



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

MATHEUS MANZATTO DE CASTRO

ESTABILIDADE ESTRUTURAL LOCAL E Σ -SEMILOCAL
DE CAMPOS SUAVES POR PARTES EM 3-VARIEDADES COMPACTAS

CAMPINAS
2020

MATHEUS MANZATTO DE CASTRO

ESTABILIDADE ESTRUTURAL LOCAL E Σ -SEMILOCAL
DE CAMPOS SUAVES POR PARTES EM 3-VARIEDADES
COMPACTAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Supervisor: Ricardo Miranda Martins

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Matheus Manzatto de Castro e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins.

CAMPINAS
2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C279e Castro, Matheus Manzatto de, 1996-
Estabilidade estrutural local e Σ -semilocal de campos suaves por partes em 3-variedades compactas / Matheus Manzatto de Castro. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas de Filippov. 2. Campos vetoriais descontínuos. 3. Estabilidade estrutural. I. Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Local and Σ -semilocal structural stability structural of piecewise smooth vector fields in compact 3-dimensional manifolds

Palavras-chave em inglês:

Filippov systems

Discontinuous vector fields

Structural stability

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Ricardo Miranda Martins [Orientador]

Marco Antonio Teixeira

Paulo Ricardo da Silva

Data de defesa: 28-02-2020

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-2513-2830>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1490191049071857>

**Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2020 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof. Dr. RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof. Dr. MARCO ANTONIO TEIXEIRA

Prof. Dr. PAULO RICARDO DA SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos últimos filhos do século XX.

Agradecimentos

À Deus, que vem sempre guiando meu caminho.

Aos meus pais, Cristina e Juarez, que sempre me apoiaram e me deram a melhor educação que eu poderia receber.

Ao meu irmão, Leandro, que sempre trouxe alegria a minha casa.

Ao meu orientador, Ricardo Miranda Martins, que me aceitou como orientando e me forneceu orientação necessária para a conclusão dessa tese.

Ao professor Douglas Novaes Duarte, que sempre me ajudou de bom grado e teve papel fundamental para a demonstração de vários resultados dessa dissertação.

Ao colega Otávio Marçal Leandro Gomide, que sempre esteve disposto a sanar minhas dúvidas.

À minha amiga Bianca, que me ajudou a corrigir essa dissertação e me fez acreditar eu que iria superar os momentos difíceis.

Ao meu amigo Leonardo Schultz, que estudou comigo durante toda graduação e mestrado. Além de me contar histórias/pensamentos que levarei comigo até os fins dos tempos.

Aos meus demais amigos, que sempre me fizeram rir.

Aos professores e funcionários do IMECC.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro durante o mestrado por meio do processo n° 2017/23692-6. Além do apoio financeiro referente a Bolsa de Estágio de Pesquisa no Exterior (processo n° 2019/06873-2) ocorrido também durante o mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“I’ve seen things you people wouldn’t believe,
attack ships on fire off the shoulder of Orion,
I watched c-beams glitter in the dark near the Tannhäuser Gate,
all those moments will be lost in time, like tears in rain.
Time to die.”*
(Roy Batty - *Blade Runner*)

Resumo

Esta dissertação é focada no estudo da estabilidade estrutural de campos suaves por partes definidos em uma variedade compacta M de dimensão três, tendo como variedade de deslize do sistema uma 2-variedade orientável mergulhada em M . Abordaremos portanto, de forma abrangente, condições para que um campo de vetores suave por partes apresente algum tipo de estabilidade estrutural.

O primeiro passo para conseguir tal objetivo será definir e entender o conceito de singularidade tangencial e, mais ainda, definir o que se entende por singularidade tangencial genérica. Mostraremos então a existência de um conjunto, contido no conjunto dos campos suaves por partes, de forma que cada um de seus elementos possui apenas singularidades genéricas, mais ainda, será possível demonstrar que tal conjunto é residual no conjunto dos campos suaves por partes.

O segundo passo será a demonstração do teorema conhecido como Forma Normal de Vishik que nos permitirá a análise local de campos possuindo apenas de singularidades genéricas. Conseguiremos assim, encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de estabilidade estrutural local.

Por fim, iremos estender o conceito de estabilidade estrutural local para uma vizinhança da variedade de deslize e então encontraremos condições, baseadas nos teoremas de Peixoto e nos resultados referentes a estabilidade estrutural local, para que haja a existência desse tipo de estabilidade estrutural.

Palavras-chave:

Sistemas de Filippov, Campos Vetoriais Descontínuos, Estabilidade Estrutural

Abstract

This dissertation is focused on the study of the structural stability of piecewise smooth vector fields on a three dimensional compact manifold M , where the sliding manifold is a two dimensional oriented manifold embedded in M . Therefore, we will, in a comprehensive way, look for conditions such that a piecewise smooth vector fields admit some type of structural stability.

The first step to achieve this goal will be to define and understand the concept of tangential singularity and define what is understood by a generic tangential singularity. We will show the existence of a set, contained in the set of piecewise smooth vector fields, such that each of its elements has only generic singularities, moreover, it will be possible to prove that such a set is residual in the set of piecewise smooth vector fields.

The second step of the process will be to prove the theorem known as the Vishik Normal Form, which will allow us to analyze local fields with only generic singularities. We will be able to find necessary and sufficient conditions for the existence of local structural stability.

Finally, we will extend the concept of local structural stability to a neighborhood of the sliding manifold and then we will find conditions, based on Peixoto's theorems and the results referring to local structural stability, for the existence of this type of structural stability.

Key-words:

Filippov Systems, Discontinuous Vector Fields, Structural Stability.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	13
1.1 Sistemas Suaves por partes	13
1.2 Topologia de $\Omega(M, \Sigma)$	17
1.3 Transversalidade	21
1.4 Estabilidade estrutural	29
2 Forma Normal de Vishik	33
2.1 Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado	33
2.2 Forma Normal de Vishik	41
3 Análise dos Conjuntos $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ e Ξ_0	54
4 Estabilidade Estrutural Local em $\Omega^r(M, \Sigma)$	69
4.1 Teoria Clássica	69
4.1.1 Estabilidade Estrutural de Campos Lineares em \mathbb{R}^n	69
4.1.2 Estabilidade Estrutural Local de Campos de Vetores Suaves	80
4.2 Estabilidade Estrutural Local em Campos Suaves por Partes	85
4.2.1 Caso Regular-Regular	85
4.2.2 Caso Dobra-Regular	93
4.2.3 Caso Cúspide-Regular	100
4.2.4 Caso Dobra-Dobra	107
5 Estabilidade Estrutural Σ-Semilocal em $\Omega^r(M, \Sigma)$	163
5.1 Estabilidade Estrutural do Campo Deslizante	163
5.2 Estabilidade Estrutural Σ -Semilocal	170
Referências Bibliográficas	176

Introdução

A teoria desenvolvida em volta dos sistemas dinâmicos suave por partes possui como objetivo estudar sistemas que admitem uma mudança abrupta de comportamento em uma região específica do espaço. Ela possui aplicações muito conhecidas na engenharia, sendo utilizada vastamente em teoria de controle.

Sabemos que para aplicações provenientes da engenharia, infelizmente, nenhuma medida é absoluta e portanto as condições iniciais do sistema a serem consideradas nunca são exatas, elas são apenas tão precisas quanto seu aparelho de medição permitir. Além disso, muitas vezes as equações diferenciais que modelam o problema são uma simplificação do modelo real. Sendo assim, muitas vezes as equações que modelam o sistema, não são exatamente as propostas pela teoria, mas sim modelos suficientemente próximos.

Tendo este problema em mente, surge a motivação e necessidade da criação de uma teoria de estabilidade estrutural para esse tipo de sistema, uma vez que é interessante saber se, perante pequenas perturbações no sistema, se a dinâmica do fenômeno é alterada ou não.

A teoria da estabilidade estrutural em campos vetoriais suaves é completa para 2-variedades, porém há poucos resultados relacionados a esse tópico para variedades de dimensão maior ou igual a 3. Em relação à teoria dos campos vetoriais suaves por partes, o problema de estabilidade estrutural também tem despertado o interesse de vários matemáticos e esta área tem se mostrado matematicamente muito promissora.

Os objetivos dessa dissertação de mestrado são o estudo e a caracterização da estabilidade estrutural local e Σ -semilocal de campos suaves por partes em variedades de dimensão três. Começaremos estudando as propriedades gerais dos campos suaves por partes em dimensão três, e depois da construção de uma base teórica considerável para nossos estudos partiremos para a caracterização das estabilidades estruturais local e Σ -semilocal.

Estrutura do Texto e Resultados Principais

Essa dissertação de mestrado é dividida em 5 capítulos.

Capítulo 1

O primeiro capítulo é apenas uma apresentação de conceitos que moldarão as principais ferramentas utilizadas nos demais capítulos, tais como a definição de inclusão diferencial, a definição de singularidade tangencial, e o entendimento da topologia que será considerada

nos campos suaves por partes. Além disso o capítulo tem como objetivo mostrar ao leitor quais são os requisitos necessários para a leitura e compreensão do texto. Mais ainda, nesse capítulo demonstraremos resultados preliminares sobre residualidade como por exemplo, o Teorema 1.3.6.

Capítulo 2

No segundo capítulo é apresentado e demonstrado o resultado que torna toda a teoria de estabilidade estrutural em dimensão três possível, a Forma normal de Vishik, Teorema 2.2.4. Além disso, serão apresentadas outras formas normais que possuem, em alguns casos, algumas vantagens em relação à forma normal de Vishik, teoremas 2.2.5 e 2.2.6.

Capítulo 3

O capítulo de número três é dedicado ao estudo das propriedades topológicas dos conjuntos $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e Ξ_0 . Será mostrado que podemos caracterizar o conjunto das singularidades tangenciais de campos nesses conjuntos e mais ainda, que $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e Ξ_0 são abertos e densos em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $\Omega^r(M, \Sigma)$, respectivamente.

Capítulo 4

O quarto capítulo é onde os resultados mais importantes da dissertação são demonstrados. Começamos lembrando os resultados referentes à estabilidade estrutural no caso de sistemas suaves e provaremos que o conjunto dos campos globalmente localmente estruturalmente estáveis é aberto e denso no conjunto dos campos suaves (Teorema 4.1.2.2 e Teorema 4.1.2.3). Depois, nos concentraremos na análise da estabilidade estrutural de campos suaves por partes e em decorrência do capítulo 3, veremos que será necessário apenas estudar os campos suaves por partes pertencentes ao conjunto Ξ_0 . Será mostrado pelos Teoremas 4.2.2.2 e 4.2.3.2 que os pontos que são dobra-regular e cúspide-regular são localmente estruturalmente estáveis. Partiremos então para análise dos pontos de dobra-dobra, encontraremos condições para que a estabilidade estrutural seja satisfeita (Teoremas 4.2.4.9, 4.2.4.11, 4.2.4.12) e 4.2.4.13 e encontraremos condições para a não estabilidade estrutural como por exemplo os Teoremas 4.2.4.10 e Corolários 4.2.2 e 4.2.3), mais ainda, conseguiremos provar, por meio no Teorema 4.2.4.7, que o conjunto dos campos suaves por partes globalmente localmente estruturalmente estáveis não é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$.

Capítulo 5

O último capítulo dessa dissertação é dedicado à análise da estabilidade estrutural Σ -semilocal, mostraremos que pelo Teorema 5.1.3 uma caracterização dos campos estruturalmente deslize estável em Ξ_0 e a caracterização da estabilidade estrutural Σ -semilocal em Ξ_0 .

Capítulo 1

Preliminares

COMEÇAREMOS apresentando conceitos fundamentais para o entendimento dos resultados desenvolvidos nessa dissertação, os resultados citados e desenvolvidos nessa seção serão utilizados durante todo o texto de maneira exaustiva.

1.1 Sistemas Suaves por partes

Seguindo a referência [5] tem-se as seguintes definições sobre campos suaves por partes em um contexto geral:

Considere $M \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade n -dimensional suave mergulhada em \mathbb{R}^m e uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que 0 é valor regular de f , *i.e.* para todo $x \in f^{-1}(0)$ temos que $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear sobrejetora. É amplamente conhecido da topologia diferencial que $\Sigma := f^{-1}(0)$ é uma $(n - 1)$ -subvariedade suave mergulhada em M . Além disso é importante perceber que não há perda de generalidade ao falar que M é uma variedade mergulhada em \mathbb{R}^m , uma vez que o teorema do mergulho de Whitney afirma que toda variedade suave pode ser mergulhada em algum \mathbb{R}^m .

Tendo tais notações em mente, existem duas subvariedades com bordo mergulhadas em M naturais a serem consideradas,

$$M^+ := \{x \in M; f(x) \geq 0\}$$

e

$$M^- := \{x \in M; f(x) \leq 0\}.$$

É imediato que $M = M^+ \cup M^-$ e $\Sigma = M^+ \cap M^-$. Considere agora dois campos de vetores suaves de M , X e Y , *i.e.*,

$$X, Y : M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

funções suaves tais que, $\forall x \in M$ tem-se $X(x), Y(x) \in T_x M \subset \mathbb{R}^m$. O conjunto dos campos suaves em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Podemos então definir a função multivalorada $Z : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ (isto é, $Z(x) \subset \mathbb{R}^m, \forall x \in M$) de forma que

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & \text{se } x \in M^+, \\ Y(x), & \text{se } x \in M^-, \\ \text{Conv}[X(x), Y(x)], & \text{se } x \in \Sigma, \end{cases}$$

sendo

$$\text{Conv}[X(x), Y(x)] := \left\{ \frac{1+\lambda}{2}X(x) + \frac{1-\lambda}{2}Y(x); \lambda \in [-1, 1] \right\}.$$

Notação 1.1.1. A função multivalorada Z será denotada por $Z = (X, Y)$. O conjunto dos campos $Z = (X, Y)$ com $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ será denotado por $\Omega(M, \Sigma)$.

Tendo em vista o objetivo de se definir uma equação diferencial em (X, Y) , surge a necessidade do conceito de inclusão diferencial.

Definição 1.1.1. Seja $Z : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo multivalorado, *i.e.* $\forall x \in M, Z(x) \subset T_x M$. A inclusão diferencial de Z é uma equação da forma

$$\dot{x} \in Z(x). \quad (1.1.1)$$

Uma curva $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é chamada de *solução* de (1.1.1) se forem satisfeitos:

1. γ é uma curva absolutamente contínua, *i.e.* para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que toda sequência de subintervalos disjuntos $[x_k, y_k] \subset (a, b)$ que satisfaz $\sum_k |y_k - x_k| < \delta$, implica que $\sum_k \|\gamma(y_k) - \gamma(x_k)\| < \varepsilon$.
2. $\frac{d\gamma}{dt}(t) \in Z(\gamma(t))$ para quase todo $t \in (a, b)$.

No que vem a seguir encontraremos uma condição relativamente fraca para a existência de solução de uma inclusão diferencial. É importante notar que, em geral, não se ter unicidade das soluções de inclusões diferenciais.

Seja F um campo multivalorado, dado $x_0 \in M$, o conjunto $S_F(x_0)$ é o conjunto de todas as soluções $\varphi(t)$ de $\dot{x} \in F(x)$ tais que $\varphi(0) = x_0$.

Definição 1.1.2. Um campo multivalorado $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado de *semicontínuo superior* se, para todo $x \in M$, dada uma vizinhança $B \subset \mathbb{R}^n$ de $F(x)$, existe uma vizinhança $A \subset U$ de x , tal que $F(A) \subset B$.

A condição descrita na definição 1.1.2 dá origem aos seguintes teoremas de existência das soluções das inclusões diferenciais e seus respectivos comportamentos.

Teorema 1.1.1 (Existência de Solução de Inclusões Diferenciais, [5]). *Sejam M uma variedade n -dimensional mergulhada em \mathbb{R}^m e $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo multivalorado. Considere a inclusão diferencial*

$$\dot{x} \in F(x).$$

Assuma que:

1. para cada $x \in M$, o conjunto $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ é convexo.
2. F é semicontínua superior.

Então $S_F(x_0) \neq \emptyset, \forall x_0 \in M$.

É imediato ver que os campos de $\Omega(M, \Sigma)$ satisfazem as condições do Teorema 1.1.1, e portanto os campos da forma (X, Y) , com $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, possuem solução.

Notação 1.1.2. *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, então*

$$Xh(p) := dh_p \cdot X(p).$$

Mais ainda, denotamos de forma recursiva

$$X^n h(p) := d(X^{n-1}h)_p \cdot X(p), \text{ para } n > 1.$$

Uma vez que a dinâmica nos abertos M^+ e M^- é totalmente descrita de forma local pela teoria padrão de equações diferenciais ordinárias, gera-se apenas o questionamento sobre ser possível uma descrição local das soluções da inclusão diferencial $\dot{x} \in Z = (X, Y)$ com $x(0) = p \in \Sigma$. A fim de tentar resolver essa questão, tem-se a definição dos seguintes conjuntos

- $\Sigma^c = \{p \in \Sigma; Xh(p) \cdot Yh(p) > 0\}$,
- $\Sigma^s = \{p \in \Sigma; Xh(p) < 0, Yh(p) > 0\}$,
- $\Sigma^u = \{p \in \Sigma; Xh(p) > 0, Yh(p) < 0\}$,
- $\Sigma^t = \{p \in \Sigma; Xh(p) = 0 \text{ ou } Yh(p) = 0\}$.

Os conjuntos Σ^c , Σ^s , Σ^u e Σ^t são nomeados, respectivamente, como região de costura, região de deslize estável, região de deslize instável e região de tangência. Além disso, utiliza-se a notação $\Sigma^d = \Sigma^s \cup \Sigma^u$ para indicar a região de deslize.

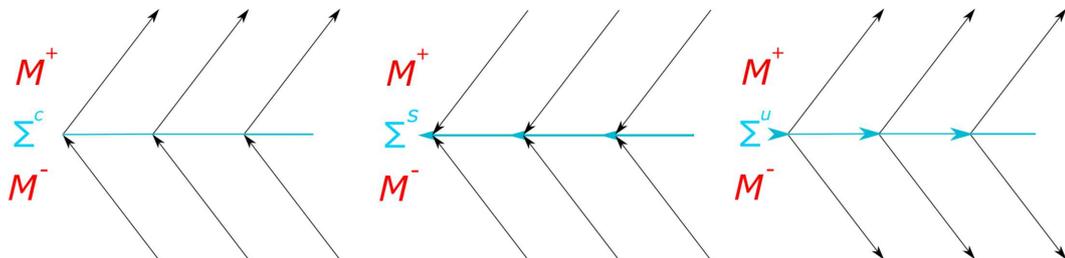


Figura 1.1: Representação das variedades Σ^c , Σ^s e Σ^u .

No que diz respeito às regiões Σ^c e Σ^d , é possível mostrar as seguintes propriedades:

Teorema 1.1.2 ([5]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega(M)$ e $p \in \Sigma^c$, então $Z(p) \cap T_p \Sigma = \emptyset$. Além disso, a solução da equação diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} \in Z(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

é única e tal solução é dada pela concatenação das soluções das equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = Y(x) \\ x(0) = p. \end{cases}$$

Teorema 1.1.3 ([5]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega(M)$ e $p \in \Sigma^d$, então $Z(p) \cap T_p \Sigma$ consiste de um único vetor de $Z(p)$. Além disso, tal vetor é dado por*

$$\frac{Yh(p) \cdot X(p) - Xh(p) \cdot Y(p)}{Yh(p) - Xh(p)}.$$

O Teorema 1.1.3, motiva, de maneira natural, a definição do campo Z^d na variedade Σ^d , por

$$Z^d(p) = \frac{Yh(p) \cdot X(p) - Xh(p) \cdot Y(p)}{Yh(p) - Xh(p)},$$

o campo Z^d é usualmente chamado pelo nome de campo deslizante e note $Z^d(p) \subset Z(p)$, $\forall p \in \Sigma^d$. Muitas vezes, na literatura, quando o campo de deslize é tomado como acima, é dito, que o campo de deslize segue a convenção de Filippov.

Teorema 1.1.4 ([5]). *Utilizando as notações acima, sejam $p \in \Sigma^d$ e $\phi^d : (-\tau, \tau) \rightarrow M$ uma solução (local) do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = Z^d(x) \\ x(0) = p, \end{cases}$$

então $\phi^d \in S_Z(p)$, i.e. ϕ^d é solução da inclusão diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} \in Z(p) \\ x(0) = p. \end{cases}$$

Além disso, as únicas soluções da inclusão diferencial acima são: ϕ^d e as respectivas concatenações de ϕ^d com as soluções de

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = Y(x) \\ x(0) = p. \end{cases}$$

Diferentemente dos conjuntos Σ^c e Σ^d , não existem teoremas gerais que regem o comportamento local da dinâmica em torno dos ponto de Σ^t . Sendo assim, dizemos que os pontos de Σ^t são degenerados.

É interessante, portanto, descobrir quais as condições que devem ser impostas nos campos de $\Omega(M)$ para que a dinâmica local dos pontos de Σ^t seja entendida. Mais ainda é necessário saber se tais condições são consideradas aceitáveis sobre os campos de $\Omega(M)$. Em outras palavras é desejado encontrar, em algum sentido, um subconjunto de $\Omega(M)$ que possua muitos elementos e que em cada elemento desse subconjunto seja entendido a dinâmica em uma vizinhança de Σ .

Para tentar responder tal questionamento, primeiramente é necessário definir uma topologia para $\Omega(M)$.

1.2 Topologia de $\Omega(M, \Sigma)$

Seja M uma variedade suave compacta mergulhada em \mathbb{R}^m , podemos então escolher um atlas finito $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$ e compactos $K_i \subset U_i$, de forma que $\bigcup_{i=1}^n K_i = M$.

Definição 1.2.1. Definimos $\mathfrak{X}^r(M)$ como sendo o espaço de Banach $(\mathfrak{X}(M), \|\cdot\|_r)$.

O espaço $\mathfrak{X}^r(M)$ possui as propriedades

- i. $\mathfrak{X}^r(M)$ é Espaço de Baire.
- ii. $(\mathfrak{X}(M), \|\cdot\|_r)$ é espaço métrico completo.
- iii. $\mathfrak{X}^r(M)$ é separável.

Note que $\mathfrak{X}(M)$ possui estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} , definindo a r -norma

$$\|X\|_r = \max_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, r\}}} \left\{ \sup_{x \in \varphi_i^{-1}(K_i)} \left\| d^j(\varphi_{i*} X) \right\| \right\}$$

$\mathfrak{X}(M)$ ganha a estrutura de espaço de Banach.

N.B. 1.2.1. *É possível provar que a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_r$ não depende da escolha do atlas finito $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$. A demonstração de tal fato pode ser encontrado em [18].*

Notação 1.2.1. *Seja (φ, U) uma carta de M e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, definimos o pushforward de X em relação a φ por*

$$\varphi_* X := d\varphi_{\varphi^{-1}(x)} X(\varphi^{-1}(x)).$$

Definição 1.2.2. Sejam M e N variedades suaves e $A \subset M$ um subconjunto qualquer. E considere $f : A \rightarrow N$. Dizemos que f é suave, se existir uma função suave e uma vizinhança aberta U de A e uma função suave $F : U \rightarrow N$, tal que $F|_A = f$. Definimos então que dois conjuntos quaisquer $A, B \subset M$ são difeomorfos se existem funções suaves $f_1 : A \rightarrow B$ e $f_2 : B \rightarrow A$, tais que $f_1 \circ f_2 = \text{Id}_B$ e $f_2 \circ f_1 = \text{Id}_A$.

Teorema 1.2.1 ([13]). *Sejam M uma variedade suave e $S \subset M$ uma variedade suave com bordo mergulhada em M , de forma que $\dim S = \dim M$. Então dada uma função suave $f : S \rightarrow N$, existe uma função suave $F : M \rightarrow N$ tal que $F|_S = f$. Mais ainda, se $G : M \rightarrow N$ é outra extensão suave, dados $p \in \partial S$, (φ, U) uma carta de M em torno de p e (ψ, V) uma carta de N em torno de $f(p)$, então*

$$d^i(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d^i(\psi \circ G \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

Além disso, $f : S \rightarrow N$ ser suave no sentido usual (como função de $\mathcal{C}^\infty(S, N)$) é análogo a ser suave no sentido da definição 1.2.2.

Colocaremos agora uma topologia no conjunto

$$\mathfrak{X}(M^+) = \left\{ X : M^+ \rightarrow \mathbb{R}^n; \forall x \in M^+, X(p) \in T_p M \text{ e } X \text{ é função suave} \right\},$$

de maneira análoga ao que foi feito com o conjunto $\mathfrak{X}(M)$, definimos uma norma \mathcal{C}^r em $\mathfrak{X}(M^+)$ por meio da norma

$$\|X\|_r = \max_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, r\}}} \left\{ \sup_{x \in \varphi_i^{-1}(K_i \cap M^+)} \|d^j(\varphi_{i*} X)\| \right\}$$

e denotamos $\mathfrak{X}^r(M^+)$ como sendo o espaço de Banach $(\mathfrak{X}(M^+), \|\cdot\|_r)$. É fácil ver que $\mathfrak{X}^r(M^+)$ herda as propriedades listadas acima do espaço $\mathfrak{X}^r(M)$. Definimos a topologia em $\mathfrak{X}(M^-)$ utilizando o mesmo procedimento.

Com tais conceitos em mente, note que dado $(X, Y) \in \Omega(M, \Sigma)$, temos que a dinâmica da inclusão diferencial

$$\dot{z} \in (X, Y)$$

depende apenas dos valores de X em M^+ e Y em M^- . Dessa forma podemos colocar a seguinte relação de equivalência em $\Omega(M, \Sigma)$,

$$(X, Y) \sim (X', Y') \Leftrightarrow X|_{M^+} = X'|_{M^+} \text{ e } Y|_{M^-} = Y'|_{M^-}.$$

Colocamos uma topologia \mathcal{C}^r em $\Omega(M, \Sigma)/\sim$ por meio da bijeção

$$\begin{aligned} \phi : \Omega(M, \Sigma)/\sim &\rightarrow \mathfrak{X}^r(M^+) \times \mathfrak{X}^r(M^-) \\ [X, Y] &\mapsto (\pi_+ X, \pi_- Y). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \pi_{\pm} : \mathfrak{X}^r(M) &\rightarrow \mathfrak{X}^r(M^{\pm}) \\ X &\mapsto X|_{M^{\pm}}. \end{aligned}$$

Definindo que ϕ é homeomorfismo (é claro que ϕ é bijetiva, note que ϕ é bijeção pois todo campo de $\mathfrak{X}(M^{\pm})$ pode ser estendido para um campo em $\mathfrak{X}(M)$).

Definição 1.2.3. Definimos $\Omega^r(M, \Sigma)$ como sendo o conjunto $\Omega(M, \Sigma)/\sim$ com a topologia \mathcal{C}^r definida acima.

Notação 1.2.2. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^+)$ e $Y \in \mathfrak{X}^r(M^-)$, então a classe de equivalência $[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \Omega(M, \Sigma)$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}^r(M)$, sendo que \tilde{X} é uma extensão de X e \tilde{Y} é uma extensão de Y .*

De forma análoga e equivalente, $\Omega^r(M, \Sigma) = \{[X, Y]; X \in \mathfrak{X}^r(M^+) \text{ e } Y \in \mathfrak{X}^r(M^-)\}$, munido da topologia produto $\mathfrak{X}^r(M^+) \times \mathfrak{X}^r(M^-)$.

Note que existe uma aplicação natural entre $\mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M)$ e $\Omega(M, \Sigma)$ por meio da função projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M) &\rightarrow \Omega^r(M, \Sigma) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y]. \end{aligned}$$

Mostraremos que tal função é um mapa quociente. Para isso, é suficiente mostrar que o mapa

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} = \phi \circ \pi : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M) &\rightarrow \mathfrak{X}^r(M^+) \times \mathfrak{X}^r(M^-) \\ (X, Y) &\mapsto (\pi_+ X, \pi_- Y) \end{aligned}$$

é mapa quociente, o que por sua vez é suficiente mostrar que a função π_{\pm} é contínua, sobrejetiva e aberta. A sobrejetividade é clara, a continuidade vem do fato que dados $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e o aberto

$$\mathcal{B}_r^{\pm}(\pi_{\pm}X, \delta) = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M^{\pm}); \|\pi_{\pm}X - Y\|_r < \delta\} \subset \mathfrak{X}^r(M^{\pm}) \subset \mathfrak{X}^r(M)$$

de $\pi_{\pm}X$, o aberto

$$\mathcal{B}_r(X, \delta) = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M); \|X - Y\|_r < \delta\} \subset \mathfrak{X}^r(M)$$

de X é tal que

$$\pi(\mathcal{B}_r(X, \delta)) \subset \mathcal{B}_r^{\pm}(\pi_{\pm}X, \delta).$$

Mostrar a abertura será um resultado muito mais complicado, e irá requerer teoremas fortíssimos de análise e dedicaremos o resto dessa subseção para a demonstração desse resultado. A primeira observação é que, se para todo $0 < \varepsilon$

$$\pi_{\pm}(\mathcal{B}_r(0, \varepsilon)) \subset \mathfrak{X}^r(\overline{M^{\pm}})$$

for uma vizinhança de 0, então π_{\pm} é função aberta. De fato, caso tal propriedade ocorra basta notar que

$$\pi_{\pm}(X + \mathcal{B}_r(0, \varepsilon)) = \pi_{\pm}(X) + \pi_{\pm}(\mathcal{B}_r(0, \varepsilon)),$$

o que implica o resultado almejado, pois π_{\pm} leva base de vizinhanças em base de vizinhanças. Para mostrar que a propriedade da linha anterior é satisfeita precisaremos também do seguinte teorema, que é um caso particular do teorema demonstrado no capítulo 4 da referência [1]. Este teorema não será demonstrado nessa dissertação uma vez que tal demonstração foge escopo proposto.

Teorema 1.2.2 (Teorema da Extensão de Stein). *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$, uma subvariedade suave compacta com bordo de \mathbb{R}^n , de forma que $\dim F = \dim \mathbb{R}^n = n$, e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função suave tal que*

$$\|f\|_{r,F} = \max_{j \in \{0,1,\dots,r\}} \sup_{x \in F} \|d^j f_x\| < \infty.$$

Então existe uma função \tilde{f} satisfazendo:

i. $\tilde{f}|_F = f,$

ii. $\|\tilde{f}\|_{r,\mathbb{R}^n} \leq C_F \cdot \|f\|_{r,F}.$

Mais ainda, a constante C_F depende apenas da subvariedade F , i.e. se $g : F \rightarrow \mathbb{R}^d$ é outra função com as mesmas propriedades de f , a extensão \tilde{g} de g irá satisfazer $\|\tilde{g}\|_{r,\mathbb{R}^n} \leq C_F \cdot \|g\|_{r,F}.$

Tendo o teorema acima em mente escolhemos um atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^m,$

2. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ existe um compacto $K_i \subset U_i$, com cada K_i difeomorfo a um disco (i.e. $K_i \cong \overline{B(0,1)}$), tal que

$$\bigcup_{i=1}^n K_i = M.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $K_1 \cap \Sigma \neq \emptyset$. Podemos então tomar uma variedade compacta e conexa L_1 com bordo, contida em U_1 , tal que $K_1 \subset L_1$, $L_1 \cup M^\pm$ é uma variedade compacta com bordo e $L_1 \cap M^\pm$ é uma variedade suave com bordo.

Definindo $M_1 = L_1 \cup M^\pm$, e supondo que, sem perda de generalidade, $K_2 \cap M_1 \neq \emptyset$, existe uma variedade suave L_2 com bordo, contida em U_2 , tal que $K_2 \subset L_2$, $L_2 \cup M_1$ é uma variedade compacta com bordo e $L_2 \cap M_1$ é uma variedade suave com bordo. Repetindo o processo n vezes, encontramos compactos L_1, \dots, L_n tais que, $L_i \subset U_i$,

$$\bigcup_{i=1}^n L_i = M,$$

cada $M_i = M^\pm \cup L_1 \cdots \cup L_i$ (sendo que $M_0 := M^\pm$) é uma variedade suave com bordo e $L_i \cap M_{i-1}$ é suave compacta com bordo. Redefinimos os compactos do atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$ como sendo $K_i = L_i$.

Tomamos agora um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ de forma que

$$\|X\|_r = \max_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, r\}}} \left\{ \sup_{x \in \varphi_i^{-1}(j_i \cap \overline{M^\pm})} \|d^j(\varphi_{i*}X)\| \right\} < \varepsilon. \quad (1.2.2)$$

Considere o pushforward de X pela carta φ_1 ,

$$\varphi_{1*}X(x) : \varphi(U_1) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

então por (1.2.2),

$$\|\varphi_{1*}X\|_{r, \varphi_1^{-1}(K_1 \cap M_0)} < \varepsilon.$$

Dessa forma, pelo teorema da extensão de Stein existe uma função \widetilde{X}_1 tal que

- i. $\widetilde{X}_1|_{\varphi_1^{-1}(K_1 \cap M_0)} = \varphi_{1*}X$,
- ii. $\|\widetilde{X}_1\|_{r, \mathbb{R}^m} \leq C_1 \cdot \|\varphi_{1*}X\|_{r, \varphi_1^{-1}(K_1 \cap M_0)} < C_1 \cdot \varepsilon$.

Definindo $X_1 \in \mathfrak{X}^r(M_1)$ como

$$X_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X_1 \mapsto \begin{cases} \varphi_i^{-1*} \widetilde{X}_1 & , \text{ se } x \in K_1, \\ X_1 & , \text{ se } x \in M_0, \end{cases}$$

de forma que $\|X_1\|_r < C_1 \cdot \|X\|_r$ e repetindo o processo encontramos um campo suave $X_2 \in \mathfrak{X}^r(M_1)$ que estende X_1 e satisfaz $\|X_2\|_r < C_2 \cdot \|X_1\|_r < C_2 \cdot C_1 \cdot \|X\|_r$. Após repetir $n - 1$ vezes o processo, encontramos um campo $X_n \in \mathfrak{X}^r(M)$ que estende X e satisfaz

$$\|X_n\|_r \leq \left(\prod_{i=1}^n C_i \right) \cdot \|X\|_r \leq K \cdot \|X\|_r < K \cdot \varepsilon,$$

mostrando assim que qualquer elemento $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ tal que $\|X\|_r < \varepsilon$ possui uma extensão $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que $\|\widetilde{X}\|_r < K \cdot \varepsilon$, sendo que a constante K depende apenas da variedade M^\pm , tal observação mostra que

$$\mathcal{B}_r^\pm \left(0, \frac{\varepsilon}{K} \right) \subset \pi_\pm \mathcal{B}_r(0, \varepsilon),$$

implicando pelos nossos comentários anteriores que π_\pm é aberta e conseqüentemente que a função π é função quociente aberta. Ou seja, provamos o seguinte teorema:

Teorema 1.2.3. *A função*

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M) &\rightarrow \Omega(M, \Sigma) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

é função quociente aberta.

Temos assim duas caracterizações da topologia de $\Omega^r(M, \Sigma)$, a partir desse momento denotaremos um elemento $[X, Y] \in \Omega^r(M, \Sigma)$ simplesmente por (X, Y) , a fim de facilitar a notação.

1.3 Transversalidade

Uma ferramenta muito útil para entender o comportamento genérico de $\Omega^r(M, \Sigma)$ é o conceito de transversalidade.

Definição 1.3.1. Sejam M, N variedades, $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ e $S \subset N$ uma subvariedade de N , dizemos que f é *transversal* a S em p , denotado por $f \pitchfork S$ em p , se for satisfeito uma das seguintes condições abaixo:

- i.* $f(p) \notin S$,
- ii.* $df_p T_p N + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N$.

Caso exista um conjunto $A \subset M$, tal que para todo $a \in A$, f é transversal a S em a , dizemos que f é transversal a S em A . Em particular, se f for transversal a S em M , dizemos que f é transversal a S ou, simplesmente $f \pitchfork S$.

Duas subvariedades $S_1, S_2 \subset M$ são ditas transversais ($S_1 \pitchfork S_2$) se $i_1 \pitchfork S_2$, ou, de maneira equivalente, $i_2 \pitchfork S_1$, sendo $i_1 : S_1 \rightarrow M$ e $i_2 : S_2 \rightarrow M$, são os mapas inclusão.

Se M é uma variedade com bordo e $f : M \rightarrow N$ é uma função suave, o conceito de transversalidade ainda é o mesmo, porém podemos considerar o mapa

$$\partial f : \partial M \rightarrow N$$

e, portanto estudar os conceitos de transversalidade em tal mapa.

De maneira mais geral, dadas duas variedades suaves $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^n$, definimos a topologia \mathcal{C}^r de Whitney em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ da seguinte maneira, seja $(\varphi_i, U_i)_{i=1}^\infty$ um atlas de M com as propriedades

- i.* $\forall i \in \mathbb{N}, \exists$ um conjunto compacto $K_i \subset U_i$, tal que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = M;$$

- ii.* Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $V_p \subset M$ de p tal que

$$\#\{i \in \mathbb{N}; V_p \cap U_i \neq \emptyset\} < \infty.$$

A topologia $\mathcal{C}^r(M, N)$ de Whitney é a topologia no espaço $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ gerada pelas bases de vizinhanças

$$\mathcal{B}_r(f, \{\varepsilon_i\}) = \left\{ g \in \mathcal{C}^r(M, N); \forall i, \max_{j \in \{0, \dots, r\}} \sup_{x \in \varphi_i^{-1}(K_i)} \left\| d^j(f \circ \varphi_i^{-1}) - d^j(g \circ \varphi_i^{-1}) \right\| < \varepsilon_i \right\},$$

sendo $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ e $\{\varepsilon_i\} = \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

Definição 1.3.2. Definimos o espaço $W^r(M, N)$ como sendo o conjunto $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ com a topologia \mathcal{C}^r de Whitney.

Note que se S for uma variedade fechada com bordo contida em uma variedade sem bordo M tal que $\dim M = \dim S$, podemos definir $W^r(S, N)$ de maneira análoga. Fazendo uso do Teorema 1.2.1, os abertos fundamentais serão da forma

$$\mathcal{B}_r(f, \{\varepsilon_i\}) = \left\{ g \in \mathcal{C}^r(M, N); \forall i, \max_{j \in \{0, \dots, r\}} \sup_{x \in \varphi_i^{-1}(S \cap K_i)} \left\| d^j(f \circ \varphi_i^{-1}) - d^j(g \circ \varphi_i^{-1}) \right\| < \varepsilon_i \right\}.$$

Se M é variedade compacta, então $W^r(M, N)$ é espaço métrico com a métrica

$$d_r : \mathcal{C}^\infty(M, N) \times \mathcal{C}^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \max_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ k \in \{0, \dots, r\}}} \left\{ \sup_{f \in \varphi_i^{-1}(K_i)} \left\| d^k(g \circ \varphi_i) - d^k(f \circ \varphi_i) \right\| \right\}.$$

Citaremos agora alguns teoremas de transversalidade extremamente conhecidos da teoria geral

Teorema 1.3.1 ([4]). *Sejam M, N e S variedades suaves (sem bordo) e considere que função*

$$F : M \times S \rightarrow N$$

é transversal a uma subvariedade $Z \subset N$ sem bordo. Definindo $F_s(\cdot) := F(\cdot, s)$ temos que o conjunto

$$S' = \{s \in S; F_s \pitchfork Z\}$$

é residual em S .

Teorema 1.3.2 ([4]). *Sejam M uma variedade com bordo, N, S variedades suaves (sem bordo) e*

$$F : M \times S \rightarrow N$$

uma função tal que F e ∂F são transversais a uma subvariedade $Z \subset N$ sem bordo. Definindo $F_s(\cdot) := F(\cdot, s)$ temos que o conjunto

$$S' = \{s \in S; F_s \pitchfork Z \text{ e } \partial F_s \pitchfork Z\}$$

é residual em S .

Teorema 1.3.3 (Teorema de Thom, [4]). *Sejam M e N variedades suaves e $S \subset N$ uma subvariedade. Então, o conjunto*

$$\{f \in W^r(M, N); f \pitchfork S\},$$

é aberto e denso em $W^r(M, N)$.

Definição 1.3.3. Definimos o *fibrado tangente* de uma variedade M como sendo $TM = \{(x, v); x \in M \text{ e } v \in T_x M\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Existe uma projeção natural de TM para M ,

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ (x, v) &\mapsto x. \end{aligned}$$

É amplamente conhecido que TM é uma variedade suave de dimensão igual ao dobro da dimensão de M . Uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ tal que $\pi \circ f = \text{id}|_M$ é chamada de seção.

Note que existe uma identificação natural de $\mathfrak{X}^r(M)$ com o espaço das seções definido por

$$\chi^r(M) = \{X \in \mathcal{C}^\infty(M, TM); \pi \circ X = \text{Id}\} \subset W^r(M, TM).$$

mais ainda, o mapa

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{X}^r(M) &\rightarrow \chi^r(M) \\ X(x) &\mapsto (x, X(x)) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. A bijeção de ϕ é clara. Escolhendo um atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$ de M , podemos induzir o atlas $\{(\psi_i, \pi^{-1}(U_i))\}_{i=1}^n$ em TM de forma que

$$\begin{aligned} \psi_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto (\varphi_i(x), d(\varphi_i)_x v), \end{aligned}$$

seguinto que

$$\psi_i \circ \phi(X) \circ \varphi_i^{-1}(x) = (x, d(\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)} X(\varphi_i^{-1}(x))) = (x, \varphi_{i*} X(x)).$$

Como os φ_i estão fixos, é claro que tomando uma vizinhança $\mathcal{B}_r((x, X(x)), \varepsilon)$ podemos tomar a bola

$$B_\delta(X) = \{Y \in \mathfrak{X}, \|X - Y\|_r < \delta\} \subset \mathfrak{X}^r(M)$$

tal que $\phi(B_\delta(X)) \subset \mathcal{B}_r((x, X(x)), \varepsilon)$, mostrando a continuidade de ϕ . Por outro lado, temos que ϕ^{-1} é dada por

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \chi^r(M) &\rightarrow \mathfrak{X}^r(M) \\ (x, X(x)) &\mapsto X(x). \end{aligned}$$

É obvio que utilizando a mesma técnica anterior mostra-se a continuidade de ϕ^{-1} , demonstrando o homeomorfismo entre o espaço dos campos e o espaço das seções.

De modo semelhante,

$$\mathfrak{X}(M^+) \cong \chi^r(M^+) = \{X \in \mathcal{C}^\infty(M^+, TM); \pi \circ X = \text{id}\} \subset W^r(M^+, TM)$$

e

$$\mathfrak{X}(M^-) \cong \chi^r(M^-) = \{X \in \mathcal{C}^\infty(M^-, TM); \pi \circ X = \text{id}\} \subset W^r(M^-, TM).$$

N.B. 1.3.1. Seja $X(p) \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $X(p) = 0$. Iremos dar um sentido para dX_p nessa situação específica. Dada (φ, U) uma carta em torno de p , então

$$\varphi_* X(x) = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)} X(\varphi^{-1}(x))$$

é um campo de vetores em $U_i \subset \mathbb{R}^n$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} d(\varphi_* X)_{\varphi(p)} &= d\left(d\varphi_{\varphi^{-1}} \cdot X \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)} \\ &= d(d\varphi_{\varphi^{-1}})_{\varphi(p)} \cdot X(p) + d\varphi_p \cdot dX_p \cdot d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \\ &= d\varphi_p \cdot dX_p \cdot d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} dX_p &= (d\varphi_p)^{-1} \cdot d(\varphi_* X)_{\varphi(p)} \cdot (d\varphi_{\varphi(p)}^{-1})^{-1} \\ &= d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \cdot d(\varphi_* X)_{\varphi(p)} \cdot d\varphi_p, \end{aligned}$$

logo, podemos dizer que

$$dX_p : T_p M \rightarrow T_p M.$$

Lema 1.3.1. *Sejam $S \subset M$ (resp. M^\pm) uma subvariedade suave sem bordo de M (M^\pm) e $X(x) \in \mathfrak{X}^r(M)$ (resp. $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$). Então $(x, X(x)) \pitchfork S \times \{0\} := \{(x, 0); x \in N\} \subset TM$ se, e somente se, para todo $p \in S$ tal que $X(p) = 0$, a transformação linear*

$$dX_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Supomos primeiramente que $(x, X(x)) \pitchfork S \times \{0\}$. Note que em p

$$d(x, X(x))_{(p,0)} \cdot T_p M + T_{(p,0)}(S \times \{0\}) = T_{(p,0)}(TM). \quad (1.3.1)$$

Seja (ϕ, U) uma carta de M em torno de p , então $(\psi, \pi^{-1}(U)) := ((\varphi(\cdot), d\varphi), \pi^{-1}(U))$ é uma carta de TM em torno de $(p, 0)$. Aplicando $d\psi_{(p,0)}$ em (1.3.1)

$$\begin{aligned} d\psi_{(p,0)} \cdot \left(d(x, X(x))_{(p,0)} \cdot T_p M + T_{(p,0)}(S \times \{0\}) \right) &= d\psi_{(p,0)} \left(T_{(p,0)}(TM) \right) \\ (d\varphi_p, d\varphi_p dX_p) T_p M + \mathbb{R}^m \times \{0\} &= \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^m \times (d\varphi_p dX_p T_p M) + \mathbb{R}^m \times \{0\} &= \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

portanto

$$d\varphi_p dX_p T_p M = \mathbb{R}^m,$$

o que implica que dX_p é isomorfismo.

De forma recíproca se dX_p é um isomorfismo, então é claro que

$$d((x, X(p)) T_p M = T_{(p,0)} TM$$

e consequentemente $(x, X(x)) \pitchfork S \times \{0\}$. □

Antes dos próximos teoremas, relembremos que Σ é a variedade de descontinuidade dos campos em $\Omega^r(M, \Sigma)$ e consideraremos $\Sigma = h^{-1}(0)$, sendo que $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $\{0\}$ valor regular de h .

Teorema 1.3.4. *O conjunto Λ_0 dos campos de $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ que não se anulam em Σ é abertos e denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$.*

Demonstração. A abertura é clara, pois se $X \in \Lambda_0$, uma vez que Σ é compacto, existe $\delta \in \mathbb{R}$, tal que

$$0 < \delta < \min_{p \in \Sigma} \|X(p)\|,$$

segue que

$$B_{\delta/2}(X) \subset \Lambda_0.$$

Vamos provar a densidade agora, seja $p \in \Sigma$ e (φ_p, U_p) uma carta de M^\pm em torno de p , tal que

$$\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{H}^m := \mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty),$$

temos que $\{U_p \cap \Sigma\}_{p \in \Sigma}$ é uma cobertura aberta de Σ (na topologia induzida de M^\pm), mais ainda, da compacidade de Σ existe subcobertura finita $\{U_i\}_{i=1}^n$. Definiremos os compactos $K_i \subset U_i \cap \Sigma$ em relação a Σ , fazendo o seguinte processo. Seja

$$F_1 = \Sigma \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_n) \subset U_1 \cap \Sigma.$$

Pela normalidade de Σ , existe um aberto V_1 de Σ , tal que $F_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1 \cap \Sigma$, onde $\overline{V_1}$ é compacta. Defina $K_1 := \overline{V_1}$.

De maneira análoga, defina

$$F_2 = \Sigma \setminus (V_1 \cup U_3 \dots \cup U_n) \subset U_1 \cap \Sigma,$$

pela normalidade de Σ , existe um aberto V_2 de Σ , tal que $F_2 \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U_i \cap \Sigma$, como $\overline{V_2}$ é compacto. Defina $K_2 := \overline{V_2}$. Continuando o processo de forma recursiva pode-se encontrar

$$F_i = \Sigma \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup U_{i+1} \dots \cup U_n) \subset U_1 \cap \Sigma,$$

e novamente pela normalidade de Σ existe um aberto V_i de Σ , tal que $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i \cap \Sigma$, e definimos $K_i := \overline{V_i}$. No fim do processo, conseguimos uma família de compactos $\{K_i\}_{i=1}^n$ tal que $K_i \subset U_i \subset \Sigma$ e

$$\bigcup_{i=1}^n K_i = \Sigma.$$

Considere os conjuntos

$$\mathcal{F}_i = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M^\pm); Y(p) \neq 0, \forall p \in K_i\},$$

iremos mostrar que cada \mathcal{F}_i é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$, a abertura segue do mesmo argumento feito para mostrar que Λ_0 é aberto, para ver a densidade fixe $X \in \mathfrak{X}^r(M^+)$ e $\varepsilon > 0$. Definimos então o mapa

$$\begin{aligned} Y : \partial(\mathbb{H}^m) \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (p, v) &\mapsto ((\varphi_i)_* X)(p) + v, \end{aligned}$$

obviamente $Y \pitchfork \{0\}$ portanto, pelo teorema (1.3.1), o conjunto

$$S_i = \{v \in \mathbb{R}^m; Y_v \pitchfork \{0\}\}$$

é residual em \mathbb{R}^m . Porém, note que se $Y_v(\cdot) \pitchfork \{0\}$, e $Y_v(p) = 0$ segue que

$$d(Y_v)_p T_p(\partial H^m) + T_0\{0\} = T_0\mathbb{R}^m = 0$$

$$d(Y_v)_p T_p(\partial H^m) = \mathbb{R}^m,$$

uma vez que $\dim \partial H^m = m - 1$, temos que $d(Y_v)_p$ não pode ser sobrejetivo, implicando que $Y_v(p) \neq 0, \forall p \in \partial H^m$.

Seja σ uma *bump function* tal que $\sigma(x) = 1, \forall x \in K_i$ e $\sigma(x) = 0, \forall x \in M^+ \setminus U_i$ e defina

$$Z_v(p) = X(p) + \sigma(p) \cdot d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} v,$$

com $v \in S_i$. Pelas contas anteriores, $Z_v \in \mathcal{F}_i, \forall v \in S_i$ e como

$$\|Z - X\|_r = \left\| \sigma(p) \cdot d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} v \right\|_r$$

tomando $v \in S_i$ suficientemente pequeno (tal v existe pois S_i é conjunto residual em \mathbb{R}^m), conseguimos garantir que $\|Z - X\|_r < \varepsilon$.

Utilizando que \mathcal{F}_i é aberto e denso, temos que $\mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n$ é denso em $\mathfrak{X}^r(M^+)$ e como

$$\mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n \subset \Lambda_0,$$

conclui-se que Λ_0 é denso em $\mathfrak{X}^r(M^+)$, o que acaba a demonstração. \square

Lema 1.3.2. *Dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ (resp. $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$), temos que $(\cdot, X(\cdot)) \pitchfork T\Sigma \subset TM$ (resp. $(x, X(x)) \pitchfork T\Sigma \subset TM^\pm$), se, e somente se, $Xh : M \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $Xh : M^\pm \rightarrow \mathbb{R}$) é transversal a $\{0\}$ em Σ .*

Demonstração. Supomos que $(\cdot, X(\cdot))$ é transversal a $T\Sigma$, tomamos $p \in \Sigma$ tal que $Xh(p) = 0$, então $(p, X(p)) \in T\Sigma$ e como $(\cdot, X(\cdot))$ é transversal a Σ ,

$$d(x, X(x))T_p M + T_{(p, X(p))}(T\Sigma) = T_{(p, X(p))}TM,$$

uma vez que 0 é valor regular de h . Utilizando a forma local de submersão, existe uma carta (φ, U) de M em torno de p , tal que

$$h \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = x_1,$$

consideramos agora a carta $(\psi, \pi^{-1}(U)) = ((\varphi, d\varphi), \pi^{-1}(U))$, perceba que

$$\psi \circ (\cdot, X(\cdot)) \circ \varphi(x) = (x, \varphi_* X),$$

e $\varphi(U \cap \Sigma) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap \varphi(U)$. Da transversalidade temos

$$d(\text{id}, \varphi_* X)_{\varphi(x)} \cdot \mathbb{R}^m + (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) \times (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

e projetando na segunda coordenada

$$d(\varphi_* X)_{\varphi(x)} \mathbb{R}^m + \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} = \mathbb{R}^m,$$

então

$$\pi_1 \circ d(\varphi_* X)_{\varphi(x)} \mathbb{R}^m = \mathbb{R}. \quad (1.3.2)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Xh(\varphi^{-1}(x)) &= \nabla h_{\varphi^{-1}(x)} \cdot X(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \nabla h_{\varphi^{-1}(x)} \cdot d\varphi_x^{-1} \cdot d\varphi_{\varphi^{-1}(x)} X(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \nabla(h \circ \varphi^{-1})_x \cdot \varphi_* X(x) \\ &= \pi_1 \circ \varphi_* X(x), \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

portanto,

$$dXh_p \cdot d\varphi_p^{-1} = \pi_1 \circ d(\varphi_* X)_{\varphi(x)},$$

implicando por (1.3.2) que p é valor regular de Xh . A recíproca é imediata uma vez que todas as operações feitas são do tipo se e somente se. \square

Mostraremos agora o resultado principal dessa subseção.

Teorema 1.3.5. *O conjunto Λ_1 dos campos em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ tais que $(\cdot, X(\cdot))$ é transversal a $T\Sigma$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$.*

Demonstração. Provaremos primeiro a abertura. Seja $X \in \Lambda_1$, note que as funções

$$\begin{aligned} \lambda : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto Xh(p) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto d(Xh)_p \end{aligned}$$

são contínuas, seguindo que $U = \mu^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é um aberto de Σ tal que todo ponto p de U satisfaz que a transformação linear $d(Xh)_p$ é uma sobrejeção. Além disso, como $X \in \Lambda_1$ o Lema 1.3.2 nos garante que o compacto $\lambda^{-1}(0)$ está contido em U e da normalidade de Σ existe um aberto V de forma que

$$\lambda^{-1}(0) \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

Perceba ainda que Xh é uma submersão para todo $p \in \bar{V}$.

É claro que a função

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \times \Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (X, p) &\mapsto d(Xh)_p \end{aligned}$$

é contínua. Mais ainda, para todo $v \in \bar{V}$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}_v \times U_v$ de (X, v) em $\mathfrak{X}^r(M^\pm) \times \Sigma$ de forma que

$$\rho(\mathcal{U}_v \times U_v) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

note que $\{U_v\}_{v \in \bar{V}}$ é uma cobertura aberta de \bar{V} , logo como \bar{V} é compacto existe uma subcobertura $\{U_{v_i}\}_{i=1}^n \subset \{U_v\}_{v \in \bar{V}}$ finita de \bar{V} . Tomando o aberto

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_{v_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{v_n}$$

temos que se $Y \in \mathcal{V}$ então $d(Yh)_p$ é uma submersão para todo $p \in \bar{V}$. De forma análoga, como a função

$$\begin{aligned} \sigma : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \times \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, p) &\mapsto Xh(p), \end{aligned}$$

é contínua e $\Sigma \setminus V$ é compacta, utilizando o mesmo processo descrito anteriormente temos que existe uma vizinhança \mathcal{B} de X tal que para todo $Y \in \mathcal{B}$ vale que $Yh(\Sigma \setminus V) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Considere a vizinhança $\mathcal{W} = \mathcal{B} \cap \mathcal{V}$ de X em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$. Note que se $Y \in \mathcal{W}$, então $Yh(p) \neq 0$ em $\Sigma \setminus V$ e $d(Yh)_p \neq 0$ em \bar{V} , implicando que $Yh \pitchfork \{0\}$ e consequentemente (utilizando o lema anterior) $(p, Y(p)) \pitchfork T\Sigma$, o que infere $Y \in \Lambda_1$, logo $\mathcal{W} \subset \Lambda_1$, demonstrando a abertura de tal conjunto.

Provaremos agora a densidade de Λ_1 . A demonstração será essencialmente a mesma do Teorema (1.3.4), com mínimas alterações.

