n, k) pseudo ciclos se:

- Existir $t > 0$ tal que $\varphi_t^X(-2\omega, 0) = (0, 2\delta)$. De fato, se $2\delta = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega + 4\omega^2}$ existirá um $(3, 3)$ pseudo ciclo (veja figura 5.22(a)).
- Existir $t_1, t_2, t_3 > 0$ e $t_4 < 0$ tais que $\varphi_{t_4}^X(\varphi_{t_3}^Y(\varphi_{t_2}^X(\varphi_{t_1}^Y(0, \alpha)))) = (0, \alpha)$. De fato, se $-\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = -\omega + \sqrt{-2\delta y + \omega^2 + y^2}$, onde $y = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 2\beta x + x^2}$ e $x = -\omega - \sqrt{\alpha^2 - 2\delta\alpha + \omega^2}$ existirá um $(4, 3)$ pseudo ciclo (veja figura 5.22(b)).
- Existir $t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$ tais que $\varphi_{t_4}^X(\varphi_{t_3}^Y(\varphi_{t_2}^X(\varphi_{t_1}^Y(0, \alpha)))) = (0, \alpha)$. De fato, se $-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = -\omega + \sqrt{-2\delta y + \omega^2 + y^2}$, onde $y = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 2\beta x + x^2}$ e $x = -\omega - \sqrt{\alpha^2 - 2\delta\alpha + \omega^2}$ existirá um $(4, 4)$ pseudo ciclo (veja figura 5.22(c)).

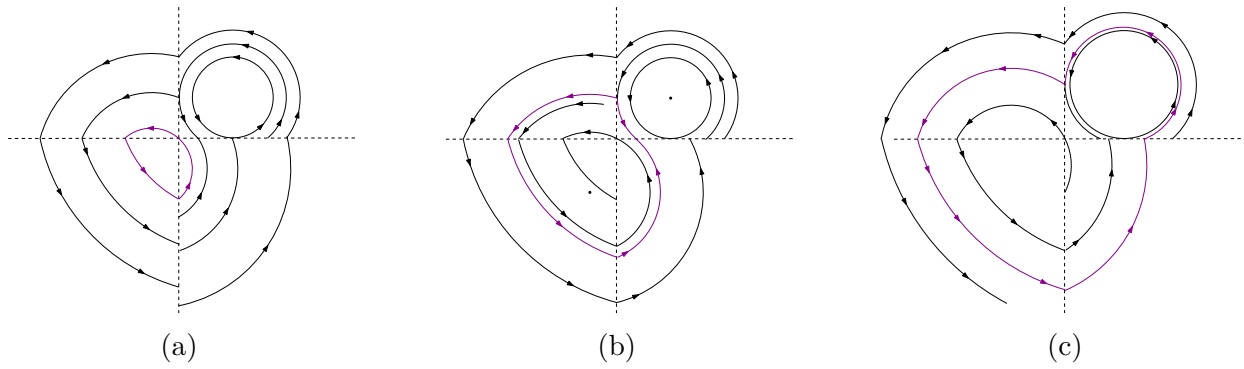


Figura 5.22

2. Se $\alpha = -\beta$ então somente existirá um (n, k) pseudo ciclo se $\delta = -\omega$. Assim, todas as órbitas de Z com exceção da órbita que parte ou chega dos pontos de dobra $(-\omega, 0)$ e $(0, \delta)$ são (n, k) pseudo ciclos.

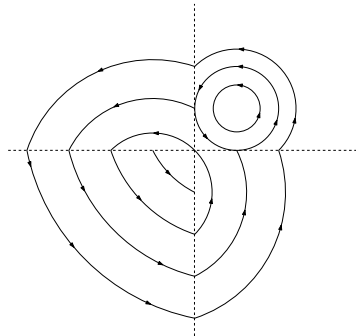


Figura 5.23

3. Se $\alpha > -\beta$
 Análogo ao caso $\alpha < -\beta$ (veja figura 5.24).

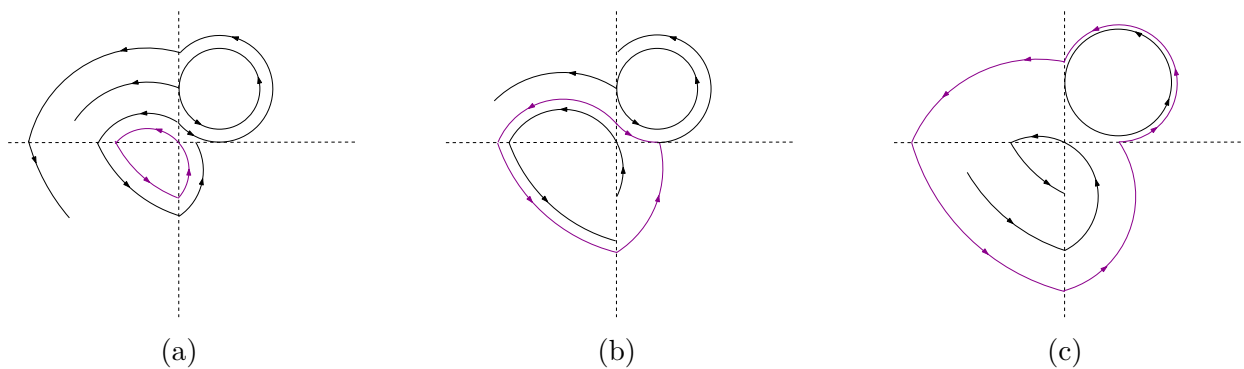


Figura 5.24

□

Proposição 11. *Se $Z \in \Pi_5$ (respectivamente, $Z \in \Pi_6$) teremos a mesma conclusão da proposição 9 se $-\alpha\beta < 0$ (respectivamente, $-\delta\omega > 0$) e a mesma conclusão da proposição 10 se $-\alpha\beta > 0$ (respectivamente, $-\delta\omega < 0$).*

Demonstração. A demonstração segue analogamente das demonstrações das proposições anteriores. \square

O próximo teorema segue imediatamente das proposições de 8 a 11.