Seja $p \in \Sigma$, então pela forma local de submersão existe uma carta (φ_p, U_p) de M^\pm em torno de p tal que $\sigma \circ \varphi_p^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_1$. Como $\{U_p \cap \Sigma\}_{p \in \Sigma}$ é uma cobertura aberta de Σ , pela compacticidade existe uma subcobertura $\{U_i \cap \Sigma\}_{i=1}^n \subset \{U_p \cap \Sigma\}_{p \in \Sigma}$ finita de Σ . Da demonstração do Teorema 1.3.4, existem compactos K_i , tais que $K_i \subset U_i \cap \Sigma$ e

$$\bigcup_{i=1}^n K_i = \Sigma.$$

Considere os conjuntos

$$\mathcal{F}_i = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M^\pm); (p, Y(p)) \pitchfork T\Sigma \text{ em } K_i\}.$$

Iremos mostrar que cada \mathcal{F}_i é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$. A abertura segue do mesmo argumento feito para mostrar que Λ_1 é aberto. Para ver a densidade de tal conjunto, fixe $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $\varepsilon > 0$. Primeiramente definimos o mapa

$$\begin{aligned} F: \mathbb{H}^m \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\mapsto \pi_1 \circ ((\varphi_i)_* X)(p) + (v, 0) = v + \pi_1 \circ ((\varphi_i)_* X)(p). \end{aligned}$$

É claro que $F \pitchfork \{0\}$ e portanto, pelo Teorema 1.3.2, o conjunto

$$S_i = \{v \in \mathbb{R}^m; F_v \pitchfork \{0\}\}$$

é residual em \mathbb{R} . Porém, pela equação (1.3.3),

$$Xh(p) = \pi_1 \circ (\varphi_i)_* X(\varphi(p)).$$

Da normalidade de \mathbb{H}^m , existe um aberto V , tal que

$$K \subset V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i,$$

seja σ uma *bump function* tal que $\sigma(x) = 1, \forall x \in \bar{V}_i$ e $\sigma(x) = 0, \forall x \in M^\pm \setminus U_i$. Definindo

$$Z_v(p) = X(p) + \sigma(p) \cdot d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i(p)}(v, 0),$$

com $v \in S_i$, temos pelas contas anteriores $Z_v \in \mathcal{F}_i$ para todo $v \in S_i$, pois dado $q \in V_i$ (o que implica, em particular, que $\sigma(q)$ é igual a 1), vale que

$$Z_v h(q) = \pi_1 \circ (\varphi_i)_* X(\varphi(p)) + v, \quad q \in V_i$$

uma vez que V_i é aberto e $v \in S_i$, $Z_v h \pitchfork \{0\}$ em K_i , e portanto $Z_v \in \mathcal{F}_i$. Além disso

$$\|Z - X\|_r = \left\| \sigma(p) \cdot d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i(p)}(v, 0) \right\|_r = |v| \left\| \sigma(p) \cdot d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i(p)}(1, 0) \right\|_r$$

e então tomando $v \in S_i$ suficientemente pequeno (tal v existe pois S_i é conjunto residual em \mathbb{R}^m), conseguimos garantir que $\|Z - X\|_r < \varepsilon$.

Utilizando que \mathcal{F}_i é aberto e denso, temos que $\mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n$ é denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e como

$$\mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n \subset \Lambda_1$$

conclui-se que Λ_1 é denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$, o que acaba a demonstração. \square

Como corolário dos Teoremas 1.3.4 e 1.3.5, encontramos o primeiro conjunto de elementos genéricos de $\Omega^r(M, \Sigma)$.

Teorema 1.3.6. *O conjunto Δ dos campos $(X, Y) \in \Omega(M, \Sigma)$, tais que X e Y satisfazem*

1. *X e Y não possuem singularidades em Σ e*
2. *$(\cdot, X(\cdot))$ e $(\cdot, Y(\cdot))$ são transversais a $T\Sigma$.*

é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$.

1.4 Estabilidade estrutural

Durante esse subseção definiremos os conceito de estabilidade estrutural, que será o foco da dissertação.

O início da teoria de estabilidade estrutural começa no ano de 1937 com os soviéticos Aleksandr Aleksandrovich Andronov e Lev Semyonovich Pontryagin no artigo *Systèmes Grossiers* [2]. Motivados por aplicações na física, Andronov e Pontryagin tinham como objetivo garantir que as respostas que obtidas para os modelos gerassem informações efetivas sobre o sistema físico analisado. Dessa forma, a solução encontrada pelos autores foi tentar encontrar os sistemas que resistissem a pequenas perturbações, estando essas perturbações presentes tanto nas condições iniciais dos sistema quando na própria definição do modelo.

Em [2], Andronov e Pontryagin cunham o termo *grossier* a fim de resolver esse problema. A grosso modo, um campo X é *grossier* em uma vizinhança V se uma perturbação de X mantém suas trajetórias, a menos de um homeomorfismo. Ainda em [2], os autores definem o conceito *grossièreté*, o qual, hoje em dia é chamado de estabilidade estrutural. Além disso, eles demonstraram que, um campo analítico planar ($X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), possui estabilidade estrutural se, e somente se, todas a singularidades e órbitas periódicas são hiperbóricas, e não existe conexão de selas.

Esses conceitos chegam aos Estados Unidos por meio do matemático russo, naturalizado estadunidense, chamado Solomon Lefschetz. Um de seus alunos, o matemático De Baggis, retoma alguns aspectos do artigo de Andronov e Pontryagin, conseguindo, em 1952, generalizar os resultados para o caso em que o campo de vetores planar é apenas de classe \mathcal{C}^1 .

O brasileiro Maurício Peixoto, também trabalhou com Lefschetz. Por volta de 1955, Peixoto foi introduzido aos trabalhos de De Baggis e, conseqüentemente com o problema da estabilidade estrutural, o que o motivou para ir estudar em Princeton em 1957.

No ano de 1959, Peixoto publicou o artigo *On Structural Stability* ([21]). Neste trabalho, é apresentada uma definição da estabilidade estrutural um pouco distinta da proposta por Andronov e Pontryagin, uma que pode ser generalizada para sistemas em dimensão qualquer. Ainda em 1959, Peixoto publica o artigo *Structural Stability in the Plane with Enlarged Boundary Conditions* ([19]), no qual é caracterizada a estabilidade estrutural em uma variedade compacta com bordo mergulhada em \mathbb{R}^2 . Em 1962, o brasileiro publica o seu artigo mais importante de nome *Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds* ([20]), caracterizando a estabilidade estrutural em 2-variedades compactas sem bordos.

Em 1977 o matemático brasileiro Marco Antonio Teixeira, publica o artigo *Generic Bifurcation in Manifolds with Boundary* ([25]) que caracteriza as bifurcações genéricas em 2-variedades compactas com bordo, o que, em particular, caracteriza os campos com

estabilidade estrutural nesse tipo de variedade. Praticamente esgotando os resultados a respeito de estabilidade estrutural no âmbito dois dimensional. É importante ser notado que, até nos dias atuais, não é sabido muito a respeito da estabilidade estrutural em dimensão maior que dois.

No ano de 1988, os matemáticos Marco Antônio Teixeira e Jorge Sotomayor publicam o importantíssimo artigo *Vector Fields near the Boundary of a 3-Manifold* ([24]), conseguindo entender o comportamento estrutural local na fronteira de uma 3-variedade com bordo. Tais noções certamente contribuíram de maneira decisiva para o início e progresso do estudo da estabilidade estrutural local dos campos suaves por partes.

Depois de muitos resultados intermediários nos anos entre 2017 e 2019, os matemáticos Otávio Gomide e Marco Antonio Teixeira, conseguiram caracterizar a estabilidade estrutural local e semilocal de campos suaves (nos artigos [6] e [7]) por partes em 3-variedades. Essa dissertação de mestrado será, em maior parte, focada em demonstrar os resultados de tais artigos

Começaremos falando sobre o conceito de estabilidade estrutural do ponto de vista da teoria clássica, isto é, para campos de vetores suaves.

Definição 1.4.1. Sejam X e Y pertencentes a $\mathfrak{X}^r(M)$. Os campos suaves X e Y são e *equivalentes* em p e q , respectivamente, se existir um homeomorfismo $h : U_p \rightarrow V_q$ que mapeia órbitas de X em órbitas de Y respeitando a orientação das órbitas, sendo U_p e V_q vizinhanças de p e q em M , respectivamente.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$. X é *localmente estruturalmente estável* em p se, para cada vizinhança $U_p \subset M$ de p , existe uma vizinhança \mathcal{U}_X de X em $\mathfrak{X}^r(M)$ de modo que, para cada $Y \in \mathcal{U}_X$, X é equivalente a Y em p e q , respectivamente, para algum $q \in U_p$.

Caso X seja um campo localmente estruturalmente estável em todo p , então X recebe o nome de *globalmente localmente estruturalmente estável*.

Por fim, se existir uma vizinhança \mathcal{U} de X , de forma que para todo $Y \in \mathcal{U}$, existe um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ que mapeia órbitas de X em órbitas de Y , respeitando a orientação das órbitas, então X é recebe o nome de *estruturalmente estável*.

Para os campos em $\Omega^r(M, \Sigma)$, o conceito se estende de maneira natural, porém levando em conta o campo de deslize.

Definição 1.4.2. Sejam M uma variedade e Σ a variedade de descontinuidade e considere os campos (X, Y) e (X', Y') pertencentes a $\Omega^r(M, \Sigma)$. Dizemos que (X, Y) e (X', Y') são Σ -*equivalentes* em p e q , respectivamente, se existe um homeomorfismo $h : U_p \rightarrow V_q$ que mapeia órbitas de (X, Y) em órbitas de (X', Y') respeitando a orientação das órbitas, sendo U_p e V_q vizinhanças de p e q em M , respectivamente, e $h(U \cap \Sigma) = V \cap \Sigma$.

Sejam $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in M$. Dizemos que (X, Y) é Σ -*localmente estruturalmente estável* em p , se para cada vizinhança $U_p \subset M$ de p , existe uma vizinhança $\mathcal{U}_{(X, Y)} \subset \Omega^r(M, \Sigma)$ de (X, Y) tal que, para cada $(X', Y') \in \mathcal{U}_{(X, Y)}$, (X, Y) é Σ -equivalente a (X', Y') em p e q , respectivamente, para algum $q \in U_p$.

Caso o campo (X, Y) seja Σ -localmente estruturalmente estável em todo p , então (X, Y) recebe o nome de *globalmente Σ -localmente estruturalmente estável*.

Por fim, caso exista uma vizinhança \mathcal{U} de (X, Y) de forma que para todo $(X', Y') \in \mathcal{U}$, exista um homeomorfismo $f : U_\Sigma \rightarrow V_\Sigma$, onde U_Σ e V_Σ são vizinhanças de Σ de forma que f mapeia órbitas de (X, Y) em órbitas de (X', Y') preservando a orientação e satisfazendo $f(\Sigma) = \Sigma$; então (X, Y) recebe o nome de Σ -*semilocalmente estruturalmente estável*.

É importante dizer que muitas vezes, quando o contexto é claro, omitimos o símbolo Σ dos termos: Σ -equivalente, Σ -estruturalmente estável, Σ -localmente e Σ -semilocalmente.

N.B. 1.4.1. *Dados (X, Y) e (X', Y') dois campos em $\Omega^r(M, \Sigma)$, tais que X é equivalente a X' e Y é equivalente a Y' como campos em $\mathfrak{X}(M)$ (ou até mesmo como campos em $\mathfrak{X}(M^+)$ e $\mathfrak{X}(M^-)$, respectivamente), isto não implica que (X, Y) é equivalente a (X', Y') em $\Omega^r(M, \Sigma)$, o fato da existência do campo deslizante que gera tal obstrução topológica.*

A partir deste momento, M sempre será uma 3-variedade compacta mergulhada em \mathbb{R}^m e Σ uma 2-variedade compacta, conexa e orientável mergulhada em M . Durante a dissertação iremos estudar a possível existência de conjuntos residuais em $\Omega^r(M, \Sigma)$ que possuam propriedades com respeito a algum tipo de estabilidade estrutural, em especial, os resultados serão focados em campos que são globalmente localmente estruturalmente estáveis e Σ -semilocalmente estruturalmente estáveis.

Proposição 1.4.1. *Seja M uma 3-variedade compacta e Σ uma variedade compacta, conexa e orientável de dimensão 2 mergulhada em M , então $M \setminus \Sigma$ tem no máximo duas componentes conexas.*

Demonstração. Utilizaremos topologia algébrica para demonstrar nosso resultado. É suficiente mostrar que

$$\widetilde{H}_0(M \setminus \Sigma) = \mathbb{Z} \text{ ou } 0,$$

onde $H_i(M)$ é o i -ésimo grupo de homologia de M . Uma vez que $(M, M \setminus \Sigma)$ é um bom par, temos a sequência exata longa do bom par

$$\dots \longrightarrow H_1(M \setminus \Sigma) \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow H_1(M, M \setminus \Sigma) \xrightarrow{\delta_1} \widetilde{H}_0(M \setminus \Sigma) \xrightarrow{\delta_2} \widetilde{H}_0(M) = 0.$$

Pela dualidade de Alexander-Poincaré-Lefschetz,

$$H_1(M, M \setminus \Sigma) = H^2(\Sigma) = \mathbb{Z}$$

e portanto

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_1} \widetilde{H}_0(M \setminus \Sigma) \xrightarrow{\delta_2} 0.$$

Uma vez que $\text{Ker}(\delta_2) = \widetilde{H}_0(M \setminus \Sigma)$, pela exatidão temos $\text{Im}(\delta_1) = \widetilde{H}_0(M \setminus \Sigma)$, o que implica que δ_2 é sobrejetivo. Como $H_0(M \setminus \Sigma) = \mathbb{Z}^n$, temos que

$$\widetilde{H}_0(M \setminus \Sigma) = \mathbb{Z} \text{ ou } 0,$$

o que completa a demonstração. □

N.B. 1.4.2. *Se $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ e $\Sigma = \{(1, 0)\} \times \mathbb{S}^2$, então $M \setminus \Sigma$ tem apenas uma componente conexa.*

Finalizaremos essa seção com algumas definições importantes.

Definição 1.4.3. Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in \Sigma$ de forma que $X(p) \neq 0$. Se o ponto p satisfizer

$$Xh(p) \neq 0,$$

p é chamado de ponto Σ -regular em relação a X , mais ainda caso

$$Xh(p) = 0,$$

p é uma Σ -singularidade (também chamado tangência ou singularidade tangencial) em relação a X .

Suponha agora que dado $p \in \Sigma$ tal que $X(p) \neq 0$, tal ponto satisfaça

$$Xh(p) = 0 \text{ e } X^2h(p) \neq 0,$$

então p é denominado *ponto de dobra*.

Caso $p \in \Sigma$ satisfaça $X(p) \neq 0$,

$$Xh(p) = 0, \quad X^2h(p) = 0 \text{ e } X^3h(p) \neq 0,$$

com $\{dh_p, dXh_p, dX^2h_p\}$ linearmente independentes então o ponto p é chamado de *cúspide*.

É claro que essa definição se estende para campos em $\mathfrak{X}^r(M^+)$ e $\mathfrak{X}^r(M^-)$.

Os campos em $\mathfrak{X}^r(M)$ (resp. $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$) que não possuem singularidades em Σ e cujas singulares tangenciais são dobras ou cúspides são chamados de *campos simples*. O conjunto de todos os campos simples é denotado por $\mathfrak{X}_S^r(M)$ (resp. $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$).

Definição 1.4.4. Se $p \in X \in \mathfrak{X}^r(M^+)$ é um ponto de dobra tal que $Xh^2(p) > 0$, p é chamado de ponto de *dobra visível*, caso $Xh^2(p) < 0$ tal ponto é chamado de *dobra invisível*.

Por outro lado, se $p \in X \in \mathfrak{X}^r(M^-)$ é um ponto de dobra tal que $Xh^2(p) < 0$, então p recebe o nome de ponto de *dobra visível*, caso $Xh^2(p) > 0$ tal ponto é chamado de *dobra invisível*.

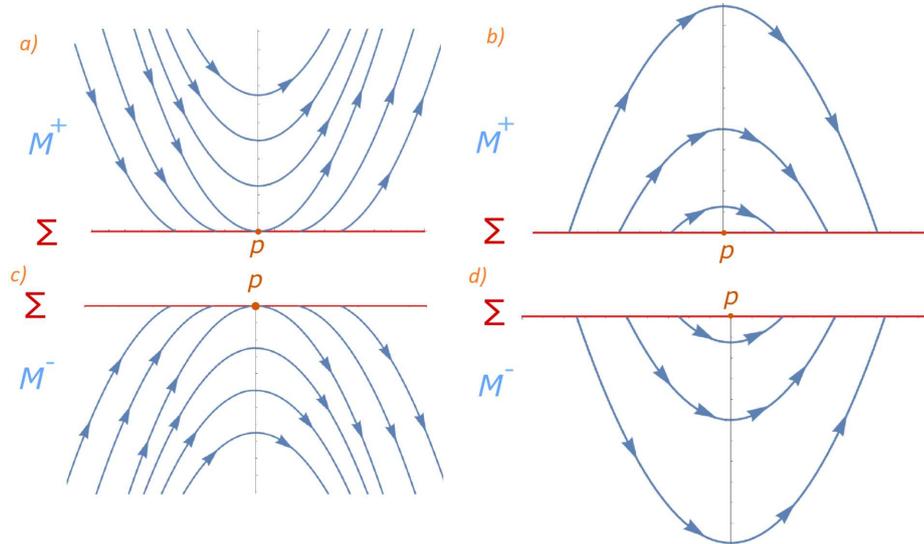


Figura 1.2: Representação dos pontos de dobra visíveis a) e c), e dos pontos de dobra invisíveis b) e d).

Esses conceitos serão de vital importância durante o restante da dissertação.

Capítulo 2

Forma Normal de Vishik

NESSE capítulo será demonstrada a forma normal de Vishik, um resultado importantíssimo que facilita o estudo da estabilidade estrutural em $\Omega^r(M, \Sigma)$. Esse resultado foi provado em [26], porém provaremos apenas para dimensão 3, pois é o caso que estamos interessados em estudar. Além disso, é relativamente fácil a adaptar a demonstração de tal resultado para dimensões maiores. Começaremos provando uma versão mais geral do amplamente conhecido teorema da preparação de Malgrange, que usaremos para demonstrar a forma normal de Vishik.

2.1 Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado

Iremos primeiramente relembrar o Teorema da Preparação de Malgrange que não iremos demonstrar por ser amplamente conhecido da teoria geral, a demonstração pode ser facilmente encontrada no capítulo 7 da referência [11].

Teorema 2.1.1 (Teorema da Preparação de Malgrange). *Sejam*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função \mathcal{C}^∞ tal que

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \dots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(0, 0) \neq 0,$$

e $g(t, x)$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ definida numa vizinhança de $(0, 0)$. Então existem funções

$$q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } r_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}$$

de classe \mathcal{C}^∞ tais que

$$g(t, x) = q(t, x)f(t, x) + \sum_{j=0}^{n-1} t^j r_j(x),$$

numa vizinhança de $(0, 0)$.

As definições e demonstração dessa seção estão em conformidade com o capítulo 3 do livro [3].

Definição 2.1.1. Sejam M uma variedade suave e $p \in M$.

- i) Sejam $f : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}$, tais que U_p e V_p são vizinhanças de p em M , dizemos que $f \sim_p g$ se existe um vizinhança $W_p \subset V_p \cap U_p$ de p , tal que $f|_{W_p} = g|_{W_p}$.
- ii) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave onde U é uma vizinhança de p . Denotamos $[f]_p$ como sendo a classe de equivalência de f em correspondência à relação de equivalência \sim_p , $[f]_p$ recebe o nome de germe de f em p .
- iii) $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ é o conjunto de todos os germes de funções suaves em p . $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ tem estrutura natural de anel herdada de \mathbb{R} ,

$$[f]_p + [g]_p := [g + f]_p,$$

$$[f]_p \cdot [g]_p := [g \cdot f]_p;$$

sendo que $g + f$ e $g \cdot f$ estão definidos em $\text{dom}f \cap \text{dom}g$. Além disso o elemento neutro de tal anel é a função nula $[0]_p$ ($M \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto 0$), e a unidade é a função que associa todo elemento em M a 1 ($M \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto 1$) denotada por $[1]_p$.

Lema 2.1.1 ([3]). O anel $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ possui único ideal maximal $\mathcal{M}_p := \{[f]_p \in \mathcal{C}_p^\infty(M); f(p) = 0\}$.

Demonstração. É claro que \mathcal{M}_p é ideal: se $f, g \in \mathcal{M}_p$ então $[f]_p + [g]_p = [f + g]_p$ e $(f + g)(p) = f(p) + g(p) = 0$, implicando $[f]_p + [g]_p \in \mathcal{M}_p$. Por outro lado se $[h]_p \in \mathcal{M}_p$, então $[f]_p \cdot [h]_p = [f \cdot h]_p$ é tal que $(f \cdot h)(p) = f(p) \cdot h(p) = 0$, inferindo $[f]_p \cdot [h]_p \in \mathcal{M}_p$.

Mostraremos agora a maximalidade \mathcal{M}_p , suponha que exista um ideal \mathcal{I} , tal que $[i]_p \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{M}_p$, então $i(p) \neq 0$, segue que existe uma vizinhança de p tal que a função $1/i(p)$ está bem definida. Porém como \mathcal{I} é ideal

$$[i]_p \cdot \left[\frac{1}{i}\right]_p = [1]_p \in \mathcal{I},$$

o que é um absurdo, logo se $[i]_p \in \mathcal{I}$ então $i(p) = 0$, o que implica que $[i]_p \in \mathcal{M}_p$, logo qualquer ideal \mathcal{I} está contido em \mathcal{M}_p , demonstrando assim a maximalidade. \square

Definição 2.1.2. Um anel que possui um único ideal maximal recebe o nome de *anel local*.

Note que a última linha da demonstração do Lema 2.1.1 implica algo mais forte do que \mathcal{M}_p ser um ideal maximal. Implica que todo ideal \mathcal{I} de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ está contido em \mathcal{M}_p , implicando $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ ser um ideal local.

Lema 2.1.2 ([3]). Seja $\phi : M \rightarrow N$ um mapa suave entre as variedades suaves M e N , então o mapa

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{C}_{\phi(p)}^\infty(Y) &\rightarrow \mathcal{C}_p^\infty(X) \\ [f]_{\phi(p)} &\mapsto [f \circ \phi]_p \end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis. Caso ϕ for difeomorfismo então ϕ^* é isomorfismo de anéis.

Demonstração. É claro que ϕ^* é bem definido e o homomorfismo vem da equação

$$\begin{aligned}\phi^* \left([f]_{\phi(p)} + [h]_{\phi(p)} \cdot [g]_{\phi(p)} \right) &= \phi^* \left([f + h \cdot g]_{\phi(p)} \right) \\ &= [(f + h \cdot g) \circ \phi]_p \\ &= [f \circ \phi]_p + [h \circ \phi]_p \cdot [g \circ \phi]_p \\ &= \phi^*([f]_p) + \phi^*([h]_p) \cdot \phi^*([g]_p).\end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo temos que se $\phi^{-1*} : \mathcal{C}_p^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}_{\phi(p)}^\infty(Y)$ existir, então ϕ^{-1*} é homomorfismo e

$$\phi^* \circ \phi^{-1*}([f]_p) = \phi^*([f \circ \phi^{-1}]_{\phi(p)}) = [f \circ \phi^{-1} \circ \phi]_p = [f]_p,$$

concluindo que $\phi^* \circ \phi^{-1*} = \text{Id}$ e pelo mesmo motivo $\phi^{-1*} \circ \phi^* = \text{Id}$, provando o lema. \square

A partir desse momento, por mera comodidade, iremos omitir os colchetes de $[f]_p$ e denotaremos tal germe apenas por f . Sempre que f for um germe, será citado anteriormente e não haverá confusão.

Definição 2.1.3. Seja \mathcal{R} um anel (comutativo com identidade) e A um grupo abeliano (com respeito à operação denotada por $+$). Dizemos que A é um \mathcal{R} -módulo se existir um mapa de \mathcal{R} no conjunto dos homomorfismos de A e denotamos a ação $r \in \mathcal{R}$ em $a \in A$ por $ra \in A$. As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2)a &= r_1a + r_2a, \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R} \text{ e } \forall a \in A, \\ (r_1r_2)a &= r_1(r_2a), \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R} \text{ e } \forall a \in A, \\ r(a_1 + a_2) &= ra_1 + ra_2, \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R} \text{ e } \forall a \in A, \\ 1 \cdot a &= a, \forall a \in A.\end{aligned}$$

Um \mathcal{R} -módulo A é dito finitamente gerado sobre \mathcal{R} se existir um número finito de elementos $a_1, \dots, a_n \in A$, tais que qualquer elemento $a \in A$ pode ser escrito na forma

$$a = \sum_{i=1}^n r_i a_i, \quad r_i \in \mathcal{R}.$$

Provaremos agora dois resultados importantes para conseguirmos demonstrar o teorema da preparação de Malgrange generalizado.

Lema 2.1.3 (Nakayama, [3]). *Seja \mathcal{R} um anel local comutativo com identidade e seja \mathcal{M} o ideal maximal do anel \mathcal{R} . Seja A um \mathcal{R} -módulo e assumamos que sejam satisfeitos:*

- i) A é finitamente gerado,
- ii) $A = \mathcal{M}A := \{r_1a_1 + \dots + r_ka_k; r_i \in \mathcal{M}, a_i \in A, k \in \mathbb{N}\}$.

Então $A = \{0\}$.

Demonstração. Considere e_1, \dots, e_n um conjunto de geradores de A . Iremos concluir que $e_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Uma vez que $e_k \in \mathcal{M}A = A$, existem $a_1, \dots, a_s \in A$ e $m_1, \dots, m_s \in \mathcal{M}$, tais que

$$e_k = \sum_{i=1}^s m_i a_i.$$

Como e_1, \dots, e_n são gerador de A , cada a_i pode ser escrito na forma

$$a_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} e_j.$$

Portanto

$$\begin{aligned} e_k &= \sum_{i=1}^s m_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^s m_i \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^s m_i r_{ij} \right) e_j, \end{aligned}$$

definindo $s_{kj} = \sum_{i=1}^s m_i r_{ij} \in \mathcal{M}$ temos $e_k = \sum_{j=1}^n s_{kj} e_j$. Portanto conseguimos equação

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{kj} - s_{kj}) e_j = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.1.1)$$

onde δ é a função delta de Kronecker. Perceba agora que se a matriz $(D_{ij}) = (\delta_{ij} - s_{ij})$ for invertível, então o sistema (2.1.1) possui solução única igual a $e_1 = \dots = e_n = 0$ e não a nada a se fazer. Supomos então que D não é invertível. Uma vez que uma matriz D em um anel comutativo com unidade é invertível se, e somente se, $\det(D)$ é invertível no anel, tem então que D não é invertível. Logo $\det(\delta_{ij} - s_{ij})$ não é invertível em \mathcal{R} . Perceba que $\det(\delta_{ij} - s_{ij}) = 1 + s$, com $s \in \mathcal{M}$.

Afirmamos que em um anel local o ideal maximal é exatamente o conjunto dos elementos não invertíveis de \mathcal{R} . De fato, note que se $t \in \mathcal{M}$ então t não pode ser invertível, caso contrário teríamos $1 = tt^{-1} \in \mathcal{M}$. Reciprocamente, suponha a existência de um elemento $t \in \mathcal{R}$ não invertível e não pertencente a \mathcal{M} . Então o ideal gerado por t , $\mathcal{I}_t = \{tr; r \in \mathcal{R}\}$, não está contido em \mathcal{M} , logo $\mathcal{I}_t = \mathcal{R}$, o que implica $1 \in \mathcal{I}_t$ e consequentemente t invertível, gerando um absurdo. Logo $t \in \mathcal{M}$.

Da observação acima e do fato de $\det(\delta_{ij} - s_{ij})$ não ser invertível, temos $\det(\delta_{ij} - s_{ij}) \in \mathcal{M}$, porém como vimos anteriormente $\det(\delta_{ij} - s_{ij}) = 1 + s$ com $s \in \mathcal{M}$, implicando $1 = \det(\delta_{ij} - s_{ij}) - s \in \mathcal{M}$, gerando um absurdo. Logo $\det(\delta_{ij} - s_{ij})$ é invertível, o que implica $e_1 = \dots = e_n = 0$ e o lema está demonstrado. \square

Corolário 2.1.1 ([3]). *Seja A um \mathcal{R} -módulo finitamente gerado. Então $A/\mathcal{M}A$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo \mathcal{R}/\mathcal{M} . Mais ainda, seja $\phi: A \rightarrow A/\mathcal{M}A$ a projeção natural e v_1, \dots, v_n uma base para esse espaço vetorial, escolhendo $e_1, \dots, e_n \in A$, tais que $\phi(e_i) = v_i$. Então e_1, \dots, e_n é um conjunto gerador de A sobre \mathcal{R} .*

Demonstração. Primeiramente perceba que a ação de \mathcal{R} em A induz de modo natural uma ação de \mathcal{R}/\mathcal{M} em $A/\mathcal{M}A$, portanto $A/\mathcal{M}A$ é um módulo sobre o corpo \mathcal{R}/\mathcal{M} , o que é um espaço vetorial. Vejamos agora que $\dim_{\mathcal{R}/\mathcal{M}} A/\mathcal{M}A < \infty$. Sejam a_1, \dots, a_n o conjunto de geradores de A sobre o anel \mathcal{R} e v um elemento de $A/\mathcal{M}A$. Como ϕ é sobrejetora existe $a \in A$, tal que $\phi(a) = v$. Por outro lado, existem $r_1, \dots, r_n \in \mathcal{R}$ tais que

$$a = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n,$$

aplicando ϕ na equação acima

$$v = [r_1]\phi(a_1) + \dots + [r_n]\phi(a_n),$$

sendo que $[r_i]$ é a classe de equivalência de r_i em \mathcal{R}/\mathcal{M} . Portanto temos $\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)$ é um conjunto gerador de $A/\mathcal{M}A$, mostrando assim a finitude da dimensão de tal espaço vetorial.

Para a outra afirmação do corolário, seja v_1, \dots, v_n uma base de $A/\mathcal{M}A$ e $e_1, \dots, e_n \in A$ elementos escolhidos como descrito no enunciado do corolário. Considere B um submódulo de A , gerado por e_1, \dots, e_n , e seja C o quociente A/B . Uma vez que A é finitamente gerado sobre \mathcal{R} , temos que C é finitamente gerado sobre \mathcal{R} . Mais ainda, perceba que $A = B + \mathcal{M}A$. De fato, se $a \in A$, então

$$\phi(a) = [r_1]v_1 + \dots + [r_n]v_n,$$

logo $a = r_1e_1 + \dots + r_ne_n + s$, sendo que $r_1e_1 + \dots + r_ne_n \in B$ e $s \in \mathcal{M}A$. Segue dessa observação que

$$C = A/B = (B + \mathcal{M}A)/B = \mathcal{M}(A/B) = \mathcal{M}C,$$

portanto, pelo lema de Nakayama concluímos que $C = 0$ e conseqüentemente $A = B$. \square

Considere A como sendo um $\mathcal{C}_p^\infty(X)$ -módulo e $\phi : X \rightarrow Y$ com $q = \phi(p)$ um mapa suave. O homeomorfismo ϕ^* nos permite analisar A como $\phi^*(\mathcal{C}_q^\infty(X))$ -módulo.

Teorema 2.1.2 (Teorema Generalizado da Preparação de Malgrange, [3]). *Sejam X e Y variedades suaves e $\phi : X \rightarrow Y$ um mapa suave tal que $\phi(p) = q$. Considere A como sendo um $\mathcal{C}_p^\infty(X)$ -módulo finitamente gerado. Então A é finitamente gerado como $\phi^*(\mathcal{C}_q^\infty(Y))$ -módulo se, e somente se, $A/\phi^*(\mathcal{M}_q(Y))A$ é finitamente gerado como espaço vetorial sobre \mathbb{R} .*

Antes de demonstrar esse resultado provaremos dois lemas auxiliares.

Lema 2.1.4 ([3]). *Seja $\pi : X \rightarrow Y$ uma submersão com $\dim X = n = \dim Y + 1$ e $q = \pi(p)$. Seja A um \mathcal{C}_p^∞ -módulo. Se $V = A/\pi^*(\mathcal{M}_q)A$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} , então A é finitamente gerado como $\pi^*(\mathcal{C}_q^\infty)$ -módulo.*

Demonstração. Uma vez que tal resultado é local, fazendo uma escolha adequada de cartas locais chegamos à conclusão que é suficiente mostrar para caso em que $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^{n-1}$, $p = q = 0$ e $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é dada pela projeção $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$. Seja $\psi : A \rightarrow V$ a projeção canônica e escolha $e_1, \dots, e_n \in A$ de forma que $\{\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)\}$ é uma base de V .

Note que e_1, \dots, e_n gera A como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulo. Para ver isso primeiramente note que

$$\pi^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n-1})) \subset \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$$

e portanto temos uma sobrejeção natural $\eta : A/\pi^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n-1}))A \rightarrow A/\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)A$, implicando que o conjunto $\{\eta \circ \psi(e_1), \dots, \eta \circ \psi(e_n)\}$ é gerador de $A/\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)A$. Aplicando o Corolário 2.1.1 conseguimos que os elementos e_1, \dots, e_n geram A como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulo.

Uma vez que $\{\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)\}$ é uma base de V , vemos que dado $a \in A$, tal elemento deve ser da forma

$$a = \sum_{i=1}^m c_i e_i + \bar{e}, \quad (2.1.2)$$

com $\bar{e} \in \pi^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n-1})A)$. Então $\bar{e} = \sum_{j=1}^m g_j a_j$, com $g_j \in \pi^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n-1}))$ e $a_j \in A$, uma vez que provamos que e_1, \dots, e_n geram A como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulo, temos $a_j = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, com $h_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, $\bar{e} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m g_j h_j \right) e_i$. Aplicando em 2.1.2 e definindo $f_i = \sum_{j=1}^m g_j h_j$, concluímos que todo elemento de a pode ser escrito na forma

$$a = \sum_{i=1}^n (c_i e_i + f_i e_i), \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ e } f_i \in \pi^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n-1}) \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)). \quad (2.1.3)$$

Pela equação (2.1.3) existem c_i e f_{ij} pertencente aos conjuntos apropriados tais que

$$x_1 e_i = \sum_{j=1}^n (c_{ij} + f_{ij}) e_j,$$

usando o delta de Kronecker conseguimos então o seguinte sistema linear nas variáveis e_1, \dots, e_n

$$\sum_{j=1}^n (x_1 \delta_{ij} - c_{ij} - f_{ij}) e_j = 0.$$

Defina $P(x_1, \dots, x_n)$ como sendo o determinante da matriz $(x_1 \delta_{ij} - c_{ij} - f_{ij})$. Pela Regra de Cramer percebemos que $P e_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mais ainda

$$f_{ij}(x_1, 0, \dots, 0) = 0.$$

uma vez que $f_{ij} \in \pi^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n-1})) \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e portanto $P(x_1, 0, \dots, 0) = \det(x_1 \delta_{ij} - c_{ij})$.

Como $\det(x_1 \delta_{ij} - c_{ij})$ é um polinômio de ordem $\leq n$, existe $k \leq n$ tal que $P(x_1, 0, \dots, 0) = x_1^k g(x_1)$ e $g(0) \neq 0$, usando a equação (2.1.3) temos $a = \sum (c_i e_i + f_i e_i)$, aplicando o Teorema da Preparação de Malgrange em f_i e P obtemos

$$f_i = Q_i P + \sum_{j=0}^{k-1} R_{ij}(x_2, \dots, x_n) x_1^j.$$

Uma vez que $P e_i = 0$, temos que

$$f_i e_i = \sum_{j=0}^{k-1} R_{ij} x_1^j e_i$$

e portanto

$$a = \sum_{i=1}^n \left(c_i e_i + \sum_{j=1}^{k-1} R_{ij} x_1^j e_i \right).$$

Segue que A é gerado pelos nk elementos $e_1, \dots, e_n, x_1 e_1, \dots, x_1^k e_n$ como $\pi^*(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))$ -módulo uma vez que cada $R_{ij} \in \pi^*(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))$. □

Lema 2.1.5 ([3]). *Sejam $\phi : X \rightarrow Y$ uma imersão com $q = \phi(p)$ e A um $\mathcal{C}_p^\infty(X)$ -módulo finitamente gerado. Então A é um $\phi^*(\mathcal{C}_q(Y))$ -módulo finitamente gerado.*

Demonstração. A demonstração desse lema é bem fácil em comparação com o anterior, note que o mapa $\phi^* : \mathcal{C}_q^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{C}_p^\infty(X)$ é sobrejetor. Utilizando a forma local de imersão e cartas convenientes, é suficiente mostrar para caso onde $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^{n+k}$, $p = q = 0$ e

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Seja $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e defina $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+k})$ por $g(x, y) = f(x)$, temos então

$$\phi^*(g)(x) = g \circ \phi(x) = g(x, 0) = f(x),$$

mostrando assim a sobrejetividade e demonstrando o Lema. \square

Com esses dois lemas podemos finalmente demonstrar o Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado.

Demonstração (Teorema 2.1.2). Defina primeiramente

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : X &\rightarrow X \times Y \\ x &\mapsto (x, \phi(x)), \end{aligned}$$

usando cartas convenientes podemos assumir que $X = \mathbb{R}^n$ e $p = 0$. Seja

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{R}^i \times Y &\rightarrow \mathbb{R}^{i-1} \times Y \\ (x_1, \dots, x_i, y) &\mapsto (x_2, \dots, x_i, y), \end{aligned}$$

segue que localmente $\phi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n \circ \tilde{\phi}$. Uma vez que $\tilde{\phi}$ é uma imersão, o Lema 2.1.5 nos diz que A é um $\tilde{\phi}^*(\mathcal{C}_{(0,q)}(\mathbb{R}^{n-1} \times Y))$ -módulo finitamente gerado. Agora assumamos que $A/\phi^*(\mathcal{M}_0)A$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Uma vez que

$$\phi^*(\mathcal{M}_0) \subset \tilde{\phi}^*(\mathcal{M}_{(0,q)}(\mathbb{R}^{n-1} \times Y)),$$

existe uma sobrejeção natural de $A/\phi^*(\mathcal{M}_0)A \rightarrow \tilde{\phi}^*(\mathcal{M}_{(0,q)}(\mathbb{R}^{n-1} \times Y))$, implicando que $\tilde{\phi}^*(\mathcal{M}_{(0,q)}(\mathbb{R}^{n-1} \times Y))$ é espaço vetorial de dimensão finita. Então as condições do Lema 2.1.4 são satisfeitas para π_n e conseqüentemente A é um $\pi_n^* \tilde{\phi}^*(\mathcal{M}_{(0,q)}(\mathbb{R}^{n-1} \times Y))$ -módulo finitamente gerado. Com uma indução simples no índice dos mapas π_k concluímos que A é um $\phi^*(\mathcal{C}_q^\infty(Y))$ -módulo finitamente gerado, demonstrando assim o teorema. \square

Corolário 2.1.2 (Corolário do Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado,[3]). *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^{k-1} \varphi}{\partial t^{k-1}}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(0, 0) \neq 0,$$

então existem germes $a_1, \dots, a_n, b \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tais que

$$t^k + \sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i(\varphi(t, x), x) = b(\varphi(t, x), x), \quad \text{em uma vizinhança de } (0, 0).$$

Demonstração. Sejam $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi_2(t, x) = x$, $f = (\varphi, \pi_2) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $A = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Primeiramente perceba que $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n) = (t, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, onde $(f_1, \dots, f_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ é denotado como sendo o menor ideal de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ que contém f_1, \dots, f_n . Para ver isso tome $g(t, x) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{n+1})$. Então $g(0, 0) = 0$, implicando

$$\begin{aligned} g(t, x) &= g(t, x) - g(0, 0) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} g(st, sx) ds \\ &= \int_0^1 t \frac{\partial g}{\partial t}(st, sx) + x_i \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(st, sx) ds \\ &= t \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(st, sx) ds \right) + \sum_{i=1}^n x_i \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(st, sx) ds \right), \end{aligned}$$

o que infere $g \in (t, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e portanto

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n) \subset (t, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Da maximalidade de $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$, temos a igualdade dos conjuntos.

Note que $A = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ pode ser visto como um $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ -módulo, sendo finitamente gerado pelo elemento $1 \in A$. Por meio da aplicação f , A também pode ser analisado como $f^*\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ -módulo. Da igualdade anterior temos

$$f^*(\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)) = f^*((t, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})) = (\varphi(t, x), x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Veamos agora que $(\varphi(t, x), x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) = (t^k, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Relembre que pelo Teorema da Preparação de Malgrange convencional, em uma vizinhança da origem existem germes suaves c, a_1, \dots, a_n com $a_i(0) = 0$ e $c(0, 0) \neq 0$, tais que

$$\varphi(t, x) = c(t, x) \left(t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \dots + a_0(x) \right).$$

A equação acima garante que

$$\varphi(t, x) \in (t^k, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ e } t^k \in (\varphi(t, x), x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),$$

mostrando a igualdade dos ideais.

Por fim,

$$\frac{A}{f^*\mathcal{M}_0A} = \frac{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}{(\varphi(t, x), x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} = \frac{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}{(t^k, x_1, \dots, x_n)\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})},$$

e o espaço acima tem dimensão k , pois o conjunto

$$\left\{ [1]_0 + f^*\mathcal{M}_0A, [t]_0 + f^*\mathcal{M}_0A, \dots, [t^{k-1}]_0 + f^*\mathcal{M}_0A \right\}$$

é base. Segue do Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ é um $f^*\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ -módulo finito com conjunto gerador $\{[1]_0, [t]_0, \dots, [t^{k-1}]_0\}$, portanto como $t^k \in A$, existem germes $a_1, \dots, a_n, b \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tais que

$$t^k + \sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i(\varphi(t, x), x) = b(\varphi(t, x), x).$$

□

O corolário acima será fundamental para a demonstração da Forma Normal de Vishik.

2.2 Forma Normal de Vishik

Um primeiro passo para entender a dinâmica local de um campo suave por partes $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ é estudar o comportamento local dos campos $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$. Dado um ponto $p \in M^\pm$ temos duas possibilidades, $p \in \text{Int}(M^\pm)$ ou $p \in \partial M^\pm = \Sigma$.

Caso $p \in \text{Int}(M^\pm)$ então a dinâmica local é amplamente conhecida da teoria clássica.

Resta então entender o caso em que $p \in \Sigma$. Concentrar-nos-emos nos campos $X \in \mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$.

Definição 2.2.1. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$. Se existir um homeomorfismo, $\varphi : U_p \mapsto V_{\varphi(p)}$, sendo que U_p e $V_{\varphi(p)}$ vizinhanças de p e $\varphi(p)$, respectivamente, que mapeia órbitas de X em órbitas de Y , respeitando a orientação das órbitas e satisfazendo $\varphi(U_p \cap \Sigma) = V_{\varphi(p)} \cap \Sigma$; Então X e Y são chamados de Σ -equivalentes em p e $\varphi(p)$.

Proposição 2.2.1. Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $\varphi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, definindo $Y = \varphi_* X$ e $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $f = h \circ \varphi^{-1}$

$$X^n h(x) = Y f^n(\varphi(x)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar tal resultado por indução em n . Para o caso $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} Y f(\varphi(x)) &= \nabla f_{\varphi(x)} Y(\varphi(x)) \\ &= \nabla h_x \cdot d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \cdot d\varphi_x X(x) \\ &= \nabla h_x \cdot X(x) = Xh(x). \end{aligned}$$

Supondo válido para n , i.e. $X^n h(x) = Y f^n(\varphi(x))$, então

$$\begin{aligned} Y^{n+1} f(\varphi(x)) &= \nabla (Y^n f)_{\varphi(x)} Y(\varphi(x)) \\ &= \nabla (X^n f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} Y(\varphi(x)) \\ &= \nabla (X^n f)_x \cdot d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \cdot d\varphi_x X(x) \\ &= \nabla (X^n f)_x X(x) = Xh^{n+1}(x), \end{aligned}$$

demonstrando assim a proposição. □

Relembre que $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $h^{-1}(0) = \Sigma$, sendo 0 valor regular de h .

Teorema 2.2.1. Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in \Sigma$ tal que $Xh(p) \neq 0$. Então existe uma carta (φ, U) em torno de p tal que $\varphi_* X = (1, 0, 0)$ e $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ é escolhido de forma que $\varphi_1 = 0$ é a equação da fronteira de $\Sigma \cap U$.

Demonstração. Seja (ψ, V) uma carta de p em Σ de forma que $Xh(q) \neq 0, \forall q \in V$ e $\psi(p) = 0$, definimos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \psi(V) &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, \psi^{-1}(x)), \end{aligned}$$

onde ϕ é o fluxo do campo X . Segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, 0) = X(p)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in T_p \Sigma.$$

uma vez que $X(p) \notin T_p \Sigma$ (pois $Xh(p) \neq 0$), Φ é difeomorfismo local e existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{R}^n tal que Φ é invertível. Definindo então $\zeta = \Phi^{-1}|_{\Phi(U)}$, é claro que $\zeta_* X(q) = (1, 0, 0)$ e $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ é tal que $\zeta_1 = 0$ é a equação da fronteira, demonstrando o teorema. \square

Iremos agora demonstrar as Formas Normais de Vishik para o caso tridimensional, resultado que torna possível o estudo da teoria de estabilidade estrutural local. As demonstrações dos próximos dois teoremas são baseadas nas técnicas do artigo [26].

Teorema 2.2.2 (Forma normal de Vishik para pontos de dobra, adaptado de [26]). *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra, então existe uma carta (ψ, U) em torno de p tal que tal que*

$$\psi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ é tal que, $\psi_1 = 0$ é a equação da fronteira $\Sigma \cap U$.

Demonstração. Primeiramente, como $X(p) \in T_p \Sigma$, usando o Teorema do Fluxo Tubular é possível encontrar coordenadas $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ de forma que $\phi_* X(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e $\phi(p) = 0$. Portanto

$$X(0) = d\phi_0^{-1}(1, 0, 0) = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_1}(0) \implies \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_1}(0) \in T_p \Sigma,$$

logo definindo $f := h \circ \phi^{-1}$ temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \nabla h_p \cdot \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_1}(0) = 0.$$

Como 0 é imagem inversa de valor regular podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(0) \neq 0,$$

e pelo teorema da função implícita existe única função $\Phi(x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2)) = 0,$$

sendo assim, em decorrência da Proposição 2.2.1, $(x_1, x_2, x_3) \in \phi(U \cap \Sigma)$ se, e somente se,

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2).$$

Como o fato de p ser ponto de dobra do campo X não depende da função h escolhida para parametrizar Σ , podemos então, assumir sem perda de generalidade que

$$f(x_1, x_2, x_3) = h \circ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \Phi(x_1, x_2).$$

uma vez que $X = (1, 0, 0)$ é tangente a $\phi(U \cap \Sigma)$, temos que $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(0) = 0$.

Fazendo a mudança de variáveis

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(0)x_2,$$

e definindo

$$\varphi(y, z) = \Phi(y, z) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(0)y,$$

temos que ,localmente nas novas coordenadas,

$$f(x, y, z) = z - \varphi(x, y),$$

e portanto a equação da fronteira é dada por

$$z = \varphi(x, y).$$

Percebendo que nessas coordenadas X continua sendo descrito por $(1, 0, 0)$, temos que

$$0 = \nabla f(0) \cdot (1, 0, 0) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0), -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0), 1 \right) \cdot (1, 0, 0) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0).$$

Além disso, usando que 0 é ponto de dobra e repetindo a mesma conta anterior, chegamos à conclusão que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) \neq 0.$$

Uma vez que φ satisfaz

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) \neq 0,$$

pelo corolário do teorema da preparação de Malgrange generalizado existem funções suaves, $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$x^2 + x \cdot a(y, \varphi(x, y)) = b(y, \varphi(x, y)), \quad \text{em uma vizinhança da origem.} \quad (2.2.1)$$

Observe que

$$\left. \frac{\partial b(y, \varphi(x, y))}{\partial x} \right|_{(x,y)=0} = \frac{\partial b}{\partial z}(0, 0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 0$$

por outro lado,

$$\frac{\partial b(y, \varphi(x, y))}{\partial x} = 2x + a(y, \varphi(x, y)) + x \cdot \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$$

e, calculando em $(x, y) = (0, 0)$, concluímos que $a(0, 0) = 0$. Além disso é claro que

$$\left. \frac{\partial b(y, z)}{\partial y} \right|_{(x,y)=0} = 0,$$

então, calculando a segunda derivada de b em $(0, 0)$, temos que

$$2 = \frac{\partial^2 b(y, \varphi(x, y))}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)=0} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}(0, 0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \right)^2 + \frac{\partial b}{\partial z}(0, 0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) \neq 0,$$

o que implica

$$\frac{\partial b(y, z)}{\partial z} \Big|_{(x,y)=0} \neq 0.$$

Considere a mudança de variáveis

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = b(y, z).$$

Por comodidade e para que não seja necessária a criação de novas coordenadas a cada passo, depois da mudança de coordenadas (x, y, z) vão se referir às novas coordenadas do sistema. Ou seja, após utilizar $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ para definir as novas coordenadas com base nas antigas, iremos nos referir a essas mesmas coordenadas simplesmente por (x, y, z) .

Nessas coordenadas, X continua na forma $(1, 0, 0)$. Como $F(x, y, z) = (x, y, b(y, z))$ é difeomorfismo local, sua inversa G tem que ser escrita na forma

$$G(x, y, z) = (x, y, u(y, z)),$$

além disso,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= G \circ F(x, y, z) = G(x, y, b(y, z)) = (x, y, u(y, b(y, z))) \\ &\Rightarrow z = u(y, b(y, z)). \end{aligned}$$

A nova equação da fronteira é dada por

$$u(y, z) = \varphi(x, y).$$

Note que tal condição implica

$$(x, y, u(y, z)) = (x, y, \varphi(x, y)).$$

Aplicando F nos dois lados da equação acima, temos

$$(x, y, z) = F(x, y, \varphi(x, y)) = (x, y, b(x, y, \varphi(x, y))),$$

seguindo que a equação da fronteira é dada por

$$z = \bar{\varphi}(x, y) := b(y, \varphi(x, y)).$$

Pela equação (2.2.1),

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x, y) &= x^2 + x \cdot a(y, \varphi(x, y)) \\ &= x^2 + x \cdot a(y, u(y, b(y, \varphi(x, y)))) \\ &= x^2 + x \cdot a(y, u(y, \bar{\varphi}(x, y))). \end{aligned}$$

Definindo a função suave $d(x, y) = a(y, u(y, x))$, conseguimos

$$\bar{\varphi}(x, y) = x^2 + x \cdot d(y, \bar{\varphi}(x, y)),$$

sendo $d(0,0) = 0$. Além disso, é imediato ver que $\bar{\varphi}_y(0,0) = 0$, $\bar{\varphi}_x(0,0) = 0$.

Fazemos agora a mudança de coordenadas

$$\tilde{x} = x + \frac{d(y,z)}{2}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z,$$

mais uma vez X continua na forma $(1,0,0)$ e a equação da fronteira é dada por

$$\begin{aligned} z &= \bar{\varphi}\left(x - \frac{d(y,z)}{2}, y\right) \\ &= \left(x - \frac{d(y,z)}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{d(y,z)}{2}\right) \cdot d\left(y, \bar{\varphi}\left(x - \frac{d(y,z)}{2}, y\right)\right) \\ &= \left(x - \frac{d(y,z)}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{d(y,z)}{2}\right) \cdot d(y,z) \\ &= x^2 - d(y,z) \cdot x + \frac{d(y,z)^2}{4} + d(y,z) \cdot x - \frac{d(y,z)^2}{2} \\ &= x^2 - \frac{d(y,z)^2}{4}. \end{aligned}$$

Pela mudança de variáveis

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z + \frac{d(y,z)^2}{4},$$

temos que novamente o campo continua na forma $(1,0,0)$, porém a equação da fronteira se torna

$$z = x^2.$$

A mudança final de coordenadas será

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}(x^2 - z), \quad \tilde{y} = x, \quad \tilde{z} = y.$$

Note que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \frac{2x \cdot \dot{x} + \dot{z}}{2} = x = \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} &= \dot{x} = 1, \\ \dot{\tilde{z}} &= \dot{y} = 0. \end{aligned}$$

Portanto o campo foi colocado na forma $(y,1,0)$ e a equação da fronteira é $x = 0$. Provando assim o teorema. \square

Teorema 2.2.3 (Forma normal de Vishik para cúspides, [26]). *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de cúspide, então existe uma carta (ψ, U) em torno de p tal que*

$$\psi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ é tal que $\psi_1 = 0$ é a equação da fronteira $\Sigma \cap U$.

Demonstração. Primeiramente, como $X(p) \in T_p\Sigma$, usando o Teorema do Fluxo Tubular podemos encontrar coordenadas $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ de forma que $\phi_*X(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e $\phi(p) = 0$. Portanto,

$$X(0) = d\phi_0^{-1}(1, 0, 0) = \frac{\partial\phi^{-1}}{\partial x_1}(0) \implies \frac{\partial\phi^{-1}}{\partial x_1}(0) \in T_p\Sigma.$$

definindo $f := h \circ \phi^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \nabla h_p \cdot \frac{\partial\phi^{-1}}{\partial x_1}(0) = 0.$$

Como 0 é imagem inversa de valor regular podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(0) \neq 0,$$

e então pelo teorema da função implícita existe única função $\Phi(x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2)) = 0.$$

Sendo assim, pela Proposição 2.2.1, $(x_1, x_2, x_3) \in \phi(U \cap \Sigma)$ se e somente se

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2).$$

como o fato de p ser ponto de cúspide do campo X não depende da função h escolhida para parametrizar Σ , podemos então, assumir sem perda de generalidade que

$$f(x_1, x_2, x_3) = h \circ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \Phi(x_1, x_2),$$

e uma vez que $X = (1, 0, 0)$ é tangente a $\phi(U \cap \Sigma)$, temos que $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(0) = 0$.

Considere a mudança de variáveis

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3 - \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(0)x_2.$$

Definimos

$$\varphi(y, z) = \Phi(y, z) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}(0)y,$$

de forma que nas novas coordenadas

$$f(x, y, z) = z - \varphi(x, y),$$

e portanto a equação da fronteira é dada por

$$z = \varphi(x, y).$$

Note que nessas novas coordenadas X continua sendo escrito por $(1, 0, 0)$, resultando

$$0 = \nabla f(0) \cdot (1, 0, 0) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0), -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0), 1 \right) \cdot (1, 0, 0) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0).$$

Além disso, usando que 0 é uma cúspide e fazendo a mesma conta anterior chegamos à conclusão que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) = 0 \text{ e } \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(0) \neq 0.$$

Recordando o fato de p ser ponto de cúspide, notamos que

$$\{df(0), dXf(0), dX^2f(0)\}$$

é linearmente independente e portanto a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) & 1 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0) & 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(0) & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(0) & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível, implicado que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0) \neq 0.$$

Uma vez que φ satisfaz

$$\varphi(0) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) = 0 \text{ e } \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(0) \neq 0.$$

Pelo corolário do teorema da preparação de Malgrange generalizado, existem funções suaves $a_1, a_2, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$x^3 + x^2 \cdot a_2(y, \varphi(x, y)) + x \cdot a_1(y, \varphi(x, y)) = b(y, \varphi(x, y)). \quad (2.2.2)$$

Fazendo as mesmas contas do caso anterior facilmente se, conclui-se que

$$\begin{aligned} a_1(0, 0) &= 0, \\ a_2(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial b}{\partial y}(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial b}{\partial z}(0, 0) &\neq 0, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^3 b(y, \varphi(y, x))}{\partial x^3} \right|_{(x,y,z)=0} = 6 \neq 0.$$

Fazemos agora a mudança de variáveis

$$\tilde{x} = x, \tilde{y} = y, \tilde{z} = b(y, z).$$

Novamente, por comodidade e para que não seja necessária a criação de novas coordenadas a cada passo, depois da mudança de coordenadas, (x, y, z) vão se referir as novas coordenadas do sistema. Ou seja, após utilizar $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ para definir às novas coordenadas com base nas antigas, iremos nos referir a essas mesmas coordenadas simplesmente por (x, y, z) .

Nessas coordenadas, X continua na forma $(1, 0, 0)$. Como $F(x, y, z) = (x, y, b(y, z))$ é difeomorfismo local, sua inversa G tem que ser escrita na forma $G(x, y, z) = (x, y, u(y, z))$. Além disso

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= G \circ F(x, y, z) = G(x, y, b(y, z)) = (x, y, u(y, b(y, z))) \\ &\Rightarrow z = u(y, b(y, z)).\end{aligned}$$

A nova equação da fronteira é dada pela equação

$$u(y, z) = \varphi(x, y).$$

Note que tal condição implica

$$(x, y, u(y, z)) = (x, y, \varphi(x, y)),$$

aplicando F dos dois lados temos

$$(x, y, z) = F(x, y, \varphi(x, y)) = (x, y, b(x, y, \varphi(x, y)))$$

segue que a equação da fronteira é dada por

$$z = \bar{\varphi}(x, y) := b(y, \varphi(x, y)).$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial b}{\partial z}(y, \varphi(x, y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial b}{\partial z}(y, \varphi(x, y)) \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial b}{\partial z}(y, \varphi(x, y)) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y),\end{aligned}$$

então aplicando em $(x, y) = (0, 0)$,

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial x}(0) = \frac{\partial b}{\partial z}(0) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(0) \neq 0.$$

Utilizando a equação (2.2.2)

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x, y) &= x^3 + x^2 \cdot a_2(y, \varphi(x, y)) + x \cdot a_1(y, \varphi(x, y)) \\ &= x^3 + x^2 \cdot a_2(y, \varphi(x, y)) + x \cdot a_1(y, u(y, b(y, \varphi(x, y)))) \\ &= x^3 + x^2 \cdot a_2(y, u(y, \bar{\varphi}(x, y))) + x \cdot a_1(y, u(y, \bar{\varphi}(x, y)))\end{aligned}$$

e definindo as funções suaves $d_i(x, y) = a_i(y, u(y, x))$, conseguimos a relação

$$\bar{\varphi}(x, y) = x^3 + x^2 \cdot d_2(y, \bar{\varphi}(x, y)) + x \cdot d_1(y, \bar{\varphi}(x, y)),$$

sendo que $d_i(0, 0) = 0$. Um cálculo imediato utilizando a equação acima nos mostra que

$$\frac{\partial d_1}{\partial y}(0) = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y \partial x}(0) \neq 0.$$

Além disso é imediato ver que $\bar{\varphi}_y(0, 0) = 0$, $\bar{\varphi}_x(0, 0) = 0$ e $\bar{\varphi}_{xx}(0, 0) = 0$.

Fazemos agora a mudança de coordenadas

$$\tilde{x} = x + \frac{d_2(y, z)}{3}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z,$$

e mais uma vez o campo X continua na forma $(1, 0, 0)$. A equação da fronteira é dada por

$$\begin{aligned} z &= \bar{\varphi} \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3}, y \right) \\ &= \left(x - \frac{d_2(y, z)}{2} \right)^3 + \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3} \right)^2 \cdot d_2 \left(y, \bar{\varphi} \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3}, y \right) \right) + \\ &+ \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3} \right) \cdot d_1 \left(y, \bar{\varphi} \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3}, y \right) \right) \\ &= \left(x - \frac{d_2(y, z)}{2} \right)^3 + \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3} \right)^2 \cdot d_2(y, z) + \left(x - \frac{d_2(y, z)}{3} \right) \cdot d_1(y, z) \\ &= x^3 + x \left(d_1(y, z) - \frac{d_2(y, z)^2}{3} \right) + \frac{2d_2(y, z)^3}{27}. \end{aligned}$$

Pela mudança de variáveis

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = d_1(y, z) - \frac{d_2(y, z)^2}{3}, \quad \tilde{z} = z - \frac{2d_2(y, z)^3}{27}.$$

Temos que novamente o campo continua na forma $(1, 0, 0)$, porém a equação da fronteira se torna

$$z = y \cdot x + x^3.$$

A mudança final de coordenadas será

$$\tilde{x} = \frac{1}{6} (x^3 + y \cdot x - z), \quad \tilde{y} = \frac{x^2}{2} + \frac{y}{3}, \quad \tilde{z} = x.$$

Note que

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{3x^2 \cdot \dot{x} + x \cdot \dot{y} + \dot{x} \cdot y - \dot{z}}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{y}{6} = \tilde{y},$$

$$\dot{\tilde{y}} = x \cdot \dot{x} + \frac{\dot{y}}{3} = x = \tilde{z},$$

$$\dot{\tilde{z}} = \dot{y} = 1.$$

Portanto o campo fica na forma $(y, z, 1)$ e a equação da fronteira é $x = 0$, provando assim o teorema. \square

N.B. 2.2.1. *Os Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 são válidos, utilizando a mesma demonstração, se trocarmos $X \in \mathfrak{X}(M^\pm)$ por $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Mostramos então que, se $X \in \mathfrak{X}_S(M)$ e $p \in \Sigma$, então existe uma carta (φ, U) em torno de p , tal que $\varphi_* X$ é colocado em uma das formas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

e de forma que a fronteira seja dada por $x = 0$.

Para fins do estudo da dinâmica, é esperado que $U \cap M^+$ seja levado via φ para um aberto \mathbb{H}^3 e $U \cap M^-$ seja levado via φ para um aberto $-\mathbb{H}^3$. Para correspondência fazemos a mudança de variáveis $\tilde{\varphi}_1 = \delta\varphi$, onde $\delta = \text{sgn}(X^n h(p))$, para o menor $n > 1$ tal que $X^n h(p) \neq 0$. Nessa nova coordenada, $\varphi_* X$ fica na forma

$$\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \delta y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

dando origem ao seguinte teorema:

Teorema 2.2.4 (Forma Normal de Vishik). *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$, então:*

1. *Se p é um ponto de tangência regular, então existe uma carta (φ, U) de M^\pm em torno de p tal que $\varphi(U) = V^\pm$, $V^\pm \subset \pm\mathbb{H}^3$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap \Sigma) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ e*

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sendo $\delta = \text{sgn}(Xh(p))$.

2. *Se p é um ponto de dobra, então existe uma carta (φ, U) de M^\pm em torno de p , tal que $\varphi(U) = V^\pm$, $V^\pm \subset \pm\mathbb{H}^3$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap \Sigma) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ e*

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \delta y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sendo $\delta = \text{sgn}(X^2 h(p))$.

3. *Se p é uma cúspide, então existe uma carta (φ, U) de M^\pm em torno de p tal que $\varphi(U) = V^\pm$, $V^\pm \subset \pm\mathbb{H}^3$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap \Sigma) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ e*

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \delta y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

sendo $\delta = \text{sgn}(Xh^3(p))$.

Consequentemente, conseguimos caracterizar a dinâmica local de qualquer campo pertencente a $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$.

Demonstraremos agora outras formas normais para os campos em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$, que é menos geral que a forma normal de Vishik, porém possui algumas vantagens que serão exploradas em teoremas futuros.

Teorema 2.2.5. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$, sendo p um ponto de dobra, então existe uma carta (φ, U) em torno de p em M^\pm , tal que $h \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = x$ e*

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ X^2 h \circ \varphi^{-1}(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y, z) \in \varphi(U).$$

Demonstração. Primeiramente, pela forma normal de submersão existe uma carta (φ, V) , em torno de p , tal que $\pi_1(x, y, z) = h \circ \phi^{-1}(x, y, z) = x$ e $\phi(p) = 0$. Definindo $Y = \phi_*X = (Y_1, Y_2, Y_3)$, temos pelo fato de p ser ponto de dobra, juntamente com o a Proposição 2.2.1 que

$$Y_1(0) = Y\pi_1(0) = Xh(0) = 0.$$

Como $Y(0) \neq 0$, então $Y_2(0) \neq 0$ ou $Y_3(0) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $Y_2(0) \neq 0$. Considere o seguinte mapa ψ , definido em uma vizinhança da origem por

$$\psi(x, y, z) = \Phi(y, (x, 0, z)),$$

onde Φ é o fluxo de Y . É claro que ψ é difeomorfismo local em $(0, 0, 0)$, com $d\psi_q X(q) = (0, 1, 0)$. Definindo

$$f(x, y, z) = \pi_{(2,3)}\Phi(y, (x, 0, z)),$$

onde $\pi_{(2,3)}$ é a projeção nas duas últimas coordenadas, temos que

$$\theta(x, y, z) = (x, f(x, y, z))$$

é um difeomorfismo local na origem, pois

$$\begin{aligned} d\theta_0(1, 0, 0) &= (1, 0, 0), \\ d\theta_0(Y(0)) &= (Y_1(0), 1, 0), \\ d\theta_0(0, 0, 1) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

e é imediato perceber que

$$\theta_*Y = \begin{pmatrix} Y_1 \circ \theta^{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais ainda, $\pi_1 \circ \theta^{-1}(x, y, z) = x$ é satisfeito. Redefinimos Y como sendo θ_*Y , apenas para não carregar a notação.

Usando mais uma vez o fato de p ser ponto de dobra e a Proposição 2.2.1, concluímos que

$$\nabla Y_1(0) \cdot Y(0) = Y\pi_1^2(0) \neq 0.$$

Da equação acima retiramos

$$0 \neq \frac{\partial Y_1}{\partial x}(0)Y_1(0) + \frac{\partial Y}{\partial y}(0) = \frac{\partial Y}{\partial y}(0).$$

Assumimos sem perda de generalidade que $\frac{\partial Y_1}{\partial y}(0) \neq 0$. Definindo o difeomorfismo local $\zeta(x, y, z) = (x, Y_1(x, y, z), z)$, temos

$$\begin{aligned} \zeta_*Y(q) &= \begin{pmatrix} y \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x}(\zeta^{-1}(q))Y_1(0) + \frac{\partial Y}{\partial y}(\zeta^{-1}(q)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y \\ Y\pi_1^2(\zeta^{-1}(q)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e continuamos tendo $\pi_1 \circ \zeta^{-1}(x, y, z) = x$. Composto os difeomorfismos anteriores e chamando tal composição de φ e a interseção dos abertos de U . Conseguimos que (φ, U) uma carta tal que

$$\varphi_*X(q) = \begin{pmatrix} y \\ X^2h \circ \varphi^{-1}(q) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Teorema 2.2.6. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$, sendo p um ponto de cúspide. Então, existe uma carta (φ, U) em torno de p em M^\pm , sendo $h \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = x$ e*

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ X^2h \circ \varphi^{-1}(x, y, z) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y, z) \in \varphi(U).$$

Demonstração. A demonstração é similar à do teorema anterior, com mínimas adaptações. Novamente pela forma local de submersão existe uma carta (ϕ, V) em torno de p tal que $\pi_1(x, y, z) = h \circ \phi^{-1}(x, y, z) = x$ e $\phi(p) = 0$. Definindo $Y = \phi_*X = (y, Y_2, Y_3)$, temos pelo fato de p ser ponto de cúspide, juntamente com a Proposição 2.2.1, temos que

$$Y_1(0) = Y\pi_1(0) = Xh(0) = 0.$$

Como $Y(0) \neq 0$, então $Y_2(0) \neq 0$ ou $Y_3(0) \neq 0$. Podemos supor sem perda de generalidade, que $Y_3(0) \neq 0$. Considere o mapa definido em uma vizinhança da origem

$$\psi(x, y, z) = \Phi(z, (x, y, 0)),$$

onde Φ é o fluxo de Y . É claro que ψ é difeomorfismo local em $(0, 0, 0)$, com $d\psi_qX(q) = (0, 0, 1)$. Definindo

$$f(x, y, z) = \pi_3\Phi(y, (x, 0, z)),$$

onde π_3 é a projeção na última coordenada, temos que

$$\theta(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$$

é um difeomorfismo local na origem pois

$$\begin{aligned} d\theta_0(1, 0, 0) &= (1, 0, 0), \\ d\theta_0(0, 1, 0) &= (0, 1, 0), \\ d\theta_0(Y(0)) &= (Y_1(0), Y_2(0), 1) \end{aligned}$$

e é imediato perceber que

$$\theta_*Y = \begin{pmatrix} Y_1 \circ \theta^{-1} \\ Y_2 \circ \theta^{-1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

redefinimos Y por θ_*Y , note que $\pi_1 \circ \theta^{-1}(x, y, z) = x$.

Uma vez que 0 é ponto de cúspide de Y então

$$\{\nabla\pi_1(0), dY\pi_0, dY^2\pi_0\} = \left\{ (1, 0, 0), \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}(0), \frac{\partial Y_1}{\partial y}(0), \frac{\partial Y_1}{\partial z}(0) \right), dY^2\pi_0 \right\}$$

é base de \mathbb{R}^3 . Como $Y^2\pi(0) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= Y\pi_1^2(0) \\ &= \nabla Y(0) \cdot Y(0) \\ &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}(0)Y_1(0) + \frac{\partial Y_1}{\partial x_2}(0)Y_2(0) + \frac{\partial Y_1}{\partial x_3}(0)Y_3(0) \\ &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_2}(0)Y_2(0) + \frac{\partial Y_1}{\partial x_3}(0), \end{aligned}$$

perceba que se $\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}(0) = 0$, teríamos $\frac{\partial Y_1}{\partial x_3}(0) = 0$, gerando um absurdo pois torna o vetor ∇Y_1 linearmente dependente com $(1, 0, 0)$. Portanto, obrigatoriamente $\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}(0) \neq 0$ e definindo o difeomorfismo local $\zeta(x, y, z) = (x, Y_1(x, y, z), z)$ em 0,

$$\begin{aligned} \zeta_*Y(q) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x}(\zeta^{-1}(q))Y_1(0) + \frac{\partial Y_1}{\partial y}(\zeta^{-1}(q)) + \frac{\partial Y_1}{\partial z}(\zeta^{-1}(q)) \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y^2\pi_1(\zeta^{-1}(q)) \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e continuamos tendo $\pi_1 \circ \zeta^{-1}(x, y, z) = x$. Composto os difeomorfismos anteriores e chamando tal composição de ϕ e a interseção dos abertos de U , conseguimos a carta (ϕ, U) tal que

$$\phi_*X(q) = \begin{pmatrix} X^2h \circ \phi^{-1}(q) \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

provando assim o teorema. □

Capítulo 3

Análise dos Conjuntos $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ e Ξ_0

DADO $X \in \mathfrak{X}_S(M^\pm)$, o objetivo desse capítulo é entender as propriedades do conjunto

$$S_X = \{x \in \Sigma; Xh(p) = 0\}.$$

Tal conjunto possuirá particularidades interessantíssimas e até mesmo surpreendentes e nos possibilitará provar que $\mathfrak{X}_S(M^\pm)$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$. Os resultados provados nesse capítulo são baseados e estão em conformidade com os artigos [6] e [7].

Durante este capítulo consideremos M como sendo uma 3-variedade suave compacta mergulhada em \mathbb{R}^n e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que 0 é valor regular de h e $\Sigma := h^{-1}(0)$ é uma 2-variedade orientável mergulhada em M .

Lema 3.0.1 ([6]). *O conjunto $S_X := \{x \in \Sigma; Xh(p) = 0\}$ é uma subvariedade de Σ de forma que*

$$S_X = \bigsqcup_{i=1}^k S_X^i,$$

sendo que cada S_X^i é difeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Demonstração. Seja (φ, U) uma carta em torno de p em Σ , tal que $\varphi(p) = 0$ e $\varphi(U) = \mathbb{R}^2$. Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto Xh(\varphi^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Seja $p \in S_X$, então $Xh(p) = 0$, implicando $X(p) \in T_p\Sigma$, se p é ponto de dobra temos que

$$0 \neq X^2h(p) = d(Xh)_p X(p).$$

Como $df = d(Xh)_p d\varphi_0^{-1}$, uma vez que $X(p) \in T_p\Sigma$ e $X^h(p) \neq 0$, temos que $df_p \neq 0$. Por outro lado, se p é ponto de cúspide, então o conjunto

$$\{dh_p, d(Xh)_p, d(X^2h)_p\} \text{ é linearmente independente}$$

e portanto deve existir algum vetor $v \in T_p\Sigma$ tal que

$$d(Xh)_p v \neq 0.$$

De fato, caso contrário teríamos $d(Xh)_p$ linearmente dependente de dh_p . Sendo assim,

$$df = d(Xh)_p d\varphi_0^{-1} \neq 0.$$

Segue da observação anterior que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0.$$

Supondo sem perda de generalidade que $\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$, então pelo teorema da função implícita existe uma única função suave $\tau : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que

$$f(\tau(y), y) = 0, \quad \forall y \in (-\delta, \delta),$$

implicando $Xh \circ \varphi(\tau(y), y) = 0, \quad \forall y \in (-\delta, \delta)$. Logo,

$$\varphi(\tau(\cdot), \cdot) : (-\delta, \delta) \rightarrow S_X$$

é uma parametrização local de p em S_X , mostrando que S_X é variedade suave unidimensional. Como Σ é compacto, é claro que existem apenas finitas componentes conexas S_X^i de S_X , então

$$S = \bigsqcup_{i=1}^k S_X^i,$$

Como cada S_X^i é uma 1-variedade, S_i é homeomorfo a \mathbf{S}^1 ou a \mathbf{R} . Uma vez que $S_X = Xh^{-1}|_{\Sigma}(0) \subset \Sigma$ é fechado, S_X é compacto e então cada S_i é compacto, temos portanto $S_i \cong \mathbf{S}^1$, demonstrando o resultado. \square

O lema acima nos mostra que os pontos de tangência de campos $X \in \mathfrak{X}_S(M^\pm)$ são extremamente bem comportados.

Perceba que a definição do conjunto $\mathfrak{X}_S(M^\pm)$ em $\mathfrak{X}(M^\pm)$ nos motiva a definir o conceito de campo simples no conjunto $\Omega(M, \Sigma)$ da seguinte maneira:

Definição 3.1. Seja $\Xi_0 \subset \Omega^r(M, \Sigma)$ o conjunto dos campos $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$, tais que $X \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$, $Y \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ e $S_X \pitchfork S_Y$. O conjunto Ξ_0 é chamado de *conjunto dos campos simples em $\Omega^r(M, \Sigma)$* .

A necessidade de supormos $S_X \pitchfork S_Y$ na definição acima será explorada mais à frente. Mas, a grosso modo, colocamos tal requisito na definição para que, sob pequenas \mathcal{C}^r -perturbações no campo $(X, Y) \in \Xi_0$, o conjunto $S_X \cup S_Y$ não mude de maneira abrupta: a persistência topológica desse conjunto nos possibilitará a demonstração de teoremas relacionados com a estabilidade estrutural em Ξ_0 (ver capítulo 4).

Mostraremos agora resultados com respeito a persistência da variedade S_X .

Lema 3.1 ([6]). *Sejam $X_0 \in \mathfrak{X}_S(M^\pm)$ e $p_0 \in \Sigma$ um ponto de dobra de X_0 . Então existem uma vizinhança \mathcal{V} de X_0 em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e uma vizinhança V de p_0 em Σ tais que:*

i. Para cada $X \in \mathcal{V}$, existe uma única curva suave de pontos de dobra de X contida em V (denotada por γ_X), que intersepta ∂V em apenas dois pontos e de maneira transversal.

ii. $p_0 \in \gamma_{X_0}$ e $\text{sgn}(X^2h(p)) = \text{sgn}(X_0^2h(p_0))$, para todo $p \in \gamma_X$ e $X \in \mathcal{V}$.

Demonstração. Considere a função contínua

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \times \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, p) &\mapsto X^2h(p). \end{aligned}$$

Como $F(X_0, p_0) \neq 0$, por continuidade, existem vizinhanças \mathcal{V}_1 de X_0 em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e V_1 de p_0 em Σ , tais que

$$X^2h(p) \neq 0, \forall X \in \mathcal{V}_1 \text{ e } p \in V_1, \text{ e } \operatorname{sgn}(X^2h(p)) = \operatorname{sgn}(X_0^2h(p_0)). \quad (3.0.1)$$

Seja $\varphi : (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2) \rightarrow V_2$ uma parametrização local suave de Σ , de forma que $\varphi(0) = p_0$ e $V_2 \subset V_1$. Defina

$$\begin{aligned} G : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \times (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, x_1, x_2) &\mapsto Xh(\varphi(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

notoriamente, como $G(X_0, 0, 0) = 0$ e

$$0 \neq X_0^2h = d(X_0h)_p \cdot X_0(p),$$

temos que $dG(X_0, \cdot) = d(X_0h)_p \cdot d\varphi_0$, logo podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}(X_0, 0, 0) \neq 0.$$

Usando o teorema da função implícita existem $\varepsilon < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$ de X_0 em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e uma função

$$\tau : \mathcal{V} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta_1, \delta_1),$$

tais que $G(X, x_1, x_2) = 0$ com $X \in \mathcal{V}$ e $x_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ se, e somente se, $x_1 = \tau(X, x_2)$. Note que para cada $X \in \mathcal{V}$, a curva $c_X : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta_1, \delta_1) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ dada por $c_X(t) = (\tau(X, t), t)$ é transversal às linhas horizontais $x_1 = x_0$, para todo $x_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset (-\delta_1, \delta_1)$.

Definindo $V = \varphi([-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$, pelo comentário acima, a curva $\gamma_X = \varphi \circ c_X$ intersepta ∂V transversalmente em $\gamma_X(-\varepsilon/2)$ e em $\gamma_X(\varepsilon/2)$, definindo $a = -\varepsilon/2$ e $b = \varepsilon/2$, demonstramos a parte *i.* do teorema. A equação 3.0.1 assegura que *ii.* é satisfeito. \square

Proposição 3.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$, então S_X possui apenas finitos pontos de cúspide.*

Demonstração. Suponha por redução ao absurdo a existência de uma sequência de pontos distintos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X \subset \Sigma$, tal que cada p_n é um ponto de cúspide.

Uma vez que S_X é compacto, pois é um conjunto fechado contido no compacto Σ , existe uma subsequência $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Chame o limite da sequência p_{n_k} de p , como S_X é fechado, $p \in S_X$. Por continuidade de Xh , temos

$$Xh(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} Xh(p_{n_k}) = 0 \text{ e } X^2h(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} X^2h(p_{n_k}) = 0.$$

Como $p \in S_X$, p deve ser ponto de cúspide e portanto o conjunto

$$\{dh_p, d(Xh)_p, d(X^2h)_p\}$$

é linearmente independente. Porém, seja $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V_p \subset S_X$, $\varphi(0) = p$ uma parametrização local de p , e suponha $\{t_k := \varphi^{-1}(p_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$. Podemos supor sem perda de

generalidade que $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V_p$. Nessas condições, temos que $t_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Note que pela definição de derivada

$$Xh \circ \varphi(t_n) = Xh \circ \varphi(0) + d(Xh \circ \varphi)_{t_n} t_n + \mathcal{O}(t_n), \quad (3.0.2)$$

onde \mathcal{O} é uma função tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(t_n)}{|t_n|} = 0.$$

Então, dividindo a equação (3.0.2) por t_n ,

$$\frac{Xh \circ \varphi(t_n)}{t_n} = \frac{Xh \circ \varphi(0)}{t_n} + d(Xh \circ \varphi)_{t_n} \cdot \frac{t_n}{t_n} + \frac{\mathcal{O}(t_n)}{t_n},$$

lembrando que $0 = Xh \circ \varphi(t_n) = Xh \circ \varphi(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e aplicando a regra da cadeia,

$$0 = 0 + d(Xh)_{p_{n_k}} \cdot \varphi_{t_k} + \frac{\mathcal{O}(t_k)}{t_k},$$

Por fim, fazendo k tender ao infinito

$$d(Xh)_p \cdot d\varphi_0 = 0.$$

Repetindo a mesma conta para X^2h , resulta em

$$d(X^2h)_p \cdot d\varphi_0 = 0.$$

Perceba que $0 \neq d\varphi_0 \in T_p\Sigma$ e

$$\begin{aligned} dh_p \cdot d\varphi_0 &= 0, \\ d(Xh)_p \cdot d\varphi_0 &= 0, \\ d(X^2h)_p \cdot d\varphi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Como $\{dh_p, d(Xh)_p, d(X^2h)_p\}$ é base, as equações acima nos mostram que

$$d\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dt}(0) = 0,$$

gerando um absurdo. Logo, não podem existir infinitos pontos de cúspide distintos em S_X , demonstrando o resultado. \square

Lema 3.2 ([6]). *Sejam $X_0 \in \mathfrak{X}_S(M^\pm)$ e $p_0 \in \Sigma$ um ponto de cúspide de X_0 , então existem uma vizinhança \mathcal{V} de X_0 , números reais $a_0 < 0 < b_0$ e uma vizinhança V de p_0 em Σ , tais que para cada $X \in \mathcal{V}$*

- i. existe uma única curva injetiva suave $\gamma_X : [a_0, b_0] \rightarrow V$, de forma que $Im(\gamma_X) \subset S_X$ em V intercepta ∂V transversalmente em apenas dois pontos;*
- ii. existe uma única função contínua $\tau : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $a_0 < \tau(X) < b_0$ e $p(X) := \gamma_X(\tau(X))$ é o único ponto de cúspide de X em V , além disso $\text{sgn}(X^3h(p(X))) = \text{sgn}(X_0^3h(p_0))$; e*
- iii. $\gamma_X(t)$ é um ponto de dobra de X , para todo $t \in [a_0, b_0]$ tal que $t \neq \tau(X)$, mais ainda*

$$X^2h(\gamma_X(t))X^2h(\gamma_X(s)) < 0, \quad \forall t \in [a_0, \tau(X)), \quad s \in (\tau(X), b_0].$$

Demonstração. Uma vez que o conjunto

$$\{dh_{p_0}, d(X_0h)_{p_0}, d(X_0^2h)_{p_0}\}$$

é linearmente independente, é claro que $d(X_0h)_{p_0} \neq 0$. Usando os mesmos passos da demonstração do Lema 3.0.1, conseguimos encontrar vizinhanças \mathcal{V} de X_0 em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$, V de p_0 em Σ , números reais $a_0 < 0 < b_0$ e uma curva $\gamma_X : [a_0, b_0] \rightarrow V$, para todo $X \in \mathcal{V}$, de forma que sejam satisfeitos:

$$Xh(p) = 0, \text{ com } X \in \mathcal{V} \text{ e } p \in V \Leftrightarrow p = \gamma_X(t), \text{ para algum } t \in [a_0, b_0]$$

e

$$\text{sgn}(X_0^3h(p_0)) = \text{sgn}(X^3h(p)), \text{ para todo } X \in \mathcal{V} \text{ e } p \in V.$$

Mais ainda, γ_X intersepta ∂V de maneira transversal em $\gamma_X(a_0)$ e $\gamma_X(b_0)$, e $\gamma_X(t) \in \text{Int}(V)$ para cada $t \in (a_0, b_0)$, demonstrando assim o item *i*.

Considere agora a função

$$\begin{aligned} H : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \times M^\pm &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, p) &\mapsto (h(p), Xh(p), X^2h(p)). \end{aligned}$$

Uma vez que p_0 é ponto de cúspide de X_0 ,

$$H(X_0, p_0) = (0, 0, 0) \text{ e } \frac{dH}{dp}(X_0, p_0) \text{ é invertível.}$$

Usando o teorema da função implícita e diminuindo \mathcal{V} e V se necessário, existe uma única função $p : \mathcal{V} \rightarrow V$, tal que $H(X, p(X)) = 0$. Considere agora uma carta (φ, U) de p_0 em Σ , com $U \subset V$ e suponha, sem perda de generalidade, que $p(\mathcal{V}) \subset U$ (diminuindo \mathcal{V} se necessário). Definimos então a função

$$\begin{aligned} G : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \det \begin{pmatrix} d(h \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p(X))} \\ d(Xh \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p(X))} \\ d(X^2h \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p(X))} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Perceba que $G(X, p) = (0, 0, 0)$ implica $h(p) = 0$ e conseqüentemente p pertence a Σ . Uma vez que $p(X_0) = p_0$ e $G(X_0) \neq 0$, pela continuidade podemos encolher \mathcal{V} de forma que $G(X) \neq 0$ para todo $X \in \mathcal{V}$. Segue que, para todo $X \in \mathcal{V}$, $H(X) = 0$ e, além disso, são satisfeitos:

$$\begin{aligned} Xh(p(X)) &= dh_{p(X)} \cdot X(p(X)) = 0 \text{ e} \\ X^2h(p(X)) &= d(Xh)_{p(X)} \cdot X(p(X)) = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $G(p(X)) \neq 0$, obrigatoriamente

$$X^3h(p(X)) = d(X^2h)_{p(X)} \cdot X(p(X)) \neq 0,$$

concluindo que $p(X)$ é ponto de cúspide de X , do teorema da função implícita retiramos que em V este o único ponto com tal propriedade. Portanto, definindo $\tau(X)$ como o único valor real pertencente a $[a_0, b_0]$ tal que $\gamma_X(\tau(X)) = p(X)$ e notando que, por construção, $\text{sgn}(X^3h(p(X))) = \text{sgn}(X_0^3h(p_0))$, provamos o item *ii*.

Provaremos agora a condição *iii*. Note que se $t \neq \tau(X)$, então dado $X \in \mathcal{V}$, $H(X, \gamma_X(t)) \neq (0, 0, 0)$. Como $h(\gamma_X(t)) = 0$ e $Xh(\gamma_X(t)) = 0$, então $X^2h(\gamma_X(t)) \neq 0$ e portanto $\gamma_X(t)$ é um ponto de dobra.

Definimos a função real suave $h(t) = X^2h(\gamma_X(t))$ note que $h(\tau(X)) = 0$ e $h(t) \neq 0$ se $t \neq \tau(X)$. Perceba que $h'(t) = dX^2f(\gamma_X(t))\gamma'_X(t)$.

Caso $h'(\tau(X)) = 0$, então

$$dX^2h(p(X))\gamma'_X(\tau(X)) = 0$$

por outro lado $Xh(\gamma_X(t)) = h(\gamma_x(t)) = 0$, implicando que

$$dh(p(X))\gamma'_X(\tau(X)) = 0 \text{ e } dXh(p(X))\gamma'_X(\tau(X)) = 0,$$

o que contraria o fato de $\{dh_{p(X)}, d(Xh)_{p(X)}, dX^2h_{p(X)}\}$ de ser base $T_{p(X)}M$, portanto obrigatoriamente $h'(\tau(X)) \neq 0$ e $h(0) = 0$. Dessa forma

$$h(t)h(s) < 0, \quad -\varepsilon < t < \tau(X) < s < \varepsilon,$$

para algum $\varepsilon > 0$, o que demonstra o teorema. \square

Lema 3.3 ([6]). *Seja $X_0 \in \mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ tal que $S_{X_0} \neq \emptyset$, e seja C_0 uma componente conexa de S_{X_0} contendo k_0 pontos de cúspide. Então existem uma vizinhança \mathcal{V} de X_0 e uma vizinhança V de C_0 em Σ tais que, para todo $X \in \mathcal{V}$*

- i. S_X tem uma única componente conexa contida em V e tal componente possui exatamente k_0 pontos de cúspide; e*
- ii. o número de componentes conexas de S_X e S_{X_0} coincide para todo $X \in \mathcal{V}$.*

Demonstração. Dado $p \in C_0$, pelos Lemas 3.1 e 3.2, existem uma vizinhança $V_p \subset \Sigma$ de p e uma vizinhança $\mathcal{V}_p \subset \mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ de X_0 , de forma que para todo $X \in \mathcal{V}_p$ existe uma curva suave $\gamma_X^p : [a_p, b_p] \rightarrow V_p$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) $\gamma_X^p(\tau(X))$ é um ponto de mesma natureza de p , para alguns $a_p < \tau(X) < b_p$;
- (b) $\gamma_X^p(t)$ é um ponto de X para cada $t \neq \tau(X)$.

Além disso, essa curva contém todos os pontos de tangência de X dentro da vizinhança V_p e intersepta ∂V_p transversalmente nos pontos $\gamma_X^p(a_p)$ e $\gamma_X^p(b_p)$. Perceba que $\gamma_{X_0}^p$ é uma parametrização local de C_0 em torno de p .

Considere a cobertura $\{V_p\}_{p \in C_0}$ de C_0 . Uma vez que C_0 é compacto, existe subcobertura finita $\{V_{p_i}\}_{i=1}^n \subset \{V_p\}_{p \in C_0}$ de C_0 : tomando a vizinhança $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{p_1} \cap \dots \cap \mathcal{V}_{p_n}$ de X_0 , demonstramos a parte *i*. do teorema.

Para a parte *ii*, sejam C_1^0, \dots, C_k^0 as componentes conexas de S_{X_0} . Então pela parte *i* existem vizinhanças disjuntas W_i de C_i^0 e \mathcal{W}_i de X_0 tais que, para cada $X \in \mathcal{W}_i$, S_X tem uma única componente conexa contida em W_i .

Seja $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$ e $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cap \dots \cap \mathcal{W}_k$. Note que $X_0h(p) \neq 0$, para cada $p \in \Sigma \setminus W$. Por continuidade, para cada $p \in \Sigma \setminus W$ existem uma vizinhança V_p de p em Σ e uma vizinhança \mathcal{V}_p de X_0 em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$, tais que $Xh(q) \neq 0$, para todo $q \in V_p$ e $X \in \mathcal{V}_p$. Como $\Sigma \setminus W$ é compacto, conseguimos uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ de X_0 tal que $Xf(p) \neq 0$ para todo $X \in \mathcal{V}$ e $p \in \Sigma \setminus W$, implicando $S_X \subset W$, para todo $X \in \mathcal{V}$, o que demonstra o item *ii*. \square

O teorema abaixo mostra a residualidade de $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$

Teorema 3.1. *O conjunto $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$.*

Demonstração. A abertura é clara da aplicação conjunta dos Lemas 3.1, 3.2 e 3.3.

Provaremos agora a densidade, o resultado será demonstrado apenas para campos em M^+ , sendo a prova para campos em M^- análoga.

Tome $Y \in \mathfrak{X}^r(M^+)$ e $\varepsilon > 0$. Primeiramente, considere a equação diferencial ordinária definida em M^+ ,

$$x'(t) = \nabla h(x(t)),$$

e seja φ o fluxo da equação acima, podemos supor sem perda de generalidade que existe $\delta > 0$, tal que o fluxo

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \delta) \times \Sigma &\rightarrow M^+ \\ (t, p) &\mapsto \varphi(t, p) \end{aligned}$$

está definido. Uma vez que, dado $p \in \Sigma$,

$$\frac{d\varphi}{dt}(0, p) = \nabla h(p) \text{ e } \frac{d\varphi}{dp}(0, p) = \text{Id}_{T_p\Sigma},$$

segue do teorema da função inversa que para todo $p \in \Sigma$, existe $\varepsilon_p > 0$ e uma vizinhança V_p de p em Σ tais que

$$\varphi : [0, \varepsilon_p) \times V_p \rightarrow \varphi([0, \varepsilon_p) \times V_p),$$

é um difeomorfismo. Da compacidade de Σ é imediato que existem $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança U de Σ em M^+ de forma que

$$\varphi : [0, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow U$$

é difeomorfismo. Logo, pela equação acima

$$U \cong [0, \varepsilon) \times \Sigma$$

e conseqüentemente

$$TU \cong T[0, \varepsilon) \times T\Sigma.$$

Por meio da identificação

$$\begin{aligned} d\varphi : T[0, \varepsilon) \times T\Sigma &\rightarrow TU \subset TM^+ \\ ((t, v), (p, w)) &\mapsto \left(\varphi(t, p), \nabla h(\varphi(t, p))v + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)w \right), \end{aligned}$$

podemos escrever o campo Y , em U , na forma

$$Y(\varphi(t, p)) = Y_1(\varphi(t, p)) \cdot u(t, p) + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)Y_2(\varphi(t, p)), \quad p \in U,$$

sendo

$$u(t, p) = \frac{\nabla h(\varphi(t, p))}{\|\nabla h(\varphi(t, p))\|^2},$$

$Y_1(p) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e Y_2 tal que $Y_2(\varphi(t, p)) \in T_p\Sigma$, para todo $(t, p) \in [0, \varepsilon) \times \Sigma$. Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{Y} : U \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, \varepsilon) &\mapsto Y_1(p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3.2 o conjunto dos valores

$$S = \left\{ s \in \mathbb{R}, \bar{Y}_s := \bar{Y}(\cdot, s) \pitchfork \{0\} \text{ e } \partial Y(\cdot, s) \pitchfork \{0\} \right\}$$

é residual em \mathbb{R} .

Seja $\alpha : [0, \varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ uma *bump function* suave, tal que $\alpha([0, \varepsilon/4]) = \{1\}$ e $\varphi([\varepsilon/2, \varepsilon]) = \{0\}$. Definiremos o seguinte campo $Y^s \in \mathfrak{X}^r(M^+)$,

$$Y^s(\varphi(t, p)) = (Y_1(\varphi(t, p)) + s\alpha(t)) \cdot u(t, p) + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)Y_2(\varphi(t, p)), \quad p \in U,$$

$$Y^s(p) = Y(p), \quad p \in M^+ \setminus U,$$

sendo $s \in S$. Note que, pela construção, para todo $t \in [0, \varepsilon/4]$

$$\begin{aligned} Y^s h(\varphi(t, p)) &= \nabla h(\varphi(t, p)) \cdot \left((Y_1(\varphi(t, p)) + s) \cdot u(t, p) + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)Y_2(\varphi(t, p)) \right) \\ &= Y_1(\varphi(t, p)) + s, \quad \forall (t, p) \in [0, \varepsilon/4] \times \Sigma. \end{aligned}$$

Como $s \in S$, temos que $\partial \bar{Y}_s = Y^s h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é transversal a $\{0\}$, segue que

$$(Y^s h|_{\Sigma})^{-1}(0),$$

é uma 1-variedade mergulhada em Σ . Como Σ é compacta,

$$(Y^s h|_{\Sigma})^{-1}(0) = \bigsqcup_{i=1}^k S_i,$$

com cada S_i difeomorfo a \mathbf{S}^1 , se $p \in S_i$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_i$ é uma parametrização local de S_i tal que $\gamma(0) = p$, então $Xh(\gamma(t)) = 0$ e, portanto, derivando em $t = 0$ conseguimos $dXh(p)\gamma'(0) = 0$, logo $\nabla Y^s h(p) \in (T_p S_i)^\perp$.

Considere a seguinte EDO em Σ

$$x'(t) = \nabla(Y^s h|_{\Sigma})(x(t)).$$

definindo ψ como o fluxo da equação acima e usando a mesma ideia do começo da demonstração, existem $\varepsilon_1 > 0$ e uma vizinhança W de $\bigsqcup S_i$ em Σ , tais que

$$\begin{aligned} \psi : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \bigsqcup_{i=1}^k S_i &\rightarrow W \\ (t, p) &\mapsto \psi(t, p) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. Defina os campos de vetores

$$v(t, p) = \frac{\nabla(Y^s h|_{\Sigma})(\psi(t, p))}{\|\nabla(Y^s h|_{\Sigma})(\psi(t, p))\|^2}, \quad (t, p) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \bigsqcup_{i=1}^k S_i$$

e

$$w(t, p) = \left(\frac{\nabla(Y^s h|_{\Sigma})(\psi(t, p))}{\|\nabla(Y^s h|_{\Sigma})(\psi(t, p))\|^2} \right)^\perp$$

de forma que

$$\{v(t, p), w(t, p)\} \text{ é base de } T_{\psi(t, p)}\Sigma.$$

Segue que, em W , Y^s é escrito na forma

$$Y^s(\psi(t, p)) = (Y_1(p) + s)u(0, p) + Y_2(\psi(t, p))v(t, p) + Y_3(\psi(t, p))w(t, p).$$

Perceba que

$$(Y^s)^2 h(\psi(0, p)) = Y_2(\psi(0, p)), \quad p \in \bigsqcup_{i=1}^k S_i$$

e defina a função

$$\begin{aligned} X : \bigsqcup_{i=1}^k S_i \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, \varepsilon) &\rightarrow (Y^s)^2 h(p) + \varepsilon = Y_2(p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

é importante notar que a função acima não depende de s . Novamente, utilizando o Teorema 1.3.1, temos que o conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R}; X_c := X(\cdot, c) \pitchfork \{0\}\},$$

é residual em \mathbb{R} .

Seja $\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow [0, 1]$ uma *bump function* tal que

$$\beta(-\varepsilon_1/4, \varepsilon_1/4) = \{1\} \text{ e } \beta((-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \setminus [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]) = \{0\}.$$

Além disso, considere

$$B = \left\{ \varphi(r, \psi(t, p)); r \in [0, \varepsilon), t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), p \in \bigsqcup_{i=1}^k S_i \right\}.$$

Definimos agora o campo em $X_{s,c} \in \mathfrak{X}^r(M^+)$ por

$$\begin{aligned} X_{s,c}(\varphi(r, \psi(t, q))) &= (Y_1(\varphi(t, \psi(t, q)))) + \alpha(r)s \cdot u(r, \varphi(t, p)) + \\ &+ \frac{d\varphi}{dp}(r, \psi(t, p))(Y_2(\varphi(r, \psi(t, p))) + \beta(t)c)v(t, p) + \\ &+ \frac{d\varphi}{dp}(r, \psi(t, p))Y_3(\varphi(r, \psi(t, p)))w(t, p), \quad \forall \varphi(r, \psi(t, p)) \in B, \\ X_{s,c}(p) &= Y^s(p), \quad \forall p \in M^+ \setminus B. \end{aligned}$$

Uma vez que S e C são residuais em \mathbb{R} , podemos tomar s e c suficientemente pequenos de forma que

$$\|Y - X_{s,c}\|_r < \varepsilon.$$

Apenas por comodidade, definimos $X := X_{s,c}$. Para terminar a demonstração precisamos checar que $X \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$. Como vimos anteriormente, os pontos tais que $Xh = 0$ correspondem à variedade $\bigsqcup_{i=1}^k S_i$. Tome $p \in \Sigma$, tal que

$$Xh(p) = 0 \text{ e } X^2h(p) = 0.$$

uma vez que $\{0\}$ é valor regular de $X^2h|_{\bigsqcup_{i=1}^k S_i}$ por construção, segue que

$$dX^2h_p \cdot T_p \left(\bigsqcup_{i=1}^k S_i \right) = \mathbb{R}.$$

porém, como

$$dh_p \cdot T_p \left(\bigsqcup_{i=1}^k S_i \right) = 0 \text{ e } dXh_p \cdot T_p \left(\bigsqcup_{i=1}^k S_i \right) = 0,$$

então necessariamente o conjunto

$$\{dh_p, dXh_p, dX^2h_p\}$$

é linearmente independente o que implica que p é ponto de cúspide. Assim, demonstramos o teorema. \square

O Teorema anterior nos garante a residualidade de $\mathfrak{X}_S^r(M^\pm)$ em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$. A pergunta natural que surge então é se Ξ_0 é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$. Começaremos agora o processo para demonstrar tal residualidade.

Lema 3.4. *Seja $(X, Y) \in \Xi_0$, então $S_X \cap S_Y$ é finito.*

Demonstração. Suponha por redução ao absurdo que $S_X \cap S_Y$ é infinito, então existe uma sequência de elementos distintos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S_X \cap S_Y$. Uma vez que Σ é compacto, existe uma subsequência convergente $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para um valor $p \in \Sigma$, perceba que $p \in S_X \cap S_Y$, de fato

$$Xh(p) = Xh \left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} Xh(p_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{ e}$$

$$Yh(p) = Yh \left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} Yh(p_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

logo $p \in S_X \cap S_Y$.

Seja (φ, U) uma carta local em torno de p em Σ de forma que $\varphi(p) = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset U$. Construimos então uma sequência $\{t_k := \varphi(p_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para 0. Perceba que

$$\frac{t_n}{\|t_n\|} \in \mathbf{S}^1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como \mathbf{S}^1 é compacto, podemos encontrar uma subsequência convergente $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n_k}}{\|t_{n_k}\|} = v \in \mathbf{S}^1.$$

Para não carregar a notação iremos supor que a sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ já possui a propriedade de convergência descrita acima. Pela definição de derivada,

$$Xh \circ \varphi^{-1}(0) = Xh \circ \varphi^{-1}(t_n) - d(Xh \circ \varphi^{-1})_{t_n} t_n + \mathcal{O}(t_n), \quad (3.0.3)$$

sendo $\mathcal{O}(t_n)$ uma função que satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(t_n)}{\|t_n\|} = 0.$$

Como $Xh \circ \varphi^{-1}(0) = Xh \circ \varphi^{-1}(t_n) = 0$ e dividindo 3.0.3 por $\|t_n\|$, temos

$$0 = - \lim_{n \rightarrow \infty} d(Xh \circ \varphi^{-1})_{t_n} \frac{t_n}{\|t_n\|} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(t_n)}{t_n}$$

e, fazendo $n \rightarrow \infty$, concluimos que

$$0 = d(Xh)_p \cdot (d\varphi_p^{-1} v),$$

o que implica $\nabla (Xh|_\Sigma) \in (d\varphi_p^{-1} v)^\perp$. Como 0 é valor regular de $Xh|_\Sigma$ e $Xh|_\Sigma^{-1}(0) = S_X$, temos que $T_p S_X = \text{span}\{d\varphi_p^{-1} v\}$. *Mutatis mutandis*, com as contas concluimos que $T_p S_Y = \text{span}\{d\varphi_p^{-1} v\}$, implicando $S_X \not\pitchfork S_Y$ em p , gerando assim um absurdo. Logo $S_X \cap S_Y$ é um conjunto finito. \square

Teorema 3.2. *O conjunto Ξ_0 é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$.*

Demonstração. Vamos mostrar a abertura do conjunto. Tome $(X, Y) \in \Xi_0$, então $X \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$, $Y \in \mathfrak{X}_S^r(M^-)$ e $S_X \pitchfork S_Y$. Uma vez que $\mathfrak{X}_S^r(M^+)$ e $\mathfrak{X}_S^r(M^-)$ são abertos em $\mathfrak{X}^r(M^+)$ e $\mathfrak{X}^r(M^-)$, respectivamente, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_r(X, \varepsilon) \subset \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ e $\mathcal{B}_r(Y, \varepsilon) \subset \mathfrak{X}_S^r(M^-)$. Pelo lema anterior, $S_X \cap S_Y = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Considere a aplicação contínua

$$F : \mathfrak{X}^r(M^+) \times \mathfrak{X}^r(M^-) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X', Y', p) \mapsto (X'h(p), Y'h(p)).$$

Perceba que $F(X, Y, p_i) = (0, 0)$ e

$$\frac{dF}{dp}(X, Y, p) = (dXh_p, dYh_p).$$

Como $S_X \pitchfork S_Y$ e $p_i \in S_X \cap S_Y$, então $\frac{dF}{dp}(X, Y, p_i)$ é um isomorfismo e portanto pelo teorema da função implícita, existem vizinhanças $\mathcal{U}_i \subset \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ de X , $\mathcal{V}_i \subset \mathfrak{X}_S^r(M^-)$ de Y e $V_i \subset \Sigma$ de p_i e uma única função contínua $\rho_i : \mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_i \rightarrow V$, tais que

$$F(X, Y, \rho_i(X, Y)) = (0, 0).$$

Perceba ainda que $\Sigma \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n)$ é compacto. Tal fato implica (como feito diversas vezes nessa tese, *e.g.* Teorema 1.3.5) a existência de vizinhanças \mathcal{U} de $X \subset \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ e $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_S^r(M^-)$ de Y , tais que

$$(0, 0) \notin F(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \Sigma \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n)). \quad (3.0.4)$$

Por fim, perceba que a função

$$G : \mathfrak{X}^r(M^+) \times \mathfrak{X}^r(M^-) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \\ (X', Y', p) \mapsto \det(dX'h_p, dY'h_p),$$

é contínua. Como $G(X, Y, p_i) \neq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, existem vizinhanças abertas $\mathcal{U}'_i \subset \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ de X , $\mathcal{V}'_i \subset \mathfrak{X}_S^r(M^-)$ de Y e V'_i de p tais que

$$0 \neq G(\mathcal{U}'_i, \mathcal{V}'_i, V_i). \quad (3.0.5)$$

podemos então, definir as vizinhanças abertaa

$$\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}'_i \right) \subset \mathfrak{X}_S^r(M^+) \text{ de } X$$

e

$$\tilde{\mathcal{V}} := \mathcal{V} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}'_i \right) \subset \mathfrak{X}_S^r(M^-) \text{ de } Y.$$

Consideramos agora o aberto $\mathcal{S} = \{(X, Y); X \in \tilde{\mathcal{U}} \text{ e } X \in \tilde{\mathcal{V}}\}$, de (X, Y) em $\Omega^r(M, \Sigma)$. É claro, das equações 3.0.4 e 3.0.5, que $\mathcal{S} \subset \Xi_0$, demonstrando assim a abertura.

Iremos agora demonstrar a densidade de Ξ_0 . Tome $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$, sendo $X \in \mathfrak{X}^r(M^+)$ e $Y \in \mathfrak{X}^r(M^-)$. Pelo Teorema 3.1, dado $\varepsilon > 0$, existem campos $X_1 \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ e $X_2 \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$ tais que

$$\|X - X_1\|_r < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \|Y - Y_1\|_r < \frac{\varepsilon}{2} \implies \|(X, Y) - (X_1, Y_1)\|_r < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere a EDO definida em M^+ ,

$$x'(t) = \nabla h(x(t)),$$

como feito na demonstração do Teorema 3.1, podemos supor que existe $\varepsilon > 0$, tal que o fluxo da equação acima,

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \varepsilon) \times \Sigma &\rightarrow M^+ \\ (t, p) &\mapsto \varphi(t, p), \end{aligned}$$

é um difeomorfismo com imagem $W = \varphi([0, \varepsilon) \times \Sigma)$. Logo, em W , X_1 pode ser escrito na forma

$$X_1(\varphi(t, p)) = X'(t, p)u(t, p) + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)Y'(t, p),$$

sendo

$$u(t, p) = \frac{\nabla h(\varphi(t, p))}{\|\nabla h(\varphi(t, p))\|^2},$$

$$X' : [0, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } Y'(t, p) \in T_p\Sigma, \forall (t, p) \in [0, \varepsilon) \times \Sigma.$$

De forma análoga podemos definir a EDO em Σ ,

$$x'(t) = \nabla Xh(x(t)),$$

e novamente pela demonstração do Teorema 3.1, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que o fluxo

$$\psi : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times S_X \rightarrow \Sigma$$

é difeomorfismo com imagem $U = \psi((-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times S_X)$. No aberto

$$V = \{\varphi(r, \psi(t, p)); r \in [0, \varepsilon), t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), p \in S_X\} \subset M^+,$$

X_1 é dado pela equação

$$X_1(\varphi(r, \psi(t, p))) = X'(r, \psi(t, p))u(r, \psi(t, p)) + \frac{d\varphi}{dp}(r, \psi(t, p))Y'(r, \psi(t, p)),$$

pelo Teorema 1.3.1, o conjunto

$$S = \{s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1); \psi(s, \cdot) \pitchfork S_Y\}$$

é residual em $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Sejam $\alpha : [0, \varepsilon) \rightarrow [0, 1]$ e $\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow [0, 1]$, *bump functions* tais que

$$\alpha\left(\left[0, \frac{\varepsilon}{4}\right]\right) = \{1\} \text{ e } \alpha\left(\left[\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right]\right) = \{0\},$$

$$\beta\left(\left[-\frac{\varepsilon_1}{4}, \frac{\varepsilon_1}{4}\right]\right) = \{1\} \text{ e } \beta\left(\left[-\varepsilon_1, -\frac{\varepsilon_1}{2}\right] \cup \left[\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_1\right]\right) = \{0\},$$

Defina a função X_2 de forma que

$$X_2(\psi(r, \varphi(t, p))) = \alpha(r) \left(X'(r, \psi(t - s\beta(t), p)) - X'(r, \psi(t, p)) \right) u(r, \psi(t, p))$$

$$+ X'(r, \psi(t, p)) u(r, \psi(t, p)) + \frac{d\varphi}{dp}(r, \varphi(t, p)) Y'(r, \varphi(t, p)),$$

se $\varphi(r, \psi(t, p)) \in V$ e

$$X_2(p) = X_1(p), \quad \forall p \in M^+ \setminus V.$$

Tome $s \in S$ para o bastante para que $X_2 \in \mathfrak{X}_S^r(M^+)$,

$$\|X_1 - X_2\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$S_{X_2} \subset U$ e o número de componentes conexas de S_{X_2} seja igual ao número de componentes conexas de S_{X_1} , a existência de tal s vem do fato do conjunto S ser residual e a aplicação conjunta dos Lemas 3.1, 3.2 e 3.3.

Dessa forma, segue que $S_{X_2} = \psi(s, S_{X_1})$ e, como $s \in S$, temos $S_{X_2} \pitchfork S_{Y_1}$, implicando que $(X_2, Y_1) \in \Omega(M, \Sigma)$ e $\|(X, Y) - (X_2, Y_1)\|_r < \varepsilon$, demonstrando portanto a densidade do conjunto Ξ_0 . \square

Por fim mostraremos dois fatos interessante a respeito dos pontos de dobra-dobra do conjunto Ξ_0 . Os pontos de dobra-dobra serão amplamente discutidos durante o capítulo 4.

Definição 3.2. Sejam $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que 0 é valor regular de h e $h^{-1}(0) = \Sigma$. Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado de ponto de *dobra-dobra* se p for ponto de dobra de X e Y .

Por outro lado chamamos p de ponto de *dobra-regular* p for ponto de dobra de X e ponto regular de Y .

Finalmente, p recebe o nome de *cúspide-regular* se p for um ponto de dobra de X e ponto regular de Y .

Perceba que podemos definir os pontos *regular-cúspide* e *regular-dobra* de maneira semelhante a descrita acima.

Proposição 3.2. *Seja $Z = (X, Y) \in \Xi_0$ então o número de pontos de dobra-dobra do campo Z é diferente de 1.*

Demonstração. Suponha por redução ao absurdo que Z possui um único ponto de dobra-dobra, $p \in \Sigma$. Considere então o conjunto $A = \Sigma \setminus (S_X \cup S_Y)$ e perceba que, como $Z \in \Xi_0$, os conjuntos

$$\Gamma_1 = \{Xh(p) > 0, Yh(p) > 0; p \in \Sigma\},$$

$$\Gamma_2 = \{Xh(p) > 0, Yh(p) < 0; p \in \Sigma\},$$

$$\Gamma_3 = \{Xh(p) < 0, Yh(p) > 0; p \in \Sigma\}$$

e

$$\Gamma_4 = \{Xh(p) < 0, Yh(p) < 0; p \in \Sigma\},$$

são tais que

$$A = \sqcup_{i=1}^4 \Gamma_i,$$

como p é ponto de dobra-dobra, $\Gamma_i \neq \emptyset$, e Γ_i é aberto e fechado em A . Portanto A tem ao menos 4 componentes conexas.

Por fim, podemos fazer a sequência exata longa do par $(\Sigma, \Sigma \setminus (S_X \cup S_Y))$:

$$\dots \rightarrow H_1(\Sigma \setminus (S_X \cup S_Y)) \rightarrow H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(\Sigma, \Sigma \setminus (S_X \cup S_Y)) \rightarrow \widetilde{H}_0(\Sigma \setminus (S_X \cup S_Y)) \rightarrow 0.$$

Pela dualidade de Alexander-Poincaré-Lefschetz, temos

$$H_1(\Sigma, \Sigma \setminus (S_X \cup S_Y)) = H^1(S_X \cup S_Y) = \mathbb{Z}^2;$$

por outro lado, o fato de $M \setminus (S_X \cup S_Y)$ ter pelo menos quatro componentes conexas implica

$$\widetilde{H}_0(M \setminus (S_X \cup S_Y)) = \mathbb{Z}^{N>2},$$

e portanto

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}^N \xrightarrow{\delta_2} 0,$$

uma vez que $\text{Ker}(\delta_2) = \mathbb{Z}^N$, pela exatidão temos $\text{Im}(\delta_1) = \mathbb{Z}^N$, o que implica que δ_1 é sobrejetiva, mas isso é um absurdo, pois $N > 2$ e δ_1 é linear em \mathbb{Z} . Mostramos assim a impossibilidade de existir um único ponto de dobra-dobra. □

Proposição 3.3 ([6]). *Se Σ é simplesmente conexo e $Z \in \Xi_0$ então o número de pontos de dobra-dobra é par.*

Demonstração. Uma vez que Σ é uma variedade compacta, simplesmente conexa e sem bordo, então do teorema de caracterização das-2 variedades conexas, compactas e sem bordo, Σ é difeomorfo a \mathbb{S}^2 . Tome então $p \in S_X \cap S_Y$. Segue que existem $C_X \subset S_X$ e $C_Y \subset S_Y$ de forma que $C_Y \cong C_X \cong \mathbb{S}^1$ e $p \in C_X \cap C_Y$. Perceba que, como $\Sigma \cong \mathbb{S}^2$ é simplesmente conexo, pelo teorema da curva de Jordan, $\Sigma \setminus C_X$ tem duas componentes conexas. Denote tais componente por Σ_+ e Σ_- . Uma vez que C_X é orientável e divide Σ em duas componentes conexas, existe uma função

$$f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

de forma que $f^{-1}(0) = C_X$ e 0 é valor regular de f . Considere o difeomorfismo

$$\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow C_Y.$$

Perceba que $f \circ \gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f \pitchfork \{0\}$. Isso implica que se $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ é um ponto com $f(e^{i\theta}) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \delta), f(e^{i(\theta-\varepsilon_1)}) \cdot f(e^{i(\theta+\varepsilon_2)}) < 0. \quad (3.0.6)$$

Note então que a função

$$g := f \circ \gamma \circ e^{i(\theta+\cdot)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

é uma função contínua 2π -periódica e $g(0) = 0$. Seja

$$\{0 = p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1} = 2\pi\}$$

o conjunto dos pontos pertencentes a $[0, 2\pi]$ tais que $f(p_i) = 0$. Note que tal conjunto é finito, pois existem apenas finitos pontos de dobra-dobra, perceba que

$$\operatorname{sgn} \{f((p_i, p_{i+1}))\} = (1)^i \operatorname{sgn} \{f((p_0, p_1))\}.$$

Porém, por 3.0.6 temos que

$$\operatorname{sgn} \{f((p_n, p_{n+1}))\} = -\operatorname{sgn} \{f((p_0, p_1))\},$$

implicando que n é ímpar. Então $\theta_i = e^{i(\theta+p_i)}$, $i \in \{0, \dots, n\}$, são os únicos pontos de \mathbf{S}^1 que são raízes de $f \circ \gamma$, implicando que $C_X \cap C_Y$ tem uma quantidade par de interseções. Como C_X e C_Y foram tomados de maneira genérica no conjunto das componentes conexas de S_X e S_Y , respectivamente, a quantidade de pontos de dobra-dobra de Z deve ser par. \square

Capítulo 4

Estabilidade Estrutural Local em $\Omega^r(M, \Sigma)$

ESTE capítulo é um dos mais importantes de toda tese. É nele que os resultados dos capítulos anteriores irão se conectar para o entendimento da estabilidade estrutural em $\Omega^r(M, \Sigma)$. Iremos mostrar que o conjunto Σ_0 dos campos globalmente localmente estruturalmente estáveis em $\Omega^r(M, \Sigma)$ não é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$ e iremos encontrar condições sobre o conjunto Ξ_0 para que exista Σ -estabilidade estrutural local. Os resultados e definições estão em conformidade com [7]. Começaremos o capítulo falando sobre a Teoria Clássica e depois veremos para o caso suave por partes.