Teorema 5.0.4. Se $Z \in \Pi = \cup_{i=1}^6 \Pi_i$ então existem parâmetros $(\alpha, \beta, \delta, \omega)$ para os quais Z possui um único (n, k) pseudo ciclo com $(n, k) \neq (1, 1)$

Referências

- [1] A. A. ANDRONOV AND A. A. VITT, *Chaikin, Vibration theory*, Fizmatgiz, Moscow, (1959).
- [2] C. A. BUZZI, J. C. MEDRADO AND M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcation of refracted systems*, Advances in Mathematics, v. 234, 653–666, (2013).
- [3] R. CASEY, H. DE JONG AND J. GOUZÉ, *Piecewise-linear models of genetic regulatory networks: equilibria and their stability*, Journal of mathematical biology, vol. 52 n. 1, 27–56, Springer-Verlag, (2008).
- [4] M. DESROCHES AND M. R. JEFFREY, *Canards and curvature: nonsmooth approximation by pinching*, Nonlinearity, vol. 24 n. 5, 1655, IOP Publishing, (2011).
- [5] I. EKELAND, *Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations*, Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Etudes Scientifiques, vol. 47 n. 1, 5–32, Springer, (1977).
- [6] A. F. FILIPPOV, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: control systems*, vol. 18, Springer Science e Business media, (1988).
- [7] M. GUARDIA, T. M. SEARA, AND M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcations of low co-dimension of planar Filippov Systems*, Journal of Differential Equations, vol. 250 n. 4, 1967–2023, (2011).
- [8] J. HUNG, W. GAO AND J. C. HUNG, *Variable structure control: a survey*, Industrial Electronics, IEEE Transactions, vol. 40 n. 1, 2–22, IEEE, Berlin, (1993).
- [9] M. ITOH AND L. O. CHUA, *Memristor oscillators*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 18 n. 11, 3183–3206, World Scientific, (2008).
- [10] M. R. JEFFREY AND A. COLOMBO, *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*, Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 8 n. 2, 624–640, SIAM (2009).
- [11] Y. A. KUZNETSOV, S. RINALDI AND A. GRAGNANI, *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, International Journal of Bifurcation and chaos, vol. 13 n. 8, 2157–2188, World Scientific, (2003)
- [12] J. LEIFELD, *Nonsmooth Homoclinic Bifurcation in a Conceptual Climate Model*, Preprint, (2016).
- [13] J. LEIFELD, *Perturbation of a Nonsmooth Supercritical Hopf Bifurcation*, preprint, (2016).

- [14] X. LIU, K. EFSTATHIOU AND H. BROER, *Bifurcations and stability of planar Hopf-transversal systems*.
- [15] J. M. SOTOMAYOR, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1979).
- [16] M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcation in manifolds with boundary*, J. Differential Equations, vol. 25, 65-89, (1977).
- [17] M. A. TEIXEIRA, *Generic singularities of discontinuous vector-fields*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 53 n. 2, 257–260, Acad Brasileira de Ciências, Rio de Janeiro, (1981).
- [18] P. WELANDER, *A simple heat-salt oscillator*, Dynamics of Atmospheres and Oceans, vol. 6 n. 4, 233–242, Elsevier, (1982).
- [19] C. A. BUZZI, T. DE CARVALHO AND M. A. TEIXEIRA, *On 3-parameter families of piecewise smooth vector fields in the plane*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 11 n. 4, 1402–1424, (2012).
- [20] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE, J. SOTOMAYOR, AND H. ZOLADEK, *Bifurcation of Planar Vector Fields: Nilpotent Singularities and Abelian Integrals*, Springer-Verlag, (1991).
- [21] M. BERNARDO, C. BUDD AND A. R. CHAMPNEY AND P. KOWALCZYK, *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, Springer Science & Business Media, (2008).
- [22] F. DERCOLE, F. DELLA ROSSA, A. COLOMBO AND Y. A. KUZNETSOV, *Two degenerate boundary equilibrium bifurcations in planar Filippov systems*, Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 10 n.4, 1525–1553, SIAM, (2011).
- [23] C. CHICONE, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Journal on Applied Dynamical Systems, Springer-Verlag, (1999).
- [24] R. GARCIA AND M. A. TEIXEIRA, *Vector fields on manifolds with boundary and reversibility—An expository account—*, Qualitative theory of dynamical systems, vol. 4 n. 2, 311–327, Springer, (2004).
- [25] M. M. PEIXOTO, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology, vol. 1 n. 2, 101–120, Elsevier, (1962).
- [26] M. C. PEIXOTO AND M. M. PEIXOTO, *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, An. Acad. Brasil. Ciências, vol. 31 n. 2, 135–160, (1959).