O fato de Σ_0 não ser residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$ é contra-intuitivo, uma vez que esse resultado ocorre perante a teoria clássica, isto é, o conjunto dos campos globalmente localmente estruturalmente estáveis é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$, se M seja uma variedade n -dimensional compacta. Isso mostra que as topologias \mathcal{C}^r em $\Omega^r(M, \Sigma)$, não são finas o bastante para garantir a globalidade da estabilidade estrutural. Veremos mais à frente que os responsáveis para que a teoria não funcione tão bem quanto o esperado são os pontos de dobra-dobra.

4.1 Teoria Clássica

Mostraremos aqui, os resultados clássicos a respeito de campos localmente globalmente estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}^r(M)$. Os resultados e definições seguem tais como feitos na referência [18].

4.1.1 Estabilidade Estrutural de Campos Lineares em \mathbb{R}^n

Definição 4.1.1.1. Um campo de vetores $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado de *campo de vetores linear* se F é da forma $F(x) = Ax$, sendo A uma matriz $n \times n$. Mais ainda, F é chamado de campo hiperbólico se nenhum dos autovalores de A pertence ao eixo imaginário.

Denotamos o conjunto dos campos de vetores lineares em \mathbb{R}^n por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e denotaremos $F(x) = Ax$, apenas por A . O fluxo de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ será escrito como $A_t(p)$, isto é $A_0(p) = 0$ e $\dot{A}_t(p) = A \cdot A_t(p)$. Note que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ munido da norma $\|L\| = \sup\{\|Lv\|; \|v\|=1\}$ é um espaço vetorial normado completo, *i.e.* um espaço de Banach.

Além disso, denotamos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^n . Um elemento $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é chamado de *isomorfismo hiperbólico* se L for um isomorfismo de espaços vetoriais e todos os autovalores de L possuírem norma diferente de um.

$$B_j = \begin{bmatrix} M_j & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & M_j & I \\ & & & M_j \end{bmatrix},$$

onde

$$M_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix} \text{ com } a_j < 0, \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall 1 \leq k \leq s'',$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_k & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda_k < 0, \forall 1 \leq k \leq u',$$

$$D_l = \begin{bmatrix} M_l & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & M_l & I \\ & & & M_l \end{bmatrix},$$

sendo que

$$M_l = \begin{bmatrix} a_l & b_l \\ -b_l & a_l \end{bmatrix} \text{ com } a_l > 0, \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall 1 \leq l \leq u'',$$

os demais termos das matrizes acima são todos zeros.

Definimos E^s como o espaço vetorial gerado pelos vetores e_1, e_2, \dots, e_s , correspondendo ao espaço invariante associado a $A_1, \dots, A_{s'}, B_1, \dots, B_{s''}$ e E^u como o espaço gerado pelos vetores e_{s+1}, \dots, e_n . É claro que L é invariante por $E^{s,u}$,

$$L^s := L|_{E^s} = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_{s'} & & \\ & & & B_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_{s''} \end{bmatrix}$$

e

$$L^u = L|_{E^u} = L|_{E^s} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{u'} & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_{u''} \end{bmatrix},$$

demonstrando a primeira parte da proposição.

Faremos o restante da demonstração apenas para o espaço E^s , para o caso E^u a demonstração é análoga com mínimas adaptações.

Mostraremos agora que $E^s = \{x \in \mathbb{R}^n; L_t x = e^{Lt} x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$. Tome $x \in E^s$, então $x = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, utilizando a base da demonstração da primeira parte da proposição. Sejam $P_1, \dots, P_{s'}, P_{s'+1}, \dots, P_{s'+s''}$ projeções de \mathbb{R}^n

de forma que P_i projeta \mathbb{R}^n no autoespaço generalizado de A_i , $1 \leq i \leq s'$ e $P_{s'+j}$ no auto-espaço generalizado de B_j , $1 \leq j \leq s''$. Segue que

$$\begin{aligned} e^{Lt}x &= e^{Lt} \sum_{i=1}^{s'+s''} P_i x \\ &= \sum_{i=1}^{s'} e^{\lambda_i t} p_i(t) P_i x + \sum_{j=1}^{s''} e^{a_j t} g_j(\cos(b_j t), \sin(b_j t), t) P_{s'+j} x, \end{aligned}$$

sendo $p_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio e $g_j(t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio em 3 variáveis. Definindo $\varepsilon = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{s'}|, |a_1|, \dots, |a_{s''}|\}/2$, temos que

$$\begin{aligned} e^{Lt}x &= \sum_{i=1}^{s'} e^{(\lambda_i - \varepsilon + \varepsilon)t} p_i(t) P_i x + \sum_{j=1}^{s''} e^{(a_j - \varepsilon + \varepsilon)t} g_j(\cos(b_j t), \sin(b_j t), t) P_{s'+j} x \\ &= \sum_{i=1}^{s'} e^{(\lambda_i + \varepsilon)t} (e^{-\varepsilon t} p_i(t)) + \sum_{j=1}^{s''} e^{(a_j + \varepsilon)t} (e^{-\varepsilon t} g_j(\cos(b_j t), \sin(b_j t), t)). \end{aligned}$$

Uma vez que $\max_{i,j} \{\lambda_i + \varepsilon, a_j + \varepsilon\} < 0$, temos $e^{(\lambda_i + \varepsilon)t}, e^{(a_j + \varepsilon)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, notando que $e^{-\varepsilon t} p_i(t), e^{-\varepsilon t} g_j(\cos(b_j t), \sin(b_j t), t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, segue que $e^{Lt}x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, mostrando assim a continência $E^s \subset \{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$.

É claro que $\{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$ é espaço vetorial. Suponha que existe $x \in \{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$ de forma que $x \neq L^s$. Então $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in E^s$ e $x_2 \in E^u$. Como $\{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$ é espaço vetorial e $E^s \subset \{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$, temos

$$x_2 \in E^u \cap \{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\},$$

repetindo as mesmas contas anteriores, é possível concluir que $e^{Lt}x_2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$. Logo, $e^{Lt}x_2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, implicando que $x_2 = 0$ e consequentemente $\{x \in \mathbb{R}^n; L_t x \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\} = E^s$.

Por fim, tome $x \in E^s$, e considere novamente $\varepsilon = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{s'}|, |a_1|, \dots, |a_{s''}|\}/2$, segue que

$$\begin{aligned} \|e^{Lt}x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{s'} e^{(\lambda_i - \varepsilon + \varepsilon)t} p_i(t) P_i x + \sum_{j=1}^{s''} e^{(a_j - \varepsilon + \varepsilon)t} g_j(\cos(b_j t), \sin(b_j t), t) P_{s'+j} x \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{s'} \left\| e^{(\lambda_i + \varepsilon)t} (e^{-\varepsilon t} p_i(t)) \right\| \cdot \|P_i x\| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s''} \left\| e^{(a_j + \varepsilon)t} (e^{-\varepsilon t} g_j(\cos(b_j t), \sin(b_j t), t)) \right\| \cdot \|P_{s'+j} x\|, \end{aligned}$$

como cada termo da somatória vai para infinito quando $t \rightarrow -\infty$, temos que $\|e^{Lt}x\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, completando a demonstração. \square

Definição 4.1.1.2. Seja $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Chamamos de *índice de L* a quantidade de autovalores (contando a multiplicidade) com parte real negativa.

sendo

$$A_i(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \forall 1 \leq i \leq r,$$

e

$$B_j(\varepsilon) = \begin{bmatrix} M_j & I_\varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & M_j & I_\varepsilon \\ & & & M_j \end{bmatrix},$$

com

$$M_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix} \text{ e } I_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \forall 1 \leq j \leq s,$$

Defina

$$L_0 = \begin{bmatrix} A_1(0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r(0) & & & \\ & & & B_1(0) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_s(0) \end{bmatrix}.$$

sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno qualquer em \mathbb{R}^n . Considere $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x \rangle = 1\}$. Definindo $h(x) = \langle x, x \rangle - 1$, temos que 0 é valor regular de h e $\mathbf{S}^{n-1} = h^{-1}(0)$. Queremos mostrar que $\nabla h(x) \cdot L(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{S}^{n-1}$. Perceba que, por definição,

$$h(x+v) = h(x) + \nabla h(x) \cdot v + o(\|v\|)$$

uma vez que

$$\langle x+v, x+v \rangle - 1 = \langle x, x \rangle - 1 + 2\langle x, v \rangle + \langle v, v \rangle,$$

temos

$$h(x+v) = h(x) + 2\langle x, v \rangle + \langle v, v \rangle,$$

logo

$$\nabla h(x) \cdot v = 2\langle x, v \rangle.$$

Perceba que, dado $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $x = \sum_i c_i e_i$ e portanto

$$\begin{aligned} \langle x, L_0 x \rangle &= \left\langle \sum_k c_k e_k, L_0 \left(\sum_k c_k e_k \right) \right\rangle \\ &= \sum_i c_i^2 \langle e_i, \lambda_i e_i \rangle + \sum_j c_j^2 \langle e_j, a_j e_j \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i c_i^2 \langle e_i, e_i \rangle + \sum_j a_j c_j^2 \langle e_j, e_j \rangle < 0, \end{aligned}$$

implicando que $\nabla h(x) \cdot L_0 x \neq 0$, ou seja, L_0 é transversal a \mathbf{S}^{n-1} . Além disso,

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon N,$$

onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\langle x, L_\varepsilon x \rangle = \langle x, L_0 x \rangle + \varepsilon \langle x, N x \rangle.$$

Uma vez que \mathbb{S}^{n-1} é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\langle x, L_\varepsilon x \rangle < 0, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Considere agora o produto interno

$$\langle x, y \rangle_\varepsilon = \langle S_\varepsilon x, S_\varepsilon y \rangle.$$

Teremos

$$\begin{aligned} \langle x, Lx \rangle_\varepsilon &= \langle S_\varepsilon x, S_\varepsilon Lx \rangle \\ &= \langle S_\varepsilon x, L_\varepsilon S_\varepsilon x \rangle. \end{aligned}$$

Por fim, note que $\langle x, x \rangle_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \langle S_\varepsilon x, S_\varepsilon x \rangle = 1$, implicando que $\langle x, Lx \rangle_\varepsilon < 0$ e, consequentemente, que L é transversal à esfera \mathbb{S}^{n-1} na norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$. \square

Proposição 4.1.1.2 ([18]). *Se $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ possuem mesmo índice, igual a n ou 0 , então existe um homeomorfismo em \mathbb{R}^n tal que $h \circ L_t = T_t \circ h$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Iremos provar apenas para o caso em que os índices de T e L são iguais a n , a demonstração do outro caso é análoga. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas cuja existência é dada pelo Lema 4.1.1.2, para os campos L e T respectivamente. Segue que L é transversal a $\mathbb{S}_1^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 = 1\}$ e T é transversal a $\mathbb{S}_2^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2 = 1\}$.

Afirmção 4.1.1. *Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então*

$$\#\{t \in \mathbb{R}; L_t(x) \in \mathbb{S}_1^{n-1}\} = \#\{t \in \mathbb{R}; T_t(x) \in \mathbb{S}_2^{n-1}\} = 1.$$

Provaremos apenas que o conjunto $\#\{t \in \mathbb{R}; L_t(x) \in \mathbb{S}_1^{n-1}\} = 1$, pois para o outro conjunto a demonstração é a mesma. Observe que a função $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \langle x, x \rangle_1 - 1$, é tal que $h^{-1}(0) = \mathbb{S}_1^{n-1}$ e $\nabla h(x) \cdot Lx = 2\langle x, Lx \rangle_1 < 0$. Mais ainda, da Proposição 4.1.1, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\|L_t x\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

e

$$\|L_t x\| \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow 0,$$

logo, necessariamente existe t_x , tal que $\|L_{t_x}\|_1 = 1$, o que implica que $L_{t_x} \in \mathbb{S}_1^{n-1}$. Perceba que se t é tal que $h(L_t(x)) = 0$, então

$$\left. \frac{d}{dt} h(L_t(x)) \right|_{t=0} = \nabla h(L_t(x)) \cdot L(L_t(x)) < 0,$$

e portanto as órbitas cortam \mathbb{S}_1^{n-1} do exterior para o interior da variedade, mostrando assim que t_x é único, e consequentemente demonstrando a afirmação. \blacksquare

Seja $h : \mathbf{S}_1^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}_2^{n-1}$ um homeomorfismo qualquer entre as esferas \mathbf{S}_1^{n-1} e \mathbf{S}_2^{n-1} . Iremos estender o homeomorfismo h para todo \mathbb{R}^n . Defina a função

$$\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de forma que $\bar{h}(0) = 0$ e para todo $x \neq 0$, $\bar{h}(x) = T_{t_x} \circ h(L_{-t_x}(x))$, sendo que t_x é o único valor real tal que $L_{-t_x}(x) \in \mathbf{S}_1^{n-1}$. Observe que $\bar{h}|_{\mathbf{S}_1^{n-1}} = h$.

Perceba também que

$$\begin{aligned}\bar{h}(L_t x) &= T_{t_1} \circ h(L_{-t_1} L_t(x)) \\ &= T_{t_1} \circ h \circ L_{t-t_1} x,\end{aligned}$$

sendo t_1 o único número real tal que $L_{-t_1}(L_t x) \in \mathbf{S}_1^{n-1}$, então $L_{t-t_1} x \in \mathbf{S}_1^{n-1}$, implicando $t_x = t_1 - t$

$$\begin{aligned}T_t \circ \bar{h}(x) &= T_t \circ T_{t_x} \circ h(L_{-t_x} x) \\ &= T_{t+t_x} \circ h \circ L_{t-t_1} x \\ &= T_{t_1} \circ h \circ L_{t-t_1} x \\ &= \bar{h} \circ L_t(x).\end{aligned}$$

Iremos agora verificar que \bar{h} é função contínua. Seja, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t, x) = \langle L_{-t} x, L_{-t} x \rangle_1 - 1$. É claro que

$$g(t_{x_0}, x_0) = 0$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t_{x_0}, x_0) = 2 \langle L_{-t_{x_0}} x_0, L(L_{-t_{x_0}} x_0) \rangle \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, existem abertos U_{x_0} e $I_{t_{x_0}}$ e uma única função suave $\tau : U_{x_0} \rightarrow I_{t_{x_0}}$, tal que $\tau(x_0) = t_{x_0}$ e $g(\tau(x), x) = 0$. Isso implica $L_{-\tau(x)} x \in \mathbf{S}_1^{n-1}$, para todo $x \in U_{x_0}$. Como numa vizinhança de x_0 $\bar{h}(x) = T_{\tau(x)} \circ h \circ L_{-\tau}(x)$, temos que \bar{h} é diferenciável em x_0 .

Mostraremos agora a continuidade de \bar{h} em 0. Como \mathbf{S}_2^{n-1} é compacto, \bar{h} é contínua em todo $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e para todo $y \in \mathbf{S}_2^{n-1}$ temos que $\|T_t y\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$, tal que $\|T_t y\| < \varepsilon$ para todo $t > t_\varepsilon$ e $y \in \mathbf{S}_2^{n-1}$. Por outro lado, $\|L_t x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, logo existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| < \delta$ e $t_x \in \mathbb{R}$ garante $L_{-t_x} x \in \mathbf{S}_1^{n-1}$, então $t_x > t_\varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta$ implica $t_x > t_\varepsilon$ e consequentemente

$$\|h(x)\| = \|T_{t_x}(h \circ L_{-t_x} x)\| < \varepsilon,$$

pois $h \circ L_{-t_x} x \in \mathbf{S}_2^{n-1}$.

Portanto, \bar{h} é função contínua. Para ver que \bar{h} é homeomorfismo, basta notar que $\bar{h}^{-1} = L_{t_x} \circ h^{-1}(T_{-t_x}(x))$ é a inversa de \bar{h} , que é contínua pelo mesmo motivo de h demonstrando assim a Proposição. \square

Demonstraremos agora um teorema de espacial importância, pois caracteriza a equivalência em campos lineares hiperbólicos.

Teorema 4.1.1.1 ([18]). *Sejam $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ campos hiperbólicos. Se L e T possuem o mesmo índice, então L e T são conjugados. Além disso, se L e T são equivalentes, então T e L possuem mesmo índice.*

Demonstração. Sejam L e T campos hiperbólicos em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de mesmo índice. Então $\dim(E_L^s) = \dim(E_T^s)$, sendo

$$\mathbb{R}^n = E_L^s \oplus E_L^u = E_T^s \oplus E_T^u,$$

da Proposição 4.1.1.2 existe $h_{s,u} : E_L^{s,u} \rightarrow E_T^{s,u}$ de forma que $h_{s,u} \circ L_t^{s,u} = T_t^{s,u} \circ h_{s,u}$, sendo $L^{s,u} := L|_{E_L^{s,u}}$ e $T^{s,u} := T|_{E_T^{s,u}}$. É imediato ver que a função

$$\begin{aligned} h : E_L^s \oplus E_L^u &\rightarrow E_T^s \oplus E_T^u \\ x_s + x_u &\mapsto h_s(x_s) + h_u(x_u), \end{aligned}$$

é homeomorfismo que conjugua L e T .

Supomos agora que L e T são equivalentes, sendo h a equivalência. Mostraremos que $h(E_L^s) \subset E_T^s$. Tome $x \in E_L^s$ então $L_t x \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que a equivalência preserva os conjuntos ω -limites temos que $h(E_L^s) \subset E_T^s$. Analogamente podemos provar que $E_T^s \subset h^{-1}(E_L^s)$. Portanto $h|_{E_L^s}$ é homeomorfismo entre E_L^s e E_T^s , pelo teorema da invariância do domínio. Mostramos assim que $\dim E_T^s = \dim E_L^s$ e portanto T e L possuem mesmo índice. □

Agora, nos concentraremos em analisar como os autovalores de um autovalor variam em função do operador. Tal análise será vital para demonstrar os resultados principais dessa seção.

Notação 4.1.1. *Seja $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, denotamos $\text{Esp}(L)$ como sendo o conjunto de todos os autovalores de L . Tal conjunto recebe o nome de espectro do operador L .*

Lema 4.1.1.3 ([18]). *Seja $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\|T - L\| < \delta$ então para cada $\mu \in \text{Esp}(T)$ existe $\lambda \in \text{Esp}(L)$ com $|\lambda - \mu| < \varepsilon$.*

Demonstração. Primeiramente note que podemos mergulhar $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ por meio do mapa

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \\ L &\mapsto \tilde{L}, \end{aligned}$$

sendo $\tilde{L}(v + iu) = Lv + iLu$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$. É imediato que ι é uma transformação linear satisfazendo $\|\iota(L)\| = \|L\|$. Uma vez que

$$\|L\| = \|\iota(L)\| = \sup\{\|Lv\|; \|v\| = 1 \text{ e } v \in \mathbb{C}^n\},$$

segue que se $\lambda \in \text{Esp}(L)$, então $|\lambda| < \|L\|$ e portanto, dado $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|T - L\| < 1$. Conseguimos a seguinte relação, dado $\mu \in \text{Esp}(T)$,

$$|\mu| \leq \|T\| = \|T - L + L\| \leq \|T - L\| + \|L\| < 1 + \|L\|,$$

portanto $\text{Esp}(T) \subset D := \{x \in \mathbb{C}; \|x\| \leq 1 + \|L\|\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\lambda \in \text{Esp}(L)} \{y \in \mathcal{C}; |y - \lambda| < \varepsilon\}.$$

Tomando $\xi \in D \setminus V_\varepsilon$, segue que $\det(L - \xi I) \neq 0$. Uma vez que $f(A, x) = \det(A - xI)$ é função contínua, existem uma vizinhança U_ξ de ξ em \mathcal{C} e $\delta_\xi > 0$ tais que se $\|T - L\| < \delta_\xi$ e $\tilde{\xi} \in U_\xi$ então, $\det(T - \tilde{\xi} I) \neq 0$. Implicando que $\tilde{\xi} \notin \text{Esp}(T)$. Tome a cobertura aberta $\{U_\mu\}_{\mu \in D \setminus V_\varepsilon}$ do conjunto $D \setminus V_\varepsilon$. Pela compacticidade de $D \setminus V_\varepsilon$, existe subcobertura finita $\{U_{\mu_i}\}_{i=1}^n$ de $D \setminus V_\varepsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_{\mu_1}, \dots, \delta_{\mu_n}\}$, temos que se $\|T - L\| < \delta$, então dado $\mu \in D \setminus V_\varepsilon$, $\det(T - \mu I) \neq 0$. Por fim, como $\text{Esp}(T) \subset D$, conseguimos $\text{Esp}(T) \subset V_\varepsilon$, concluindo a demonstração. \square

Lema 4.1.1.4 ([18]). *Se λ é um autovalor de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de multiplicidade m , então existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\|T - L\| < \delta$, a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola de raio $\varepsilon > 0$ e centro λ é no máximo igual a m .*

Demonstração. Supomos por redução ao absurdo que para todo $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ exista $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ com $\|T - L\| < \delta$ tal que o número de autovalores de T , contando as multiplicidades, contidos na bola de raio ε em torno de λ é maior que m .

Logo, existem $m' > m$ e uma sequência de operadores $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, tais que $L_k \subset L$ e, além disso, os autovalores $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{m'}}$ de L_k convergem para λ .

Defina

$$E_k = \text{Ker} \left((L_k - \lambda_{k_1} I) \cdot \dots \cdot (L_k - \lambda_{k_{m'}} I) \right)$$

e suponha, sem perda de generalidade, que $\dim E_k = m'$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos definir uma base ortonormal $\{e_1^k, \dots, e_{m'}^k\}$ de E_k . Perceba que $\|e_j^k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, \dots, m'\}$. Uma vez que a esfera unitária em \mathcal{C}^n é compacta, podemos assumir (tomando uma subsequência convergente, se necessário) que $e_j^k \rightarrow e_j$. Pela continuidade da norma e do produto interno, $e_1, \dots, e_{m'}$ são ortonormais e portanto geram um espaço E de dimensão m' . Uma vez que

$$(L_k - \lambda_{k_1} I) \cdot \dots \cdot (L_k - \lambda_{k_{m'}} I) \rightarrow (L - \lambda I)^{m'}$$

quando $k \rightarrow \infty$, segue que $E \subset \text{Ker}(L - \lambda I)^{m'}$, o que é um absurdo pois $\dim \text{Ker}(L - \lambda I)^{m'} = \dim \text{Ker}(L - \lambda I)^m = m < m'$. \square

Teorema 4.1.1.2 (Teorema da Dependência Contínua dos Autovalores, [18]). *Os autovalores de um operador $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ são contínuos com respeito a L .*

De maneira equivalente, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ os autovalores de L com multiplicidades n_1, n_2, \dots, n_k . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\|T - L\| < \delta$, então os autovalores de T estão contidos em $\bigcup_{j=1}^k B_\varepsilon(\lambda_j)$. Mais ainda, para cada $j = \{1, \dots, k\}$ a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola $B_\varepsilon(\lambda)$ é igual a n_j .

Demonstração. Pelo Lema 4.1.1.3, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|T - L\| < \delta$, então todos os autovalores de T estão contidos em bolas de raio ε e centro λ_j . Resta mostrar que a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola de centro λ_j é exatamente n_j . Note que, pelo Lema 4.1.1.4, essa soma é menor ou igual a n_j . Se para algum j esta soma for estritamente menor que n_j , então a soma das multiplicidades de todos os autovalores de T é estritamente menor que $\sum_{j=1}^k n_j = n$, o que é um absurdo. \square

Demonstraremos agora o resultado principal sobre a estabilidade estrutural de campos lineares

Teorema 4.1.1.3 ([18]). *Um campo $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é globalmente estruturalmente estável em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, L é hiperbólico.*

Demonstração. Supomos primeiramente, por redução ao absurdo, que L é globalmente estruturalmente estável e L não é hiperbólico. Isso significa que existe um aberto U de L em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $T \in U$, T e L são equivalentes. Mas perceba que, como L não é hiperbólico, existe um autovalor $\lambda = i\alpha$ de L , com λ sendo um imaginário puro, além disso, note que se μ é autovalor de L , então $\mu + \varepsilon$ é autovalor de $L + \varepsilon I$.

Seja $\delta = \min\{|\operatorname{Re}(x)|; x \in \operatorname{Esp}(L) \text{ e } \operatorname{Re}(x) \neq 0\}$, e tome $0 < \varepsilon < \delta$ suficientemente pequeno de forma que $L \pm \varepsilon I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pertençam a U . Uma vez que ambos os campos pertencem a U , por transitividade da equivalência de campos, $L + \varepsilon I$ é equivalente a $L - \varepsilon I$, mas perceba que $L + \varepsilon I$ e $L - \varepsilon I$ possuem índices diferentes, o que é um absurdo pelo Teorema 4.1.1.1. Logo, se L é globalmente estruturalmente estável em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, então L é hiperbólico.

Reciprocamente, supomos $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hiperbólico. Seja

$$\delta = \min\{|\operatorname{Re}(x)|; x \in \operatorname{Esp}(L)\}.$$

Dado $0 < \varepsilon < \delta$, segue, da continuidade dos autovalores de um operador linear, que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $T \in B_{\delta_1}(L) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, então os autovalores de T estão contidos em $\bigcup_{\lambda \in \operatorname{Esp}(L)} B_\varepsilon(\lambda)$, implicando que T e L possuem o mesmo índice e, portanto, novamente pelo Teorema 4.1.1.1, T e L são equivalentes. Então L é estruturalmente estável. \square

Por fim, mostraremos um teorema de residualidade dos campos hiperbólicos

Teorema 4.1.1.4 ([18]). *O conjunto dos campos lineares hiperbólicos é aberto e denso em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Uma vez que mostramos no Teorema 4.1.1.3 que L é hiperbólico se, e somente se, L é estruturalmente estável em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a abertura é clara

Para ver a densidade, dado $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tome

$$\delta = \min\{|\operatorname{Re}(x)|; x \in \operatorname{Esp}(L) \text{ e } \operatorname{Re}(x) \neq 0\},$$

e perceba que $L_\varepsilon = L + \varepsilon I$ é hiperbólico para todo $\varepsilon \in (0, \delta)$, mostrando a densidade de tal conjunto. \square

4.1.2 Estabilidade Estrutural Local de Campos de Vetores Suaves

Durante essa seção apenas M será considerado como uma variedade compacta de dimensão n .

Definição 4.1.2.1. Sejam $F \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$ uma singularidade. Caso $dF_p : T_p M \rightarrow T_p M$ (no sentido da N.B. 1.3.1) seja um isomorfismo, p é chamado de *singularidade simples*. Por outro lado, se e^{dF_p} é um *isomorfismo hiperbólico*, então p é chamado de singularidade hiperbólica.

Um ponto fixo $p \in M$ de um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ ($f(p) = p$) é chamado de *hiperbólico* se $df_p \in \mathcal{L}(T_p M)$ for um isomorfismo hiperbólico.

Denotamos o conjunto dos campos $F \in \mathfrak{X}^r(M)$ tais que todas as singularidades de F são simples por $\mathcal{G}_0 \subset \mathfrak{X}^r(M)$.

De forma análoga, o conjunto $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(M)$ é definido como sendo o conjunto dos campos tais que todas as singularidades são hiperbólicas.

Proposição 4.1.2.1 ([18]). *Sejam $F \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$ uma singularidade simples. Então existem vizinhanças \mathcal{U}_F de F em $\mathfrak{X}^r(M)$ e U_p de p em M e uma função $\rho : \mathcal{U}_F \rightarrow U_p$ tais que associa cada $G \in \mathcal{U}_F$ a uma única singularidade simples de G em U_p .*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta local de M em torno de p , tal que $\varphi(p) = 0$, e defina $V = \varphi(U)$. Sendo assim φ_*F é campo vetorial em V . Definindo a função contínua

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : V \times \mathfrak{X}^r(M) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, X) &\mapsto (\varphi_*X)(p), \end{aligned}$$

das hipóteses da proposição é imediato que $\mathcal{F}(0, F) = (\varphi_*F)(0) = d\varphi_p F(p) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(0, F) &= d(\varphi_*F)_0 \\ &= d(d\varphi_{\varphi^{-1}}F \circ \varphi^{-1})_0 \\ &= d\varphi_p \cdot dF_p \cdot d(\varphi^{-1})_0 + d(d\varphi_{\varphi^{-1}})_0 F(p) \\ &= d\varphi_p \cdot dF_p \cdot d(\varphi^{-1})_0, \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Segue do teorema da função implícita que existem vizinhanças \mathcal{U}_F de F em $\mathfrak{X}^r(M)$, U_0 de 0 em V e uma única função contínua, $R : \mathcal{U}_F \rightarrow U_0$, tais que $\mathcal{F}(q, G) = 0$, com $q \in U_0$ se e somente se $q = R(G)$. Repare que a função

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 : \mathcal{U}_F &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ X &\mapsto d(\varphi_*X)_{R(X)} \end{aligned}$$

é uma função contínua tal que $\mathcal{F}_1(F) \in GL(n, \mathbb{R})$ uma vez que $GL(n, \mathbb{R})$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, podemos diminuir o aberto \mathcal{U}_F de forma que $R(X)$ seja uma singularidade simples de φ_*X , para todo $X \in \mathcal{U}_F$. Por fim, definindo

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{U}_F &\rightarrow U_p := \varphi^{-1}(U_0) \\ X &\mapsto \varphi^{-1}(R(X)), \end{aligned}$$

concluimos a demonstração da proposição. □

A demonstração da última proposição nos garante o seguinte corolário.

Corolário 4.1.1. *Sejam N uma variedade com bordo compacta, $F \in \mathfrak{X}^r(N)$ e $p \in \text{Int}(N)$ uma singularidade simples. Então, existem vizinhanças \mathcal{U}_F de F em $\mathfrak{X}^r(M)$ e U_p de p em M e uma função $\rho : \mathcal{U}_F \rightarrow U_p$ que associa cada $G \in \mathcal{U}_F$ a uma única singularidade hiperbólica de G em U_p .*

Proposição 4.1.2.2 ([18]). *Seja $F \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$ uma singularidade hiperbólica, então existem vizinhanças \mathcal{U}_F de F em $\mathfrak{X}^r(M)$ e U_p de p em M e uma função $\rho : \mathcal{U}_F \rightarrow U_p$ tal que cada $G \in \mathcal{U}_F$ associa a uma única singularidade hiperbólica em U_p .*

Demonstração. A demonstração é semelhante a Proposição 4.1.2.1, porém diminuimos U_F de forma que o conjunto $\mathcal{F}_1(U_F)$ esteja contido no conjunto das transformações lineares hiperbólicas, isso é possível uma vez que o conjunto das transformações lineares hiperbólicas é aberto no conjunto das transformações lineares. \square

Novamente, conseguimos um corolário.

Corolário 4.1.2 ([18]). *Sejam N uma variedade com bordo compacta, $F \in \mathfrak{X}^r(N)$ e $p \in \text{Int}(N)$ uma singularidade hiperbólica, então existem vizinhanças \mathcal{U}_F de F em $\mathfrak{X}^r(M)$ e U_p de p em M e uma função $\rho : \mathcal{U}_F \rightarrow U_p$ que associa cada $G \in \mathcal{U}_F$ a única singularidade hiperbólica de G em U_p .*

Iremos agora, provar a residualidade do conjunto \mathcal{G}_0 .

Teorema 4.1.2.1 ([18]). *O conjunto \mathcal{G}_0 é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.*

Demonstração. Considere o conjunto $G_0 = \{(x, F(x)); F \in \mathcal{G}_0\} \subset \mathcal{X}^r(M)$. Como vimos na seção 1.3 é suficiente mostrar que G_0 , é um conjunto aberto e denso em $\mathcal{X}^r(M)$. Pelo Lema 1.3.1, $(x, F(x))$ é transversal a $M_0 = \{(p, 0); p \in M\} \subset TM$ se, e somente se, todas as singularidades de F são simples. Segue que

$$G_0 = \{(x, F(x)) \in \mathcal{X}^r(M); (x, F(x)) \pitchfork M_0\}.$$

Mostraremos agora a abertura de \mathcal{G}_0 . Tome $F \in \mathcal{G}_0$. Como M é compacto, se $F \in \mathcal{G}_0$ então F possui apenas finitos pontos singulares, caso contrário é fácil ver que dF_p não seria isomorfismo. Considere a função contínua

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathfrak{X}^r(M) \times M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (X, p) &\mapsto X(p), \end{aligned}$$

relembrando que $X(p) \in T_p M \subset \mathbb{R}^n$ para todo $p \in M$. Sejam p_1, \dots, p_k os finitos pontos singulares de F . Pela Proposição 4.1.2.1, existem vizinhanças abertas \mathcal{U}_F^i de F em $\mathfrak{X}^r(M)$ e U_{p_i} de p_i em M de forma que, se $G \in \mathcal{U}_F^i$, então G possui uma única singularidade simples em U_{p_i} . Perceba que

$$V = M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}$$

é compacto e $\delta = \min\{\|\mathcal{F}(F, v)\|, v \in V\} > 0$, logo existe uma vizinhança \mathcal{V}_F de F em $\mathfrak{X}^r(M)$, tal que $\mathcal{F}(G, q) \neq 0$, para todo $G \in \mathcal{V}_F$ e $q \in V$. Segue portanto que

$$F \in \mathcal{V}_F \cap \left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_F^i \right) \subset \mathcal{G}_0,$$

demonstrando assim a abertura.

Mostraremos agora a densidade. Tome $F \in \mathfrak{X}^r(M)$ e considere $(x, F(x)) \in \mathcal{X}^r(M)$. É fácil ver que $(x, F(x)) \in C^\infty(M, TM)$. Do teorema de Thom, sabemos que o conjunto

$$S = \{g \in C^\infty(M, TM); g \pitchfork M_0\}$$

é aberto e denso em $C^\infty(M, TM)$, logo existe $g \in S$ suficientemente próximo de $(x, F(x))$. Perceba que $g(p) = (h(p), H(p))$, de forma que $H(p) \in T_{h(p)}M$. Como g está próximo de $(x, F(x))$, temos que $h(x)$ está suficientemente próximo da função identidade. Como

M é compacto, o conjunto dos difeomorfismos é aberto em $\mathcal{C}^\infty(M, M)$. Logo, podemos escolher g suficientemente próximo de $(x, F(x))$ de para que h seja um difeomorfismo. Por fim, tome

$$f(p) = g(h^{-1}(p)) = (p, H \circ h^{-1}(p)) \in \mathcal{C}^\infty(M, TM),$$

como $f \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ então $H \circ h^{-1}(p) \in \mathfrak{X}^r(M)$. Por fim, é fácil ver que $f \in \mathcal{G}_0$. O que implica $H \circ h^{-1}(p) \in \mathcal{G}_0$. E então, percebendo que $H \circ h^{-1}$ está suficientemente próximo de F , o teorema é demonstrado. \square

Corolário 4.1.3 ([18]). *Sejam N uma variedade com bordo e $\tilde{\mathcal{G}}_0 \subset \mathfrak{X}^r(N)$ o conjunto dos campos que não se anulam em ∂N e cujas singularidades são simples, então $\tilde{\mathcal{G}}_0$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(N)$.*

Demonstração. Partindo da mesma demonstração do Teorema 1.3.4, e com mínimas adaptações, vemos que o conjunto dos campos que não se anulam em ∂N é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(N)$. Além disso, utilizando a mesma demonstração acima, vemos que o conjunto dos campos que possuem apenas singularidades simples em $\text{Int}(N)$ também é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(N)$. Como $\tilde{\mathcal{G}}_0$ é a interseção dos dois conjuntos descritos anteriormente, o resultado segue. \square

Teorema 4.1.2.2 ([18]). *O conjunto \mathcal{G}_1 é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.*

Demonstração. A abertura é demonstrada de maneira análoga ao Teorema 4.1.2.1 usando a Proposição 4.1.2.2 invés da Proposição 4.1.2.1.

Mostraremos que \mathcal{G}_1 é denso em $\mathfrak{X}^r(M)$. Tome $F \in \mathfrak{X}^r(M)$, então, pelo Teorema 4.1.2.1, existe uma função $G \in \mathcal{G}_0$ suficientemente próxima de F . Sejam p_1, \dots, p_k as finitas singularidades de G . Sejam (φ_i, V_i) cartas de M em torno de p_i tal que $\varphi_i(p_i) = 0$ (de forma que $V_j \cap V_i = \emptyset$ se $i \neq j$), para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Como vimos na demonstração do Teorema 4.1.1.4, existe λ_i suficientemente próximo da origem, para que

$$d(\varphi_*G)_{\varphi(p_i)} + \lambda_i I$$

seja um isomorfismo hiperbólico. Dessa forma, podemos considerar $H \in \mathfrak{X}^r(M)$, definido por

$$H(x) = G(x) + \sum_{i=1}^k f_i(x) \lambda_i d\varphi_{i\varphi_i(x)}^{-1} \varphi_i(x),$$

sendo $f_i(x)$ *bump functions* tais que $f_i(M \setminus U_i) = \{0\}$ e $f_i(\overline{V_i}) = \{1\}$; onde V_i são abertos de M , centrados em p_i , tais que

$$V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i.$$

Perceba que

$$H(p_j) = G(p_j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(p_j) d\varphi_{i\varphi_i(x)}^{-1} \varphi_i(p_j) = 0,$$

pois $f_i(p_j) = 0$ se $i \neq j$ e $\varphi_j(p_j) = 0$. Além disso,

$$(\varphi_*H)(0) = d\varphi_*G + \lambda_i I$$

é um isomorfismo hiperbólico. Por fim, como os λ_i 's podem ser tomados tão pequenos quanto se queira, temos pela Proposição 4.1.2.1 que p_1, \dots, p_k são as únicas singularidades de H , todas hiperbólicas. Como G pode ser tomado tão próximo de F quanto se queira

e H tão próximo de G quanto se queira, então H está próximo de F , mostrando assim a densidade de \mathcal{G}_1 . □

Corolário 4.1.4. *Sejam N uma variedade com bordo e $\tilde{\mathcal{G}}_1 \subset \mathfrak{X}^r(N)$ o conjunto dos campos que não se anulam em ∂N cujas singularidades são hiperbólicas, então $\tilde{\mathcal{G}}_1$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(N)$.*

Demonstração. Utilizando a demonstração do Teorema 1.3.4, com mínimas adaptações, vemos que o conjunto dos campos que não se anulam em ∂N é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(N)$. Além disso, utilizando a demonstração do último teorema, vemos que o conjunto dos campos que possuem apenas singularidades hiperbólicas em $\text{Int}(N)$ também é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(N)$. Como $\tilde{\mathcal{G}}_1$ é a interseção dos dois conjuntos descritos anteriormente, o resultado segue. □

Agora demonstraremos o resultado principal da seção, que mostra que os campos globalmente localmente estruturalmente estáveis são abertos e densos em $\mathcal{X}^r(M)$.

Teorema 4.1.2.3 ([18]). *Seja $F \in \mathcal{G}_1$, então F é globalmente localmente estruturalmente estável em $\mathcal{X}^r(M)$.*

Demonstração. Tome $F \in \mathcal{G}_1$ e seja $p \in M$ um ponto regular de F . Uma vez que a função

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{X}^r(M) \times M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (F, p) &\mapsto F(p) \end{aligned}$$

é contínua, existe uma vizinhança aberta de $\mathcal{U}_F \subset \mathcal{G}_1$ de F em $\mathcal{X}^r(M)$ tal que $G(p) \neq 0$, para todo $G \in \mathcal{U}_F$. Pelo teorema do fluxo tubular existem vizinhanças U_p e V_p^G de p em M , de forma que $F|_{U_p}$ e $G|_{V_p^G}$ são equivalentes ao campo $X_c : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X_c(x) = (1, 0, \dots, 0)$, para todo $x \in B_1(0)$. Uma vez que equivalência topológica é relação de equivalência, por transitividade $F|_{U_p}$ e $G|_{V_p^G}$ são equivalentes, para todo $G \in \mathcal{U}_F$.

Supomos agora que p é uma singularidade hiperbólica de F . Dada U uma vizinhança qualquer de p , tome $U_p \subset U$ uma vizinhança de p suficientemente pequena para que $\mathcal{U}_F = \rho^{-1}(U_p)$ esteja bem definida e para que, qualquer $G \in \mathcal{U}_F$, $\rho(G)$ possua o mesmo índice no campo G que o ponto p possui no campo F , sendo ρ a função da proposição 4.1.2.2. Do teorema de Hartman-Grobman, F é localmente equivalente a $dF_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ em p e 0, respectivamente. De forma análoga, G é localmente equivalente a $dG_{\rho(G)}$ em $\rho(G)$ e 0, respectivamente. Uma vez que dF_p e $dG_{\rho(G)}$ possuem mesmo índice, esses dois campos lineares são equivalentes. Por transitividade, F e G são equivalentes em p e $\rho(G)$, respectivamente.

Mostramos assim que todo elemento de \mathcal{G}_1 é globalmente localmente estruturalmente estável. □

Perceba que a demonstração do Teorema 4.1.2.3 nos garante o seguinte corolário.

Corolário 4.1.5. *Sejam N uma variedade compacta com bordo, $p \in \text{Int}(N)$ e $X \in \mathfrak{X}^r(N)$. Caso p seja um ponto regular de X ou uma singularidade hiperbólica de N , então X é localmente estruturalmente estável em p no conjunto $\mathfrak{X}^r(N)$.*

4.2 Estabilidade Estrutural Local em Campos Suaves por Partes

Neste momento, voltamos a assumir que M é uma 3-variedade compacta sem bordo e a variedade de descontinuidade Σ é uma 2-variedade compacta e orientável mergulhada em M .

Nosso objetivo agora será estender a estabilidade estrutural local para campos em $\Omega^r(M, \Sigma)$. Note que se $p \in M \setminus \Sigma$, o Corolário 4.1.5 nos fornece uma condição suficiente para estabilidade estrutural local, pois se $(X^+, X^-) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in M^\pm \setminus \Sigma$, então existe uma vizinhança aberta U^\pm de p inteiramente contida em M^\pm . Então, analisar a estabilidade estrutural local de (X^+, X^-) em $\Omega^r(M, \Sigma)$ é equivalente a analisar a estabilidade estrutural local em p do campo X^\pm em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$. Mais ainda, uma vez que pelo Corolário 4.1.4 o conjunto dos campos (X, Y) , tais que X e Y não se anulam em Σ e as singularidades de X e Y são todas hiperbólicas é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$, nos resta apenas entender como funciona a estabilidade estrutural na variedade de descontinuidade Σ .

Para isso, precisamos entender a dinâmica no conjunto que segue.

Definição 4.2.1. O conjunto $\Sigma_0 \subset \Omega^r(M, \Sigma)$ é o conjunto dos campos $(X, Y) \in \Omega^r(M)$ tais que (X, Y) é globalmente localmente estruturalmente estável em $\Omega^r(M)$.

Uma vez que pelo Teorema 3.2 o conjunto Ξ_0 é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$, é suficiente estudar a estabilidade estrutural local em Ξ_0 . Sendo assim, precisamos apenas entender a estabilidade estrutural local nos pontos $p \in \Sigma$ com p satisfazendo uma das seguintes condições:

- i) regular-regular;
- ii) dobra-regular;
- iii) cúspide-regular;
- iv) dobra-dobra.

Durante toda essa subseção consideraremos a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, como uma função suave, tendo 0 como valor regular e satisfazendo $f^{-1}(0) = \Sigma$.

4.2.1 Caso Regular-Regular

Definição 4.2.1.1. Dado um campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$, o campo $Z_N^d \in \mathfrak{X}^r(\Sigma)$, $Z_N^d(p) = Xf(p)Y(p) - Yf(p)X(p)$, é chamado de campo deslizando normalizado de Z . Perceba que, $Z_N^d \in \mathfrak{X}^r(\Sigma)$, pois para todo $p \in \Sigma$, $\nabla f(p) \cdot Z_N^d(p) = 0$, o que implica $Z_N^d \in T_p\Sigma$.

Um ponto $p \in \Sigma$ tal que $Z_N^d(p) = 0$ é chamado de ponto de pseudoequilíbrio do ponto deslizando Z^d . Caso $Z_N^d \neq 0$, o ponto p recebe o nome de ponto de deslize regular.

Lema 4.2.1.1. Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$ um ponto tal que $\nabla f(p) \cdot X(p) \neq 0$, então existem uma vizinhança U_p de p em M^\pm e uma função suave $\tau : U_p \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tais que

$$h(\varphi_X(t, x)) = 0, \text{ com } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ e } x \in U_p \iff t = \tau(x).$$

Demonstração. Uma vez que X é um campo suave em $\mathfrak{X}^r(M^\pm)$, podemos estender o campo \widetilde{X} para um campo $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}^r(V)$, sendo que V é uma vizinhança de M^\pm em M . É amplamente sabido da teoria de equações diferenciais ordinária, que existe uma vizinhança V_p de p em V e um número real $\delta > 0$ tais que $\varphi_{\widetilde{X}}(t, x)$ está definido para todo $t \in (-\delta, \delta)$ e $x \in V_p$. Considere a função contínua

$$F : V_p \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \rightarrow f(\varphi_{\widetilde{X}}(t, x))$$

e perceba que

$$\frac{dF}{dt}(p, 0) = \nabla f(p) \cdot \widetilde{X}(p) = \nabla f(p) \cdot X(p) \neq 0.$$

pelo teorema da função implícita, existem vizinhanças abertas W_p de p em V , $\varepsilon > 0$ e uma função suave $\sigma : W_p \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tais que

$$h(\varphi_{\widetilde{X}}(t, x)) = 0 \text{ com } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ e } x \in W_p \iff t = \sigma(x),$$

tomando $U_p = W_p \cap M^\pm$ e $\tau = \sigma|_{U_p}$, concluímos a demonstração do teorema. \square

Teorema 4.2.1.1 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de costura, então Z é Σ -equivalente ao campo $\widetilde{Z} = ((1, 0, 0), (1, 0, 0)) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ em p e 0, respectivamente.*

Demonstração. Considere $\tau_X : U_p \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e $\tau_Y : V_p \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ as funções dadas pelo Lema 4.2.1.1. Perceba que existe uma vizinhança aberta W de p em Σ tal que existe um homeomorfismo $h : W \rightarrow \{0\} \times (-1, 1)^2$, sendo que $W \subset U_p \cup V_p$. Considere agora o conjunto

$$\widetilde{W} = \{q \in M; q = \varphi_X(t, x) \text{ ou } q = \varphi_Y(t, x), \text{ para algum } (t, x) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times W\} \subset U_p \cup V_p.$$

Por fim, considere a seguinte função

$$\bar{h} : \widetilde{W} \rightarrow \bar{h}(\widetilde{W}) \subset \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \begin{cases} \varphi_{(1,0,0)}(-\tau_X(x), h \circ \varphi_X(\tau_X(x), x)) & , \text{ se } x \in M^+ \setminus \Sigma \\ h(x) & , \text{ se } x \in \Sigma \\ \varphi_{(1,0,0)}(-\tau_Y(x), h \circ \varphi_Y(\tau_Y(x), x)) & , \text{ se } x \in M^- \setminus \Sigma, \end{cases}$$

uma vez que \bar{h} é claramente suave e injetiva, o teorema da invariância do domínio nos garante que \bar{h} é homeomorfismo. Por fim, note que

$$\begin{aligned} \bar{h} \circ \varphi_X(t, x) &= \varphi_{(1,0,0)}(-\tau_X(\varphi_X(t, x)), h \circ \varphi_X(\tau_X(\varphi_X(t, x)), \varphi_X(t, x))) \\ &= \varphi_{(1,0,0)}(-\tau_X(\varphi_X(t, x)), h \circ \varphi_X(t + \tau_X(\varphi_X(t, x)), x)), \end{aligned}$$

então $\varphi_X(t + \tau_X(\varphi_X(t, x)), x)$ pertence a Σ e, por unicidade, $\tau(x) = t + \tau_X(\varphi_X(t, x))$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \bar{h} \circ \varphi_X(t, x) &= \varphi_{(1,0,0)}(t - \tau(x), h \circ \varphi_X(\tau(x), x)) \\ &= \varphi_{(1,0,0)}(t, \bar{h}(x)) \end{aligned}$$

de maneira análoga mostra-se que $\bar{h} \circ \varphi_Y(t, x) = \varphi_{(1,0,0)}(t, \bar{h}(x))$. Juntando tais resultado com o Teorema 1.1.2, temos que \bar{h} é uma Σ -equivalência entre Z e $(1, 0, 0)$ em p e 0. \square

Antes de prosseguir com os demais resultados, provaremos o seguinte lema

Lema 4.2.1.2. *Sejam N uma n -variedade compacta, $s : N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente positiva e $X \in \mathfrak{X}^r(N)$, então os campos X e sX são equivalentes.*

Demonstração. Seja φ_X o fluxo do campo X . Definimos a EDO definida em \mathbb{R} com perturbação em N

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t, x) = s(\varphi_X(y(t, x), x)), \\ y(0, x) = 0, \end{cases}$$

seja $\tau(t, x)$ a solução da EDO acima, perceba que a curva

$$\beta(t, x) = \varphi_X(\tau(t, x), x)$$

é tal que $\beta(0, x) = x$ e

$$\frac{d\beta}{dt}(t, x) = \frac{d\tau}{dt}(t, x) \frac{d\varphi_X}{dt}(\tau(t, x), x) = s(\beta(t, x))X(\beta(t, x)),$$

portanto, $\beta(t, x)$ é o fluxo do campo sX . Segue dessa observação que a própria identidade é equivalência topológica entre X e sX . □

Teorema 4.2.1.2 (Adaptado de [8]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma^s$ (resp. Σ^u) um ponto de deslize regular, então (X, Y) é Σ -equivalente ao campo constante $\tilde{Z} = ((-1, 1, 0), (1, 1, 0)) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ (resp. $\tilde{Z} = ((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$) em p e 0 , respectivamente.*

Demonstração. Provaremos apenas para o caso $p \in \Sigma^s$, pois a demonstração para $p \in \Sigma^u$ é análoga.

Sejam $\tau_X : U_p \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e $\tau_Y : V_p \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ as funções dadas pelo Lema 4.2.1.1. Perceba que existe uma vizinhança aberta W de p em Σ contida em $U_p \cup V_p$. Como $p \in \Sigma^s$, $\tau_X \leq 0$ e $\tau_Y \geq 0$.

Primeiramente, é consequência imediata do Lema 4.2.1.2 que os campos Z^d e Z_N^d são localmente topologicamente equivalentes em p . Além disso, como p é ponto regular de Z_N^d , o teorema do fluxo tubular nos diz que existe uma equivalência topológica

$$h : W_p \subset \Sigma \cap W \rightarrow \{0\} \times (-1, 1)^2 \subset \{0\} \times \mathbb{R}^2$$

entre Z^d (que é equivalente ao campo Z_N^d) e o campo $(0, 1, 0) \in \mathfrak{X}^r(\{0\} \times \mathbb{R}^2)$. Definindo o conjunto contido em $U_p \cup V_p$

$$\tilde{W} = \{q \in M; q = \varphi_X(t, x) \text{ ou } q = \varphi_Y(t, x), \text{ para algum } (t, x) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times W\}$$

e a função

$$\tilde{h} : \tilde{W} \rightarrow \tilde{h}(\tilde{W})$$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi_{(-1,1,0)}(-\tau_X(x), h \circ \varphi_X(\tau_X(x), x)) & , \text{ se } x \in M^+ \setminus \Sigma \\ h(x) & , \text{ se } x \in \Sigma \\ \varphi_{(1,1,0)}(-\tau_Y(x), h \circ \varphi_Y(\tau_Y(x), x)) & , \text{ se } x \in M^- \setminus \Sigma, \end{cases}$$

como \bar{h} é contínua e injetiva, segue do teorema da invariância do domínio que \bar{h} é um homeomorfismo.

Fazendo o mesmo procedimento do Teorema 4.2.1.1 e utilizando a construção de \bar{h} temos

$$\bar{h} \circ \varphi_X(t, x) = \varphi_{(-1,1,0)}(t, \bar{h}(x)),$$

$$\bar{h} \circ \varphi_Y(t, x) = \varphi_{(1,1,0)}(t, \bar{h}(x)), \text{ e}$$

$$\bar{h} \circ \varphi_{Z^d}(t, x) = \varphi_{(0,1,0)}(t, \bar{h}(x)),$$

mostrando que \bar{h} é equivalência topológica entre (X, Y) e $((-1, 1, 0), (1, 1, 0))$ em p e 0 , respectivamente. \square

Teorema 4.2.1.3 (Adaptado de [8]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma^s$ (resp. Σ^u) um pseudoequilíbrio hiperbólico e $A = d(\varphi|_{\Sigma^*} Z^d)_0$. Então (X, Y) é Σ -conjugado a $((b, A(y, z)), (-b, 0, 0)) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ em p e 0 , respectivamente, sendo $b = \text{sgn}(Xf(p))$.*

Demonstração. Sejam $\tau_X : U_p \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e $\tau_Y : V_p \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ as funções dadas pelo Lema 4.2.1.1. Perceba que existe uma vizinhança W de p em Σ tal que $\omega \subset U_p \cup V_p$ e como $p \in \Sigma^s$, $b \cdot \tau_X \geq 0$ e $b \cdot \tau_Y \leq 0$.

Defina $F(x, y, z) = (b, A(y, z)) \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^3)$ e $G(x, y, z) = (-b, 0, 0)$ e denote o campo deslizante de $(F, G) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3, \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ por H^d . Um cálculo imediato nos mostra que $H^d(0, y, z) = (0, A(y, z))$. Pelo teorema de Hartman-Grobman, existe uma equivalência local $h : W_p \subset W \cap \Sigma \rightarrow V_0 \subset \{0\} \times \mathbb{R}^2$, entre os campos Z^d e $(0, A(y, z))$ em p e 0 respectivamente. Definindo o conjunto contido em $U_p \cup V_p$

$$\widetilde{W} = \{q \in M; q = \varphi_X(t, x) \text{ ou } q = \varphi_Y(t, x), \text{ para algum } (t, x) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times W_p\}$$

e considerando a função

$$\bar{h} : \widetilde{W} \rightarrow \bar{h}(\widetilde{W}) \subset \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi_F(-\tau_X(x), h \circ \varphi_X(\tau_X(x), x)) & , \text{ se } x \in M^+ \setminus \Sigma \\ h(x) & , \text{ se } x \in \Sigma \\ \varphi_G(-\tau_Y(x), h \circ \varphi_Y(\tau_Y(x), x)) & , \text{ se } x \in M^- \setminus \Sigma, \end{cases}$$

como \bar{h} é contínua e injetiva, segue do teorema da invariância do domínio que \bar{h} é um homeomorfismo.

Considerando o Teorema 4.2.1.1 e utilizando construção de \bar{h} temos

$$\bar{h} \circ \varphi_X(t, x) = \varphi_F(t, \bar{h}(x)),$$

$$\bar{h} \circ \varphi_Y(t, x) = \varphi_G(t, \bar{h}(x)),$$

$$\bar{h} \circ \varphi_{Z^d}(t, x) = \varphi_{(0,A)}(t, \bar{h}(x)),$$

mostrando que \bar{h} é equivalência topológica entre (X, Y) e $((b, A(y, z)), (-b, 0, 0))$ em p e 0 , respectivamente. \square

Agora iremos nos concentrar em provar propriedades a respeito da estabilidade estrutural local em um ponto regular-regular.

Lema 4.2.1.3. *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ ponto de pseudo equilíbrio hiperbólico, então existem uma vizinhança aberta \mathcal{U}_Z de Z em $\Omega^r(M, \Sigma)$, U_p de p em Σ e uma função contínua $\rho : \mathcal{U}_Z \rightarrow U_p$ tal que*

$$W^d(q) = 0, \quad W \in \mathcal{U}_Z \text{ e } q \in U_p \iff q = \rho(W),$$

sendo que $\rho(W)$ é um ponto de pseudoequilíbrio hiperbólico de W^d , para todo $W \in \mathcal{U}_Z$.

Demonstração. Seja (φ, U_p) uma carta em torno de p em Σ tal que $\varphi(p) = 0$. Considere a função contínua

$$\begin{aligned} F : \Omega^r(M, \Sigma) \times \varphi(U_p) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, x) &\rightarrow (\varphi_* X^d)(x). \end{aligned}$$

Note que $F(Z, p) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Z, p) = d(\varphi_* Z)_0$$

é um isomorfismo hiperbólico. Segue do teorema da função implícita que existem abertos \mathcal{U}_Z em $\Omega^r(M, \Sigma)$, V_0 de 0 em \mathbb{R}^2 e uma função contínua $R : \mathcal{U}_Z \rightarrow V_0$ tais que

$$F(G, q) = 0, \quad W \in \mathcal{U}_Z \text{ e } q \in U_0 \iff q = R(G).$$

Uma vez que o conjunto das matrizes hiperbólicas é aberto, fato demonstrado no Teorema 4.1.1.4, o conjunto \mathcal{U}_Z pode ser diminuído de forma que cada $d(\varphi_* W^d)_{R(W)}$ é um isomorfismo hiperbólico, para todo $W \in \mathcal{U}_F$. A demonstração se finaliza definindo $\rho = \varphi^{-1} \circ R$. \square

Teorema 4.2.1.4. *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ ponto regular-regular tal que p é um ponto de deslize regular ou é um ponto de pseudoequilíbrio hiperbólico, então Z é Σ -estruturalmente estável em p .*

Demonstração. Supomos primeiramente que p é um ponto de deslize regular. Considere (φ, U_p) uma carta em torno de p em Σ tal que $\varphi(p) = 0$ e a função contínua

$$\begin{aligned} F : \Omega^r(M, \Sigma) \times \varphi(U_p) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, x) &\rightarrow (\varphi_* X^d)(x), \end{aligned}$$

como $F(Z, 0) \neq 0$, existe uma vizinhança \mathcal{U}_Z de Z em $\Omega(M, \Sigma)$ tal que $F(W, 0) \neq 0$ para todo $W \in \mathcal{U}_Z$. Tal fato implica que, se $p \in \Sigma^{s,u}$ para o campo Z , então $p \in \Sigma^{s,u}$ para o campo W , $\forall W \in \mathcal{U}_Z$. Segue portanto dos Teoremas 4.2.1.1 e 4.2.1.2 que todos os elementos do aberto \mathcal{U}_Z são localmente equivalentes entre si no ponto p , mostrando a estabilidade estrutural local em p .

Supomos agora que p é um ponto de pseudoequilíbrio hiperbólico de Z e considere (φ, U_p) uma carta adaptada em torno de p em M com relação a Σ (com $\varphi(p) = 0$). Seja U uma vizinhança qualquer de p em M . Tome $U_p \subset U$ uma vizinhança de p suficientemente pequena, de forma que $\mathcal{U}_Z = \rho^{-1}(U_p)$ esteja bem definida e para todo $W \in \mathcal{U}_F$, $\rho(W)$ possua o mesmo índice no campo W^d que o ponto p no campo Z^d , sendo que ρ é a função do Lema 4.2.1.3.

Do Teorema 4.2.1.3, o campo

$$Z \text{ é localmente equivalente a } \left((b, d(\varphi|_{\Sigma_*} Z^d)_0(y, z)), (-b, 0, 0) \right) \text{ em } p \text{ e } 0,$$

e, de forma análoga,

W é localmente equivalente a $\left(\left(-b, d \left(\varphi|_{\Sigma^*} W^d \right)_{\varphi(\rho(G))} (y, z) \right), (-b, 0, 0) \right)$ em $\rho(G)$ e 0.

Uma vez que

$$\left(\left(b, d \left(\varphi|_{\Sigma^*} Z^d \right)_0 (y, z) \right), (-b, 0, 0) \right) \text{ e } \left(\left(-b, d \left(\varphi|_{\Sigma^*} W^d \right)_{\varphi(\rho(G))} (y, z) \right), (-b, 0, 0) \right)$$

são equivalentes, pois os isomorfismos hiperbólicos $d\varphi|_{\Sigma^*} Z_0^d$ e $d\varphi|_{\Sigma^*} W_{\varphi(\rho(W))}^d$ possuem mesmo índice (Teorema 4.1.1.3), os dois campos lineares acima são equivalentes. Logo, por transitividade, Z e W Σ -são equivalentes em p e $\rho(G)$, respectivamente, demonstrando o teorema. \square

Mostraremos agora a residualidade dos campos descritos no Teorema 4.2.1.4

Teorema 4.2.1.5. *O conjunto dos campos $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ tais que todos os pontos regular-regular de $Z_N^d \in \mathfrak{X}^r(\Sigma)$ são pontos de deslize regular ou de pseudoequilíbrio hiperbólico é aberto e denso em $\Omega^r(M)$.*

Demonstração. Chame de $\mathcal{V} \subset \Omega^r(M, \Sigma)$ o conjunto do enunciado. A abertura de \mathcal{V} segue da aplicação conjunta do Lema 4.2.1.3 e do Teorema 4.2.1.4.

Mostraremos agora a densidade. Primeiramente, considere a equação diferencial ordinária definida em M ,

$$x'(t) = \nabla f(x(t)).$$

Seja φ o fluxo da equação acima. Podemos supor sem perda de generalidade que existe $\delta > 0$ tal que o fluxo

$$\begin{aligned} \varphi : (-\delta, \delta) \times \Sigma &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \varphi(t, p) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem e, portanto, em $U = \varphi((-\delta, \delta) \times \Sigma)$. Logo, em U , existem funções

$$X_1, Y_1 : (-\delta, \delta) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

e X_2, Y_2 tais que $X_2(t, p), Y_2(t, p) \in T_p \Sigma$, de forma que

$$X(\varphi(t, p)) = X_1(t, p)u(t, p) + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)X_2(t, p),$$

e

$$Y(\varphi(t, p)) = Y_1(t, p)u(t, p) + \frac{d\varphi}{dp}(t, p)Y_2(t, p),$$

sendo

$$u(t, p) = \frac{\nabla f(\varphi(t, p))}{\|\nabla f(\varphi(t, p))\|^2}.$$

Portanto, dado $p \in \Sigma$,

$$Xf(p) = Xf(\varphi(0, p)) = X_1(0, p)$$

e

$$Yf(p) = Yf(\varphi(0, p)) = Y_1(0, p).$$

Sendo assim, para todo $p \in \Sigma$

$$\begin{aligned} Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p) &= \frac{d\varphi}{dp}(0, p) (Y_1(0, p)X_2(0, p) - X_1(0, p)Y_2(0, p)) \\ &= Y_1(0, p)X_2(0, p) - X_1(0, p)Y_2(0, p). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Seja $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$ uma cobertura finita de Σ por cartas tais que $\varphi(U_i) = B_3(0)$ e os conjuntos $K_i = \varphi^{-1}(\overline{B_1(0)})$ satisfazem que a união de seus interiores resulta em todo o Σ . Considere os conjuntos

$$\mathcal{U}_i = \left\{ Z = (X, Y); \begin{array}{l} \text{Todas as singularidades em pontos regular-regular de } Z^d|_{K_i} \\ \text{estão contidas no interior de } K_i \text{ e são hiperbólicas} \end{array} \right\}$$

vamos mostrar que cada \mathcal{U}_i é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$, a abertura segue pelo mesmo motivo da abertura de \mathcal{V} .

Note que como Ξ_0 é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$, é suficiente mostrar que cada \mathcal{U}_i é denso em Ξ_0 . Tome $Z = (X, Y) \in \Xi_0$. Pela equação (4.2.1), temos

$$\varphi_{i*}Z_N^d = \tilde{Y}_1(p)\tilde{X}_2(p) - \tilde{X}_1(p)\tilde{Y}_2(p),$$

sendo

$$\tilde{X}_1(p) = X_1(0, \varphi_i^{-1}(p)), \quad \tilde{Y}_1(p) = Y_1(0, \varphi_i^{-1}(p))$$

e

$$\tilde{X}_2 = \varphi_{i*}X_2(0, \cdot), \quad \tilde{Y}_2 = \varphi_{i*}Y_2(0, \cdot).$$

considere agora a função

$$\begin{aligned} G_i : K_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow TK_i \\ (p, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2) &\mapsto (p, (\tilde{Y}_1(p) + \alpha_1)(\tilde{X}_2(p) + v_1) - (\tilde{X}_1(p) + \alpha_2)(\tilde{Y}_2(p) + v_2)). \end{aligned}$$

É claro que $G_i \pitchfork K_i \times \{0\} \subset TK_i$, logo, pelo Teorema 1.3.2, o conjunto

$$S_i = \{(\alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2); G_i(\cdot, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2) \pitchfork \{0\} \text{ e } \partial G_i(\cdot, s) \pitchfork \{0\}\}$$

é residual em \mathbb{R}^6 . Note que podemos supor sem perda de generalidade que $G_i(\cdot, s) \in \mathfrak{X}^r(K_i)$ (vide Lema 1.3.1). Se $s \in S$ e existe $p \in K_i$, tal que $G_i(p, s) = 0$, então

$$\frac{dG_i}{dp}(p, s) : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma,$$

é um isomorfismo. Como K_i é compacto a quantidade de pontos singulares de G_i em K_i é finita. Além disso, note que $G_i(\cdot, s)$ não possui pontos singulares no bordo de K_i , pois uma vez que $\partial G_i(\cdot, s) \pitchfork K_i \times \{0\}$ e ∂K_i é uma 1-variedade,

$$\frac{d\partial G_i}{dp}(p, s) : T_p(\partial K_i) \rightarrow T_p\Sigma,$$

não pode ser sobrejetivo.

Tome $(\alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2) \in S_i$ e denote

$$G^{\alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2}(p) = G(p, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2) = \tilde{Y}_1^\alpha(p)\tilde{X}_2^{v_1}(p) - \tilde{X}_1^{\alpha_2}(p)Y_2^{v_2}(p).$$

Sejam p_1, \dots, p_n as únicas singularidades que são pontos regular-regular de $G^{\alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2}$ e V_1, \dots, V_n vizinhanças abertas de p_i , tais que $\bar{V}_i \cap \bar{V}_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Sejam f_j *bump functions* em K_i que são 0 no complementar de V_j e iguais a 1 numa vizinhança de p_j .

Denotando

$$H_{\lambda_1^j, \lambda_2^j}^j = \tilde{Y}_1^{\alpha_1}(p) \left(\tilde{X}_2^{v_1}(p) + \lambda_1^j f_j(p)(p - p_j) \right) - \tilde{X}_1^{\alpha_2}(p) \left(Y_2^{v_2}(p) + \lambda_2^j f_j(p)(p - p_j) \right),$$

e derivando $H_{\lambda_1^j, \lambda_2^j}^j$ em p_j temos

$$d \left(H_{\lambda_1^j, \lambda_2^j}^j \right)_{p_j} = d \left(G^{\alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2} \right)_{p_j} + \left(\lambda_1^j \tilde{Y}_1^{\alpha_1}(p_j) - \lambda_2^j \tilde{X}_1^{\alpha_2}(p_j) \right) \text{Id}.$$

Uma vez que $\tilde{X}_1^{\alpha_2}(p_j)$ e $\tilde{Y}_1^{\alpha_1}(p_j)$ são diferentes de 0, pois o ponto p_j é regular-regular, segue que o conjunto dos $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$ que tornam $d \left(H_{\lambda_1^j, \lambda_2^j}^j \right)_{p_j}$ hiperbólico é aberto e denso em \mathbb{R}^2 . Chame tal conjuntos de L_i^j .

Escolha uma função suave

$$\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow [0, 1],$$

tal que $\beta([-\delta/4, \delta/4]) = \{1\}$ e $\beta((-\delta, \delta/2] \cup [\delta/2, \delta)) = \{0\}$ e uma *bump function* g_i tal que $g_i(K_i) = 1$ e $g_i(\Sigma \setminus U_i) = \{0\}$. Considerando

$$\begin{aligned} \bar{X}_2(t, p) &= X_2(t, p) + g_i(p) \varphi_i^{-1} * \left(\beta(t) v_2 + \beta(t) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_1^j f_j(p)(p - p_j) \right) \right), \text{ e} \\ \bar{Y}_2(t, p) &= Y_2(t, p) + g_i(p) \varphi_i^{-1} * \left(\beta(t) v_1 + \beta(t) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_2^j f_j(p)(p - p_j) \right) \right), \end{aligned}$$

segue que o campo (X', Y') , onde

$$\begin{cases} X'(\varphi(t, p)) = (X_1(t, p) + \alpha_2 \beta(t)) u(t, p) + \frac{d\varphi}{dt}(t, p) \bar{X}(t, p) & , (t, p) \in (-\delta, \delta) \times \Sigma \\ X'(p) = X(p) & , \forall p \in M \setminus U \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Y'(\varphi(t, p)) = (X_1(t, p) + \alpha_2 \beta(t)) u(t, p) + \frac{d\varphi}{dt}(t, p) \bar{X}(t, p) & , (t, p) \in (-\delta, \delta) \times \Sigma, \\ Y'(p) = Y(p) & , \forall p \in M \setminus U \end{cases}$$

pertence a \mathcal{U}_i , para todo $(\alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2) \in S_i$ e $(\lambda_1^j, \lambda_2^j) \in L_i^j$. Como S_i e os conjuntos L_i^j são residuais, (X', Y') pode ser tomado tão próximo quanto se queira de (X, Y) , mostrando que cada \mathcal{U}_i é aberto e denso. Uma vez que

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \subset \mathcal{V},$$

temos a densidade do conjunto \mathcal{V} e consequentemente o resultado desejado. \square

Mostraremos agora um resultado interessante, embora pouco relacionado ao conteúdo dessa seção, que pode ser intuído ao se analisar a demonstração acima.

Teorema 4.2.1.6. *Seja $F \in \mathfrak{X}^r(\Sigma)$, então existem $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ tais que o campo de deslize de $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ é igual a F .*

Demonstração. Começemos considerando a EDO definida em M ,

$$x'(t) = \nabla f(x(t)),$$

e φ seu fluxo. Tome $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi : (-\delta, \delta) \times \Sigma &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \varphi(t, p) \end{aligned}$$

seja um difeomorfismo sobre sua imagem, $U = \varphi((-\delta, \delta) \times \Sigma)$. Defina $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow [0, 1]$ como sendo uma função suave tal que $\alpha(-\delta/4, \delta/4) = \{1\}$ e $\alpha((-\delta, -\delta/2] \cup [\delta/2, \delta)) = \{0\}$. Considere os campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ definidos da seguinte forma

$$\begin{cases} X(\varphi(t, p)) = \alpha(t) \frac{\nabla f(\varphi(t, p))}{\|\nabla f(\varphi(t, p))\|^2} + \alpha(t) \frac{d\varphi}{dp}(t, p) F(p) & , \forall (t, p) \in (-\delta, \delta) \times \Sigma \\ X(p) = 0 & , \forall p \in M \setminus U \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Y(\varphi(t, p)) = -\alpha(t) \frac{\nabla f(\varphi(t, p))}{\|\nabla f(\varphi(t, p))\|^2} + \alpha(t) \frac{d\varphi}{dp}(t, p) F(p) & , \forall (t, p) \in (-\delta, \delta) \times \Sigma \\ Y(p) = 0 & , \forall p \in M \setminus U, \end{cases}$$

é claro que $\forall p \in \Sigma$, $Xf(p) = 1$ e $Yf(p) = -1$, portanto a região de deslize é todo o conjunto Σ . Por fim, definindo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$, temos que

$$\begin{aligned} Z^d(p) &= \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)) \\ &= \frac{-\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|^2} - F(p) + \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|^2} - F(p)}{-2} \\ &= \frac{2F(p)}{2} = F(p). \end{aligned}$$

□

4.2.2 Caso Dobra-Regular

Provaremos alguns lemas antes de começarmos a análise de tal caso.

Lema 4.2.2.1. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, uma função tal que $\{0\}$ é valor regular de f e $f^{-1}(0) = \Sigma$; e $\varphi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Definindo $h = f \circ \varphi^{-1}$, tem-se que $Xf \circ \varphi^{-1} = (\varphi_* X)h$.*

Demonstração. A demonstração segue imediatamente da computação:

$$\begin{aligned}
(\varphi_*X)h(p) &= \nabla h(p) \cdot (\varphi_*X)(p) \\
&= \nabla f(\varphi^{-1}(p)) d\varphi_p^{-1} \cdot d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}X(\varphi^{-1}(p)) \\
&= \nabla f(\varphi^{-1}(p))X(\varphi^{-1}(p)) \\
&= Xf(\varphi^{-1}(p)).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.2.2.2. *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $\varphi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo suave, de forma que $\varphi(\Sigma) = T$. Então (X, Y) é Σ -conjugado a $\varphi_*Z := (\varphi_*X, \varphi_*Y) \in \Omega^r(N, T)$ e a Σ -conjugação é dada pela própria função φ .*

Demonstração. Denotaremos $W = \varphi_*(Z) = (X', Y')$. É suficiente mostrar que φ , conjugua:

1. φ_X com $\varphi_{X'}$,
2. φ_Y com $\varphi_{Y'}$, e
3. φ_{Z^d} com φ_{W^d} .

Para ver 1, considere a curva $\alpha(t) = \varphi(\varphi_X(t, p))$ e note que $\alpha(0) = \varphi(p)$ e

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt}(t) &= d\varphi_{\varphi_X(t, p)}X(\varphi_X(t, p)) \\
&= d\varphi_{\varphi^{-1} \circ \alpha(t)}X(\varphi^{-1} \circ \alpha(t)) \\
&= \varphi_*X(\alpha(t)) = X'(\alpha(t)).
\end{aligned}$$

Segue do teorema de unicidade de solução de equações diferenciais que

$$\varphi \circ \varphi_X(t, p) = \varphi_{X'}(t, \varphi(p)),$$

provando assim 1.

O item 2 é demonstrado da mesma forma que o item 1.

Para ver 3, note que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\{0\}$ é valor regular e $f^{-1}(0) = \Sigma$, então $h = f \circ \varphi^{-1} : N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\{0\}$ é valor regular e $h^{-1}(0) = \varphi \circ f^{-1}\{0\} = \varphi(\Sigma) = T$. Mais ainda, usando o Lema 4.2.2.1,

$$\begin{aligned}
\varphi_*Z^d(p) &= \varphi_* \left(\frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)} \right) \\
&= \frac{Yf(\varphi^{-1}(p))\varphi_*X(p) - Xf(\varphi^{-1}(p))\varphi_*Y(p)}{Yf(\varphi^{-1}(p)) - Xf(\varphi^{-1}(p))} \\
&= \frac{(\varphi_*Y)h(p)\varphi_*X(p) - (\varphi_*X)h(p)\varphi_*Y(p)}{(\varphi_*Y)h(p) - (\varphi_*X)h(p)} \\
&= W^d(p).
\end{aligned}$$

Da equação acima e utilizando o mesmo processo da demonstração do caso 1, conseguimos que φ conjugua Z^d e W^d , demonstrando assim o teorema.

□

Teorema 4.2.2.1 (Adaptado de [5]). *Sejam $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto dobra-regular, então (X, Y) é Σ -equivalente ao campo $((\delta y, 1, 0), (\varepsilon, 0, 0)) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ em p e 0 , respectivamente, sendo $\delta = \text{sgn}(X^2 f(p))$ e $\varepsilon = \text{sgn}(Y f(p))$.*

Demonstração. Provaremos apenas para o caso $\varepsilon = 1$, pois para $\varepsilon = -1$ a demonstração é análoga.

Temos que considerar dois casos:

1. $\delta = 1$, dobra visível;
2. $\delta = -1$, dobra invisível.

Para o caso 1, utilizando a Forma Local de Vishik (Teorema 2.2.4), existe uma carta (φ, U) em torno de p em M tal que $\varphi(U) = V_0$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap \Sigma) = V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2$ e

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Defina $Y' = \varphi_* Y = (Y'_1, Y'_2, Y'_3)$. Considerando $h = f \circ \varphi^{-1}$ e usando o Lema 4.2.2.2, temos que (X, Y) é localmente equivalente a $((y, 1, 0), Y') \in \Omega^r(M, \Sigma)$ em p e 0 , respectivamente. Mais ainda, pelo Lema 4.2.2.1, $\text{sgn}(Y' h(0)) = \varepsilon$. Logo é suficiente mostrar a equivalência local de $A := ((y, 1, 0), Y')$ e $B := ((y, 1, 0), (1, 0, 0))$ em 0 .

Defina $S^+ = \{(0, y, z) \in V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2; y > 0\}$ e $S^- = \{(0, y, z) \in V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2; y < 0\}$. Perceba que todo ponto $p \in S^+$ é um ponto de deslize e todo ponto $p \in S^-$ é um ponto de costura.

Mais ainda, temos que $(0, 0, 0)$ é um ponto regular de A_N^d e existe $\delta > 0$ tal que $\{0\}^2 \times I_{\delta_1}$ é transversal ao campo A_N^d , sendo $I_{\delta_1} = (-\delta_1, \delta_1)$. Isto é o mesmo que dizer que para todo $p \in \{0\}^2 \times I_{\delta_1}$,

$$T_p(\{0\}^2 \times I_{\delta_1}) \oplus \text{span}(A_N^d(p)) = T_p(\{0\} \times \mathbb{R}^2),$$

consideramos $\varphi_{A_N^d}$ como sendo o fluxo de A_N^d e definimos

$$\begin{aligned} \psi : \{0\} \times \mathbb{R} \times I_{\delta_1} &\rightarrow \times \mathbb{R}^2 \\ (t, p) &\mapsto \varphi_{A_N^d}(t, (0, 0, p)). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{d\psi}{dt}(0, 0) = A_N^d(0) \text{ e } \frac{d\psi}{dp}(0, 0) = (0, 1, 0).$$

Da transversalidade entre A_N^d e $\{0\}^2 \times I_{\delta_1}$ temos que $d\psi_{A_N^d}$ é um isomorfismo local na origem. Utilizando o teorema da função inversa, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que ψ restrito a $\{0\} \times (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Mostraremos agora que ψ conjuga os campos $(0, 1, 0)$ e A_N^d :

$$\begin{aligned} \psi(\varphi_{(0,1,0)}(t, (0, x_1, x_2))) &= \psi(0, x_1 + t, x_2) \\ &= \varphi_{A_N^d}(x_1 + t, (0, 0, x_2)) \\ &= \varphi_{A_N^d}(t, \varphi_{A_N^d}(x_1, (0, 0, x_2))) \\ &= \varphi_{A_N^d}(t, \psi(0, x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Uma vez que a identidade é um equivalência topológica entre B_N^d e $(0, 1, 0)$. Temos que ψ é uma equivalência topológica entre B_N^d e A_N^d . Pelo mesmo motivo que antes (e diminuindo ε_0 e δ_0 se necessário), temos que ψ é uma equivalência topológica entre B^d e A^d . Iremos estender o homeomorfismo ψ para uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^3 .

Para fazer isso, primeiramente note que

$$\psi(\{0\}^2 \times (-\delta_0, \delta_0)) = \{0\}^2 \times (-\delta_0, \delta_0) \text{ e } \psi|_{\{0\}^2 \times (-\delta_0, \delta_0)} = Id|_{\{0\}^2 \times (-\delta_0, \delta_0)},$$

perceba então que

$$\varphi_{(y,1,0)}(t, (x_1, x_2, x_3)) = \left(\frac{t^2}{2} + x_2 t + x_1, x_2 + t, x_3 \right).$$

Considere agora os conjuntos

$$U_1^- = \left\{ \varphi_{(y,1,0)}(t, (0, x_1, x_2)); t \in (-\infty, 0], (x_1, x_2) \in (-\delta, 0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \right\},$$

$$U_1^+ = \left\{ \varphi_{(y,1,0)}(t, (0, x_1, x_2)); t \in [0, \infty), (x_1, x_2) \in (0, \delta) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \right\},$$

e

$$U_1 = U_1^+ \sqcup U_1^-.$$

É imediato que U_1 é um conjunto aberto na topologia induzida de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$. Além disso, se $(x_1, x_2, x_3) \in U_1^+$, então

$$t_x = \sqrt{x_2^2 - 2x_1} - x_2$$

é o único valor que satisfaz

$$\varphi_{(y,1,0)}(t_x, 0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^2,$$

com $\varphi_{(y,1,0)}([t_x, 0]) \subset [0, \infty) \times (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. De maneira análoga, se $x \in U_1^-$,

$$s_x = -x_2 - \sqrt{x_2^2 - 2x_1}$$

é o único valor que satisfaz

$$\varphi_{(y,1,0)}(t_x, 0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^2,$$

com $\varphi_{(y,1,0)}([0, s_x]) \subset [0, \infty) \times (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Defina a variedade $R = \{\varphi_{(y,1,0)}(t, (0, 0, x)); t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)\}$ e considere o conjunto

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_2, x_3) \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \text{ e } x \text{ está acima da variedade } R\}.$$

é fácil ver que $V = U_1 \cup R \cup U_2$ é uma vizinhança aberta de 0 em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$. Estenderemos agora ψ para $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \psi(x) & , \text{ se } x \in \{0\} \times (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon, \varepsilon_0) \\ \varphi_{(y,1,0)}(-t_x, \psi \circ \varphi_{(y,1,0)}(t_x, x)) & , \text{ se } x \in U_1^+ \\ \varphi_{(y,1,0)}(-s_x, \psi \circ \varphi_{(y,1,0)}(s_x, x)) & , \text{ se } x \in U_1^- \\ x & , \text{ se } x \in R \cup U_2. \end{cases}$$

A continuidade de $\bar{\psi}$ segue do Lema de Colagem, mais ainda, pelo Teorema da Invariância do Domínio $\bar{\psi}$ é um homeomorfismo com sua imagem, e a construção de $\bar{\psi}$ garante que as órbitas de $(y, 1, 0)$ são levadas em órbitas de $(y, 1, 0)$, respeitando a orientação.

Para finalizar a demonstração do caso 1. Seja $\tau_{Y'}$ a função do Lema 4.2.1.1. Podemos supor, sem perda de generalidade que, $\{0\} \times (-\delta_0, \delta_0) \times (\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \text{Dom}(\tau_{Y'})$. O conjunto

$$V_1 = (-\infty, 0] \times (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

é aberto na topologia induzida de $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^2$ e $0 \in V_1$ e note que $V_1 \cup V$ é uma vizinhança 0 em \mathbb{R}^3 . Logo, definindo

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : V_1 \cup V &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}(x) & , \text{ se } x \in V \\ \varphi_{Y'}(\pi_3(x), \psi \circ \varphi_{(1,0,0)}(-\pi_3(x), x)) & , \text{ se } x \in V_1, \end{cases} \end{aligned}$$

temos que $\tilde{\psi}$ é um homeomorfismo com sua imagem, pelo Teorema da Invariância do Domínio. Segue da construção que $\tilde{\psi}$ é uma Σ -equivalência em 0 dos campos $((y, 1, 0), Y')$ e $((y, 1, 0), (1, 0, 0))$, o que implica por transitividade que (X, Y) é Σ -equivalente ao campo $((y, 1, 0), (1, 0, 0))$ em p e 0, respectivamente.

Demonstraremos agora o Caso 2. Isto é quando $\delta = -1$. Novamente, utilizando a forma Local de Vishik (Teorema 2.2.4), existe uma carta (φ, U) em torno de p em M tal que $\varphi(U) = V_0$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap \Sigma) = V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2$ e

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Defina $Y' = \varphi_* Y = (Y'_1, Y'_2, Y'_3)$. Considerando $h = f \circ \varphi^{-1}$ e usando o Lema 4.2.2.2, temos que (X, Y) é localmente equivalente a $((y, 1, 0), Y') \in \Omega^r(M, \Sigma)$ em p e 0, respectivamente. Mais ainda, do Lema 4.2.2.1, $\text{sgn}(Y'h(0)) = \varepsilon$. Logo, é suficiente mostrar a equivalência local de $A := ((-y, 1, 0), Y')$ e $B := ((-y, 1, 0), (1, 0, 0))$ em 0.

Defina $S^+ = \{(0, y, z) \in V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2; y > 0\}$ e $S^- = \{(0, y, z) \in V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2; y < 0\}$. Perceba que todo ponto $p \in S^-$ é um ponto de deslize e todo $p \in S^+$ é um ponto de costura. Note que $A^d \in \mathfrak{X}^r(S^-)$, então conseguimos um homeomorfismo

$$\xi_0 : \{0\} \times (-\delta_2, 0] \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \subset S^- \rightarrow U \subset S^-,$$

com

$$\xi_0|_{\{0\}^2 \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)} = \text{id}|_{\{0\}^2 \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)},$$

que é uma equivalência topológica local em 0 entre os campos $B^d \in \mathfrak{X}^r(S^-)$ e $A^d \in \mathfrak{X}^r(S^-)$, (relembre que todos os pontos de S^+ são de costura). Podemos estender $\xi_0 = (0, \xi_0^1(x), \xi_0^2(x))$ pelo seguinte homeomorfismo

$$\begin{aligned} \xi : Q_{\delta_2, \varepsilon_2} &\rightarrow W \\ (0, x_1, x_2) &\mapsto \begin{cases} \xi_0(0, x_1, x_2) & , x \in \{0\} \times (-\delta_2, 0] \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \\ (0, -\xi_0^1(0, -|x_1|, x_2), \xi_0^2(0, -|x_1|, x_2)) & , x \in \{0\} \times [0, \delta_2) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \end{cases} \end{aligned}$$

onde

$$W = \{(0, x_1, x_2) \in \{0\} \times \mathbb{R}^2; (0, x_1, x_2) \in U \text{ ou } (0, -x_1, x_2) \in U\}$$

e

$$Q_{\delta_2, \varepsilon_2} = \{0\} \times (-\delta_2, \delta_2) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2).$$

Perceba que ξ continua sendo um homeomorfismo e é uma equivalência local de B^d com A^d em 0 (uma vez que em S^+ A^d e B^d não estão definidos).

Note também que

$$\varphi_{(-y, 1, 0)}(t, (x_1, x_2, x_3)) = \left(-\frac{t^2}{2} - x_2 t + x_3, x_2 + t, x_3 \right),$$

seguindo que para qualquer ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ a curva

$$\alpha_x : \left[-x_2 - \sqrt{x_2^2 + 2x_1}, -x_2 + \sqrt{x_2^2 + 2x_1} \right] \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \varphi(t, x)$$

corresponde ao arco que corta $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ em 2 pontos e passa pelo ponto x . Mantendo α_x em mente, definimos o valores

$$r(x) = 2\sqrt{x_2^2 + 2x_1} \text{ e}$$

$$l(x) = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 2x_1}}{2\sqrt{x_2^2 + 2x_1}},$$

com $l(x) = 0$ se ocorrer uma divisão por 0. A função $r(x)$ corresponde ao comprimento do intervalo do domínio de α_x , enquanto l define a porcentagem do intervalo que corresponde ao domínio de α_x que tem que “andar” para termos $\alpha(t) = x$ e por fim

$$\alpha_x \left(-x_2 - \sqrt{x_2^2 + 2x_1} \right) = \left(0, -\sqrt{x_2^2 + 2x_1}, x_3 \right).$$

Considere

$$E = \{\varphi(t, (0, \delta_2, s)); t \in [-2\delta_2, 0], s \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)\}$$

e o conjunto, na topologia induzida de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$,

$$V_2 = \{p \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2; p \text{ está abaixo de } E \text{ e acima de } Q_{\delta_2, \varepsilon_2}\}.$$

Estenderemos ξ para o conjunto V_2 por meio da função

$$\bar{\xi} : V_2 \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{(-y, 1, 0)} \left(l(x)r \left(0, -\sqrt{x_2^2 + 2x_1}, x_3 \right), \xi \left(0, -\sqrt{x_2^2 + 2x_1}, x_3 \right) \right),$$

é claro que

$$\bar{\xi}|_{Q_{\delta_2, \varepsilon_2}} = \xi,$$

e que $\bar{\xi}$ é contínua e injetiva. Portanto $\bar{\xi}$ é homeomorfismo com sua imagem (Teorema da Invariância do Domínio), além de ser uma equivalência do campo $\varphi_{(y, 1, 0)}$ com ele mesmo, pois leva órbitas de $\varphi_{(-y, 1, 0)}$ em órbitas de $\varphi_{(-y, 1, 0)}$, respeitando a orientação.

Para finalizar, seja novamente $\tau_{Y'}$ a função do Lema 4.2.1.1, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\{0\} \times (-\delta_0, \delta_0) \times (\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \text{Dom}(\tau_{Y'})$. Também é verdade que o conjunto

$$U_2 = (-\infty, 0] \times (-\delta_0, \delta_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

é aberto na topologia induzida de $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^2$ e que $0 \in U_2$. Como $U_2 \cup V_2$ é uma vizinhança 0 em \mathbb{R}^3 , definindo

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} : V_1 \cup V &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightarrow \begin{cases} \tilde{\xi}(x) & , \text{se } x \in V \\ \varphi_{Y'}(\pi_3(x), \psi \circ \varphi_{(1,0,0)}(-\pi_3(x), x)) & , \text{se } x \in V_1 \end{cases} \end{aligned}$$

temos que $\tilde{\xi}$ é um homeomorfismo com sua imagem, pelo Teorema da Invariância do Domínio, além de seguir da construção que $\tilde{\xi}$ é uma Σ -equivalência em 0 dos campos $((-y, 1, 0), Y')$ e $((-y, 1, 0), (1, 0, 0))$. Logo, por transitividade, (X, Y) é Σ -equivalente a $((-y, 1, 0), (1, 0, 0))$ em p e 0, respectivamente. E demonstra-se o teorema. \square

Agora mostraremos a estabilidade estrutural local de pontos de dobra.

Teorema 4.2.2.2. *Sejam $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto dobra-regular, então (X, Y) é localmente estruturalmente estável em p .*

Demonstração. Seja U uma vizinhança qualquer do ponto de dobra-regular p . Pelo Lema 4.2.2, existem uma vizinhança \mathcal{V} de X em $\mathfrak{X}^r(M^+)$ e uma vizinhança $V_p \subset U$ de p em Σ tais que

- i. para cada $X' \in \mathcal{V}$, existe uma única curva suave de pontos de dobra de X' , contida em V , que intersepta ∂V em apenas dois pontos e de maneira transversal;
- ii. $p' \in \gamma_{X'}$ e $\text{sgn}(X'^2 f(p')) = \text{sgn}(X^2 f(p))$ para todo $p' \in \gamma_{X'}$ e $X' \in \mathcal{V}$, sendo $\gamma_{X'}$ uma curva de pontos de dobra do campo X' .

Diminuindo V_p se necessário, conseguimos uma vizinhança \mathcal{U} de Y em $\mathfrak{X}^r(M^-)$ tal que $Y' f(p') \neq 0, \forall Y' \in \mathcal{U}$ e $p' \in U_p$. Tome a vizinhança $\mathcal{W} = \phi^{-1}(\mathcal{V} \times \mathcal{U})$ de (X, Y) em $\Omega^r(M, \Sigma)$, sendo ϕ a função definida na Equação 1.2.1.

Para todo $(X', Y') \in \mathcal{W}$, existe $p' \in U_p$ um ponto dobra-regular satisfazendo

$$\delta = \text{sgn}(X^2 f(p)) = \text{sgn}(X'^2 f(p'))$$

e

$$\varepsilon = \text{sgn}(X f(p)) = \text{sgn}(X' f(p')).$$

Pelo Teorema 4.2.2.1, temos que

(X, Y) é localmente Σ -equivalente a $((\delta y, 1, 0), (\varepsilon, 0, 0))$ em p e 0, respectivamente

e

(X', Y') é localmente Σ -equivalente a $((\delta y, 1, 0), (\varepsilon, 0, 0))$ em p' e 0, respectivamente.

Por transitividade, (X, Y) e (X', Y') são Σ -equivalentes em p e p' , respectivamente, mostrando assim a estabilidade estrutural local de um ponto dobra-regular. \square

4.2.3 Caso Cúspide-Regular

Seguiremos agora para análise do caso cúspide-regular.

Perceba que o campo $(\delta y, z, 1)$, quando colocado nas coordenadas

$$\tilde{z} = 2x, \quad \tilde{y} = z^2 - 2y, \quad \tilde{x} = z,$$

fica na forma $F(x, y, z) := (1, 0, \delta(x^2 - y))$.

Notação 4.2.1. Definimos $I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon^2/4, \varepsilon^2/4) \times [0, \varepsilon)$, com $V \subset \mathbb{R}^3$ e $V^\varepsilon = V \cap I_\varepsilon$, sendo que a topologia de V^ε será sempre considerada com a topologia induzida.

Note que o fluxo de tal sistema é dado por

$$\varphi(t, (x, y, z)) = \left(x_0 + t, y_0, z_0 + y_0 t - x_0^2 t - x_0 t^2 - \frac{t^3}{3} \right).$$

Perceba que os únicos pontos nos quais F é tangente ao plano $z = 0$ são pertencentes ao conjunto

$$K_1 := \{(x, y, 0); y^2 - x = 0\}.$$

Denotaremos $K_1^+ = \{(x, x^2, 0); x > 0\}$ e $K_1^- = \{(x, x^2, 0); x < 0\}$. Motivados pela definição de K_1 consideramos os conjuntos

$$S_1 = \{(x, y, 0); y^2 - x > 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, 0); y^2 - x < 0\}.$$

Considere agora os fluxos passando por K_1^+ .

$$\varphi(t, (-x, x^2, 0)) = (t - x, x^2, -(t^3/3) + t^2 x), \quad x > 0$$

Fazendo uma simples conta temos $\varphi(3x, -x, x^2) = (2x, x^2, 0)$. Definindo $K_2 = \{(x, y, 0), x > 0, y = x^2/4\}$, conseguimos um mapa de retorno de $\overline{K_1}$ para $\overline{K_2}$ tal que $(-x, x^2, 0) \mapsto (2x, x^2, 0), x \geq 0$. Este mapa nos permite definir a variedade com bordo

$$M := \left\{ \varphi(t, -x, x^2, 0); x \geq 0 \text{ e } t \in [0, 3x] \right\},$$

que divide $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ em 2 componentes conexas. A Figura [4.1] mostra uma representação de tal variedade.

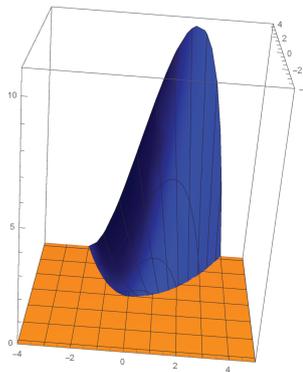


Figura 4.1: Representação da variedade M em azul

Seja $p = (x, y, 0) \in S_1$, uma vez que $\pi_3 X(0) > 0$, temos que para pontos próximos o suficiente de 0, $\pi_3 \circ \varphi(t, p) > 0$. Como existe unicidade de solução na região $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, a solução $\varphi(t, p)$ é limitada pela variedade M e portanto, deve retornar ao plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Escrevendo $\varphi(t, p)$ explicitamente temos que

$$\varphi(t, (x, y, 0)) = \left(t + x, y, -\frac{t^3}{3} - t^2x - tx^2 + ty \right),$$

implicando que o ponto de retorno ocorre em

$$t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \sqrt{4y - x^2} - 3x \right).$$

Portanto, podemos definir o mapa de retorno em $\overline{S_1}$ por

$$\begin{aligned} \sigma : \overline{S^+} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ (x, y, 0) &\mapsto \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \sqrt{4y - x^2} - x \right), y, 0 \right). \end{aligned}$$

Lema 4.2.3.1. *Dado $p \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, defina o conjunto $I(p)$ como sendo a componente conexa do conjunto $\varphi(\mathbb{R}, p) \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ que possui p . Então, definindo*

$$A_\varepsilon := \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \mid \begin{array}{l} \exists t_p \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \varphi(t_p, p) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon^2/4, \varepsilon^2/4) \times \{0\} \\ \text{e } \varphi([0, t_p], p) \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \text{ é conexo.} \end{array} \right\},$$

temos que A_ε é aberto em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que A_ε é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Note que $\varphi(t, 0)$ é uma trajetória que atravessa o plano $z = 0$, utilizando o teorema do fluxo tubular longo conseguimos encontrar uma V vizinhança de 0 tal que para todo ponto $p \in V$, $\varphi(t, p)$ atravessa o plano $\{z = 0\}$. Diminuindo V se necessário e utilizando o teorema da dependência contínua, podemos supor que todo elemento de V corta o plano $\{z = 0\}^\varepsilon$. Então, a componente conexa que possui o elemento 0 do conjunto $V \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$.

Se $p \in K_1^+$, em decorrência do mapa de retorno φ , todos os pontos abaixo da variedade com bordo

$$M_\varepsilon := \left\{ \varphi(t, -x, x^2, 0); x \geq [0, \varepsilon] \text{ e } t \in [0, 3x] \right\}$$

estão em A_ε . Segue que esses pontos estão no interior de A_ε .

Seja $p \in A_\varepsilon$ tal que $\varphi(t_p, p) \notin K_1^-$. Perceba que podemos supor que tal contato é transversal ao plano $\{z = 0\}^\varepsilon$: de fato, se $\varphi(p, t_p) = (-x, x^2)$ for uma tangência, o mapa de retorno σ , nos mostra que $\phi(t, p)$ volta a tocar $\{z = 0\}^\varepsilon$, no ponto $(2x, x^2)$, porém dessa vez transversalmente. Construiremos uma vizinhança de p em A . Seja

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, p) \mapsto \pi_3 \circ \varphi(t, p).$$

Como

$$\frac{dG}{dt}(t_p, p) \neq 0,$$

o teorema da função implícita nos garante a existência de uma vizinhança V_p tal que $G(\tau(q), q) = 0$, utilizando o teorema da dependência contínua de diminuindo V_p se necessário, temos que $V_p \subset A_\varepsilon$, o que demonstra o lema. □

Seja $Z = (X, Y)$ um campo suave por partes tal que no ponto p temos um comportamento cúspide-regular. A forma normal de Vishik nos garante que existe uma mudança de variáveis $\varphi : U_p \rightarrow V_0$, de forma que $\varphi_*(X, Y)$ é descrito por

$$Z(x, y, z) = \begin{cases} (1, 0, y - x^2), & \text{se } z \geq 0 \\ \varphi_*Y(x, y, z), & \text{se } z < 0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

ou por

$$Z(x, y, z) = \begin{cases} (1, 0, x^2 - y), & \text{se } z \geq 0 \\ \varphi_*Y(x, y, z), & \text{se } z < 0. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Como nosso foco é o estudo local, podemos redefinir (X, Y) por (4.2.2) ou (4.2.3).

Consideremos o caso (4.2.2), supondo de $\pi_3 \circ Y(0) > 0$. Dessa forma o campo deslizante Z^d em uma vizinhança da origem, é definido por

$$Z^d(x, y) = \left(\frac{Y_3(x, y, 0) + (y - x^2)Y_1}{Y_3(x, y, 0) - (y - x^2)}, \frac{(y - x^2)Y_2}{Y_3(x, y, 0) - (y - x^2)} \right)$$

e é imediato que

$$Z^d(K) = (1, 0).$$

sobre K_2 , é válida a relação

$$\begin{aligned} Z^d(2x, x^2) &= \left(\frac{Y_3(2x, x^2, 0) - 3x^2Y_1(2x, x^2, 0)}{Y_3(2x, y, 0) - 3x^2}, -\frac{3x^2 \cdot Y_2(2x, x^2, 0)}{Y_3(2x, x^2, 0) - 3x^2} \right) \\ &= (1 + \mathcal{O}(x), \mathcal{O}(x^2)). \end{aligned}$$

Uma vez que o vetor tangente da curva K_2 é dado por $(1, 2x)$, temos que para $r > 0$ suficientemente pequeno, o campo Z^d é transversal a

$$K_{2,r} = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{4} \right); x \in (0, r) \right\}, .$$

Lema 4.2.3.2. *Existe $x > 0$ tal que a órbita $\varphi_Z^d(t, (x, x^2))$ atinge $K_{2,r}$.*

Demonstração. Estendemos Z^d para um campo suave qualquer \tilde{Z} definido em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Supomos por redução ao absurdo que para todo $x > 0$ a órbita $\varphi_Z^d(t, (x, x^2))$ não atinge $K_{2,r}$.

Utilizando o teorema do fluxo tubular, existe uma conjugação de classe \mathcal{C}^∞ ,

$$h : B_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (-\delta, \delta) \times (\delta, \delta),$$

que conjuga \tilde{Z} com $(1, 0)$ e $h(0, y) = (0, y)$. Note que Z^d é tangente a $K_{2,r}$ e K_1 em 0. Considere agora o campo $\bar{Z} = \tilde{Z}|_{B_0}$, uma vez que \tilde{Z} é transversal a $K_{2,r} \setminus \{0\}$ e K_1^+ , o fluxo $\varphi_{\bar{Z}}$ só pode cortar tais conjuntos uma vez. Como estamos supondo $\varphi_Z^d(t, (x, x^2))$ nunca atinge $K_{2,r}$, temos que $\varphi_{\bar{Z}}(t, (x, x^2))$ nunca atinge $K_{2,r}$. Considere a família de curvas

$$\alpha_p(t) = \varphi_{\bar{Z}}(-t, p), \text{ com } p \in K_{2,r} \cap B_0.$$

Uma vez que B_0 é uma vizinhança tubular e $\alpha_p(t)$ nunca retorna a $K_{2,r}$ e nem toca K_1^+ , a única possibilidade é que existe $t_p > 0$ tal que $\alpha_p(t_p) = (0, 0)$. Mas isso é um absurdo, pois as curvas α_p possuem imagens disjuntas em decorrência do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias.

Segue portanto que deve existir $(x, x^2) \in K_1^+$ tal que a órbita $\varphi_Z^d(t, (x, x^2))$ atinge $K_{2,r}$. \square

Seja $x \in \mathbb{R}$, um valor tal que $\varphi_{Z^d}(t, (x_0, x_0^2))$ atinge $K_{2,r}$, como descrito no Lema 4.2.3.2, e suponha que $\varphi(t, (x_0, x_0^2))$ atinge $K_{2,r}$ no ponto $\varphi_{Z^d}(t_0, (x_0, x_0^2)) = (2y, y^2)$.

Escolha $0 < \delta < x_0$ tal que sejam satisfeitos

- $\forall x \in [0, \delta)$, $\varphi_Z(t, (2x, x^2))$ está definido em $[0, 2\delta - 2x)$;
- $\forall x \in [0, \delta)$, $\varphi_Z(t, (-x, x^2))$ está definido em $(-2\delta + 2x, 0]$;
- $\forall x \in (-\delta^2, 0]$, $\varphi_Z(t, (0, x))$ está definido em $(-2\delta, 2\delta)$;
- Existe uma extensão \tilde{Z} de Z transversal a $\{(-x, x^2); x \in (0, 2\delta)\}$, $\{(2x, x^2), x \in (0, \delta)\}$ e $\{0\} \times (-\delta^2, \delta^2)$.

Seja $0 \leq x < \delta$. É claro que, para toda órbita começando em $(2x, x^2)$, existe um único tempo negativo $\tau(x)$ de forma que $\varphi_Z(\tau(x), (2x, x^2)) \in K_1$. É fácil ver que $\tau : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ é ao menos contínua.

Lema 4.2.3.3. *O conjunto*

$$V_\delta := \left\{ \varphi(t, p) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} p = (x, x^2), x \in [0, \delta), t \in (-2\delta + 2\delta, 0] \\ \text{ou } p = (2x, x^2), x \in [0, \delta), t \in (\tau(x), 2\delta - 2x] \\ \text{ou } p = (0, x), x \in [0, \delta^2), t \in (-2\delta, 2\delta). \end{array} \right. \right\}, \text{ é aberto na}$$

topologia induzida do domínio de Z .

Demonstração. A abertura é clara e segue do teorema do fluxo tubular longo. \square

Como $0 < \delta < x_0$ existe $\tau(\delta)$ negativo tal que $\varphi_Z(\tau(\delta), (2\delta, \delta^2)) = (y, y^2)$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, x^2); x \in [0, y)\}, \\ L_2 &= \{(2x, x^2); x \in [0, \delta)\} \text{ e} \\ L_3 &= \{\varphi_{Z_i^d}(t, (2\delta, \delta^2)); t \in [\tau(y), 0]\}, \end{aligned}$$

e seja S o interior da região delimitada por L_1 , L_2 e L_3 . Toda órbita começando em $(x, x^2/4) \in L_2$ atinge (em tempo negativo) L_2 , ou seja, existe $\tau(x)$ de forma que $\varphi_Z(\tau(x), 2x, x^2) \in L_2$.

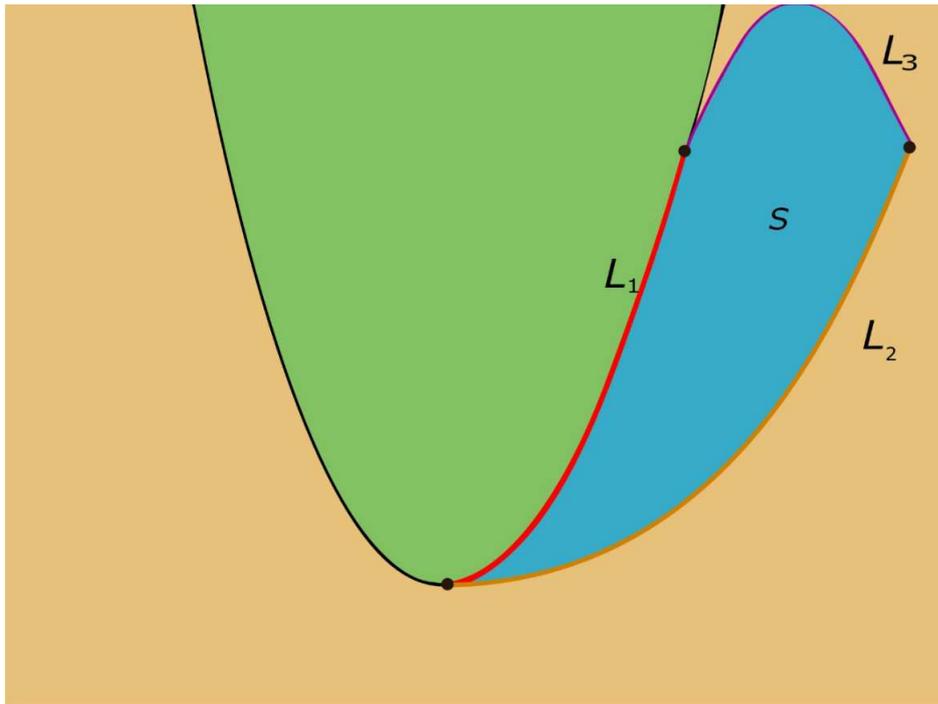


Figura 4.2: Representação de L_1 , L_2 , L_3 e S .

Seja

$$l := \{(-x, x^2); x \in [0, \delta)\} \cup \{(2x, x^2); x \in [0, \delta)\} \cup (\{0\} \times (-\delta^2, 0))$$

Construiremos uma equivalência

$$\psi : V_\delta \rightarrow E_\delta := (-2\delta, 2\delta) \times (-\delta^2, \delta^2) \setminus \{(x, y); x > 0 \text{ e } y > x^2\},$$

dos campos Z e $(1, 0)$ definindo:

- $\psi(p) = p$, se $p \in l$;
- se $q \in V_\delta \setminus S$, $q = \varphi(t, p)$ com $p \in l$, definimos

$$\psi(q) = p + (t, 0);$$

- se $q \in S$, $q = \varphi(t, (2x, x^2))$ com $(2x, x^2) \in l$, definimos

$$\psi(q) = (x, x^2) + \left(\frac{t}{\tau(x)} \cdot x, 0 \right).$$

É imediato ver que ψ é uma equivalência Z com $(1, 0)$, defina agora

$$U_\delta = V_\delta \cup \sigma^{-1}(S).$$

Lema 4.2.3.4. *Seja*

$$B_\delta := \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \left| \begin{array}{l} \exists t_p \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \varphi(t_p, p) \in U_\delta, \\ \text{e } \varphi([0, t_p], p) \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \text{ é conexo.} \end{array} \right. \right\}.$$

Então B_δ é aberto em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que B_δ é uma vizinhança de 0. Note que $\varphi(t, 0)$ é trajetória que atravessa o plano $\{z = 0\}$. Utilizando o teorema do fluxo tubular longo, conseguimos encontrar uma vizinhança V de 0 tal que para todo ponto $p \in V$, $\varphi(t, p)$ atravessa o plano $\{z = 0\}$. Diminuindo V se necessário e utilizando o teorema da dependência contínua, podemos supor que o fluxo de todo elemento de V corta o aberto do plano U_δ . Então a componente conexa que possui de 0 no conjunto $V \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ é uma vizinhança de 0.

Se $p \in L_2$, em decorrência do mapa de retorno σ , a componente conexa do conjunto $\varphi(\mathbb{R}, \varphi^{-1}(S) \cup L_2 \cup S)$ que possui L_2 como subconjunto é uma vizinhança para qualquer ponto de L_2 . Sejam $p \in B_\delta$ e t_p tal que $\varphi(t_p, p) \notin L_1$. Perceba que podemos supor que o contato é transversal com plano V_δ , de fato, se $\varphi(t_p, p) = (-x, x^2)$ é uma tangência, o mapa de retorno σ , nos mostra que tal caminho volta a tocar $\{z = 0\}^\varepsilon$ no ponto $(2x, x^2)$, porém dessa vez com um contato transversal. Construiremos uma vizinhança de p em B_δ . Seja

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, p) \mapsto \pi_3 \circ \varphi(t, p).$$

Como

$$\frac{dG}{dt}(t_p, p) \neq 0,$$

o teorema da função implícita nos garante a existência de uma vizinhança V_p de p em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ tal que $G(\tau(q), q) = 0$. Utilizando o teorema da dependência contínua de diminuindo V_p se necessário, temos que $V_p \subset B_\delta$. O que demonstra o Lema. \square

Iremos agora estender o mapa $\varphi : V_\delta \rightarrow E_\delta$ para uma função da forma $\tilde{\psi} : B_\delta \rightarrow A_\delta$. Considere os conjuntos

$$B_\delta := \left\{ \varphi(t, p) \left| \begin{array}{l} p = (-x, x^2), x \in [0, \delta), t \in (-\infty, 3x], \\ \text{e ou } p = (x, y) \in S, t \in \left[\frac{1}{2} \left(-\sqrt{3}\sqrt{4y - x^2} - 3x \right), 0 \right] \end{array} \right. \right\} \subset U_\delta \text{ e}$$

$$A = U_\delta \setminus B,$$

notoriamente $U_\delta = A \cup B$ e B é fechado, o que implica A aberto, além disso todo elemento de A intersepta U_δ transversalmente e em apenas um ponto. Segue que a função

$$\tau : A \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa cada $p \in A$ ao único valor $\tau(p)$ tal que, $\varphi(\tau(p), p) \in U_\delta$ é contínua. Definimos $\tilde{\psi}$ em A da seguinte maneira: para $p = \varphi(\tau(q), q)$ com $q \in U_\delta$, $\tilde{\psi}(p) = \varphi(\tau(q), \psi(q))$.

Agora, estenderemos $\tilde{\psi}$ em B . Para a região

$$\{\varphi(t, p); p = (-x, x^2), x \in [0, \delta), t \in (-\infty, 3x]\},$$

a função $\tilde{\psi}$ pode ser estendida pela função identidade, $\tilde{\psi}(x) = x$.

Nos pontos

$$H = \left\{ \varphi(t, p); p = (x, y) \in S, t \in \left[\frac{1}{2} \left(-\sqrt{3}\sqrt{4y - x^2} - 3x \right), 0 \right] \right\},$$

Dado $p \in H$, $\varphi(t, q)$ com $q \in S$, e definindo

$$\begin{aligned} \tilde{l} : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2} \left(-\sqrt{3} \sqrt{4y - x^2} - 3x \right), \end{aligned}$$

e

$$\tilde{\psi}(x, y) = \varphi \left(\frac{t}{\tilde{l}(x)} l(\psi(x, y)), \psi(x, y) \right),$$

É claro da construção que $\tilde{\psi}$ é contínua e é um homeomorfismo entre U_δ para A_δ . Relembramos agora que (X, Y) está definido apenas em uma vizinhança U da origem, então, redefinimos $\tilde{\psi}$ por $\tilde{\psi}|_{U \cap B_\delta}$.

Terminaremos de mostrar a equivalência entre (X, Y) e $((1, 0, y - x^2), (0, 0, 1))$. Note que podemos supor que $\pi_3 \circ Y(p) \neq 0$, $\forall p \in U_\delta$. Usando o teorema da função implícita conseguimos uma vizinhança aberta W_δ de U_δ tal que a função

$$\tau : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

é a função que associa $p \in W_\delta$, ao único tempo tal que $\varphi_Y(\tau(p), p) \in U_\delta$. Definimos

$$\begin{aligned} \phi : W_\delta &\rightarrow \phi(W_\delta) \\ p &\mapsto \varphi_{(1,0)}(-\tau(p), \psi(\varphi_Y(\tau(p), p))) \end{aligned}$$

em uma vizinhança de 0. Por fim, a função

$$\begin{aligned} \theta : \text{Dom}(\tilde{\psi}) \cup \text{Dom}(\phi) &\rightarrow \text{Im}(\tilde{\psi}) \cup \text{Im}(\phi) \\ x &\rightarrow \begin{cases} \tilde{\psi}(x) & , \text{ se } x \in \text{Dom}(\tilde{\psi}) \\ \phi(x) & , \text{ se } x \in \text{Dom}(\phi), \end{cases} \end{aligned}$$

é uma Σ -equivalência de (X, Y) com $((1, 0, y - x^2), (0, 0, 1))$ em p e 0, respectivamente.

Para os demais casos podemos construir a equivalência com com mínimas adaptações da mesma técnica, sendo assim provamos o resultado que segue.

Teorema 4.2.3.1 (Adaptado de [5]). *Sejam $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto cúspide-regular, então (X, Y) é Σ -equivalente ao campo $((\delta y, z, 1), (\varepsilon, 0, 0)) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ em p e 0 respectivamente, sendo $\delta = \text{sgn}(X^3 f(p))$ e $\varepsilon = \text{sgn}(Y f(p))$.*

Mostraremos agora o resultado que mostra a estabilidade estrutural local do ponto cúspide regular.

Teorema 4.2.3.2. *Sejam $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto cúspide-regular, então (X, Y) é localmente estruturalmente estável em p .*

Demonstração. Seja U uma vizinhança qualquer do ponto cúspide-regular p . Pelo Lema 4.2.2, existem uma vizinhança \mathcal{V} de X em $\mathfrak{X}^r(M^+)$, números reais $a_0 < 0 < b_0$ e uma vizinhança $U_p \subset U$ de p em Σ tais que para cada $X' \in \mathcal{V}$:

- i. existe única curva suave $\gamma_{X'} : [a_0, b_0] \rightarrow V$ pertencentes a $S_{X'}$ em V que interceptam ∂V transversalmente em apenas dois pontos;
- ii. existe uma função contínua tal que $a_0 < \tau(X) < b_0$ e $p(X') := \gamma_{X'}(\tau(X'))$ é o único ponto de cúspide de X' em V ; mais ainda, $\text{sgn}(X'^3 h(p(X'))) = \text{sgn}(X^3 h(p))$;

iii. $\gamma_{X'}(t)$ é um ponto de dobra de X' para todo $t \in [a_0, b_0]$, tal que $t \neq \tau(X')$. Mais ainda,

$$X'^2 h(\gamma_{X'}(t)) X'^2 h(\gamma_{X'}(s)) < 0, \quad \forall t \in [a_0, \tau(X')), \quad s \in (\tau(X'), b_0],$$

Diminuindo U_p se necessário, conseguimos uma vizinhança \mathcal{U} de Y em $\mathfrak{X}^r(M^-)$ tal que $Y'f(p') \neq 0, \forall Y' \in \mathcal{U}$ e $p' \in U_p$. Tome agora a vizinhança $\mathcal{W} = \phi^{-1}(\mathcal{V} \times \mathcal{U})$ de (X, Y) em $\Omega^r(M, \Sigma)$, sendo ϕ é a função definida na Equação (1.2.1).

Note então que, para todo $(X', Y') \in \mathcal{W}$, existe um ponto $p(X') \in U_p$ que é um ponto cúspide-regular, satisfazendo

$$\delta = \text{sgn}(X^3 f(p)) = \text{sgn}(X'^3 f(p'))$$

e

$$\varepsilon = \text{sgn}(X f(p)) = \text{sgn}(X' f(p')).$$

Pelo Teorema 4.2.3.1 que

(X, Y) é localmente Σ -equivalente a $((\delta y, z, 1), (\varepsilon, 0, 0))$ em p e 0 , respectivamente

e

(X', Y') é localmente Σ -equivalente a $((\delta y, z, 1), (\varepsilon, 0, 0))$ em $p(X')$ e 0 , respectivamente

por transitividade, (X, Y) e (X', Y') são Σ -equivalentes em p e $p(X')$, respectivamente, mostrando assim a estabilidade estrutural local de um ponto cúspide-regular. \square

4.2.4 Caso Dobra-Dobra

Neste ponto, já entendemos o comportamento estrutural local de praticamente todos os pontos de M em campos de Ξ_0 , restando apenas os pontos de dobra-dobra. À primeira vista, o comportamento de tais pontos parece precisar de apenas de uma adaptação do caso dobra-regular, porém tal afirmação se mostra muito precipitada e desconectada da complexidade de tal questão.

O tratamento que daremos para esse caso é completamente diferente dos casos anteriores. Mais ainda, veremos que sob certas condições os pontos dobra-dobra não são estruturalmente estáveis e tal fato implicará que o conjunto Σ_0 não é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$, contrariando as expectativas uma vez que pois no caso clássico, foi provado que o conjunto $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(M)$, contido no conjunto dos campos globalmente estruturalmente estáveis, era conjunto aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Começaremos separando os pontos dobra-dobra em quatro tipos por meio da definição que segue.

Definição 4.2.4.1. Utilizando os conceitos de dobra visível e invisível da Definição 1.4.4, sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in M$ um ponto de dobra-dobra de Z . Então, são dadas as seguintes denominações para o ponto p :

- a) *dobra-dobra visível*, se $X^2 f(p) > 0$ e $Y^2 f(p) < 0$;
- b) *dobra-dobra invisível-visível* se $X^2 f(p) < 0$ e $Y^2 f(p) < 0$;
- c) *dobra-dobra visível-invisível* se $X^2 f(p) > 0$ e $Y^2 f(p) > 0$; e

d) *dobra-dobra invisível* se $X^2f(p) < 0$ e $Y^2f(p) > 0$, neste caso esse ponto também recebe o nome de *singularidade de Teixeira* ou, simplesmente, *T-singularidade*.

Comumente um ponto no caso a) recebe o nome de ponto de *dobra-dobra hiperbólicos*, b) e c) são denominados *dobra-dobra parabólicos* e, finalmente, pontos do tipo d) são batizados pelo nome de *dobra-dobra elípticos*.

Dados $Z = (X, Y) \in \Xi_0$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra, começaremos provando resultados a respeito de uma forma normal para o ponto p .

Teorema 4.2.4.1 (Adaptado de [7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra, satisfazendo $S_X \pitchfork S_Y$. Então, existe uma carta (φ, U) em torno de p em M , tal que $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap \Sigma) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^2$, $f \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = |X^2f(p)| \cdot z$,*

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \delta y \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_*Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

sendo, $\delta = \text{sgn}(X^2f(p))$, $\text{sgn}(\gamma) = \text{sgn}(Y^2f(p))$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Utilizando a forma normal do Teorema 2.2.5, existe uma carta (ψ, U) em torno de p de modo que $\psi(p) = 0$, $\psi(U \cap \Sigma) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $f(\psi^{-1}(x, y, z)) = z$ e

$$\psi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^2f(\psi^{-1}(x, y, z)) \\ y \end{pmatrix}.$$

Uma vez que p é ponto de dobra do campo X ,

$$K = X^2f(p) \neq 0.$$

Considere a transformação linear

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(x, \frac{y}{K}, \frac{z}{|K|} \right).$$

Então, $\tilde{\psi} := A\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma carta em torno de \mathbb{R}^3 satisfazendo $f \circ \tilde{\psi}(x, y, z) = |K|z$, $\tilde{\psi}(U \cap \Sigma) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $\tilde{\psi}(p) = 0$ e

$$\tilde{\psi}_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \delta y \end{pmatrix},$$

denote

$$\tilde{Y} = \tilde{\psi}_*Y = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3).$$

Uma vez que p é ponto de dobra-dobra, segue que

$$\{\nabla f(p), \nabla Xf(p), \nabla Yf(p)\}$$

é um conjunto linearmente independente em T_pM . Uma vez que $\tilde{\psi}$ é um difeomorfismo, utilizando o Lema 4.2.2.1, segue que

$$\{(0, 0, |K|), (0, |K|, 0), |K|\nabla\tilde{Y}_3(0, 0, 0)\}$$

é um conjunto linearmente independente, implicando que

$$|Xf^2(p)| \cdot \tilde{Y}_3(x, y, z) = \nabla(Yf) \circ \tilde{\psi}^{-1}(x, y, z) = \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2),$$

sendo $\alpha_3 \neq 0$. Definindo

$$\gamma = \text{sgn}(Y^2f(p)) / |K|$$

e fazendo a mudança de variáveis

$$\zeta(x, y, z) = (\alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z, y, z),$$

temos que ζ é um difeomorfismo de \mathbb{R}^3 com \mathbb{R}^3 . Definindo

$$\varphi = \zeta \circ \tilde{\psi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

é claro que φ é difeomorfismo com sua imagem satisfazendo

$$\varphi(U \cap \Sigma) = \zeta(\tilde{\psi}(U \cap \Sigma)) \subset \zeta(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \delta y \end{pmatrix}$$

e

$$\varphi_*Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1\tilde{Y}_1(0) + \alpha_2\tilde{Y}_2(0) + \alpha_3\tilde{Y}_3(0) + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \tilde{Y}_2(0) + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix}.$$

Uma vez que

$$\text{sgn}(\gamma) = \text{sgn}\left(\frac{\alpha_1\tilde{Y}_1(0) + \alpha_2\tilde{Y}_2(0) + \alpha_3\tilde{Y}_3(0)}{K}\right) = \frac{Y^2f(p)}{|X^2f(p)|} = \text{sgn}(Y^2f(p)),$$

definimos $\alpha := \alpha_2$ e $\beta := \tilde{Y}_2(0)$, e então

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \delta y \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_*Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

o que demonstra o teorema. \square

O teorema acima nos motiva a dar a definição a seguir.

Definição 4.2.4.2. Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra tal que $S_X \pitchfork S_Y$. Um sistema de coordenadas que coloca Z na forma do Teorema 4.2.4.1 é chamada de *carta normal* de Z em p . Z será denotado por $Z(\alpha, \beta, \gamma)$, sendo α , β e γ as constantes dadas pelo teorema, que recebem o nome de *parâmetros normais* de Z .

N.B. 4.2.1. A demonstração do Teorema 4.2.4.1 nos dá uma expressões para α, β e γ :

$$\alpha = \frac{\partial \nabla(Yf) \circ \psi^{-1}}{\partial y}(0), \quad \beta = \pi_2(\varphi_* Y) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{Y^2 f(p)}{|X^2 f(p)|},$$

porém é interessante notar que α e β dependem da escolha das cartas ψ e φ . Apesar dessa escolha não ser canônica, a mera existência da carta normal irá implicar resultados impressionantes.

Além disso do Teorema 4.2.4.1 consegue-se o seguinte corolário.

Corolário 4.2.1 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra de Z , com $S_X \pitchfork S_Y$. Então na carta (φ, U) do Teorema 4.2.4.1 temos*

- i. $\varphi(S_X \cap U) = \{(x, 0, 0); x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, para algum $\varepsilon > 0$;
- ii. $\varphi(S_Y \cap U) = \{(g(y), y, 0); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, além disso $g(y) = \mathcal{O}(y^2)$.

Demonstração. Seja (φ, U) a carta do Teorema 4.2.4.1, então $f \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = |X^2 f(p)| \cdot z$, denotando X por $\varphi_* X$, Y por $\varphi_* Y$ e f por $f \circ \varphi^{-1}$,

$$Xf(x, y, 0) = |X^2 f(p)| \cdot \delta y.$$

Então

$$S_X = \{(x, y, 0) \in \varphi(U); y = 0\}$$

e

$$Yf(x, y, 0) = |X^2 f(p)| \cdot (x + \mathcal{O}(|(x, y)|^2)).$$

Uma vez que

$$\frac{\partial Yf}{\partial x}(0, 0, 0) = |X^2 f(p)| \neq 0,$$

pelo teorema da função implícita existem $\varepsilon, \delta > 0$ e única função suave $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$, tais que

$$Yf(x, y, 0) = 0 \quad \text{e} \quad (x, y) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \iff x = g(y).$$

Segue que, diminuindo U ,

$$S_Y = \{(g(y), y, 0); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Por fim, como

$$Yf(g(y), y, 0) = 0,$$

derivando em $y = 0$,

$$\frac{\partial Yf}{\partial x}(0)g'(0) + \frac{\partial Yf}{\partial y} = 0,$$

e como $\frac{\partial Yf}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial Yf}{\partial x} \neq 0$, então

$$g'(0) = 0 \implies g(y) = \mathcal{O}(y^2).$$

□

Defina F_Z como sendo o campo de vetores Z^d colocado nas coordenadas do Teorema 4.2.4.1, de modo análogo definimos F_Z^N como sendo o campo Z_N^d colocado em tais coordenadas. Outra aplicação do Teorema 4.2.4.1 é o seguinte resultado.

Teorema 4.2.4.2. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ nas condições do Teorema 4.2.4.1. Então $F_Z^N \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, é dada por*

$$F_Z^N(y, z) = |X^2 f(p)| \begin{pmatrix} \alpha & -\delta\gamma \\ 1 & -\delta\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2),$$

Mais ainda, tal campo é equivalente a

$$\tilde{F}_Z^N(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & -\delta\gamma \\ 1 & -\delta\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2).$$

Uma vez que $d\varphi_p(T_p\Sigma) = \{0\} \times \mathbb{R}^2$, na notação acima estamos omitindo a primeira coordenada.

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.4.1, existe uma carta (φ, U) tal que $\varphi(p) = 0$, $f \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = |X^2 f(p)| \cdot z$,

$$\varphi_* X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \delta y \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_* Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix}.$$

Denote X por $\varphi_* X$, Y por $\varphi_* Y$ e f por $f \circ \varphi^{-1}$ obtendo

$$F_Z^N(x, y) = Y f(x, y, z) \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y)|) \\ \delta y \end{pmatrix} - X f(0, y, z) \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

com

$$X f(x, y, 0) = |X^2 f(p)| \delta y$$

e

$$Y f(x, y, 0) = |X^2 f(p)| (x + \mathcal{O}(|(x, y)|^2)).$$

Substituindo estes valores em 4.2.4, temos

$$F_Z^N(x, y) = |X f^2(p)| \begin{pmatrix} \alpha & -\delta\gamma \\ 1 & -\delta\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2).$$

Fazendo a mudança temporal $\tau = t/|X^2 f(p)|$, é claro que o campo acima é equivalente a

$$\tilde{F}_Z^N(y, z) = \begin{pmatrix} \alpha & -\delta\gamma \\ 1 & -\delta\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2).$$

□

Agora iremos nos concentrar em estudar o espaço dos germes de involuções. Apesar de parecer pouco relacionado com o assunto abordado até agora esse conceito é fundamental para o entendimento da estabilidade estrutural local em pontos de dobra-dobra, como será mostrado em seções futuras.

4.2.4.1 Espaço dos Germes de Involuções

Essa seção tem como objetivo construir ferramentas que nos permitem estudar a estabilidade estrutural dos pontos de dobra-dobra elípticos.

Estenderemos o conceito de germe, apresentado na seção 2.

Definição 4.2.4.3. Sejam M e N variedades suaves. Considere o conjunto

$$C_p^\infty(M, N) := \{f : U_p \rightarrow N; U_p \text{ é uma vizinhança de } p, f \text{ é de classe } C^\infty\}.$$

Definimos o *espaço dos germes de M para N em p* ,

$$\mathcal{C}_p^\infty(M, N) := C_p^\infty(M, N) / \sim_p,$$

sendo \sim_p a relação de equivalência dada por $f \sim_p g$ se

- i. $f(p) = g(p)$;
- ii. existe vizinhança $W_p \subset U_p \cap V_p$, tal que $f(q) = g(q)$, para todo $q \in W_p$.

A análise do caso dobra-dobra estará intimamente ligada ao espaço das involuções. Os resultados referentes a essa parte da dissertação são extraídos de [16]

Notação 4.2.2. Sejam X e Y espaços topológicos, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Denotamos

$$h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

se a função $h : X \rightarrow Y$ é tal que $h(A) \subset B$.

Definição 4.2.4.4. Um *germe de uma involução em 0* é um germe pertencente a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que um de seus representantes é um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\varphi(0) = 0$, $\varphi^2(x, y) = (x, y)$ e $\det(d\varphi_0) = -1$.

Definição 4.2.4.5. Um germe $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0) = 0$ é chamado de *dobra* se existem germes de difeomorfismos $h, k : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que $f = k \circ f_0 \circ h^{-1}$, sendo

$$f_0(x, y) = (x, y^2).$$

O espaço \mathcal{I}^r será o *conjunto dos germes de involução em 0*, munido da topologia C^r , isto é, a topologia gerada pela base de vizinhanças

$$\mathcal{B}^r(\varphi, \varepsilon) := \left\{ \psi \in \mathcal{I}^r \left| \begin{array}{l} \exists \text{ uma vizinhança } U_0^\psi \subset \mathbb{R}^2 \text{ de } 0 \text{ tal que} \\ \sup \{ \|d^i \varphi(x) - d^i \psi(x)\|; x \in U_0^\psi \text{ e } 0 \leq i \leq r \} < \varepsilon \end{array} \right. \right\},$$

com $\varphi \in \mathcal{I}^r$ e $\varepsilon > 0$. É interessante notar que essa topologia não é Hausdorff, pois se tomarmos duas involuções $\varphi, \psi \in \mathcal{I}^r$, tais que $d^i \varphi_0 = d^i \psi_0$ e $0 \leq i \leq r$ implica $\psi \in \mathcal{B}^r(\varphi, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Além disso, definimos $\mathcal{W}^r = \mathcal{I}^r \times \mathcal{I}^r$ com a topologia produto.

Iremos agora apresentar um conceito de equivalência topológica para elementos de \mathcal{W}^r .

Definição 4.2.4.6. Sejam $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ e $\psi = (\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{W}^r$ pares de involuções em 0. Então φ e ψ são *topologicamente equivalentes* em 0 se existe um homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ que satisfaz $h \circ \varphi_0 = \psi_0 \circ h$ e $h \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ h$, simultaneamente.

Lema 4.2.4.1 ([16]). *Assuma que $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathcal{S}^r$ satisfaça*

i. $\beta(x, 0) = 0$;

ii. $y\beta(x, y) < 0$, se $y < 0$.

Então, existe $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tal que $f(0) = 0$, f é uma dobra e $f \circ \varphi = f$.

Demonstração. Perceba que

$$d\varphi_{(x,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,0) & \frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}(x,0) & \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,0) & \frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,0) \\ 0 & \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,0) \end{pmatrix},$$

e por *ii.* temos

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,0) < 0,$$

pois

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\beta(x,y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y\beta(x,y)}{y^2} \leq 0$$

e $\beta_y(x,0) \neq 0$, implicando $\beta_y(x,0) < 0$. Usando que $\det(d\varphi_{(0,0)}) = -1$, necessariamente

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(0,0) < 0 \text{ e } \frac{\partial\alpha}{\partial x}(0,0) > 0.$$

Uma vez que

$$d\varphi_{(0,0)}^2 = \text{Id},$$

derivando em $(0,0)$ consegue-se

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}(0,0)\right)^2 = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}(0,0)\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\partial\beta}{\partial y}(0,0) = -1 \text{ e } \frac{\partial\alpha}{\partial x}(0,0) = 1.$$

Além disso, como $\varphi(\varphi(x,0)) = (x,0)$, então $\alpha(\alpha(x,0),0) = 0$. Defina $a(x) = \alpha(x,0)$. Temos então que a satisfaz

1. $a(a(x)) = x$,
2. $a'(0) = 1$, e
3. $a(0) = 0$.

Vamos mostrar que $a(x) = x$. Uma vez que a é difeomorfismo com sua imagem, $a'(x) \neq 0$ para todo x . Por continuidade, temos que $a'(x) > 0$ para todo x pois $a'(0) = 1$, implicando que a é função crescente. Suponha que exista x tal que $a(x) \neq x$. Se $a(x) < x$, $a(a(x)) = x < a(x)$ pois a função a é crescente, gerando assim uma contradição. Por outro lado, se $x < a(x)$, então, como a é função crescente, $a(x) < a(a(x)) = x$, gerando assim outro absurdo, logo, concluímos que $a(x) = x$.

Segue que $\varphi(x,0) = (x,0)$ e portanto

$$\begin{aligned} \text{Id} &= d(\varphi \circ \varphi)_{(x,0)} \\ &= d\varphi_{\varphi(x,0)} d\varphi_{(x,0)} \\ &= d\varphi_{(x,0)} d\varphi_{(x,0)} \\ &= d\varphi_{(x,0)}^2. \end{aligned}$$

Utilizando a equação acima, temos que

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}(x, 0)\right)^2 = 1, \quad \forall x, .$$

Como $\beta_y(x, 0)$ é contínua,

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(x, 0) = -1.$$

Definimos

$$f(x, y) = (x + \alpha(x, y), x\alpha(x, y) + y\beta(x, y)).$$

Note que

$$\begin{aligned} f(\varphi(x, y)) &= (\alpha(x, y) + \alpha(\varphi(x, y)), \alpha(x, y)\alpha(\varphi(x, y)) + \beta(x, y)\beta(\varphi(x, y))) \\ &= (\alpha(x, y) + x, \alpha(x, y)x + \beta(x, y)y) \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

Perceba também que

$$df = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_x & \alpha_y \\ \alpha + x\alpha_x + y\beta_x & \beta + y\beta_y + x\alpha_y \end{pmatrix},$$

com

$$df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

e sendo

$$d = \frac{\partial\alpha}{\partial y}(0, 0).$$

Definindo

$$\Delta = \det(df) = \beta + \beta\alpha_x - y\beta_x\alpha_y + y\alpha_x\beta_y + x\alpha_y - \alpha\alpha_y + y\beta_y,$$

é fácil ver que

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial\Delta}{\partial y}(0, 0) < 0.$$

Do teorema da função implícita, existe única função suave $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$ tal que $\Delta(x, \tau(x)) = 0$ e $\tau(0) = 0$, sendo assim

$$0 = \frac{d\Delta(\cdot, \tau(\cdot))}{dx}(0) = \frac{\partial\Delta}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial\Delta}{\partial y}(0, 0)\tau'(0) = \frac{\partial\Delta}{\partial y}(0, 0)\tau'(0),$$

o que implica que $(1, 0) \in T_{(0,0)}\Delta^{-1}(0)$. Por fim, isto nos mostra que o conjunto

$$K = \text{Ker}(df_{(0,0)}) = \{(x, y); (2, b) \cdot (x, y) = 0\}$$

é transversal ao conjunto

$$\Sigma_0(f) = \{(x, y); \Delta(x, y) = 0\}$$

em 0. Vamos mostrar que essa propriedade implica que f é dobra. Precisamos para tanto encontrar germes de difeomorfismos

$$\phi, \psi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

tais que $\psi \circ f \circ \phi = (x, y^2)$.

Podemos assumir sem perda de generalidade que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ satisfaz

$$df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

em decorrência da Equação 4.2.5. Pela forma de Jordan, existe Matriz P tal que

$$P \cdot df_{(0,0)} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue que $Pf(P^{-1}(x, y))$ é tal que

$$d\left(\frac{1}{2}Pf(P^{-1}(x, y))\right)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mostrando que podemos assumir

$$df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos agora a função $F(x, y) = (f_1(x, y), y)$. Uma vez que $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = 1$, temos que F é difeomorfismo local. Defina ϕ como sendo um germe de F^{-1} . Note que $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), y)$ e

$$\begin{aligned} f(\phi(x, y)) &= (f_1(\phi(x, y)), f_2(\phi(x, y))) \\ &= (x, f_2(\phi_1(x, y), y)). \end{aligned}$$

Defina $\tilde{f}(x, y) := f_2(\phi_1(x, y), y)$. Sendo assim, $f \circ \phi = (x, \tilde{f}(x, y))$ e portanto

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \det(d(f \circ \phi)) = \det df_\phi \cdot \det(d\phi) = \Delta \circ \phi(x, y) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y),$$

implicando $\tilde{f}(0, 0) = 0$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(0, 0) &= \frac{\partial(\Delta \circ \phi)}{\partial y}(0, 0) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0) + \Delta(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial \Delta}{\partial y}(0, 0) \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(0, 0), 1 \right) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0) + 0 \\ &= \frac{\partial \Delta}{\partial y}(0, 0) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0) \neq 0, \end{aligned}$$

pois $\Delta_x(0, 0) = 0$. Portanto,

$$\tilde{f}(x, y) = ay^2 + \mathcal{O}(3),$$

onde $a \neq 0$ e $\mathcal{O}(3)$ são termos de ordem maior ou igual a 3. A equação acima nos mostra que a função $g(x, y) = \tilde{f}(x, \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|})$ é suave, com

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = a.$$

Por fim, note que $G(x, y) = (x, g(x, y))$ é um difeomorfismo local. Definindo ψ igual ao germe do difeomorfismo G^{-1} , temos

$$\begin{aligned}\psi \circ f \circ \phi &= \psi(x, \tilde{f}(x, y)) \\ &= \psi(x, g(x, y^2)) \\ &= (x, y^2).\end{aligned}$$

Demostramos assim o resultado. □

Proposição 4.2.4.1 ([16]). *Sob a hipótese do Lema 4.2.4.1, existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\varphi \circ h = \varphi_0 \circ h$, sendo $\varphi_0(x, y) = (x, -y)$.*

Demonstração. Seja f a dobra proveniente do Lema 4.2.4.1. Uma vez que f é uma dobra, existem difeomorfismos $h, k : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que

$$k \circ f = f_0 \circ h,$$

sendo $f_0(x, y) = (x, y^2)$. Perceba que

$$\begin{aligned}f_0 \circ h \circ \varphi &= k \circ f \circ \varphi \\ &= k \circ f \\ &= f_0 \circ h,\end{aligned}$$

então $f_0(h \circ \varphi \circ h^{-1}) = f_0$. Segue que $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ é um elemento de \mathcal{S}^r tal que $f_0 \circ \psi = f_0$. Temos assim que $\psi(x, y) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))$ satisfaz

$$x = f_0(x, y) = f \circ \psi(x, y) = \psi_1(x, y)$$

e

$$y^2 = f_0(x, y) = f_0 \circ \psi(x, y) = \psi_2(x, y)^2,$$

então $|\psi_2(x, y)| = |y|$. Como ψ é função suave, $\psi_2(x, y) = -y$ ou $\psi_2(x, y) = y$. Como $\det(d\psi_0) = -1$, segue que $\psi_2(x, y) = -y$ e portanto

$$\varphi_0(x, y) = (x, -y) = \psi = h \circ \varphi \circ h^{-1},$$

o que demonstra a proposição. □

A proposição anterior nos mostra que, dado $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{W}^r$, podemos escolher uma mudança de variáveis numa vizinhança de 0 de forma que $\varphi(x, y) = (x, -y)$ e

$$d\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$, satisfazendo $a^2 + bc = 1$ (pois $d\varphi_1^2(0) = \text{Id}$).

Proposição 4.2.4.2 ([16]). *O vetor 0 é um ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo $\Phi = \varphi_0 \circ \varphi_1$ se, e somente se, $a^2 > 1$. Além disso, os autovalores de $d\Phi_0$ são iguais a $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$.*

Demonstração. Basta ver que

$$\begin{aligned} d\Phi_0 &= d\varphi_0(0) \cdot d\varphi_1(0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

um cálculo imediato nos mostra que os autovalores são iguais a

$$a \pm \sqrt{-bc} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Portanto, $\|a \pm \sqrt{a^2 - 1}\| = 1$ se, e somente se, $a^2 > 1$. \square

Iremos agora estudar as Involuções Lineares. Considere $\varphi_0(x, y) = (x, -y)$ e $\varphi_1(x, y) = (ax + by, cx - ay)$, com $a^2 + bc = 1$.

Defina \mathcal{J} como sendo o conjunto dos homeomorfismos $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que $h\varphi_0 = \varphi_0h$.

Proposição 4.2.4.3 ([16]). *Seja $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um difeomorfismo. Então $h \in \mathcal{J}$ se, e somente se, existem funções $h_0, h_1 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tais que $h(x, y) = (h_0(x, y^2), yh_1(x, y^2))$.*

Demonstração. Suponha primeiramente que

$$h(x, y) = (h_0(x, y^2), yh_1(x, y^2)).$$

Então,

$$\begin{aligned} h(\varphi_0(x, y)) &= (h_0(x, (-y)^2), -yh_1(x, (-y)^2)) \\ &= \varphi_0(h_0(x, y^2), yh_1(x, y^2)) \\ &= \varphi_0(h(x, y)). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $h = (g_0(x, y), g_2(x, y))$ conjuga φ_0 , então $g_0(x, y) = g_0(x, -y)$ e $g_1(x, y) = -g_1(x, -y)$. Logo, g_0 é função par em y e g_1 é função ímpar em y , o que implica a existência de funções h_1 e h_2 tais que

$$g_0(x, y) = h_0(x, y^2)$$

e

$$g_1(x, y) = yh_1(x, y^2).$$

\square

Suponha agora que 0 é um ponto fixo hiperbólico de $\Phi = \varphi_0 \circ \varphi_1$. Vimos que se 0 é hiperbólico, então $bc < 0$.

Dado $h_0 \in \mathcal{J}$ definido por $h_0(x, y) = \left(x, \frac{B}{b}y\right)$, sendo $B = \sqrt{-bc}$, podemos mudar as coordenadas do nosso sistema fazendo com que $\Phi(x, y) = (ax + By, Bx + ay)$, com $a^2 - B^2 = 1$. De fato, $h_0^{-1} \circ \Phi \circ h_0 = (ax + By, Bx + ay)$. Definindo

1. $\lambda = a + B$;
2. $r(x, y) = (x + y, x - y)$; e
3. $f(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1}y)$,

um cálculo imediato nos mostra que $\Phi = r^{-1} \circ f \circ r$.

Considere $\tilde{\varphi}_1(x, y) = (\tilde{a}x + \tilde{b}y, \tilde{c}x - \tilde{a}y)$, com $\tilde{b}\tilde{c} < 0$, outro elemento de \mathcal{S}^r . Conseguimos, definir os mesmos objetos que antes para o par $(\varphi_0, \tilde{\varphi}_1)$. Sendo assim,

$$\tilde{\Phi}(x, y) = (\tilde{a}x + \tilde{B}y, \tilde{B}x + \tilde{a}y).$$

Seja $p : (\mathbb{R}_+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_+, 0)$ definido por $p(x) = x^k$, sendo

$$k = \frac{\log \lambda}{\log \tilde{\lambda}}.$$

Podemos estender p para a função contínua $P : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ por $P(0) = 0$, $P(x) = x$ se $x > 0$ e $P(x) = -p(-x)$ se $x < 0$.

Considere a função $K : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $K(x, y) = (P(x), P(y))$. Uma vez que

$$\begin{aligned} K(\tilde{f}(x, y)) &= K(\tilde{\lambda}x, \tilde{\lambda}^{-1}y) \\ &= (P(\tilde{\lambda}x), P(\tilde{\lambda}^{-1}y)) \\ &= (\lambda P(x), \lambda^{-1}P(y)) \\ &= f(K(x, y)), \end{aligned}$$

temos que K conjuga \tilde{f} com f . Tais observações nos levam ao seguinte resultado.

Proposição 4.2.4.4 ([16]). *Utilizando as notações acima, seja $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $h = r^{-1} \circ K \circ r$. Então são satisfeitos:*

- i.* $h \in J$;
- ii.* $h \circ \Phi = \tilde{h} \circ \Phi$; e
- iii.* $h \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ h$.

Demonstração. Começaremos provando *ii.* Como vimos antes podemos assumir que $\Phi = r^{-1} \circ f \circ r$ e $\tilde{\Phi} = r^{-1} \circ \tilde{f} \circ r$, portanto

$$\begin{aligned} h \circ \Phi &= r^{-1} \circ K \circ r \circ r^{-1} \circ \tilde{f} \circ r \\ &= r^{-1} \circ f \circ K \circ r \\ &= \tilde{\Phi} \circ h. \end{aligned}$$

Para ver que $h \in J$, basta calcular $h \circ \varphi_0$ e $\varphi_0 \circ h$ e comparar os resultados provando *i.* Por fim, é claro que *i.* mais *ii.* implica *iii.*, demonstrando assim a proposição. \square

Utilizando a mesma técnica, conseguimos mostrar que se 0 não é ponto fixo hiperbólico de Φ , então não temos estabilidade estrutural.

Teorema 4.2.4.3 ([16]). *Se 0 não é ponto fixo hiperbólico de $\Phi = \varphi_0 \circ \varphi_1$, então (φ_0, φ_1) não é estruturalmente estável.*

Demonstração. Utilizando o mesmo processo utilizado acima da Proposição 4.2.4.4, Φ é equivalente via $h_0 = \left(x, \frac{B}{b}\right) \in \mathcal{J}$, sendo $B = \sqrt{bc}$, à $h_0^{-1} \circ \Phi \circ h_0(x, y) = (ax + By, -Bx + ay)$, com $a^2 + B^2 = 1$. Portanto, $a = \cos(\alpha)$ e $B = \sin(\alpha)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. É claro que se

$$\alpha - \tilde{\alpha} \neq 0 \pmod{2\pi},$$

então Φ não é equivalente a $\tilde{\Phi} = (\tilde{a}x + \tilde{B}x, -\tilde{B}x + \tilde{a}y)$, com $\tilde{a} = \cos(\tilde{\alpha})$ e $\tilde{B} = \sin(\tilde{\alpha})$. \square

Iremos agora, provar dois lemas técnicos para o resultado principal da função.

Lema 4.2.4.2 (Teorema da Perturbação do Isomorfismo, [16]). *Sejam $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo e $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\| \leq \lambda \|x - y\|,$$

com $\lambda \cdot \|T^{-1}\| < 1$. Então $f(x) = L + \alpha$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Sendo $L + \alpha = L(I + L^{-1}\alpha)$, é suficiente mostrar que $f(x) := I + \beta$ é um homeomorfismo, com $\beta = L^{-1}\alpha$. Perceba que, das hipóteses,

$$\|\beta(x) - \beta(y)\| \leq \nu \|x - y\|, \text{ com } \nu < 1.$$

Iremos mostrar a injetividade de f :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|x + \beta(x) - y - \beta(y)\| \\ &= \|x - y\| - \|\beta(x) - \beta(y)\| \\ &= (1 - \nu)\|x - y\| > 0. \end{aligned}$$

Provamos então que f é uma bijeção entre \mathbb{R}^n e $f(\mathbb{R}^n)$. Perceba que $f^{-1} : f(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz com constante igual a $1/(1 - \nu)$, garantindo a continuidade de f^{-1} . Vamos provar que $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto.

Tome $y \in f(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$y = x + \beta(x)$$

e escolha $r > 0$. Iremos mostrar que $B_{(1-\nu)r}(y) \subset f(\mathbb{R}^n)$. Tome $z \in B_{(1-\nu)r}(y)$ e considere o mapa

$$\begin{aligned} \xi_z : \overline{B_r(x)} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto z - \beta(x). \end{aligned}$$

Perceba que se o mapa acima possuir um ponto fixo b , então $\xi_z(b) = b$, implicando que $f(b) = b + \beta(b) = z$. Portanto, é suficiente mostrar a existência de tal ponto fixo.

Primeiramente veja que

$$\|\xi_z(x) - x\| \leq \|z - \beta(x) - x\| \leq \|z - y\| \leq (1 - \nu)r.$$

Tome agora $a \in \overline{B_r(x)}$:

$$\begin{aligned} \|\xi_z(a) - x\| &\leq \|\xi_z(a) - \xi_z(x) + \xi_z(x) - x\| \\ &\leq \|\xi_z(a) - \xi_z(x)\| + \|\xi_z(x) - x\| \\ &\leq \nu r + (1 - \nu)r = r, \end{aligned}$$

implicando $\xi_z(\overline{B_r(x)}) \subset \overline{B_r(x)}$. Como ξ_z é ν -Lipschitz, temos do Teorema do ponto fixo de Banach que existe $b \in B_r(x)$ tal que $\xi_z(b) = b$ e, conseqüentemente, $f(b) = z$. Como z é qualquer elemento de $B_{(1-\nu)r}(y)$, mostramos que

$$B_{(1-\nu)r}(y) \subset f(\mathbb{R}^n),$$

implicando, em particular que o mapa f é aberto. Para terminar, precisamos ver que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Isso é garantida pela equação

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{(1-\nu)k}(f(x)) \subset f(\mathbb{R}^n),$$

demonstrando assim o resultado. \square

Lema 4.2.4.3 ([16]). *Dados $\varphi \in \mathcal{S}^r$ e $\varepsilon > 0$, existem uma vizinhança U de 0 e uma extensão $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $\varphi|_U$, da forma $\varphi'(0) + \alpha$, com $\alpha \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^2)$ (espaço das aplicações contínuas limitadas) uma função Lipschitz e limitada por ε . Mais ainda, $\theta^2 = \text{Id}$.*

Demonstração. Seja V uma vizinhança da origem tal que a função

$$h = \text{Id} + k$$

é uma carta, sendo

$$k = \frac{1}{2} (\text{d}\varphi_0 \varphi - \text{Id}).$$

Note que $\text{d}k_0 = 0$ e

$$\varphi = h^{-1} \circ \text{d}\varphi_0 \circ h.$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $U \subset V$ tal que k_i é limitada por ε e é $\varepsilon/2$ -Lipschitz. Considere agora $\overline{B_r(0)} \subset U$. Definimos a função $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$K(x) = \begin{cases} k(x) & , \text{ se } \|x\| < r, \\ k\left(r \frac{x}{\|x\|}\right) & , \text{ se } \|x\| > r, \end{cases}$$

é imediato que K é uma extensão \mathcal{C}^0 de k limitada por ε e ε -Lipschitz. Tomando $\varepsilon < 1$, pelo teorema de perturbação do isomorfismo, $H = \text{Id} + K$ é homeomorfismo de \mathbb{R}^2 e sua inversa é $H^{-1} = \text{Id} + \widetilde{K}$, onde $\widetilde{K} = -K \circ H$. Portanto, $\widetilde{K} \in \mathcal{C}_b^0$ e a constante de Lipschitz de \widetilde{K} é igual a $\varepsilon/(1 - \varepsilon)$.

Definindo $\theta = H_i \circ \text{d}\varphi_0 \circ H_i$, temos claramente que

$$\theta = \text{d}\varphi_0 + \alpha$$

é uma extensão de $\varphi|_U$, sendo

$$\alpha = \text{d}\varphi_0 K + \widetilde{K} \circ \text{d}\varphi_0 \circ H,$$

assim, α é limitada por 2ε , pois

$$\|\alpha(x)\| \leq \|d\varphi_0 K(x)\| + \|\widetilde{K} \circ d\varphi_0 \circ H(x)\| \leq \sup\|K\| + \sup\|K\| \leq 2\varepsilon.$$

Também α é $(2\varepsilon + \varepsilon^2)$ -Lipschitz:

$$\begin{aligned} \|\alpha(x) - \alpha(y)\| &= \|d\varphi_0(K(x) - K(y)) + \widetilde{K}(d\varphi_0 H(x)) - \widetilde{K}(d\varphi_0 H(y))\| \\ &= \varepsilon\|x - y\| + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\|x - y + K(x) - K(y)\| \\ &= \varepsilon\|x - y\| + \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon}\|x - y\| \\ &= (2\varepsilon + \varepsilon^2)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Como ε pode ser tomado tão pequeno quanto se queira e θ satisfaz $\theta \circ \theta = \text{Id}$, demonstrando o resultado. \square

Teorema 4.2.4.4 ([16]). *Seja $(\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{W}^r$, se 0 é ponto fixo hiperbólico de $\Phi = \varphi_0 \circ \varphi_1$, então (φ_0, φ_1) é equivalente a (A_0, A_1) , onde $A_i = d(\varphi_i)_0$.*

Demonstração. Definimos W^s e W^u as variedades estável e instável associadas ao isomorfismo $d\Phi_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Como $\varphi_0^2 = \varphi_1^2 = \text{Id}$, é claro que

$$(\varphi_0 \circ \varphi_1)^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_0$$

e, conseqüentemente,

$$\varphi_1 \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ (\varphi_0 \circ \varphi_1)^{-1} \circ \varphi_0^{-1}$$

e

$$\varphi_1 \circ \varphi_0 = \varphi_1 \circ (\varphi_0 \circ \varphi_1)^{-1} \circ \varphi_1^{-1}.$$

Uma vez que φ_0 e φ_1 conjugam os difeomorfismos Φ e Φ^{-1} , temos

$$\varphi_i(W^u) = W^s \text{ e } \varphi_i(W^s) = W^u,$$

para $i \in \{0, 1\}$.

Sejam θ_0, θ_1 as extensões de φ_0, φ_1 , respectivamente, dadas pelo Lema 4.2.4.3. Então $\Theta := \theta_0 \circ \theta_1$ é \mathcal{C}^1 em uma vizinhança de 0 e $L = d\Phi_0 = d(\theta_0 \circ \theta_1)_0 = A_0 A_1$ é um isomorfismo hiperbólico. Usando as técnicas da demonstração da Proposição 4.1.1., existem sub-espacos vetoriais $E^u, E^s \subset \mathbb{R}^2$ tais que $E^{u,s}$ são invariantes por L e $L_u = L|_{E^u}$ é uma expansão, enquanto $L_s = L|_{E^s}$ é uma contração; isto é, $\|L_u^{-1}\| < 1$ e $\|L_s\| < 1$. Definimos elementos

$$a = \max\{\|L_u^{-1}\|, \|L_s\|\} < 1$$

$$\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^2) = \{\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \phi \text{ é uniformemente contínua e limitada em todo } \mathbb{R}^2\},$$

$$\mathcal{L}_\mu(L) = \{\Lambda = L + \lambda; \lambda \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^2) \text{ é } \mu\text{-Lipschitz, limitada por } \mu\} \text{ e}$$

$$\mathcal{H} = \{h = \text{Id} + g; g \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^2)\},$$

onde $\mu \in \mathbb{R}_+$ e Id é a aplicação identidade de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^2 . Munindo $\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$ da norma do supremo,

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x)\|; x \in \mathbb{R}^n\},$$

este espaço se torna um espaço de Banach, o que faz $\mathcal{L}_\mu(L)$ e \mathcal{H} se tornarem espaços métricos completos.

Será mostrado que existe um único $h \in \mathcal{H}$ tal que $h \circ \Theta = Lh$. A fim de não deixar a notação carregada, a composição de funções será denotada pelo produto, isto é, $g(f) = gf$.

Da definição de Θ ,

$$\begin{aligned}\Theta &= \theta_0 \circ \theta_1 \\ &= (d(\varphi_0)_0 + \alpha_0)(d(\varphi_1)_0 + \alpha_1) \\ &= L + \alpha_0(A_1 + \alpha_1) + A_0\alpha_1.\end{aligned}$$

definindo $\alpha = \alpha_0(A_1 + \alpha_1) + A_0\alpha_1$ e percebendo que A_1 e A_2 são isometrias (pois $\{-1, 1\}$ são os autovalores de A_i), temos $\alpha \in \mathcal{C}_{BU}$, que α é $(\mu = 2\varepsilon + \varepsilon^2)$ -Lipschitz e também que α é limitada por μ . Assim, $\Theta \in \mathcal{L}_\mu$ e como o ε escolhido é qualquer, podemos supor, sem perda de generalidade que $\mu < a/2$. Assim, pelo teorema da perturbação do isomorfismo, Θ é invertível.

Note que a equação $h\Theta = Lh$, para $h \in \mathcal{H}$, é

$$(I + g)(L + \alpha) = L(I + g),$$

sendo $g \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$. Pode-se ainda reescrever a equação acima como

$$g\Theta - Lg = -\alpha. \quad (4.2.6)$$

Ou seja, a equação 4.2.6 é equivalente a $g = Lg - \alpha\Theta^{-1}$. Como L é uma isometria hiperbólica, pode-se decompor $\mathbb{R}^2 = E^u \oplus E^s = E^u \times E^s$. Compondo a função g com as projeções $\pi_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow E^u$ e $\pi_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow E^s$, conseguimos:

$$g_u = [L_u g_u - \alpha_u]\Theta^{-1} \text{ e} \quad (4.2.7)$$

$$g_s = [L_s g_s - \alpha_s]\Theta^{-1}. \quad (4.2.8)$$

Da mesma forma, a equação (4.2.6) também é equivalente a $g = L^{-1}[g\Theta + \alpha]$, que também pode ser compostas com as projeções, garantindo:

$$g_u = L_u^{-1}[g_u\Theta + \alpha_u] \text{ e} \quad (4.2.9)$$

$$g_s = L_s^{-1}[g_s\Theta + \alpha_s]. \quad (4.2.10)$$

Observe que as equações (4.2.7) e (4.2.9) possuem os termos L_s e L_u^{-1} , que definem uma contração. Sendo assim, podemos construir o operador $K := K_{\Theta, L}$:

$$K : \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$$

$$g = (g_u, g_s) \mapsto (L_u^{-1}[g_u\Theta + \alpha_u], [L_s g_s - \alpha_s]\Theta^{-1}).$$

Verificaremos que o operador K está bem definido, ou seja, que $K(\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, dada $f \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$, $K(f)$ é uniformemente contínua, pois suas entradas são escritas como composição de funções uniformemente contínuas. Sendo assim, basta

verificar se $K(f)$. É limitada, para isso, analisaremos as projeções de $K(f)$ em E^s e E^u separadamente.

$$K(f) = (L_u^{-1}[f_u\Theta + \alpha_u], [L_s f_s - \alpha_s]\Theta^{-1}).$$

Para a projeção de $K(f)$ em E^u temos que:

$$\begin{aligned} \|K(f)_u(x)\| &= \|L_u^{-1}[f_u\Theta + \alpha_u](x)\| \\ &\leq \|L_u^{-1}\|(\|f_u\Theta(x)\| + \|\alpha_u(x)\|) \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\alpha(x)\|. \end{aligned}$$

Como f , Θ e α são funções limitadas, existe cota superior para $K(f)_u(x)$, implicando que tal função é limitada em E^u . Por outro lado, em E^s

$$\begin{aligned} \|K(f)_s(x)\| &= \|[L_s f_s - \alpha_s]\Theta^{-1}(x)\| \\ &\leq \|L_s f_s(\Theta(x))\| + \|\alpha_s(\Theta^{-1}(x))\| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\alpha(x)\|. \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo argumento, conclui-se que $K(f)_s$ é função limitada. Portanto $K(f)$ é limitada. Logo, $K(f) \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^2)$. Será mostrado agora que a função K é uma contração. Tome $\phi, \psi \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$\begin{aligned} \|K(\phi)_u - K(\psi)_u\| &= \|L_u^{-1}[\phi_u\Theta + \alpha_u] - L_u^{-1}[\psi_u\Theta + \alpha_u]\| \\ &\leq \|L_u^{-1}(\phi_u - \psi_u)\Theta\| \\ &\leq a\|\phi - \psi\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|K(\phi)_s - K(\psi)_s\| &= \|[L_s\phi_s - \alpha_s]\Theta^{-1} - [L_s\psi_s - \alpha_s]\Theta^{-1}\| \\ &\leq \|L_s(\psi - \phi)(\Lambda^{-1})\| \\ &\leq a\|\phi - \psi\|. \end{aligned}$$

Dessa forma, a aplicação $K_{\Theta, L}$ é uma contração e, aplicando o Teorema do ponto fixo de Banach, possui um único ponto fixo $g = g_{\Theta, L}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} g &= K(g) \text{ e} \\ (g_u, g_s) &= (L_u^{-1}[g_u\Theta + \alpha_u], [L_s g_s - \alpha_s]\Theta^{-1}). \end{aligned}$$

Como 4.2.6 é equivalente à ocorrência simultânea de 4.2.8 e 4.2.7, obtém-se

$$\begin{aligned} g\alpha - Lg &= -\alpha \\ \Rightarrow (I + g)(L + \alpha) &= L(I + g) \\ \Rightarrow (I + g)\Theta &= L(I + g). \end{aligned}$$

Tomando $h = h_{\Theta,L} = I + g_{\Theta,L}$, consegue-se que h é uma função contínua que satisfaz $h\Theta = Lh$. Mostremos agora que a inversa de $h_{\Theta,L}$ é $h_{L,\Theta}$ (função encontrada com o mesmo processo, porém trocando Θ e L nas equações). Basta notar que

$$h_{\Theta,L}h_{L,\Theta}L = h_{\Theta,L}\Theta h_{L,\Theta} = Lh_{\Theta,L}h_{L,\Theta},$$

sendo assim $h_{\Theta,L}h_{L,\Theta}$ conjuga L com a própria L . Mas note que a função identidade também faz essa conjugação e então, repetindo o mesmo processo, temos que $h_{L,L}$ será único. Então pela unicidade tem-se que $h_{\Theta,L}h_{L,\Theta} = I$, e repetindo o argumento para o lado oposto da equação concluímos que $h_{L,\Theta}h_{\Theta,L} = I$.

Voltamos agora para a demonstração do teorema. Seja $h = h_{\Theta,L}$ definida como acima. Relembrando que $L = A_0A_1$ e $\Theta = \theta_0\theta_1$, temos que

$$h\theta_0\theta_1h^{-1} = A_0A_1.$$

Mas

$$A_0(h\theta_0\theta_1h^{-1})A_0^{-1} = A_1A_0$$

e

$$A_1A_0 = A_0(h\theta_0)(\theta_1\theta_0)(\theta_0^{-1}h^{-1})A_0^{-1},$$

então

$$A_1A_0 = (A_0h\theta_0)(\theta_1\theta_0)(\theta_0^{-1}h^{-1}A_0^{-1})$$

e $A_0h\theta_0$ é uma conjugação entre

$$(\theta_0\theta_1)^{-1} = \theta_1\theta_0 \text{ e } (A_0A_1)^{-1} = A_1A_0,$$

sendo tal conjugação dada por um mapa da forma $I + \tilde{g}$, com \tilde{g} uma função limitada. Além disso, note que h conjuga os mesmos isomorfismos, pois

$$(h\theta_0\theta_1h^{-1})^{-1} = (A_0A_1)^{-1} \text{ e}$$

$$h(\theta_1\theta_0)h^{-1} = A_1A_0.$$

Como vimos anteriormente que existe apenas um elemento de \mathcal{H} que conjuga $\theta_1\theta_0$ com A_1A_0 , segue que

$$h = A_0h\theta_0 \text{ e } A_0h = h\theta_0.$$

Similarmente, $A_1h = h\theta_1$, demonstrando assim o teorema. \square

Lema 4.2.4.4 ([16]). *Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ um isomorfismo hiperbólico, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ com $\|B - A\| < \delta$, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $A(h(x)) = h(B(x))$ para qualquer $x \in U_0$, sendo U_0 uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Considere uma função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ tal que

1. $\alpha(t) = 1$, se $|t| \leq 1$;
2. $\alpha(t) = 0$, se $|t| \geq 2$; e
3. $\alpha(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$.

Uma vez que $B = A + (B - A)$, considere a função

$$\phi(x) = \alpha(\|x\|)(B - A)(x).$$

É claro que $\phi|_{B_1(0)} = (B - A)|_{B_1(0)}$ e $\phi(x) = 0$ se $x \notin B_2(0)$. Mais ainda, $\|D\phi_x\| \leq K\|B - A\| + \|B - A\|$, sendo

$$K = \sup \left\{ \left| \frac{d\alpha}{dt}(s) \right|; t \in \mathbb{R} \right\} > 1.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta < \varepsilon/2K$. Sendo assim, $\|B - A\| < \delta$ implica que ϕ tem constante de Lipschitz menor que ε . Uma vez que $Ax + \phi(x)$ é uma extensão de $B|_{B_1(0)}$, é suficiente mostrar que existe $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h \circ A = (A + \phi) \circ h.$$

Seguindo os mesmos passos da construção do homeomorfismo que conjuga os difeomorfismos Θ e L no Teorema 4.2.4.4, conseguimos encontrar um homeomorfismo que conjuga A com $A + \phi$, implicando a existência de uma conjugação local entre A e qualquer

$$B \in \{C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n); \|C - A\| < \delta\},$$

demonstrando assim o lema. □

Provaremos agora o teorema principal a respeito da estabilidade estrutural de pares de involuções.

Teorema 4.2.4.5 ([16]). *Um par $(\varphi, \psi) \in \mathcal{W}^r$ é estruturalmente estável em \mathcal{W}^r se, e somente se, possui 0 como ponto fixo hiperbólico.*

Demonstração. Considere (φ, ψ) de forma que $L = d\varphi_0 \cdot d\psi_0$ seja um isomorfismo hiperbólico. Pelo Lema 4.2.4.4, existe $\delta > 0$ tal que para todo $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ com $\|T - L\| < \delta$, existe um homeomorfismo local $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $h \circ L = T \circ h$.

Considere a função contínua

$$\begin{aligned} F : \mathcal{W}^r &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto d\varphi_0 \cdot d\psi_0. \end{aligned}$$

Da continuidade de F , existe uma vizinhança de \mathcal{U} de (φ, ψ) em \mathcal{W}^r tal que

$$\|F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - L\| < \delta, \quad \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{U}.$$

Podemos supor, do Teorema da Dependência contínua dos Autovalores, que cada $F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ é um isomorfismo hiperbólico. Temos então que existem um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h \circ F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = Lh$ e homomorfismos $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (provenientes da Proposição 4.2.4.4), tais que

$$h_1 \circ \varphi = d\varphi_0 h_1 \text{ e } h_1 \circ \psi = d\psi_0 h_1$$

e

$$h_2 \circ \tilde{\varphi} = d\tilde{\varphi}_0 h_2 \text{ e } h_2 \circ \tilde{\psi} = d\tilde{\psi}_0 h_2.$$

É suficiente mostrar que

$$h \circ d\varphi_0 = d\tilde{\varphi}_0 h \text{ e } h \circ d\psi_0 = d\tilde{\psi}_0 h,$$

pois o resultado pode ser inferido por transitividade. Para isso

$$h \circ d\varphi_0 \cdot d\psi_0 \circ h^{-1} = d\tilde{\varphi}_0 \cdot d\tilde{\psi}_0,$$

mas

$$d\tilde{\varphi}_0 (h \circ d\varphi_0 \cdot d\psi_0 \circ h^{-1}) \circ d\tilde{\varphi}_0^{-1} = d\tilde{\psi}_0 \cdot d\tilde{\varphi}_0,$$

e

$$d\tilde{\psi}_0 \cdot d\tilde{\varphi}_0 = d\tilde{\varphi}_0 \circ (h \circ d\varphi_0) \circ (d\psi_0 \cdot d\varphi_0) \circ (d\varphi_0^{-1} \circ h^{-1}) d\tilde{\varphi}_0^{-1},$$

então

$$d\tilde{\psi}_0 \cdot d\tilde{\varphi}_0 = (d\tilde{\varphi}_0 \circ h \circ d\varphi_0) \circ (d\varphi_0 \cdot d\psi_0) (d\varphi_0^{-1} h^{-1} d\tilde{\varphi}_0^{-1}),$$

e $d\tilde{\varphi}_0 \circ h \circ d\varphi_0$ é uma conjugação entre

$$(d\varphi_0 \cdot d\psi_0)^{-1} = d\psi_0 d\varphi_0 \text{ e } (d\tilde{\psi}_0 \cdot d\tilde{\varphi}_0)^{-1} = d\tilde{\varphi}_0 \cdot d\tilde{\psi}_0,$$

além disso, como h também é uma conjugação desses dois isomorfismos, por unicidade segue que

$$h = d\tilde{\varphi}_0 \circ h \circ d\varphi_0, \text{ e portanto } d\varphi_0 \circ h = d\tilde{\varphi}_0 \circ h.$$

Repetindo o mesmo processo para ψ temos que

$$d\psi \circ h = d\tilde{\psi}_0 \circ h.$$

Logo, por transitividade, (φ, ψ) e $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ são equivalentes, demonstrando assim a estabilidade estrutural.

A recíproca é imediata do Teorema 4.2.4.3. □

4.2.4.2 Dobra-dobra Elíptico.

Começaremos agora a análise da estabilidade estrutural local de T -singularidades.

Proposição 4.2.4.5 ([7]). *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^\pm)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra invisível. Então existem um aberto U_p de p e uma função*

$$\phi_X : U_p \rightarrow U_p,$$

tais que ϕ_X é uma involução, $\phi_X(p) = p$,

$$\text{Fix}(\phi_X) := \{x \in U_p; \phi_X(x) = x\} \subset S_X$$

e ϕ_X preserva as órbitas de X , isto é, p e $\phi_X(p)$ pertencem à mesma órbita do campo X .

Demonstração. Iremos provar o resultado apenas para M^+ , pois para M^- a demonstração é a mesma.

Pela forma normal de Vishik, existe uma carta (φ, U) em torno de p , tal que $\varphi(U) = V$, $V \subset \mathbb{H}^3$, $\varphi(p) = 0$, $W := \varphi(U \cap \Sigma) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ e

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução desse campo é dada por

$$\varphi(t, (x, y, z)) = \left(-\frac{t^2}{2} - yt + x, t + y, z \right).$$

Para $(0, y, z) \in \{0\} \times \mathbb{R}^2$, temos

$$\varphi(t, (0, y, z)) = \left(-\frac{t^2}{2} - yt, t + y, z \right),$$

então segue que $(0, y, z)$ e $(0, -y, z)$ estão na mesma órbita do campo φ_*X .

Definimos

$$\begin{aligned} \phi : W &\rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^2 \\ (0, y, z) &\mapsto (0, -y, z). \end{aligned}$$

ϕ é difeomorfismo com sua imagem, logo podemos escolher vizinhanças $W_1 \subset W$ e $W_2 \subset \text{Im}(\phi)$. Tome $W_3 = W_1 \cap W_2$ e defina

$$\widetilde{W} = W_3 \cap \phi(W_3).$$

Temos que $\tilde{\phi} = \phi|_{\widetilde{W}}$ satisfaz

- i. $\tilde{\phi}$ é involução;
- ii. $\text{Fix}(\tilde{\phi}) \subset S_{\varphi_*X}$;
- iii. $\tilde{\phi}(0) = 0$; e
- iv. $\tilde{\phi}$ preserva as órbitas de φ_*X .

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi_X : \varphi^{-1}(W_3) \subset \Sigma &\rightarrow \varphi^{-1}(W_3) \subset \Sigma \\ q &\mapsto \varphi^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi(q) \end{aligned}$$

é uma função que, pela construção de $\tilde{\phi}$, faz com que ϕ_X satisfaça as condições requeridas. \square

Definição 4.2.4.7. Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M)$ e p uma T -singularidade, com $S_X \pitchfork S_Y$. Considere $\phi_X, \phi_Y \in \mathcal{C}_p^\infty(\Sigma, \Sigma)$ os germes em relação às funções provenientes da Proposição 4.2.4.5. O germe

$$\Phi_Z = \phi_X \circ \phi_Y \in \mathcal{C}_p^\infty(\Sigma, \Sigma)$$

é chamado de *involução de retorno* da T -singularidade p e além disso $\Phi_Z(p) = p$.

Vamos provar algumas propriedades do mapa Φ_Z .

Lema 4.2.4.5 ([7]). *Seja $\phi = \varphi \circ \psi$, sendo φ e ψ involuções de \mathbb{R}^2 . Então*

$$\phi^n \circ \varphi = \varphi \circ \phi^{-n} \text{ e } \psi \circ \phi^n = \phi^{-n} \circ \psi, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Perceba que, como φ e ψ são involuções,

$$\phi^{-1} = (\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi.$$

Segue da equação acima que

$$\begin{aligned} \phi^n \circ \varphi &= (\varphi \circ \psi) \circ \dots \circ (\varphi \circ \psi) \circ \varphi \\ &= \varphi \circ (\psi \circ \varphi) \circ \dots \circ (\psi \circ \varphi) \\ &= \varphi \circ (\psi \circ \varphi)^n \\ &= \varphi \circ \phi^{-n}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^n &= \psi \circ (\varphi \circ \psi) \circ \dots \circ (\varphi \circ \psi) \\ &= (\psi \circ \varphi) \circ (\psi \circ \varphi) \dots \circ (\psi \circ \varphi) \circ \psi \\ &= (\psi \circ \varphi)^n \circ \psi \\ &= \phi^{-n} \circ \psi. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.2.4.6 ([7]). *Seja $\phi = \varphi \circ \psi$, sendo $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_p^\infty(\Sigma, \Sigma)$ germes de involuções. Então as variedades invariantes instável e estável, W^u e W^s , respectivamente, de ϕ em p satisfazem*

$$\psi(W^s) \subset W^u \text{ e } \varphi(W^u) \subset W^s.$$

Demonstração. Sendo Σ localmente difeomorfo a \mathbb{R}^2 , as relações referentes ao Lema 4.2.4.5 são válidas para o contexto dessa proposição. Tome $x \in \psi(W^u)$. Então $x = \psi(y)$, com $y \in W^s$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n} \circ \psi(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi \circ \phi^n(y) \\ &= \psi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(y) \right) \\ &= \psi(p) \\ &= p. \end{aligned}$$

Logo, $p \in W^u$. De forma análoga, se $x \in \varphi(W^u)$, então $x = \varphi(y) \in W^u$ e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n \circ \varphi(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \circ \phi^{-n}(y) \\ &= \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(y) \right) \\ &= \varphi(p) \\ &= p. \end{aligned}$$

Demonstramos assim a proposição.

□

Usando a mudança de coordenadas 4.2.4.1, um cálculo imediato nos à leva seguinte conclusão:

Lema 4.2.4.6 (Adaptado de [7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p uma T -singularidade, com $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Então nas coordenadas (φ, U) em torno de p dadas pelo Teorema 4.2.4.1, as involuções ϕ_X e ϕ_Y são dadas por*

$$\phi_X(x, y) = (x - 2\alpha y, -y) + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2)$$

e

$$\phi_Y(x, y) = \left(-x, -\frac{2\beta}{\gamma}x + y\right) + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2),$$

sendo α, β, γ as coordenadas normais de Z em p . Mais ainda,

$$\Phi(x, y) = \phi_X \circ \phi_Y(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{4\alpha\beta}{\gamma} & -2\alpha \\ \frac{2\beta}{\gamma} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2).$$

Demonstração. Em razão da mudança de coordenadas dada na proposição 4.2.4.1, podemos considerar

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + F_1(x, y, z) \\ 1 + F_2(x, y, z) \\ -y \end{pmatrix} \text{ e } Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + G_1(x, y, z) \\ \beta + G_2(x, y, z) \\ x + G_3(x, y, z) \end{pmatrix},$$

sendo $F_1, F_2, G_1, G_2 = \mathcal{O}(|(x, y, z)|)$ e $G_3(x, y, z) = \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2)$. A região de descontinuidade pode ser entendida como o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$. Seja φ_X o fluxo de X . Como $\varphi_X(0, (x, y, 0)) = (x, y, 0)$, temos que

$$\varphi_X(t, (x, y, 0)) = \begin{pmatrix} x + c_1(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \\ y + c_2(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \\ c_3(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \end{pmatrix}$$

sendo $c_1, c_2, c_3 : V_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções suave e V_0 uma vizinhança aberta de 0. Então

$$\frac{d\varphi_X}{dt}(t, (x, y, 0)) = \begin{pmatrix} c_1(x, y) + \mathcal{O}(t) \\ c_2(x, y) + \mathcal{O}(t) \\ c_3(x, y) + \mathcal{O}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_X}{dt}(t, (x, y, 0)) &= X(\varphi_X(t)) \\ &= X \begin{pmatrix} x + c_1(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \\ y + c_2(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \\ c_3(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + F_1(\varphi_X(t, (x, y, 0))) \\ 1 + F_2(\varphi_X(t, (x, y, 0))) \\ -y - c_2(x, y)t - \mathcal{O}(t^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Novamente, como $F_1(\varphi_X(t, (x, y, 0))) = F_1(x, y, 0)$ e $F_2(\varphi_X(0, (x, y, 0))) = F(x, y, 0)$, existem funções suaves

$$a_1, a_2 : V_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

como V_1 uma vizinhança de zero, tais que

$$\begin{aligned} F_1(\varphi_X(t, (x, y, 0))) &= F_1(x, y, 0) + a_1(x, y)t + \mathcal{O}(t^2) \text{ e} \\ F_2(\varphi_X(t, (x, y, 0))) &= F_2(x, y, 0) + a_2(x, y)t + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{d\varphi_X}{dt}(t, (x, y, 0)) = \begin{pmatrix} \alpha + F_1(x, y, 0) + \mathcal{O}(t) \\ 1 + F_2(x, y, 0) + \mathcal{O}(t) \\ -y - c_2(x, y)t - \mathcal{O}(t^2) \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

e, comparando as equações 4.2.11 e 4.2.13, temos

$$\begin{aligned} c_1(x, y) &= \alpha + F_1(x, y, 0) \text{ e} \\ c_2(x, y) &= 1 + F_2(x, y, 0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi_X(t, (x, y, 0)) = \begin{pmatrix} x + (\alpha + F_1(x, y, 0))t + \mathcal{O}(t^2) \\ y + (1 + F_2(x, y, 0))t + \mathcal{O}(t^2) \\ -yt - (1 + F_2(x, y, 0))\frac{t^2}{2} - \mathcal{O}(t^3) \end{pmatrix}. \quad (4.2.13)$$

Perceba que $\varphi_X(t, (x, y, 0)) \in \Sigma$ se e somente se

$$-yt - (1 + F_2(x, y, 0))\frac{t^2}{2} - \mathcal{O}(t^3) = 0,$$

o que por sua vez ocorre, se e somente se

$$t = 0 \text{ ou } 2y + (1 + F_2(x, y))t + \mathcal{O}(t^2).$$

Considere a função contínua

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times V_1 \cap V_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (x, y)) &\rightarrow 2y + (1 + F_2(x, y))t + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned}$$

Uma vez que $H(0, (0, 0)) = 0$ e

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, (0, 0)) = 1 + F_2(0, 0) = 1,$$

segue do teorema da função implícita que existe uma função

$$\tau_X : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$$

tal que $F(\tau_X(x, y), (x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in U_0$, além disso, τ_X é função suave e $\tau(0, 0) = 0$. Ainda utilizando o teorema da função implícita, temos

$$\frac{\partial \tau_X}{\partial y}(0, 0) = -2 \text{ e } \frac{\partial \tau_X}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

implicando por Taylor que

$$\tau_X(x, y) = -2y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2).$$

É interessante notar que 0 e $\tau(x, y)$ são as duas únicas soluções de $\pi_3 \circ \varphi_X(t, (x, y)) = 0$ em $(x, y) \in W$, para t próximo de 0.

Por fim, veja que

$$\begin{aligned} \varphi_X(\tau_X(x, y), (x, y, 0)) &= \begin{pmatrix} x + (\alpha + F_1(x, y, 0))\tau_X(x, y) + \mathcal{O}(\tau_X(x, y)^2) \\ y + (1 + F_2(x, y, 0))\tau_X(x, y) + \mathcal{O}(\tau_X(x, y)^2) \\ -y\tau(x, y) - (1 + F_2(x, y, 0))\frac{\tau_X(x, y)^2}{2} - \mathcal{O}(\tau(x, y)^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - 2\alpha y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) \\ -y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

implicando

$$\phi_X(x, y) = (x - 2\alpha y, -y) + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2).$$

Para o campo Y o processo é o mesmo e lembrando que $\gamma \neq 0$, conseguimos

$$\phi_Y(x, y) = \left(-x, -\frac{2\beta}{\gamma}x + y\right) + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2).$$

De posse das equações de ϕ_X e ϕ_Y , compor as funções nos dá

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \phi_X \circ \phi_Y(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \phi_Y(x, y) + \mathcal{O}(|\varphi_Y(x, y)|^2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2\beta}{\gamma} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) + \mathcal{O}(|\varphi_Y(x, y)|^2) \\ &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{4\alpha\beta}{\gamma} & -2\alpha \\ \frac{2\beta}{\gamma} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2). \end{aligned}$$

□

Podemos agora demonstrar o teorema que relaciona estabilidade estrutural de um campo suave por partes $(X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ com estabilidade estrutural de um par de involuções (ϕ_X, ϕ_Y) .

Teorema 4.2.4.6 ([7]). *Sejam $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p uma T -singularidade de Z_0 . Se Z_0 é localmente estruturalmente estável em p , então o par de involuções (ϕ_{X_0}, ϕ_{Y_0}) associado a Z_0 é estruturalmente estável em \mathcal{W}^r em 0, quando consideradas as coordenadas do Lema 4.2.4.6.*

Demonstração. Seja (φ, V) a carta em torno de $p \in M$ dada pelo Lema 4.2.4.6. Como vimos na demonstração do Teorema 3.2, existem vizinhanças \mathcal{V} de Z_0 em $\Omega^r(M, \Sigma)$ e V de p em M tais que cada $V \in \mathcal{V}$ tem uma única T -singularidade $q(Z) \in V \cap \Sigma$.

Considere o mapa contínuo

$$F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}^r$$

$$Z = (X, Y) \mapsto \left(T_{-\varphi(q(Z))} \circ \varphi \circ \phi_X \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(q(Z))}, T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ \phi_Y \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(q(Z))} \right),$$

sendo ϕ_X e ϕ_Y os germes de involuções dados pela Proposição 4.2.4.5 e $T_v(x) := x + v$ a translação. Uma vez que q e a função

$$(X, t, p) \in \mathfrak{X}^r(M) \times \mathbb{R} \times M \mapsto \varphi_X(t, p) \in M,$$

são contínuas, então F é função contínua, pois ϕ_X é construído a partir do fluxo φ_X .

Mais ainda, podemos escolher uma vizinhança \mathcal{U} de (ϕ_{X_0}, ϕ_{Y_0}) em \mathcal{W}^r de forma que para todo $(\varphi, \psi) \in \mathcal{U}$ exista um campo de vetores $Z = (X, Y) \in \mathcal{V}$ tal que $\varphi = \phi_X$ e $\psi = \phi_Y$. A construção de tal campo é feita localmente e depois estendido para toda a variedade, como feito na demonstração do Teorema 1.2.3.

Dessa forma, $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ é um mapa sobrejetor e contínuo.

Como estamos supondo Z_0 localmente estruturalmente estável, podemos assumir que todo elemento de Z é topologicamente equivalente a Z_0 em p .

Portanto, tomando $Z \in \mathcal{V}$, existem uma T -singularidade $q(Z) \in \Sigma$ de Z e uma equivalência topológica $h : (V_1, p) \rightarrow (V_2, q(Z))$ entre Z_0 e Z , sendo V_1 uma vizinhança de p e V_2 uma vizinhança de $q(Z)$. Portanto, podemos restringir h a Σ , induzindo o homomorfismo $h : \Sigma \cap V_1 \rightarrow \Sigma \cap V_2$, de forma que $h(p) = q(Z)$.

Dado $q \in \Sigma_{X_0}$ (suficientemente próximo de p), segue da construção de ϕ_{X_0} na Proposição 4.2.4.5 que q e $\phi_{X_0}(q)$ pertencem a uma mesma órbita γ_0 de X_0 passando por M^+ . Pelo mesmo motivo, $h(q)$ e $\varphi_X(h(q))$ são conectados por uma órbita γ de X contida em M^+ .

Como h é uma equivalência topológica, $h(\gamma_0) = \gamma$, implicando que

$$h(\phi_{X_0}(q)) = \phi_X(h(q)).$$

Se $q \in S_{X_0}$, a relação acima também ocorre, uma vez que $h(S_{X_0}) = S_X$. Logo, h é uma equivalência entre ϕ_{X_0} e ϕ_X . Fazendo as mesmas contas, h também é uma equivalência entre ϕ_{Y_0} e ϕ_Y , implicando que h é uma equivalência entre (ϕ_X, ϕ_Y) e (ϕ_{X_0}, ϕ_{Y_0}) .

Note que isso implica que o germe de homomorfismo

$$\tilde{h} = T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$$

satisfaz $\tilde{h}(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{h} \circ (\varphi \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1}) &= T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ h \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1} \\ &= T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ h \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1} \\ &= T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ \phi_X \circ h \circ \varphi^{-1} \\ &= T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ \phi_X \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(p)} \circ T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ h \circ \varphi^{-1} \\ &= \left(T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ \phi_X \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(p)} \right) \circ \tilde{h}. \end{aligned}$$

pela mesmo mesmo motivo \tilde{h} é uma equivalência entre $\varphi \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1}$ e $T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ \phi_{Y_0} \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(p)}$.

Como Z é arbitrário em \mathcal{V} e F é sobrejetora, segue que cada par de involução pertencente a \mathcal{U} é topologicamente equivalente a $(\varphi \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \phi_{Y_0} \circ \varphi^{-1})$ em \mathcal{W}^r . \square

A contra-positiva do último resultado implica no seguinte corolário.

Corolário 4.2.2 ([7]). *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$. Se o ponto fixo 0 do mapa $\Phi = \phi_X \circ \phi_Y$, nas coordenadas dadas pelo Lema 4.2.4.6, não for hiperbólico, então Z não é localmente estruturalmente estável.*

Iremos agora estudar a hiperbolicidade de 0 no mapa $\Phi = \phi_X \circ \phi_Y$.

Lema 4.2.4.7 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ uma T -singularidade de Z , tal que $S_X \cap S_Y$. Considere (α, β, γ) como sendo os parâmetros normais de Z no ponto p . Então, são satisfeitos*

- i. se $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) \leq 0$, então 0 não é um ponto fixo hiperbólico de $\Phi = \phi_X \circ \phi_Y$ quando colocado nas coordenadas do Lema 4.2.4.6. Mais ainda, se $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) > 0$, então Φ tem apenas autovalores complexos; e*
- ii. se $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) > 0$, então 0 é um ponto de sela de Φ (nas coordenadas do Lema 4.2.4.6). Mais ainda, se δ, μ são autovalores de Φ tais que $|\mu| < 1 < |\lambda|$, e v_λ e v_μ são os autovetores correspondentes, então*
 - a) se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então $v_\mu, v_\lambda \in \Sigma^d$;*
 - b) se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, então $v_\mu \in \Sigma^c, v_\lambda \in \Sigma^d$;*
 - c) se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$, então $v_\mu \in \Sigma^d, v_\lambda \in \Sigma^c$; e*
 - d) Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, então $v_\mu, v_\lambda \in \Sigma^c$.*

Demonstração. Um cálculo imediato mostra que o polinômico característico de $d\Phi_0$ é dado por

$$p_\Phi(t) = t^2 + \left(2 + \frac{4\alpha\beta}{\gamma}\right)t + 1,$$

portanto seus autovalores são

$$\mu = \frac{1}{\gamma} \left(2\alpha\beta - \gamma - 2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma)}\right)$$

e

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \left(2\alpha\beta - \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma)}\right),$$

com os respectivos autovetores

$$v_\mu = \left(-\frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma)}}{\beta}, 1\right)$$

e

$$v_\lambda = \left(-\frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma)}}{\beta}, 1\right).$$

Tendo essas informações em mãos, a verificação de *i.* e *ii.* é imediata. \square

Corolário 4.2.3 ([7]). *Sejam $Z = (X_0, Y_0) \in \Omega^r(M, \Sigma)$, p uma T -singularidade e α, β, γ os parâmetros normais de Z_0 . Se $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) \leq 0$, então Z_0 é localmente estruturalmente instável em p .*

Demonstração. Se Z_0 fosse localmente estruturalmente estável, então pelo Teorema 4.2.4.6 0 seria ponto fixo hiperbólico de $\Phi = \phi_X \circ \phi_Y$, o que é um absurdo, pois $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) \leq 0$. \square

Lema 4.2.4.8 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra invisível tal que $p \in \Sigma$ e $S_X \pitchfork S_Y$. Considere p como o fixo do germe do mapa de retorno*

$$\Phi = \phi_X \circ \phi_Y : (\Sigma, p) \rightarrow (\Sigma, p).$$

Se os autovalores de $d\Phi_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ forem complexos conjugados, então Z é localmente estruturalmente instável em p .

Demonstração. Seja $(\tilde{\varphi}, U)$ uma carta normal de Z em p . Note que podemos ajustar U , de forma que

$$(\varphi := \tilde{\varphi}|_{\Sigma \cap U}, \Sigma \cap U)$$

seja uma carta em torno de p em Σ . Dessa forma, sejam α, β e γ os parâmetros normais de Z com respeito a φ e coloquemos o mapa de retorno Φ nas coordenadas φ , i.e., definimos o germe em $0 \in \mathbb{R}^2$ por

$$\Psi = \varphi \circ \Phi \circ \varphi^{-1},$$

perceba que 0 é ponto fixo de Ψ e

$$d\Psi_0 = d\varphi_p \cdot d\Phi_p \cdot d\varphi_p^{-1}.$$

Sejam $v_\lambda, v_\mu \in T_pM$ os autovetores de $d\Phi$ associados aos autovalores λ e μ . Como

$$d\varphi_p^{-1} \cdot d\varphi_p = d\varphi_p^{-1} \cdot d\varphi_p = d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_p = \text{Id}_{\mathbb{R}^2},$$

segue que

$$d\Psi_0(d\varphi_p v_\lambda) = d\varphi_p d\Phi_p(v_\lambda) = \lambda(d\varphi_p v_\lambda)$$

e

$$d\Psi_0(d\varphi_p v_\mu) = d\varphi_p d\Phi_p(v_\mu) = \mu(d\varphi_p v_\mu).$$

Então, $d\Psi_0$ possui os mesmos autovalores de $d\Phi_p$ e utilizando as hipóteses do teorema, temos que $\lambda = \bar{\mu}$. Porém, uma vez que $\det d\Psi_0 = 1$, implica que

$$\begin{aligned} 1 &= \det(d\Psi_0) \\ &= \lambda \cdot \mu \\ &= \lambda \cdot \bar{\lambda} \\ &= \|\lambda\|, \end{aligned}$$

pelo mesmo motivo, $\|\mu\| = 1$, e portanto 0 não um ponto fixo hiperbólico de Ψ . Logo, pelo Corolário 4.2.2, o campo suave por partes Z não pode ser estruturalmente estável, o que demonstra o lema. \square

Provaremos agora um importantíssimo teorema a respeito do conjunto Σ_0 (referente à Definição 4.2.1).

Teorema 4.2.4.7 ([7]). Σ_0 não é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$.

Demonstração. Escolha um campo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ de forma que exista um ponto $p \in \Sigma$ de dobra-dobra tal que $S_{X_0} \pitchfork S_{Y_0}$ em p e seus parâmetros normais (via (ϕ, V)) satisfaçam $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) < 0$.

Utilizando a demonstração do Teorema 3.2, existem vizinhanças \mathcal{U} de Z_0 , $U \subset V$ de p em Σ e uma função $q : \mathcal{U} \rightarrow U$ que associa o campo $Z \in \mathcal{U}$ à sua única singularidade $q(Z) \in U$, sendo $q(Z)$ um ponto de dobra-dobra tal que $S_X \pitchfork S_Y$ em $q(Z)$.

Consideremos a função contínua

$$F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}^r$$

$$Z = (X, Y) \mapsto \left(T_{-\varphi(q(Z))} \circ \varphi \circ \phi_X \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(q(Z))}, T_{-\varphi(p)} \circ \varphi \circ \phi_Y \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(q(Z))} \right).$$

como feito na demonstração do Lema 4.2.4.6, temos que $\text{Im}(F)$ é uma vizinhança de $(\varphi \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \phi_{Y_0} \circ \varphi^{-1})$ em \mathcal{W}^r . Como $\alpha\beta(\alpha\beta - \gamma) < 0$, o Lema 4.2.4.7 nos garante que os autovalores de $d(\varphi \circ \phi_X \circ \phi_Y \circ \varphi^{-1})_0$ são números complexos não reais conjugados. Consideremos agora a função contínua

$$G : \mathcal{W}^r \rightarrow \mathcal{I}^r$$

$$(\phi, \psi) \mapsto d(\phi \circ \psi)_0,$$

$G \circ F$ é função contínua, então utilizando a dependência contínua dos autovalores em relação ao operador linear (Teorema 4.1.1.2), existe uma vizinhança aberta $\mathcal{V} \subset \text{Im}(F)$ de $(\varphi \circ \phi_{X_0} \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \phi_{Y_0} \circ \varphi^{-1})$ tal que

$$d\Psi_Z = d\left(T_{-\varphi(q(Z))} \circ \varphi \circ \phi_X \circ \phi_Y \circ \varphi^{-1} \circ T_{\varphi(q(Z))}\right)_0$$

possui autovalores conjugados distintos, para todo $Z = (X, Y) \in F^{-1}(\mathcal{V})$. Isso implica que $d\Phi_{q(Z)} = d(\phi_X \circ \phi_Y)_{q(Z)}$ possui autovalores conjugados distintos para todo $(X, Y) \in F^{-1}(\mathcal{V})$, implicando por sua vez, pelo Lema 4.2.4.8, que (X, Y) não é globalmente localmente estruturalmente estável para todo $(X, Y) \in F^{-1}(\mathcal{V})$. Assim Σ_0 não é denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$ e, portanto, não é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$, uma vez que $\Omega^r(M, \Sigma)$ é espaço de Baire. \square

Adicionaremos agora um teorema extremamente conhecido, demonstrado por Phillip Hartman em [9].

Teorema 4.2.4.8 (Teorema da Linearização). *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe \mathcal{C}^2 tal que $X(p) = 0$ e dX_p com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfazendo*

$$\text{Re}(\lambda_1), \dots, \text{Re}(\lambda_n) > 0 \text{ ou } \text{Re}(\lambda_1), \dots, \text{Re}(\lambda_n) < 0.$$

Então, existe um difeomorfismo $h : U_p \rightarrow h(U_p)$ tal que $h(p) = 0$ e $h(x) = x + \phi(x)$, com $d\phi_p = 0$. Mais ainda, h é uma difeomorfismo de classe \mathcal{C}^1 que conjuga X e dX_p em p e 0 respectivamente.

Este resultado também é válido para sistemas dinâmicos discretos: Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^2 tal que $p \in U$ é um ponto fixo hiperbólico de f . Então existem V_p vizinhança de p em U , V_0 vizinhança de 0 em \mathbb{R}^2 e um difeomorfismo $h : V_p \rightarrow V_0$ de classe \mathcal{C}^1 que conjuga os difeomorfismos f e $df_p x$ em p e 0 respectivamente, sendo $h(x) = x + \phi(x)$ com $d\phi_0 = 0$.

No caso $n = 2$, o resultado valem supondo apenas que os autovalores de dX_p e df_p são hiperbólicos.

Mostraremos um corolário do resultado acima que será muito importante para a construção de um homeomorfismo entre campos suaves por partes.

Corolário 4.2.4. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe \mathcal{C}^2 tal que dX_p possui dois autovalores, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, associados aos respectivos autovetores v_1 e v_2 . Então existe uma vizinhança V_p de p tal que*

- i. se $\varphi_X(t, p)$ é o fluxo de X , então para todo $x \in V_p$, $\varphi_X(t, x) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow \infty$;*
 - ii. existem apenas duas órbitas tais que $\frac{\varphi'_X(t, x)}{\|\varphi'_X(t, x)\|} \rightarrow \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \text{ ou } -\frac{v_1}{\|v_1\|} \right)$ quando $t \rightarrow \infty$; e*
 - iii. todas as demais órbitas satisfazem $\frac{\varphi'_X(t, x)}{\|\varphi'_X(t, x)\|} \rightarrow \left(\frac{v_2}{\|v_2\|} \text{ ou } -\frac{v_2}{\|v_2\|} \right)$ quando $t \rightarrow \infty$.*
- Caso $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, as mesmas propriedades listadas acima são satisfeitas quando $t \rightarrow -\infty$.*

Demonstração. Provaremos primeiramente o resultado para campos lineares. Considere $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ com autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ e respectivos autovetores v_1 e v_2 . Seja φ_X o fluxo da EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = x. \end{cases}$$

Note que as soluções da EDO acima são dadas por

$$\varphi(t, x) = e^{tX}x.$$

Uma vez que $\{v_1, v_2\}$ é base de \mathbb{R}^2 podemos escrever $x = x_1v_1 + x_2v_2$ e portanto

$$\varphi_X(t, x) = x_1e^{\lambda_1 t}v_1 + x_2e^{\lambda_2 t}v_2.$$

Como $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, segue que $\varphi(t, x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, se $x_2 \neq 0$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'_X(t, x)}{\|\varphi'_X(t, x)\|} &= \frac{\lambda_1 x_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 x_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{\|\lambda_1 x_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 x_2 e^{\lambda_2 t} v_2\|} \\ &= \frac{\lambda_1 x_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 x_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_1 t}} \frac{e^{\lambda_2 t}}{\|\lambda_1 x_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 x_2 e^{\lambda_2 t} v_2\|} \\ &= \lambda_1 x_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_1 + \lambda_2 x_2 v_2 \frac{1}{\|\lambda_1 x_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_1 + \lambda_2 x_2 v_2\|}. \end{aligned}$$

fazendo $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_X(t, x)}{\|\varphi'_X(t, x)\|} = \frac{\lambda_2 x_2 v_2}{\lambda_2 x_2 v_2} = \text{sgn}(\lambda_2 x_2) \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Por outro lado, se $x = x_1v_1$, então

$$\varphi_X(t, x) = x_1 e^{t\lambda_1} v_1$$

e é claro que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_X(t, x)}{\|\varphi'_X(t, x)\|} = \frac{\lambda_1 x_1 v_2}{\lambda_1 x_1 v_1} = \operatorname{sgn}(\lambda_1 x_1) \frac{v_1}{\|v_1\|},$$

demonstrando assim o corolário para quando X é um campo linear.

Considere agora X um campo suave, pelo Teorema 4.2.4.8 existe um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^1 , $h : U_p \rightarrow V_0$, que conjuga X com dX_p em p e 0 respectivamente isto é

$$h \circ \varphi_X = \varphi'_X \circ h,$$

sendo $h(x) = x + \phi(x)$ com $d\phi_p = 0$, o que implica em particular $dh_p = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$ e $h^{-1} = x + \theta(x)$, com $d\theta_p = 0$.

Segue portanto que para todo $x \in U_p$,

$$\varphi_X(t, x) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_X(t, x)}{\|\varphi'_X(t, x)\|} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dh_{h \circ \varphi_X(t, x)}^{-1} \cdot dh_{\varphi_X(t, x)} \varphi'_X(t, x)}{\|dh_{h \circ \varphi_X(t, x)}^{-1} \cdot dh_{\varphi_X(t, x)} \varphi'_X(t, x)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dh_{h \circ \varphi(t, x)}^{-1} (h \circ \varphi_X)'(t, x)}{\|dh_{h \circ \varphi_X(t, x)}^{-1} (h \circ \varphi_X)'(t, x)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dh_{h \circ \varphi_X(t, x)}^{-1} (h \circ \varphi_X)'(t, x)}{\|dh_{h \circ \varphi_X(t, x)}^{-1} (h \circ \varphi_X)'(t, x)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2} + d\theta_{\varphi_{dX_p}(t, h(x))}) \varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\|(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2} + d\theta_{\varphi_{dX_p}(t, h(x))}) \varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\|\varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|} \cdot \frac{\|\varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|}{\left\| \varphi'_{dX_p}(t, h(x)) + d\theta_{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))} \frac{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\|\varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|} \right\|} + \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\theta_{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))} \varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\left\| \varphi'_{dX_p}(t, h(x)) + d\theta_{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))} \varphi'_{dX_p}(t, h(x)) \right\|} \end{aligned}$$

Como $d\theta_{\varphi_{dX_p}(t, h(x))} \rightarrow d\theta_0 = 0$ quando $t \rightarrow \infty$, o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\|\varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|}$$

pode ser calculado usando o caso linear feito anteriormente:

$$\frac{\|\varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|}{\left\| \varphi'_{dX_p}(t, h(x)) + d\theta_{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))} \frac{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\|\varphi'_{dX_p}(t, h(x))\|} \right\|} \rightarrow 1, \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d\theta_{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))} \frac{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))}{\left\| \varphi'_{dX_p}(t, h(x)) + d\theta_{\varphi'_{dX_p}(t, h(x))} \varphi'_{dX_p}(t, h(x)) \right\|} = 0,$$

o resultado do corolário segue de maneira imediata.

Para o caso em que o campo de vetores X é tal que os autovalores de dX são $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, note que o campo de vetores $-X$ é tal que seus autovetores são $-\lambda_1 < -\lambda_2 < 0$ e o caso anterior se aplica para o campo $-X$. Por fim, usando a igualdade $\varphi_X(t, x) = \varphi_{-X}(-t, x)$, o corolário se torna demonstrado. \square

Agora, estudaremos o caso em que os parâmetros normais de um campo suave por partes $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ satisfazem $\alpha\beta > \gamma$ e $\alpha, \beta < 0$ para uma T -singularidade com $S_X \pitchfork S_Y$. Relembre que, pelo Teorema 4.2.4.1, existe uma carta (φ, V) tal que localmente os campos X e Y podem ser considerados

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ -y \end{pmatrix} \text{ e } Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

sendo $\delta = \text{sgn}(X^2 f(p))$, $\text{sgn}(\gamma) = 1$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Em razão do Teorema 4.2.4.2, o campo deslizante normalizado pode ser considerado para a análise da estabilidade estrutural, sem perda de generalidade, igual a

$$F_Z^N(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2),$$

estando definido em uma vizinhança $U = \varphi(V) \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ de 0 (a rigor, $U \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, mas podemos identificar $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ com \mathbb{R}^2 via projeção). Por fim, relembre do Corolário 4.2.1 que $S_X = \{(x, 0), x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ e $S_Y = \{(g(y), y), z \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ (com $g(y) = \mathcal{O}(y^2)$) dividem U em duas componentes conexas. Uma vez que

$$F_Z^N(x, 0) = (\alpha x + \mathcal{O}(x^2), \gamma x + \mathcal{O}(x^2))$$

e

$$F_Z^N(g(y), y) = (\gamma y + \mathcal{O}(y^2), \beta y + \mathcal{O}(y^2)),$$

diminuindo U se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que o campo F_Z^N é transversal a S_X e S_Y .

Além disso, perceba que a matriz

$$d(F_Z^N)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

possui autovalores iguais a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma} \right) \\ &< \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta - \sqrt{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta - |\alpha - \beta|) = \min\{\alpha, \beta\} < 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_2 &:= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma} \right) \\ &< \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta + |\alpha - \beta|) = \max\{\alpha, \beta\} < 0. \end{aligned}$$

Mais ainda, seus autovetores associados são

$$v_1 := \left(\frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma} \right), 1 \right)$$

e

$$v_2 := \left(\frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma} \right), 1 \right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma} \right) &< \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta - |\alpha - \beta|) \leq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma} \right) &> \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta + |\alpha - \beta|) \geq 0, \end{aligned}$$

dessa forma $v_1 \in \Sigma^c$ e $v_2 \in \Sigma^d$. Temos portanto uma variedade estável do campo de deslize em Σ^d . Diminuindo U mais ainda, a fim de F_N^Z seja conjugado com $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ em U . Então como, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, segue que todas as órbitas de F_N^Z , com exceção da variedade invariante associada ao autovalor λ_2 , tendem para o ponto 0, sendo tangentes a v_2 . Como S_X e S_Y são transversais a F_N^d e todas as órbitas começando nesses conjuntos tendem para 0 e são tangentes a v_2 (Corolário 4.2.4), os conjuntos $\Sigma^{s,u} \subset \Sigma^d$ são F_N^Z -invariantes.

Uma vez que em U os campos F_N^Z são conjugados, existe uma variedade $C \subset U$ tal que C é difeomorfa a \mathbb{S}^1 e C é transversal ao campo F_N^Z . Sejam $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$ tais que

$$(x_1, 0), (-x_2, 0) \in S_X \cap C \text{ e } (g(y_1), y_1), (g(-y_2), -y_2) \in S_Y \cap C.$$

Podemos definir as curvas

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, 0), x \in [-x_2, 0]\}, \\ L_2 &= \{(g(y), y), y \in [-y_2, 0]\}, \\ C_1 &= C \cap \overline{\Sigma^u} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(x, 0), x \in [0, x_1]\}, \\ I_2 &= \{(g(y), y), y \in [0, y_1]\}, \\ C_2 &= C \cap \overline{\Sigma^s}. \end{aligned}$$

Considere $S_1 = L_1 \cup L_2 \cup C_1$ e $S_2 = I_1 \cup I_2 \cup C_2$ e as regiões $U_u = \text{Int}(S_1)$ e $U_s = \text{Int}(S_2)$.

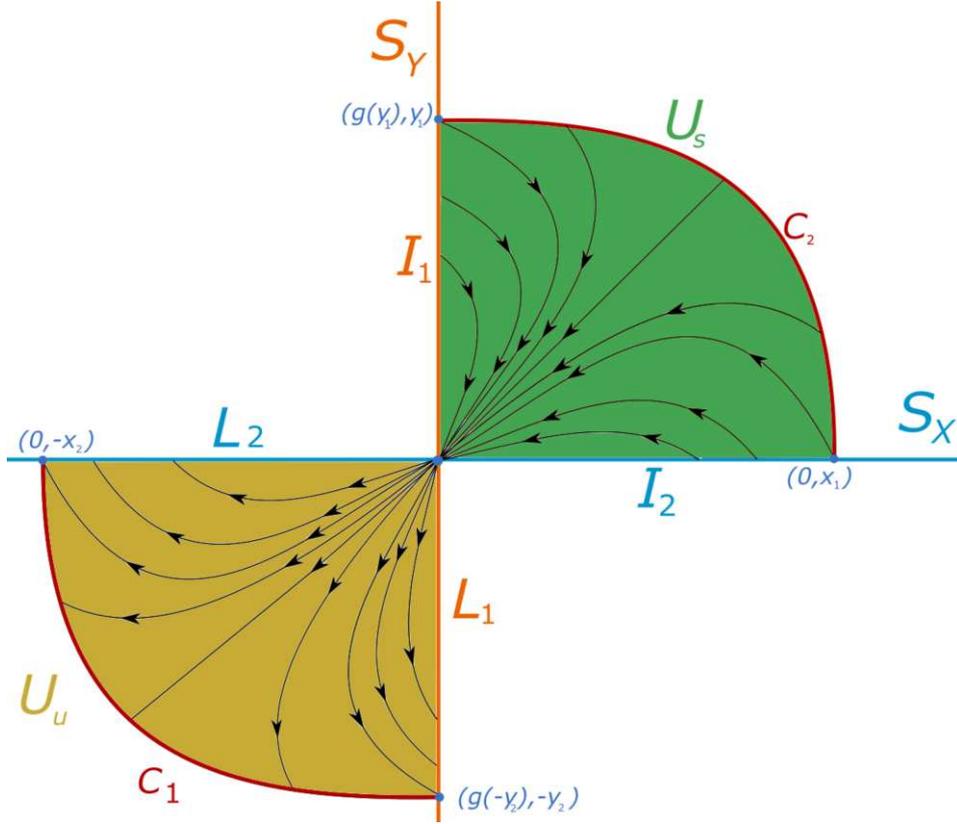


Figura 4.3: Representação dos conjuntos definidos acima.

O campo de deslize de Z em Σ^d , denotado por F_Z , é definido por

$$F_Z = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} F_Z^N(p)$$

em U_u, U_s . Perceba que $F_Z|_{U_u}$ é equivalente a $-F_Z^N|_{U_u}$ e $F_Z|_{U_s}$ é equivalente a $F_Z^N|_{U_s}$.

Como já vimos diversas vezes, como por exemplo na demonstração do Teorema 3.2, existem um aberto \mathcal{V} de Z e uma função contínua

$$q : \mathcal{V} \rightarrow U$$

que associa cada $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{V}$ à única Σ -singularidade $q(\tilde{Z})$ pertencente a U , sendo $q(\tilde{Z})$ uma T -singularidade tal que $S_{\tilde{X}} \pitchfork S_{\tilde{Y}}$. Utilizando a carta

$$(\psi := \varphi|_{V \cap \Sigma}, V \cap \Sigma)$$

em torno de p em Σ , podemos definir a função contínua

$$F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

$$\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \mapsto d\left(\psi_* F_N^{\tilde{Z}}\right)_{q(\tilde{Z})}.$$

Pela continuidade dos autovalores e da função F , conseguimos uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ de forma que os autovalores de $d\left(F_N^{\tilde{Z}}\right)_{q(\tilde{Z})}$ são distintos e negativos.

Tomemos agora $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{V}$, seguindo a mesma construção, nas coordenadas normais $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$ de \tilde{Z} em $q(\tilde{V})$. Então

$$F_{\tilde{Z}}^N(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\gamma} \\ 1 & \tilde{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2),$$

com $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} > \tilde{\gamma}$. Podemos definir \tilde{S}_1 e \tilde{S}_2 para o campo \tilde{Z} , da mesma maneira que S_1 e S_2 foram definidos para o campo Z , e considerar $\tilde{U}_u = \text{Int}(\tilde{S}_1)$ e $\tilde{U}_s = \text{Int}(\tilde{S}_2)$.

Vamos construir um homeomorfismo

$$h_s : \overline{U}_s \rightarrow \overline{\tilde{U}}_s$$

que leva órbitas de F_Z^N , em órbitas $F_{\tilde{Z}}^n$ preservando a orientação. Primeiramente escolha um homeomorfismo

$$\sigma : S_2 \rightarrow \tilde{S}_2$$

tal que $\sigma(I_1) = \tilde{I}_1$, $\sigma(I_2) = \tilde{I}_2$ e $\sigma(C_2) = \tilde{C}_2$. Em particular, temos que $\sigma(0) = 0$. Definimos h_s da seguinte forma: $h_s(x) = \sigma(x)$ se $x \in \partial\overline{U}_s = S_2$. Além disso perceba que a função

$$\tau : \overline{U}_s \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa x ao único valor tal que $\varphi_{F_Z^N}(\tau(x), x) \in S_2$ é contínua, sendo assim, definimos

$$h_s(x) = \varphi_{F_Z^N} \left(-\tau(x), \sigma \left(\varphi_{F_Z^N}(\tau(x), x) \right) \right)$$

para $x \in U_s$. É claro que h_s é homomorfismo e equivalência entre os campos $F_Z^N|_{\overline{U}_s}$ e $F_{\tilde{Z}}^N|_{\overline{\tilde{U}}_s}$. Fazendo exatamente o mesmo procedimento, conseguimos uma equivalência $h_u : \overline{U}_u \rightarrow \overline{\tilde{U}}_u$ entre os campos $-F_Z^N|_{\overline{U}_u}$ e $-F_{\tilde{Z}}^N|_{\overline{\tilde{U}}_u}$. Utilizando os fatos de $F_Z|_{U_u}$ ser equivalente a $-F_Z^N|_{U_u}$, $F_Z|_{U_s}$ ser equivalente a $F_Z^N|_{U_s}$ e $F_Z|_{\tilde{U}_u}$ ser equivalente a $-F_Z^N|_{\tilde{U}_u}$, $F_Z|_{\tilde{U}_s}$ ser equivalente a $F_Z^N|_{\tilde{U}_s}$ e $h_u(0) = h_s(0) = 0$, temos que

$$h : \overline{U}_u \cup \overline{U}_s \rightarrow \overline{\tilde{U}}_u \cup \overline{\tilde{U}}_s$$

$$x \mapsto \begin{cases} h_u(x), & \text{se } x \in \overline{U}_u, \\ h_s(x), & \text{se } x \in \overline{U}_s, \end{cases}$$

é uma equivalência entre F_Z^N e $F_{\tilde{Z}}^N$. Perceba que todas essas contas foram feitas em torno de uma carta de \mathbb{R}^2 , portanto provamos o lema que segue.

Lema 4.2.4.9. *Utilizando as notações acima, sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p uma T -singularidade com $S_X \pitchfork S_Y$, tais que $Z = Z(\alpha, \beta, \gamma)$, com $\alpha\beta > \gamma$ e $\alpha, \beta < 0$ em torno de p . Então existe uma vizinhança \mathcal{U} de Z em $\Omega^r(M, \Sigma)$, tal que para todo $\tilde{Z} \in \mathcal{U}$, existe um germe de homomorfismo $h : (\Sigma^d(Z), p) \rightarrow (\Sigma^d(\tilde{Z}), q(\tilde{Z}))$ que leva órbitas de Z^d , o campo deslizando associado a Z , em órbitas de \tilde{Z}^d , o campo deslizando associado a \tilde{Z} , preservando a orientação de tais órbitas.*

Lema 4.2.4.10 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p uma T -singularidade com $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Além disso, suponha (α, β, γ) como sendo os parâmetros normais de Z em p , satisfazendo $\gamma < \alpha\beta$ e $\alpha, \beta < 0$. Então não existe conexão entre Σ^u e Σ^s através do mapa de retorno $\Phi = \varphi_X \circ \varphi_Y$.*

Demonstração. Consideremos que X, Y, ϕ_X e ϕ_Y estão nas coordenadas (φ, U) , proveniente do Lema 4.2.4.6. Além disso nessas coordenadas, $p = 0$, perceba que pelo Lema 4.2.4.7, o mapa de retorno associado a Z em p possui ambos os autovetores pertencentes a Σ^c . Mais ainda, os autovalores λ, μ de $d\Phi_0$ satisfazem $\lambda < 1 < \mu$.

Portanto a variedade invariante W_s do difeomorfismo Φ é tangente a v_λ e a variedade invariante W_u do difeomorfismo Φ é tangente a v_μ .

As variedades W^s e W^u são transversais a S_X e S_Y e são tais que $W^s \pitchfork W^u$ em p , uma vez que p é ponto fixo hiperbólico de Φ . Note que podemos supor sem perda de generalidade que Φ é definido em um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, de forma que S_X e S_Y dividem todo \mathbb{R}^2 em 2 componentes conexas. Usando $S_X = \text{Fix}(\phi_X)$ e $S_Y = \text{Fix}(\phi_Y)$, pela Proposição 4.2.4.6, $\varphi_X(W^s) \subset W^u$ e portanto (x, y) é um ponto acima de S_X . Então, $\phi_X(x, y)$ é um ponto abaixo de S_X e portanto o ramo de W^u pertencente ao segundo quadrante é levado para o ramo de W^s no quarto quadrante.

Usando agora que $\phi_Y(W^s) \subset W^u$, segue que se (x, y) é um ponto à esquerda de S_Y , então $\phi_Y(x, y)$ é levado para um ponto à direita de S_Y , logo o ramo de W^s no quarto quadrante é levado para o ramo de W^u no segundo quadrante.

Essas conexões produzem um cone não suave invariante por Z em U , com vértice no ponto de dobra-dobra p , de forma que Σ^u está contido em seu interior. De forma análoga, podemos provar que existe um cone não suave, invariante sob o campo suave por partes Z , com vértice no ponto de dobra-dobra p que contém Σ^s em seu interior.

A colagem desses 2 cones não suaves impede a conexão de Σ^s com Σ^u .

□

N.B. 4.2.2. *O conjunto formado pelos dois cones não suaves e invariantes por Z , recebe o nome de diabolô não suave na literatura.*

Lema 4.2.4.11 ([7]). *Sejam $Z_0 \in \Omega^r(M, \Sigma)$, p uma T -singularidade com $S_X \pitchfork S_Y$, \mathcal{U} uma vizinhança de Z_0 , $Z \in \mathcal{U}$ e $h : (\Sigma^d(Z_0), p) \rightarrow (\Sigma^d(Z), q(Z))$ um germe de homomorfismo referentes ao Lema 4.2.4.9, então h se estende continuamente para um germe de homomorfismo $h : (\Sigma, p) \rightarrow (\Sigma, q(Z))$ e, além disso, $\Phi \circ h = h \circ \Phi_0$, sendo $\Phi_0 = \phi_{X_0} \circ \phi_{Y_0}$ e $\Phi = \phi_X \circ \phi_Y$.*

Demonstração. A demonstração será feita em três passos.

Seja $h : (\Sigma^s(Z_0), p) \rightarrow (\Sigma^s(Z), q(Z))$ o germe de homomorfismo proveniente do Lema 4.2.4.9, como expressado no enunciado tal homomorfismo pode ser estendido para $h : (\overline{\Sigma^s(Z_0)}, p) \rightarrow (\overline{\Sigma^s(Z)}, q(Z))$.

Passo 1. *Definição de um domínio fundamental para os mapas Φ e Φ_0 .*

A construção será feita apenas para Φ_0 , para Φ a criação de tal domínio é análoga.

Pelo teorema de linearização de campos em \mathbb{R}^2 (Teorema 4.2.4.8), podemos assumir, sem perda de generalidade, que Φ_0 é linear. Mais ainda, existe um sistema de coordenadas (x, y) de Σ em torno de p , tal que

$$\Phi_0(x, y) = (\lambda_0 x, \mu_0 y),$$

sendo λ_0, μ_0 os autovalores de Φ_0 , tais que $|\mu_0| < 1 < |\lambda_0|$, pela análise das variedades invariantes em Φ do Lema 4.2.4.10 são satisfeitos as seguintes propriedades:

- i.* S_{X_0} é uma curva passando em 0 com um ramo no primeiro quadrante e o outro ramo no terceiro quadrante;

- ii. S_{Y_0} é uma curva passando em 0 com um ramo no primeiro quadrante e o outro ramo no terceiro quadrante;
- iii. S_{X_0} é tangente à reta $y = k_0x$;
- iv. S_{Y_0} é tangente à reta $y = K_0x$; e
- v. $0 < k_0 < K_0$.

Podemos assumir $S_{X_0} = \{y = k_0x\}$, $S_{Y_0} = \{y = K_0x\}$ e que essas curvas são pontos fixos de ϕ_{X_0} e ϕ_{Y_0} , respectivamente. Tal hipótese não ocasiona perda de generalidade como vai se tornar claro durante a demonstração. Tal suposição é feita apenas para tornar a demonstração menos trabalhosa, porém pode ser feita sem maiores problemas com os conjuntos originais.

Perceba que, em decorrência do Lema 4.2.4.10, $\Phi_0^{-1}(S_{X_0})$ é uma reta passando no mesmo quadrante de S_{X_0} . Mais ainda, é imediato ver que sua inclinação é maior que K_0 .

Definimos portanto

$$\omega_0 = \{(x, y,); k_0x \leq y \leq K_0x\} \text{ e } \tilde{\omega}_0 = \phi_y(\omega_0).$$

Note que $R_0 = \omega_0 \cup \tilde{\omega}_0$ é a região delimitada pelas retas S_{X_0} e $\Phi_0^{-1}(S_{X_0})$. É imediato que $\Phi_0^n(S_{X_0}) \rightarrow W^u$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\Phi_0^n(S_{X_0}) \rightarrow W^s$ quando $n \rightarrow -\infty$. Portanto, o primeiro e terceiro quadrantes são particionados por $\Phi_0^n(R_0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras, definindo $Q = \{(x, y), xy > 0\}$, então

$$Q = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_0^n(R_0).$$

Dizemos que R_0 é o domínio fundamental de Φ_0 . De maneira análoga, existem coordenadas (x, y) de Σ em p de forma que

$$\Phi(x, y) = (\lambda x, \mu y),$$

sendo λ, μ os autovalores de $d\Phi_0$, com $|\mu| < 1 < |\lambda|$. Portanto, tome $R = \omega \cup \tilde{\omega}$, sendo ω a região delimitada por S_X e S_Y e $\tilde{\omega} = \phi_Y(\omega)$.

Considere $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Phi^n(R)$, sendo $R = \omega \cup \tilde{\omega}$. É interessante notar que Φ_0 (assim como Φ) passa uma única vez em cada setor da partição de Q .

Passo 2. *Extensão de h para $h : Q \rightarrow Q$.*

Note que $h : \omega_0 \rightarrow \omega$ já está definida em $h : \overline{\Sigma(Z_0)} \rightarrow \overline{\Sigma(Z)}$.

Seja $q \in \tilde{\omega}_0$ então $q = \phi_{Y_0}(\tilde{q})$, para algum $\tilde{q} \in \omega_0$. Definimos portanto

$$h(q) = \phi_Y(h(\tilde{q})).$$

Claramente, a fórmula acima nos dá uma extensão contínua de h em R_0 . Portanto, definimos $h : R_0 \rightarrow R$.

Agora, h se estende para Q de forma natural, pois dado $q \in Q$, existe único \tilde{q} de forma que $q = \Phi_0^n(\tilde{q})$. Definimos portanto

$$h(q) = \Phi^n(h(\tilde{q})).$$

É imediato ver, por construção de h , que $h(\Phi_0(q)) = \Phi(h(q))$.

Passo 3. *Extensão de h para W^u e W^s de maneira contínua.*

Como estamos em um domínio fundamental, podemos facilmente estender h para uma de suas variedades invariantes de maneira contínua. Sendo assim, escolha uma extensão arbitrária de h para W^s . Iremos ver que será possível estender h para W^u . Como $1 = \lambda_0\mu_0 = \lambda\mu$,

$$-1 = \frac{\log(\lambda)}{\log(\mu)} = \frac{\log(\lambda_0)}{\log(\mu)}.$$

É suficiente mostrar a extensão para o primeiro quadrante, para o terceiro quadrante o resultado segue analogamente.

Tome $w = (d, 0) \in W^u$. Então, existe uma sequência $w_i = \Phi_0^{N_i}(y_i)$ tal que $N_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, y_i , uma sequência contida em $S_{X_0} \cap \{(x, y); y > 0\}$, com $y_i \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$ e que satisfaz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_0^{N_i}(y_i) = w.$$

Perceba que o homomorfismo h já está definido para os termos da sequência w_i . Como queremos continuidade, precisamos mostrar que

$$h(w) = \lim_{i \rightarrow \infty} h(\Phi_0^{N_i}(y_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi^{N_i}(h(y_i)).$$

Caso tal limite exista, h será estendida para W^u repetindo esse processo em cada $q \in [w, \Phi_0(w)]$, usando as imagens sucessivas para todo o domínio fundamental por Φ_0 .

Perceba que $h(S_{X_0}) = S_X$ e $\Phi^n(S_X) \rightarrow W^u$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \pi_2(\phi^{N_i}h(y_i)) = 0.$$

Uma vez que $\pi_2(h(w)) = 0$, precisamos apenas nos preocupar em calcular o limite na primeira coordenada. Considere então

1. $w = (d, 0)$;
2. $y_i \rightarrow 0$, $y_i \in S_{X_0}$, para todo i ;
3. $N_i \rightarrow \infty$ tal que $\Phi_0^{N_i}(y_i) = w_i \rightarrow w$; e
4. $t_i \rightarrow \infty$, $x_i \rightarrow x \in W^s$ tais que $y_i = \Phi_0^{t_i}(x_i)$.

Denotamos $\tilde{y}_i = h(y_i)$, $\tilde{x}_i = h(x_i)$, $\tilde{w}_i = \Phi^{N_i}(\tilde{y}_i)$, $d_i = \pi_1(w_i)$, $\tilde{d}_i = \pi_1(\tilde{w}_i)$, $a_i = \pi_2(x_i)$ e $\tilde{a}_i = \pi_2(h(x_i))$. É suficiente mostrar que \tilde{d}_i converge.

Uma vez que h foi continuamente estendida para W^s e a sequência x_i converge para $x \in W^s$, segue que a sequência \tilde{a}_i é sequência convergente. Denotemos $\tilde{a} = \lim \tilde{a}_i$.

$$\tilde{d}_i = \pi_1(\Phi^{N_i}(h(y_i))) = \lambda^{N_i}\pi_1(\tilde{y}_i).$$

Enquanto

$$\tilde{y}_i = h(y_i) = h(\Phi_0^{t_i}(x_i)) = \phi^{t_i}(\tilde{x}_i) = (\lambda^{t_i}\pi_1(\tilde{x}_i), \mu^{t_i}\pi_2(\tilde{x}_i)),$$

uma vez que $\tilde{y}_i \in S_X = y = kx$, temos que

$$\pi_1(\tilde{y}_i) = \frac{1}{k}\pi_2(\tilde{y}_i) = \frac{1}{k}\mu^{t_i}\pi_2(\tilde{x}_i)$$

e conseqüentemente $\tilde{d}_i = \frac{1}{k} \lambda^{N_i} \mu^{t_i} \pi_2(\tilde{x}_i) = \frac{1}{k} \lambda^{N_i} \mu^{t_i} \tilde{a}_i$, o que implica

$$\log(\tilde{d}_i k) = N_i \log(\lambda) + t_i \log(\mu) + \log(\tilde{a}_i).$$

Repetindo o processo, conseguimos

$$\log(\tilde{d}_i k_0) = N_i \log(\lambda_0) + t_i \log(\mu_0) + \log(a_i).$$

Uma vez que $\log(d_i k_0)$ e $\log(a_i)$ convergem, temos que $N_i \log(\lambda_0) + t_i \log(\mu_0)$ converge. Como $\log(\lambda_0) = -\log(\mu_0)$, temos também a convergência de $N_i - t_i$. Por fim, como $\log(\lambda) = -\log(\mu)$,

$$N_i \log(\lambda) + t_i \log(\mu) = \log(\lambda)(N_i - t_i),$$

também é convergente e usando que $\tilde{a}_i \rightarrow \tilde{a}$, conseguimos que \tilde{d}_i é convergente.

A demonstração se completa escolhendo uma extensão qualquer para os segundo e quarto quadrantes, por exemplo

$$h(x, y) = (\pi_1(h(x, 0)), \pi_2(h(0, y))),$$

para (x, y) pertencente ao segundo ou quarto quadrantes. Uma vez que todos os pontos pertencentes a esses quadrantes são pontos de costura e o mapa de retorno Φ mapeia pontos de costura em pontos de costura, em decorrência da demonstração do Lema 4.2.4.9, a demonstração está terminada. \square

O último lema leva ao teorema a seguir.

Teorema 4.2.4.9 ([7]). *Sejam $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p uma T -singularidade com $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Suponha (α, β, γ) serem os parâmetros normais de Z em p , satisfazendo $\gamma < \alpha\beta$ e $\alpha, \beta < 0$. Então Z_0 é localmente estruturalmente estável em p .*

Demonstração. Seja \mathcal{U} uma vizinhança de Z dada pelo Lema 4.2.4.9. Tomemos $Z \in \mathcal{U}$, pelo Lema 4.2.4.11, existe um homomorfismo $h : U_0 \rightarrow U$, de forma que $h(p) = q(Z)$, tal que $h \circ \Phi_0 = \Phi \circ h$, sendo $\Phi = \phi_X \circ \phi_Y$ e $\Phi_0 = \phi_{X_0} \circ \phi_{Y_0}$ (note que podemos escolher um representante do germe h e uma vizinhança U de p onde as propriedades do lema são preservadas). Como p é um ponto de dobra-dobra e ϕ_X e ϕ_Y são involuções podemos diminuir U_0 de forma que $\phi_X(U_0) = U_0$ e $\phi_Y(U_0) = U_0$. Perceba que os conjuntos

$$U_0^+ = \{x \in M^+; \exists x_0 \in U_0 \text{ e } t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \varphi_{X_0}(t, x_0) = x_0\}$$

e

$$U_0^- = \{x \in M^-; \exists x_0 \in U_0 \text{ e } t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \varphi_{Y_0}(t, x_0) = x_0\}$$

são tais que $V_0 = U_0^+ \cup U_0^-$ é aberto em M e $p \in V_0$. Consideremos a aplicação

$$\tilde{h} : V_0 \rightarrow \tilde{h}(V_0).$$

Para cada $p \in U_0^+$, a órbita $\varphi_{X_0}(t, x)$ em M^+ é da forma

$$\begin{aligned} \varphi_{X_0}(\cdot, x) : [\tau_{X_0}^1(x), \tau_{X_0}^2(x)] &\rightarrow M^+ \\ t &\mapsto \varphi_{X_0}(t, x). \end{aligned}$$

Perceba que a forma normal de Vishik para dobras nos garante que a função $\tau_{X_0}^2$ é contínua, então, definimos, para $x \in U_0 \cap S_{X_0}$

$$l_{X_0}(x) = \frac{\tau_{X_0}^2(x)}{\tau_{X_0}^2(x) - \tau_{X_0}^1(x)},$$

e $l(S_{X_0}) = \{0\}$.

De forma análoga, para cada $q \in U_0^-$, a órbita $\varphi_{Y_0}(t, x)$ em M^+ é da forma

$$\begin{aligned} \varphi_{X_0}(\cdot, x) : [\tau_{X_0}^1(x), \tau_{X_0}^2(x)] &\rightarrow M^+ \\ t &\mapsto \varphi_{Y_0}(t, x). \end{aligned}$$

Novamente, a forma normal de Vishik para dobras nos garante que a função $\tau_{Y_0}^2$ é contínua, então, definimos, para $x \in U_0 \setminus S_{X_0}$,

$$l_{Y_0}(x) = \frac{\tau_{Y_0}^2(x)}{\tau_{Y_0}^1(x) - \tau_{Y_0}^2(x)},$$

se $x \in S_{Y_0}$). Repetimos o processo para os campos X e Y .

Definindo

$$\tilde{h}(p) = \begin{cases} \varphi_X \left(l_{X_0}(x) \tau_X^1 \left(h \left(\varphi_{X_0} \left(\tau_{X_0}^2(x), x \right) \right) \right), h \left(\varphi_{X_0} \left(\tau_{X_0}^2(x), x \right) \right) \right), & x \in U_0^+; \\ \varphi_Y \left(l_{Y_0}(x) \tau_Y^1 \left(h \left(\varphi_{Y_0} \left(\tau_{Y_0}^2(x), x \right) \right) \right), h \left(\varphi_{Y_0} \left(\tau_{Y_0}^2(x), x \right) \right) \right), & x \in U_0^-, \end{cases}$$

é imediato que $\tilde{h}|_V = h$ e \tilde{h} é contínua e injetiva, implicando pelo Teorema da invariância do domínio que é homeomorfismo com sua imagem. Além disso \tilde{h} é uma equivalência topológica entre os campos deslizantes Z_0^d e Z^d , sendo $\tilde{h} \circ \Phi_0 = \Phi \circ \tilde{h}$. Mais ainda, \tilde{h} leva órbitas de Z_0 em órbitas de Z , respeitando a orientação. Uma vez que Z é um elemento qualquer de \mathcal{U} , provamos a estabilidade estrutural. \square

O último caso a ser analisado é o de um campo suave por partes, $Z \in \Omega^r(M, \Sigma)$, que possui uma T -singularidade tal que seus parâmetros normais satisfazem $\alpha\beta > \gamma$, $\alpha, \beta > 0$ ou $\alpha\beta < 0$. Não iremos explorar esse caso nessa dissertação, pois a análise de tal caso utiliza, de maneira fundamental, conceitos como *web theory* e teoria de foliações. Sendo assim, uma análise de tal caso demandaria uma grande quantidade páginas e o resultado seria pouco expressivo, pois o resultado mais importante relacionado a T -singularidades já foi demonstrado nessa seção (Corolário 4.2.3) implicando o fato de Σ_0 não ser residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$.

Para aqueles interessados em uma nesse caso, é recomendada a leitura da referência [7]. Iremos, apenas citar o resultado.

Teorema 4.2.4.10 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ uma T -singularidade de Z tal que (α, β, γ) as coordenadas normais de Z em p satisfazem $\alpha\beta \leq \gamma$ e $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha\beta < 0$, então Z é localmente estruturalmente instável em p .*

Sendo assim, temos uma caracterização da estabilidade estrutural local para as singularidades de Teixeira.

Teorema 4.2.4.11 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e $p \in \Sigma$ uma T -singularidade de Z tal que $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Considere (α, β, γ) como sendo as coordenadas normais de Z em p . Então Z é localmente estruturalmente estável em p se e somente se $\alpha\beta > \gamma$ e $\alpha, \beta < 0$.*

Demonstração. O resultado é imediato unindo o Corolário 4.2.3 aos Teoremas 4.2.4.9 e 4.2.4.10. \square

4.2.4.3 Dobra-dobra Hiperbólico

Como este caso não possui mapas de retorno, a abordagem será bem mais fácil que a do caso anterior. A estabilidade estrutural é determinada apenas pela estabilidade estrutural do campo deslizando.

Temos do Teorema 4.2.4.1 se que p é um ponto de dobra-dobra visível-visível de um campo suave por partes $Z = (X, Y) \in \Xi_0$, existe uma carta (φ, U) em torno de p em M que coloca X e Y na forma

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix} \text{ e } Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

sendo $\text{sgn}(\gamma) = -1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Seu campo deslizando normalizado, pode ser considerado como

$$F_Z^N(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2),$$

em decorrência do Teorema 4.2.4.2.

Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} R_E^1 &= \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta < \gamma \text{ e } \alpha < 0\}, \\ R_E^2 &= \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta > \gamma \text{ e } \alpha \neq 0\}, \\ R_E^3 &= \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta < \gamma \text{ e } \alpha > 0\}. \end{aligned}$$

Fazendo um cálculo simples, os autovalores de $d(F_Z^N)_0$ são dados por

$$\lambda_1 := \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) \quad (4.2.14)$$

e

$$\lambda_2 := \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) \quad (4.2.15)$$

com os respectivos autovetores

$$v_1 := \left(\frac{1}{2} \left(-\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right), 1 \right) \quad (4.2.16)$$

e

$$v_2 := \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right), 1 \right). \quad (4.2.17)$$

Perceba ainda que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) &< \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \sqrt{(\alpha + \beta)^2}) \\ &\leq \frac{1}{2} (\alpha + \beta - |\alpha + \beta|) \leq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) &> \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha + \beta)^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} (\alpha + \beta + |\alpha + \beta|) \geq 0, \end{aligned}$$

portanto é claro do teorema 4.2.1 que $v_1 \in \Sigma^d$ e $v_2 \in \Sigma^c$.

Proposição 4.2.4.7. *Sejam λ_1 e λ_2 definidos pelas equações (4.2.14) e (4.2.15), então*

- i. se $(\alpha, \beta, \gamma) \in R_H^1$, então $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;*
- ii. se $(\alpha, \beta, \gamma) \in R_H^2$, então $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;*
- iii. se $(\alpha, \beta, \gamma) \in R_H^3$, então $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.*

Demonstração. Perceba primeiramente que $\lambda_1 < \lambda_2$, uma vez que

$$\lambda_1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} = \lambda_2,$$

para o caso *i.* note que como $\alpha < 0$,

$$\alpha\beta < \gamma \Leftrightarrow \beta > \frac{\gamma}{\alpha},$$

implicando $\beta > 0$ e portanto $-\beta < 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) \\ &< \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha + \beta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta + |\alpha + \beta|) \\ &= \max\{\alpha, -\beta\} < 0, \end{aligned}$$

e $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Por outro lado, para *iii.* perceba que como $\alpha > 0$, então $\beta < \gamma/\alpha < 0$, e portanto $-\beta > 0$. Note então que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) \\ &> \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{(\alpha + \beta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta - |\alpha + \beta|) \\ &= \min\{\alpha, -\beta\} > 0, \end{aligned}$$

segue que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Finalmente, para o caso *ii.* note que, como $\alpha\beta > \gamma$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) \\ &< \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta - \sqrt{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta - |\alpha - \beta|) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} \right) \\
&> \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\alpha - \beta + |\alpha - \beta|) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

mostrando que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. □

Proposição 4.2.4.8. *Sejam v_1 e v_2 definidos pela equações 4.2.16 e 4.2.17, segue que no sistema de coordenadas definido pelo Teorema 4.2.4.1, com $(\alpha, \beta, \gamma) \in R_H^1 \cup R_H^2 \cup R_H^3$, então $v_1 \in \Sigma^d$ e $v_2 \in \Sigma^c$.*

Demonstração. Uma vez que

$$v_1 = \left(\frac{1}{2} \left(-\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right), 1 \right),$$

então

$$\begin{aligned}
\pi_1(v_2) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right) \\
&< \frac{1}{2} (\alpha + \beta - |\alpha + \beta|) \leq 0,
\end{aligned}$$

pois $-4\gamma > 0$. Por outro lado,

$$v_2 = \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right), 1 \right),$$

então

$$\begin{aligned}
\pi_1(v_1) &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\gamma} + \alpha + \beta \right) \\
&> \frac{1}{2} (\alpha + \beta + |\alpha + \beta|) \geq 0,
\end{aligned}$$

o que ocorre por que $-4\gamma > 0$.

Segue que v_1 pertence ao segundo quadrante e v_2 ao primeiro, que corresponde às regiões de desliz e de costura, respectivamente, uma vez que o ponto de dobra-dobra é hiperbólico. □

Para o restante dessa seção considere $Z_0 = (X_0, Y_0)$ um campo suave por partes e p um ponto de dobra-dobra visível-visível de forma que os parâmetros normais de Z_0 , $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, pertencem ao conjunto $R_H^1 \cup R_H^2 \cup R_H^3$.

Como feito durante o desenvolver do caso onde p era um ponto de dobra-dobra elíptico, temos que, pela demonstração do Teorema 3.2, existem vizinhanças \mathcal{U} de Z_0 , U de p em Σ e uma função $q : \mathcal{U} \rightarrow U$ que associa o campo $Z \in \mathcal{U}$ à seu único ponto de dobra-dobra em $q(Z) \in U$. Portanto $q(Z) \in (S_X \pitchfork S_Y) \cap U$. Pela aplicação conjunta da Proposição 4.2.4.7, da continuidade do mapa $Z \in \Omega^r(M, \Sigma) \mapsto Z_N^d \in \mathfrak{X}^r(\Sigma)$, da continuidade dos autovalores (Teorema 4.1.1.2), da Proposição 4.1.1.2 e pelo teorema do Hartman-Grobman, segue que podemos diminuir o conjunto \mathcal{U} , se necessário, de forma que o campo Z_0^d seja localmente equivalente ao campo Z_N^d em p e $q(Z)$ respectivamente, para todo $Z \in \mathcal{U}$.

Lema 4.2.4.12. *Utilizando as notações acima, existe uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de forma que para todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{V}$ existe um germe de homomorfismo $h : (\Sigma^d(Z_0), p) \rightarrow (\Sigma^d(Z), q(Z))$ que é uma equivalência topológica entre os campos deslizantes Z_0^d e Z^d , em p e $q(Z)$, respectivamente. Mais ainda, h pode ser estendido para um germe de homomorfismo $\tilde{h} : (\Sigma, p) \rightarrow (\Sigma, q(Z))$.*

Demonstração. Tome $Z = (X, Y) \in \mathcal{U}$ e consideremos Z_0 e Z nas coordenadas (φ_0, U_0) em torno de p e (φ, U) em torno de $q(Z)$, respectivamente, provenientes do Teorema 4.2.4.1, escrevendo X_0, Y_0, X e Y em coordenadas locais temos

$$(\varphi_0)_*X_0(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix} \text{ e } (\varphi_0)_*Y_0(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

e

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_*Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

supomos $((\varphi_0)_*X, (\varphi_0)_*Y)$ e (φ_*X, φ_*Y) definidos no aberto $V = (-\varepsilon, \varepsilon)^3$.

Por simplicidade, denotaremos $(\varphi_0)_*X, (\varphi_0)_*Y, \varphi_*X$ e φ_*Y simplesmente por X_0, Y_0, X e Y , respectivamente. Da observação antes do enunciado do Lema 4.2.4.12, existe um homeomorfismo $s : U_0 \subset (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \times \{0\} \rightarrow V_0 \subset (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \times \{0\}$ que é uma equivalência topológica local entre os campos $F_{Z_0}^N$ e F_Z^N , tal que $s(0) = 0$. Utilizando o Teorema 4.2.4.2, para efeitos do estudo da estabilidade estrutural podemos considerar

$$F_{Z_0}^N = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\gamma_0 \\ 1 & -\beta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2)$$

e

$$F_Z^N = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^2),$$

de forma que s se torna uma equivalência topológica entre esses dois campos.

Observe que denotando F_{Z_0} por

$$F_{Z_0}(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} F_Z^N(p),$$

$U_u^0 = U_0 \cap \Sigma^u(\Sigma_0)$ e $U_s^0 = U_0 \cap \Sigma^s(\Sigma_0)$. Temos que

$$F_Z|_{U_u^0} \text{ é equivalente a } -F_Z^N|_{U_u^0} \text{ e } F_Z|_{U_s^0} \text{ é equivalente a } F_Z^N|_{U_s^0}. \quad (4.2.18)$$

Dividiremos a demonstração em três casos:

1. $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in R_H^1$,
2. $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in R_H^2$,
3. $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in R_H^3$.

Relembre que $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in R_H^i$, então $(\alpha, \beta, \gamma) \in R_H^i$.

Para o caso 1, temos das Proposições 4.2.4.7 e 4.2.4.8 que $F_{Z_0}^N$ é tal que

$$d(F_{Z_0}^N)_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\gamma_0 \\ 1 & -\beta_0 \end{pmatrix}$$

e a matriz possui autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ com respectivos autovetores $v_1 \in \Sigma^d$ e $v_2 \in \Sigma^d$. Então 0 é um nó estável do campo $F_{Z_0}^N$ e, como $0 < |\lambda_2| < |\lambda_1|$ segue que todas as órbitas $\varphi(t, x)$ de $F_{Z_0}^N$ satisfazem

$$\frac{\varphi'(t, x)}{\|\varphi'(t, x)\|} \rightarrow v_2 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \forall x \in U \setminus W_{v_1}^s, \quad (4.2.19)$$

sendo $W_{v_1}^s$ a variedade estável associado ao autovalor λ_1 (Corolário 4.2.4). Relembre do Corolário 4.2.1 que

- $S_{X_0} \cap U_0 = \{(x, 0); x \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)\}$;
- $S_{Y_0} \cap U_0 = \{(g(y), y); y \in (-\varepsilon_3, \varepsilon_4)\}$, sendo $g(y) = \mathcal{O}(y^2)$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \pi_1 F(t, 0) & 1 \\ \pi_2 F(t, 0) & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \alpha_0 t + \mathcal{O}(t^2) & 1 \\ t + \mathcal{O}(t^2) & 0 \end{pmatrix} \\ &= -t + \mathcal{O}(t^2) \\ &= t(-1 + \mathcal{O}(t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \pi_1 F(g(t), t) & g'(t) \\ \pi_2 F(g(t), t) & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \alpha_0 g(t) - \gamma_0 t + \mathcal{O}(t^2) & g'(t) \\ g(t) - \beta_0 t + \mathcal{O}(t^2) & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\gamma_0 t + \mathcal{O}(t^2) \\ &= t(-\gamma + \mathcal{O}(t)), \end{aligned}$$

como $\gamma \neq 0$, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que as duas equações acima são diferentes de 0, para todo $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. Podemos então diminuir U_0 de forma que $F_{Z_0}^N$ seja transversal a $(S_{X_0} \cap U_0) \setminus \{0\}$ e a $(S_{Y_0} \cap U_0) \setminus \{0\}$.

Tomemos agora $p_0 \in W_{v_1}^s \cap U_u^0$. Seja $\sigma_0 : (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow U_u^0$ uma seção transversal do campo $F_{Z_0}^N$ no ponto p_0 , *i.e.*, σ_0 é função suave tal que

$$\sigma_0(0) = p_0 \text{ e } \text{span} \{ \sigma_0'(t), F_{Z_0}^N(\sigma(t)) \} = \mathbb{R}^2,$$

para todo $t \in (-\delta_0, \delta_0)$.

Denote φ_{Z_0} como sendo o fluxo de $F_{Z_0}^N$. Da continuidade das soluções em relação às condições iniciais e da Equação 4.2.19, existe $\tau_0 > 0$ tal que a órbita $\varphi_{Z_0}(t, \sigma_0(-\tau_0))$ cruza $S_{X_0} \cap U_0$ e $\varphi_{Z_0}(t, \sigma_0(\tau_0))$ cruza $S_{Y_0} \cap U_0$. Denote esses únicos valores de interseção respectivamente por τ_{X_0} e τ_{Y_0} por fim, defina $(x_0, 0) = \varphi_{Z_0}(\tau_{X_0}, \sigma_0(-\tau_0))$ e $(g(y_0), y_0) = \varphi_{Z_0}(\tau_{Y_0}, \sigma_0(\tau_0))$.

Considere as curvas:

- $L_1^0 = \{\sigma_0(t); t \in [-\tau_0, \tau_0]\}$;
- $L_2^0 = \{\varphi_{Z_0}(t, \sigma_0(-\tau_0)); t \in [0, \tau_{X_0}]\}$;
- $L_3^0 = \{\varphi_{Z_0}(t, \sigma_0(\tau_0)); t \in [0, \tau_{Y_0}]\}$;
- $L_4^0 = \{(t, 0); t \in [x_0, 0]\} \subset S_{X_0}$;
- $L_5^0 = \{(g(t), t); t \in [0, y_0]\} \subset S_{Y_0}$;

e defina o aberto S_0 como sendo o interior da curva fechada $L_1^0 \cup L_2^0 \cup L_3^0 \cup L_4^0 \cup L_5^0$. Considere as seguintes sequências de pontos no plano

$$\left\{ \left(-\frac{1}{n}, 0 \right) \right\}_{n=n_1}^{\infty} \subset L_5^0 \subset S_{X_0} \cap U_0 \text{ e } \left\{ \left(g\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=n_1}^{\infty} \subset L_4^0 \subset S_{Y_0} \cap U_0,$$

sendo n_1 um valor natural suficientemente grande para que as continências acima sejam satisfeitas, e defina as curvas

$$r_n(t) = \left(-\frac{1}{n}, 0 \right) + t \left(\frac{1}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n} \right).$$

Segue portanto $r'_n(t) = \left(\frac{1}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n} \right), \forall t \in [0, 1]$.

Perceba que,

$$F_{Z_0}^N(r_n(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_0}{n} + \frac{t\alpha_0}{n} - \frac{\gamma_0 t}{n} + t\alpha_0 g\left(\frac{1}{n}\right) + F_1\left(\frac{1}{n}\left(t + tg\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) \\ t \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\beta_0 t}{n} + \frac{t}{n} - \frac{1}{n} + F_2\left(\frac{t}{n}\right) \end{pmatrix},$$

sendo F_1 e F_2 funções de ordem dois. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
D_n(t) &:= \det \begin{pmatrix} \pi_1 \circ F_{Z_0}^N(r_n(t)) & \frac{1}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right) \\ \pi_2 \circ F_{Z_0}^N(r_n(t)) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \det \begin{pmatrix} \pi_1 \circ F_{Z_0}^N(r_n(t)) & 1 + ng\left(\frac{1}{n}\right) \\ \pi_2 \circ F_{Z_0}^N(r_n(t)) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \det \begin{pmatrix} \pi_1 \circ F_{Z_0}^N(r_n(t)) & 1 + ng\left(\frac{1}{n}\right) \\ \pi_2 \circ F_{Z_0}^N(r_n(t)) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_0}{n} + \frac{t\alpha_0}{n} - \frac{\gamma_0 t}{n} + t\alpha_0 g\left(\frac{1}{n}\right) + F_1\left(\frac{1}{n}\left(t + tg\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) & 1 + ng\left(\frac{1}{n}\right) \\ tg\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\beta_0 t}{n} + \frac{t}{n} - \frac{1}{n} + F_2\left(\frac{t}{n}\right) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n^2} \left(1 - \alpha_0 + t(\alpha_0 + \beta_0 - 1 - \gamma_0) + n \left(F_1\left(\frac{tg\left(\frac{1}{n}\right) + t - 1}{n}\right) - F_2\left(\frac{t}{n}\right) \right) + G_n(t) \right)
\end{aligned}$$

onde

$$G_n(t) = ng\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 + t(\alpha_0 + \beta_0 - 2) - n \left(tg\left(\frac{1}{n}\right) + F_2\left(\frac{t}{n}\right) \right) \right).$$

Uma vez que $t \in [0, 1]$ e as funções g , F_1 e F_2 possuem ordem 2, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $n_2 > 0$ tal que para todo $n > n_2$,

$$|D_n(t)| > \frac{1}{n^2} |1 - \alpha_0 + t(\alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0 - 1)| - \frac{1}{n^2} \tilde{\varepsilon}.$$

Também, como $s(t) := 1 - \alpha_0 + t(\alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0 - 1)$ é tal que $s(0) = 1 - \alpha_0 > 0$, $s(1) = \beta_0 - \gamma_0 > 0$ e s é função contínua, temos

$$\tilde{\delta} = \inf_{t \in [0, 1]} s(t) > 0.$$

Tomando $0 < \tilde{\varepsilon} < \tilde{\delta}/2$, temos que para todo $n > n_2$ a reta

$$N_n^0 = \{r_{n+n_2}(t); t \in [0, 1]\}$$

é transversal a $F_{Z_0}^N$. Aumentando n_2 se necessário, podemos supor que $N_n^0 \subset \overline{S_0}$. Consideramos então as curvas

- $E_n^0 = \left\{ (t, 0); t \in \left[-\frac{1}{n_2 + 1}, -\frac{1}{n + n_2} \right] \right\} \subset L_4^0;$
- $D_n^0 = \left\{ (g(t), t), t \in \left[\frac{1}{n + n_2}, \frac{1}{n_2 + 1} \right] \right\} \subset L_5^0;$
- $C_n^0 = \left\{ (t, 0); t \in \left[-\frac{1}{n + n_2}, -\frac{1}{n + n_2 + 1} \right] \right\} \subset L_4^0;$
- $B_n^0 = \left\{ (g(t), t); t \in \left[\frac{1}{n_2 + n + 1}, \frac{1}{n_2 + n} \right] \right\} \subset L_5^0;$

e definimos os conjuntos R_n^0 como sendo o fecho do interior da região delimitada pela curva $N_1^0 \cup E_n^0 \cup D_n^0 \cup N_n$; e T_n^0 como sendo a região delimitada pelo fecho do interior da curva fechada $N_n^0 \cup C_n^0 \cup N_{n+1}^0 \cup B_n^0$.

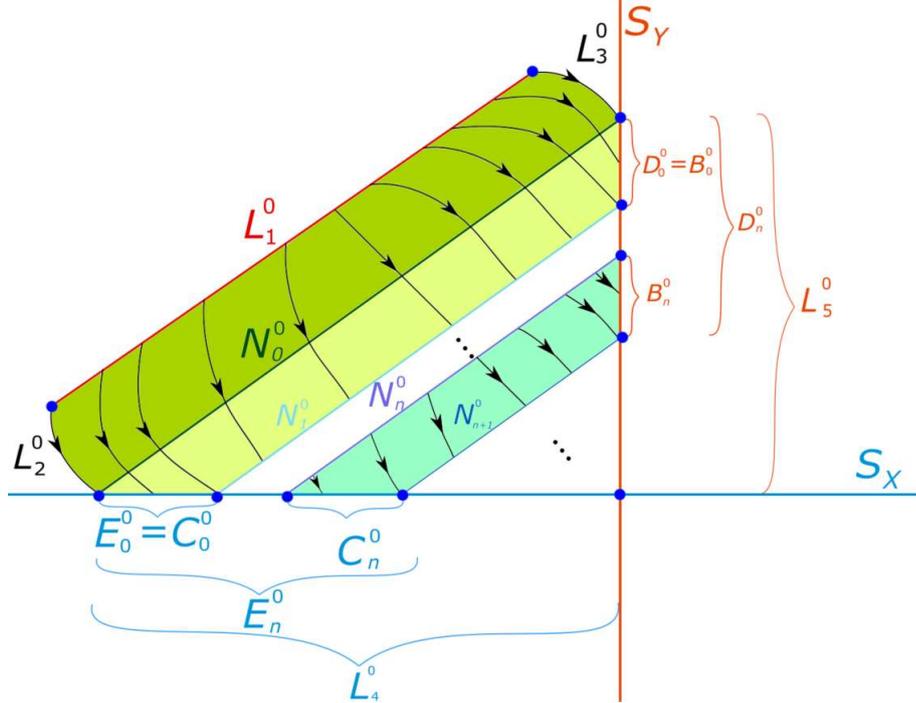


Figura 4.4: Representação das curvas definidas acima.

Perceba que $R_{n+1}^0 = R_n^0 \cup T_n^0$ e defina

$$P_u^0 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^0 \right) \sqcup \{0\} \subset \overline{S_0}$$

Considere agora o seguinte conjunto $Q_n^0 = C_n^0 \cup B_n^0 \cup N_{n+1}^0$. É claro da construção que dado $x \in T_n^0$, existem únicos tempos $b_n^0(x) \leq 0$ e $e_n^0(x) \geq 0$ tais que

$$\varphi_{Z_0}(x, b_n^0(x)) \in N_n^0 \text{ e } \varphi_{Z_0}(x, e_n^0(x)) \in Q_n^0,$$

mais ainda as funções

$$b_n^0, e_n^0 : T_n^0 \rightarrow \mathbb{R},$$

são contínuas, uma vez que C_n^0, B_n^0, N_{n+1}^0 e N_n^0 são transversais a $F_{Z_0}^N$ (segue imediatamente do teorema da função implícita junto ao lema de colagem).

Podemos definir analogamente para o campo Z , todos os elementos descritos. Utilizaremos então a mesma notação, agora sem a presença do índice 0.

Construiremos agora um homeomorfismo $h_u : P_u^0 \rightarrow P_u$ que leva órbitas de $F_{Z_0}^N$ em orbitas de F_Z^n , respeitando a orientação e satisfazendo $h(0) = 0$. A definição será feita de forma recursiva.

Começaremos definindo $h_1 : R_1^0 \rightarrow R_1$.

- Seja q^0 o único ponto de N_1^0 , tal que $\varphi_{z_0}(t, q^0)$ não escapa de P^0 , para todo $t > 0$.

- Considere a_n^0 como sendo o único ponto de N_1^0 para o qual existe $t_n \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\varphi_{Z_0}(t_n, a_n^0) = (-1/(n_2 + n), 0)$;
- Defina b_n^0 como o único ponto de N_1^0 tal que existe $s_n \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi_{Z_0}(s_n, b_n^0) = (g(1/(n_2 + n)), 1/(n_2 + n))$.

De maneira análoga,

- Seja q o único ponto de N_1 tal que $\varphi_Z(t, q)$ não escapa de P para todo $t > 0$.
- Considere a_n como sendo o único ponto de N_1 para o qual existe $t_n \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\varphi_Z(t_n, a_n) = (-1/(n_2 + n), 0)$,
- Defina b_n como o único ponto de N_1 tal que existe $s_n \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi_Z(s_n, b_n) = (g(1/(n_2 + n)), 1/(n_2 + n))$.

É claro que as sequências $\{a_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são monótonas em N_1^0 ou em N_1 . Além disso, o teorema da dependência contínua das condições iniciais de equações diferenciais ordinária garante que essas sequências para q_0 ou para q . Podemos então construir um homeomorfismo $\mu_1 : N_1^0 \rightarrow N_1$ satisfazendo

- $\mu_1(q_0) = q$,
- $\mu_1(a_n^0) = a_n$,
- $\mu_1(b_n^0) = b_n$.

Dado $x \in R_1^0$ definimos

$$h_1(x) := \varphi_Z \left(e_1(\mu_1(\varphi_{Z_0}(x, b_1(x)))) \cdot \frac{b_n^0(x)}{e_1^0(x) - b_n^0(x)}, \mu_1(\varphi_{Z_0}(x, b_1(x))) \right).$$

No caso $e_1^0(x) = b_n^0(x)$, consideramos a fração $b_n^0(x)/(e_1^0(x) - b_n^0(x))$ igual a 0, tornando fácil ver que h_1 é bijeção contínua. Como R_1^0 e R_1 são compactos, h_1 é homeomorfismo. Estenderemos h_1 , para o conjunto R_2^0 , considere a função

$$h_2 : R_2^0 \rightarrow R_2,$$

definida de forma que $h_2(x) := h_1(x)$, $\forall x \in R_1$. Além disso, seja $\mu_2 : N_2^0 \rightarrow N_2$, $\mu_2(x) = h_1(x)$. É claro da construção de h_1 que μ_2 é homeomorfismo.

Dado $x \in T_1^0$, definimos

$$h_2(x) := \varphi_Z \left(e_2(\mu_2(\varphi_{Z_0}(x, b_2(x)))) \cdot \frac{b_2^0(x)}{e_2^0(x) - b_2^0(x)}, \mu_2(\varphi_{Z_0}(x, b_2(x))) \right).$$

No caso $e_2^0(x) = b_2^0(x)$, consideramos a fração $b_2^0(x)/(e_2^0(x) - b_2^0(x))$ igual a 0 e é claro que h_2 é bijeção contínua. Como R_2^0 e R_2 são compactos, $h_2|_{T_1^0} : T_1^0 \rightarrow T_1$ é um homeomorfismo. O lema de colagem garante que h_2 será homeomorfismo entre R_2^0 e R_2 , mais ainda, sua construção nos garante que será uma equivalência topológica entre os campos $F_{Z_0}^N$ e F_Z^N .

Utilizando a mesma técnica; podemos estender h_2 para um homeomorfismo $h_3 : R_2^0 \rightarrow R_2$ de forma que tal função será uma equivalência topológica entre os campos $F_{Z_0}^N$ e F_Z^N .

Por indução, é possível construir um homeomorfismo $h_i : R_i^0 \rightarrow R_i$ que leva órbitas de $F_{Z_0}^N$ em F_Z^N preservando a orientação.

Por fim, definimos

$$h_u : P_u^0 \subset U_u^0 \rightarrow P_u \subset U_u$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = 0, \\ h_i(x) & , \text{ se } x \in R_i^0. \end{cases}$$

Pela construção anterior é claro que h_u está bem definido e é uma equivalência topológica entre $F_{Z_0}^N$ e F_{Z_0} . A Equação (4.2.18) nos garante também que $h_u|_{\text{Int}(P_u^0)}$ é uma equivalência topológica entre F_Z e F_{Z_0} . Realizando os mesmos passos e utilizando notações análogas podemos construir um homeomorfismo $h_s : P_s^0 \subset U_s^0 \rightarrow P_s \subset U_s$ de forma que $h_s|_{\text{Int}(P_s^0)}$ é uma equivalência entre F_Z e F_{Z_0} .

Finalmente, podemos definir

$$h : P_u^0 \cup P_s^0 \rightarrow P_u \cup P_s$$

$$x \mapsto \begin{cases} h_u(x), & \text{ se } x \in P_u, \\ h_s(x), & \text{ se } x \in P_s. \end{cases}$$

Agora resta estender h para um vizinhança de 0. Como tal região possui apenas pontos de costura, a extensão pode ser tomada de qualquer forma. Uma maneira de fazer tal extensão é a seguinte. Note que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{(x, 0); x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset P_u^0 \cap S_{X_0} \quad \text{e} \quad \{(g(y), y); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset P_s^0 \cap S_{Y_0}.$$

Mais ainda, podemos supor sem perda de generalidade que

$$g : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + g(y), y),$$

é um difeomorfismo com sua imagem.

Definimos então a função

$$\tilde{h} : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto \begin{cases} h(x) & , \text{ se } x \in (P_u^0 \cup P_s^0) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \\ g^{-1} \circ (\pi_1(g(x, 0)), \pi_2(g(0, y))) & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

dessa forma, temos que \tilde{h} é a função desejada no caso 1.

O caso 2 pode ser feito de maneira análoga à demonstração do Lema 4.2.4.9, apenas adicionando o passo de estender para uma vizinhança da 0, que é feito de mesmo modo ao parágrafo anterior.

Por fim, o caso 3 é demonstrado de maneira análoga ao caso 1, com mínimas adaptações. \square

Podemos agora demonstrar o teorema principal de estabilidade estrutural de pontos dobra-dobra hiperbólicos.

Teorema 4.2.4.12 (Adaptado de [7]). *Sejam $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra hiperbólico tal que $S_{X_0} \pitchfork S_{Y_0}$ em p . Sejam $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ os parâmetros normais de Z_0 em p . Então Z_0 é localmente estruturalmente estável em p se e somente se $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in R_H^1 \cup R_H^2 \cup R_H^3$.*

Demonstração. Tome $Z_0 = (X_0, Y_0)$ como no enunciado, pelo Lema 4.2.4.12. Existe uma vizinhança \mathcal{V} de Z_0 forma que para todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{V}$, existe um germe de homomorfismo $h : (\Sigma^d(Z_0), p) \rightarrow (\Sigma^d(Z), q(Z))$ que é uma equivalência topológica de Z_0^d com Z^d , em p e $q(Z)$, respectivamente. Mais ainda h pode ser estendido para um germe de homomorfismo $\tilde{h} : (\Sigma, p) \rightarrow (\Sigma, q(Z))$. Pelo Teorema 4.2.4.1, existem cartas (φ_0, U_0) e (φ, U) tais que

$$(\varphi_0)_*X_0(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix}, \quad (\varphi_0)_*Y_0(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

e

$$\varphi_*X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_*Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix}.$$

Perceba que é suficiente mostrar que existe uma equivalência entre os campos $(\varphi_0)_*Z_0$ e φ_*Z_* . Por simplicidade, denotaremos $(\varphi_0)_*X_0, (\varphi_0)_*Y_0, \varphi_*X$ e φ_*Y simplesmente por X_0, Y_0, X e Y , respectivamente. Definindo $s := \varphi \circ \tilde{h} \circ \varphi_0^{-1}$, temos que s é uma equivalência topológica entre os campos de deslize F_{Z_0} e F_Z , mais ainda é imediato ver que $s(S_{X_0}) = S_X$ e $s(S_{Y_0}) = S_Y$. Construiremos um homomorfismo $h_+ : W_0^+ \rightarrow W^+$ que leva órbitas de X_0 em órbitas de X , preservando a orientação, sendo W_0 e W vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, com $h_+(x) = s(x)$ para todo $x \in W_0^+ \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Primeiramente, tome extensão a \tilde{X}_0 de X_0 , definida em uma vizinhança U_{X_0} de $\varphi_0(U_0) \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ e \tilde{X} uma extensão de X definido em uma vizinhança U_X de $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ de forma que

$$(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times \{0\} \times (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \text{ é transversal ao campo } \tilde{X}_0$$

e

$$(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times \{0\} \times (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \text{ é transversal ao campo } \tilde{X}. \quad (4.2.20)$$

Dessa forma existe, $\tau > 0$ satisfazendo

$$\varphi_{\tilde{X}_0}(t, x) \in U_{X_0}, \quad \forall t \in [-\tau, \tau] \text{ e } x \in [\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\} \times [\varepsilon, \varepsilon]$$

e

$$\varphi_{\tilde{X}}(t, x) \in U_X, \quad \forall t \in [-\tau, \tau] \text{ e } x \in [\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\} \times [\varepsilon, \varepsilon],$$

Escolha $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ de forma que $s((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \{0\}^2) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}^2$, tal fato é decorrente de $s(S_{X_0}) = S_X$. Da continuidade de s , temos que existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que

$$s((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \{0\}^2) = (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{0\}^2.$$

É imediato, do teorema do fluxo tubular longo e de 4.2.20 que o conjunto

$$W_0 := \left\{ \varphi_{\tilde{X}_0}(t, x); t \in (-\tau, \tau) \text{ e } x \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \right\}$$

é aberto em \mathbb{R}^3 . Definimos então $W_0^+ := W_0 \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, $S = W^+ \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e um homeomorfismo

$$\sigma : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \{0\} \times (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{0\} \times (\varepsilon, \varepsilon)$$

que satisfaça $\sigma(x) = s(x)$ para todo $x \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{0\}^2$. Agora construiremos o homomorfismo

$$h^+ : W_0^+ \rightarrow W^+ := h(W^+).$$

Tome $x \in W^+$. Temos então 2 casos,

1. $\exists t_x \in (-\tau, \tau)$ tal que $\varphi_{X_0}(t_x, x) \in S$; e
2. $\exists t_x \in (-\tau, \tau)$ tal que $\varphi_{X_0}(t_x, x) \in (\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times (\varepsilon, \varepsilon)$.

Se x satisfaz o caso 1, definimos $h^+(x) = \varphi_X(-t_x, s(\varphi_{X_0}(t_x, x)))$. Para o caso 2, definimos $h^+(x) = \varphi_X(-t_x, \sigma(\varphi_{X_0}(t_x, x)))$, perceba que pela definição de σ e pela escolha de τ , h^+ está bem definido. Mais ainda, da construção, h^+ leva órbitas X_0 em órbitas de X , preservando a orientação de tais órbitas. Por fim, é fácil ver que h^+ é homeomorfismo.

Utilizando a mesma demonstração, conseguimos construir um homeomorfismo $h^- : V_0^- \rightarrow V^-$ que leva órbitas de Y_0 em órbitas de Y preservando a orientação, sendo V_0^- e V^- vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$. Por fim, observe que existe $r > 0$ tal que

$$B_r(0) \subset W_0^+ \cup V_0^-$$

e portanto

$$\hat{h} : B_r(0) \rightarrow \hat{h}(W_0^+ \cup V_0^-)$$

$$x \mapsto \begin{cases} h^+(x) & , x \in W_0^+ \cap B_r(0), \\ h^-(x) & , x \in V_0^- \cap B_r(0), \end{cases}$$

está bem definida. É claro da construção que \hat{h} é uma Σ -equivalência entre (X_0, Y_0) e (X, Y) , com $\hat{h}(0) = 0$, mostrando assim a estabilidade estrutural local de Z_0 em p .

A recíproca segue imediatamente do fato de que, se os parâmetros se normais (α, β, γ) de $Z_0 = (X_0, Y_0)$ não pertencessem a $R_H^1 \cup R_H^2 \cup R_H^3$, então 0 não é uma singularidade hiperbólica de F_Z^N . □

4.2.4.4 Dobra-dobra Parabólico

Primeiramente note que é suficiente demonstrar os resultados para o caso em que p é um ponto de dobra-dobra invisível-visível, pois para o caso em que o ponto de dobra-dobra é visível-invisível as demonstrações são as mesmas. Portanto, só consideraremos pontos de dobra-dobra invisíveis-visíveis nessa seção.

Nesse caso, por conta da dobra invisível, podemos voltar a ter conexões entre as regiões de deslize, primeiramente iremos estudar quando tais conexões podem ocorrer.

Relembre que no Lema 4.2.4.6 conseguimos uma involução ϕ_X associada à dobra invisível do campo X , dada por

$$\phi_X(x, y) = (x - 2\alpha y, -y) + \mathcal{O}(|(x, y)|^2),$$

em coordenadas normais.

Lema 4.2.4.13 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra invisível-visível tal que $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Sejam (α, β, γ) os parâmetros normais de Z em p . Então $\phi_X \pitchfork S_Y$ se, e somente se, $\alpha \neq 0$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.2.1, temos que em coordenadas normais

$$S_Y = \{(g(y), y, 0); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

para algum $\varepsilon > 0$, sendo $g(y) = \mathcal{O}(y^2)$. Segue que $T_{(0,0,0)}S_Y = \text{span}(1, 0, 0)$, enquanto

$$\phi_X(S_Y) = \{(-2\alpha(y) + G_1(y), -y + G_2(y), 0); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

sendo G_1, G_2 funções de ordem 2 em 0. Então

$$T_{(0,0,0)}\varphi_X(S_Y) = \text{span}(-2\alpha, -1, 0)$$

e o resultado segue de maneira imediata. \square

Lema 4.2.4.14 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra invisível-visível de forma que $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Considere (α, β, γ) os parâmetros normais de Z em p . Então $\phi_X(\Sigma^u) \cap \Sigma^s = \emptyset$ se, e somente se, $\alpha > 0$. Em outras palavras, existe conexão entre as regiões de deslize de Σ^d se e somente se $\alpha > 0$.*

Demonstração. Relembre que em coordenadas normais

$$S_Y = \{(g(y), y, 0); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \text{ e } \varphi_X(S_Y) = \{-2\alpha y + G_1(y), -y + G_2(y), 0; y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

sendo g, G_1 e G_2 funções de ordem 2 em 0. Portanto, $T_0\phi_X(S_Y) = \text{span}\{(-2\alpha, -1, 0)\}$. A região de deslize Σ^d é delimitada pelas curvas S_X e S_Y . Uma vez que $T_0S_Y = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$ e $T_0S_X = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$, segue que $\phi_X(S_Y) \subset \Sigma^d$ se, e somente se, $\alpha > 0$.

Por fim, observe que se $\phi_X(S_Y) \subset \Sigma^c$, então $\varphi(X)(\Sigma^u) \subset \Sigma^c$; e se $\phi_X(S_Y) \subset \Sigma^d$, então a região delimitada por S_Y e $\phi_X(S_Y)$ em Σ^u é mapeada na região delimitada por S_Y e $\phi_X(S_Y)$ em Σ^s , o que completa a demonstração. \square

Lema 4.2.4.15 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra invisível-visível com $S_X \pitchfork S_Y$ em p . Considere (α, β, γ) como sendo parâmetros normais de Z em p .*

*Assuma a existência de uma região $S \subset \Sigma^u$ tal que $\tilde{S} = \phi_X(S) \subset \Sigma^d$ e suponha que S é maximal com respeito a esta propriedade. Se $2(\alpha + \beta)(\alpha\beta - \gamma) \neq 0$, então os campos F_Z^N e $(\phi_X)_*F_Z^N$ são campos de vetores transversais em \tilde{S} .*

Demonstração. Considere os $F_0 = F_Z^N$ e $F_1 = (\phi_X)_*F_Z^N$. Definimos

$$\begin{aligned} D(x, y) &:= \det \begin{pmatrix} F_0(x, y) \\ F_1(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha x + \gamma y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) & x + \beta y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) \\ -2\alpha(x - 2\alpha y - \beta y) + \alpha(x - 2\alpha y) - \gamma y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) & -x + 2\alpha y + \beta y + \mathcal{O}(|(x, y)|^2) \end{pmatrix} \\ &= -2y^2(\alpha + \beta)(\alpha\beta - \gamma) + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \\ &= y^2(-2(\alpha + \beta)(\alpha\beta - \gamma) + \mathcal{O}(|(x, y)|)). \end{aligned}$$

É claro que $D(x, y) \neq 0$ se e somente se F_0 e F_1 são transversais em (x, y) . Uma vez que $(\alpha + \beta)(\alpha\beta - \gamma) \neq 0$, o eixo x é a única solução de $D(x, y) = 0$ próxima à origem. Segue que F_0 e F_1 são transversais na região $S \cup \tilde{S}$, uma vez que tal conjunto não possui nenhum ponto do eixo x . \square

Lema 4.2.4.16 ([7]). *Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra invisível-visível em p com $S_X \pitchfork S_Y$. Seja (α, β, γ) os parâmetros normais de Z em p . Se $2\alpha(\alpha + \beta) - \gamma \neq 0$, então F_Z^N é transversal a $\phi_X(S_Y)$ em Σ^s .*

Demonstração. Nas coordenadas de 4.2.4.1 temos $S_Y = \{(g(y), y, 0); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e g uma função de ordem 2 em torno de 0.

Então $\varphi_X(S_Y) = \{(g(y) - 2\alpha y + G_1(y), -y + G_2(y)); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, sendo G_1 e G_2 funções de ordem 2 em 0. Perceba que $\varphi_X(S_Y)$ é tangente à curva $\tilde{\gamma}(y) = (-2\alpha y, -y)$ na origem, logo é suficiente mostrar que F_Z^N é transversal a γ .

Note que

$$F_Z^N(\tilde{\gamma}(y)) = (-2\alpha^2 y - \gamma y + \mathcal{O}(y^2), -2\alpha y - \beta y + \mathcal{O}(y^2), 0)$$

e

$$(\tilde{\gamma}'(y))^\perp = (-2\alpha, -1, 0)^\perp = (1, -2\alpha, 0).$$

Portanto,

$$\langle F_Z^N(\tilde{\gamma}(y)), \tilde{\gamma}'(y)^\perp \rangle = (2\alpha(\alpha + \beta) - \gamma)y + \mathcal{O}(y^2).$$

Como $(2\alpha(\alpha + \beta) - \gamma) \neq 0$ por hipótese, para $y \neq 0$ suficientemente próximo da origem teremos $F_Z^N(\tilde{\gamma}(y))$ e $\tilde{\gamma}'(y)$ linearmente independentes para $y \neq 0$ e y próximo a origem, o que demonstra o resultado. \square

Definimos agora os conjuntos

- $R_P^1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta < \gamma \text{ e } \beta - \alpha > -2\sqrt{-\gamma}\}$,
- $R_P^2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta < \gamma \text{ e } \alpha > 0\}$,
- $R_P^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta > \gamma, \beta + \alpha > 0 \text{ e } \beta - \alpha > -2\sqrt{-\gamma}\}$,
- $R_P^4 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-; \alpha\beta > \gamma, \beta + \alpha < 0 \text{ e } \beta - \alpha < -2\sqrt{-\gamma}\}$, mostraremos o resultado principal dessa seção.

Teorema 4.2.4.13 ([7]). *Sejam $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r(M, \Sigma)$ e p um ponto de dobra-dobra invisível visível tal que $S_{X_0} \pitchfork S_{Y_0}$ em p . Considere $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ os parâmetros normais de Z_0 em p . Então, Z_0 é localmente estruturalmente estável em p se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

- $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in \cup_{i=1}^4 R_P^i$,
- $\alpha_0 \neq 0$,
- $2\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) - \gamma_0 \neq 0$,
- $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$ se $\alpha_0 > 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração de forma resumida, uma vez que os passos são bem parecidos com os casos anteriores, que foram feitos de maneira detalhada. Suponha que os parâmetros normais $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ de Z_0 pertençam a R_P^i . Tome uma vizinhança \mathcal{V} de Z_0 de forma que, para todo Z , os parâmetros normais de $Z \in \mathcal{V}$ pertençam a R_P^i e sejam satisfeitas as condições do teorema, com $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\alpha_0)$.

Supomos primeiro que não existe conexão entre Σ^u e Σ^s por meio de órbitas de Z_0 , isto é, $\alpha_0 < 0$. Dessa forma conseguimos realizar a demonstração fazendo os seguintes passos a seguir,

- 1) Colocar $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e $Z = (X, Y)$ nas coordenadas do Teorema 4.2.4.1. É suficiente demonstrar o resultado para os campos X_0, Y_0, X e Y nas seguintes coordenadas:

$$X_0(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix}, \quad Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta_0 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix},$$

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ 1 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ \beta + \mathcal{O}(|(x, y, z)|) \\ x + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^2) \end{pmatrix}.$$

Nessas coordenadas, consideramos Σ uma vizinhança aberta de 0 no conjunto $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, como feito durante todas as subseções de 4.2.

- 2) Construimos $h : \overline{\Sigma^d(Z_0)} \rightarrow \overline{\Sigma^d(Z)}$ que leva órbitas de F_{Z_0} e órbitas de F_Z preservando a orientação e fazendo com que $h(S_{X_0}) \rightarrow S_X$ e $h(S_{Y_0}) \rightarrow S_Y$. O procedimento é o mesmo já feito nas subseções anteriores de 4.2. Depois, estendemos h de qualquer maneira para Σ^c , como no final do lema Lema 4.2.4.11 .
- 3) Estendemos h para os pontos acima de Σ , utilizando as órbitas do campo X_0 , como feito no Teorema 4.2.4.9. Para os pontos abaixo de Σ , estendemos h utilizando as órbitas de Y_0 , como feito no Teorema 4.2.4.12. A equivalência desejada é assim construída.

No caso em que $\alpha_0 > 0$ existem conexões entre Σ^u e Σ^s . Chame de S_0 o conjunto dos pontos de $\Sigma^u(Z_0)$ tais que $x \in S_0 \Leftrightarrow \phi_{X_0}(x) \in \Sigma^s(Z_0)$ e de S o conjunto dos pontos $x \in \Sigma^u(Z)$ tais que $\phi_X(x) \in \Sigma^s(Z)$. Lembre que $0 \notin \Sigma^{s,u}(Z_0) \cup \Sigma^{s,u}(Z)$. Pelos Lemas 4.2.4.13, 4.2.4.15 e 4.2.4.16, os campos $F_{Z_0}^N$ e $\varphi_{X_0*}F_{Z_0}^N$ são transversais em S_0 , assim como os campos F_Z^N e $\varphi_{X_0*}F_Z^N$ são transversais em S . Usando que $F_{Z_0}^N$ e F_Z^N são hiperbólicos, é fácil construir funções $f_0^1, f_0^2 : \overline{S_0} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que f_0^1 é constante sobre as órbitas do campo $F_{Z_0}^N|_{\overline{S_0} \setminus \{0\}}$, f_0^2 é constante sobre as órbitas do campo $\phi_{X_0*}F_{Z_0}^N|_{\overline{S_0} \setminus \{0\}}$ e $df_0^1(x), df_0^2(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{S_0} \setminus \{0\}$. De forma análoga podemos construir funções $f^1, f^2 : \overline{S} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as mesmas propriedades das funções f_0^1 e f_0^2 , porém agora considerando o campo Z . Mais ainda, pedimos que f^1 e f^2 satisfaçam $\text{Im}(f_0^i) = \text{Im}(f^i)$ e que o valor das órbitas nas variedades estáveis e instáveis de f^1 e f^2 , caso existam, sejam o mesmo que o das variedades estáveis e instáveis de f_0^1 e f_0^2 , respectivamente.

Note que as funções g_0 e g definidas por

$$g_0(x, y) = (f_0^1(x, y), f_0^2(x, y)) \quad \text{e} \quad g(x, y) = (f^1(x, y), f^2(x, y)),$$

são funções contínuas bijetoras com suas respectivas imagens: se $g_0(x, y) = g_0(u, v)$, então (x, y) e (u, v) estão na mesma órbita dos campos $F_{Z_0}^N$ e $(\phi_{X_0})_*F_{Z_0}^N$, que são transversais, logo $(x, y) = (u, v)$. Para a função g a mesma argumentação é válida. Portanto, pelo teorema da invariância do domínio, g_0 e g são homeomorfismos com suas respectivas imagens, sendo assim a função $q_0 = g_0^{-1}$ leva linhas verticais $x_0 \times (a, b)$ em curvas integrais de $F_{Z_0}^N$ e linhas horizontais $(a, b) \times y_0$ em curvas integrais de $\phi_{X_0*}F_{Z_0}^N$. De modo análogo,

$q = g^{-1}$ leva linhas verticais em curvas integrais de F_Z^N e linhas horizontais em curvas integrais de $\phi_{X_0*} F_Z^N$.

Pelo teorema da invariância do domínio a função, $h = q \circ (f_0^1(x, y), f_0^2(x, y))$ é um homeomorfismo local (relembre que tal homeomorfismo só precisa valer em uma vizinhança induzida da origem). Para os pontos pertencentes a $\phi_{X_0}(S_0)$ podemos estender h , definindo $h(\phi_{X_0}(p)) = \phi_X(h(x))$, perceba que, por construção h é uma equivalência de F_{Z_0} e F_Z em $\phi_{X_0}(S_0)$.

Perceba que podemos estender h para os restantes dos pontos de $\overline{\Sigma^d}$ utilizando as órbitas dos campos de deslize F_{Z_0} e F_Z a fim de levar orbitas de F_{Z_0} em órbitas de F_Z , respeitando a orientação. Tal extensão é possível uma vez que existe transversalidade entre F_{Z_0} e $\phi_{X_0}(S_{Y_0})$ (resp. F_Z e $\phi_X(S_{Y_0})$).

Para os pontos pertencentes a $\phi_{X_0}(\Sigma^d(Z_0))$, h é estendida de forma que $h(\phi_{X_0}(p)) = \phi_x(h(p))$, note que por construção, essa identificação é bem definida.

Seja H_1 a parte abaixo da variedade S_X . Podemos então, estender h para H_1 de qualquer maneira e finalmente estender h para o conjunto $\phi(H_1)$ por $h(\phi_{X_0}(p)) = \phi_x(h(p))$. Novamente, note que, por construção, a função h está bem definida. E é uma equivalência entre F_Z e F_{Z_0} . Mais ainda é imediato ver que

$$h \circ \phi_{X_0} = \phi_X \circ h.$$

Com isso, utilizando as técnicas já desenvolvidas durante esse capítulo, criamos um homeomorfismo $h : U_p \subset M \rightarrow V_p \subset M$, com $h(p) = q(Z)$, que é uma equivalência topológica local entre Z_0 e Z em p e $q(Z)$, respectivamente. □

Por meio dos teoremas descritos durante toda a seção 4.2, conseguimos caracterizar a estabilidade estrutural local no conjunto Ξ_0 .

Capítulo 5

Estabilidade Estrutural Σ -Semilocal em $\Omega^r(M, \Sigma)$

Nessa seção iremos estudar a estabilidade estrutural Semi-Local de campos suaves por partes, isto é, estamos interessados em saber a dinâmica próxima da região de descontinuidade se permanece estável sob pequenas perturbações. Todas as definições e demonstrações dessa seção estão em conformidade com o artigo [6]. Para o leitor tenha compreensão dessa seção é necessário que o leitor esteja familiarizado com a teoria clássica de estabilidade estrutural global em dimensão 2, tal teoria foi muito bem desenvolvida nos artigos [19]¹ e [20].

5.1 Estabilidade Estrutural do Campo Deslizante

Começaremos estudando a estabilidade estrutural do campo de deslize. Para fazer tal análise, precisaremos de algumas definições.

Definição 5.1.1. Sejam $Z_0, Z \in \Omega^r(M, \Sigma)$. Dizemos que Z_0 tem uma *equivalência de deslize* com Z_0 se existir um homeomorfismo $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ que leva S_{Z_0} em S_Z , preservando o tipo das Σ -singularidades, e leva as órbitas do campo de deslize de Z_0 em órbitas do campo de deslize de Z , preservando a orientação. O conceito de *estabilidade estrutural de deslize* é derivado de maneira natural dessa definição.

Dado $N \neq \emptyset$ um subconjunto compacto de Σ , dizemos que Z_0 é *semilocalmente equivalente* a Z em N se existem uma vizinhança U de N em M e um homomorfismo $h : U \rightarrow U$ tais que $h(U \cap \Sigma) = U \cap \Sigma$ e que leva órbitas de Z_0 a órbitas de Z , preservando a orientação.

Definição 5.1.2. Sejam $U \neq \emptyset$ um subconjunto de Σ e $Z \in \Omega^r(M, \Sigma)$. Dizemos que U é um Σ -bloco de Z se U for um conjunto compacto e conexo satisfazendo as seguintes condições:

¹O artigo [19] pode ser encontrado através do sítio virtual <http://memoria.bn.br/DocReader/docread er.aspx?bib=158119&pesq=&fbclid=IwAR1zNGGYUjPk0azC1onkRxK2X5HZQ6RySJjurkZGdNz8qZyzUVdutEtUD4>. O *link* acima leva a uma página da Biblioteca Nacional Digital (BNDigital), um programa do governo brasileiro que busca digitalizar livros, artigos e documentos brasileiros. Felizmente, o autores de tais artigos, Maurício e Marília Peixoto, são brasileiros e tal artigo foi digitalizado. O interessado, após abrir o *link* deve clicar em *Pastas* no canto superior esquerdo, selecionar *Ano 1959* e por fim *Edição 00002*. A referência [20] é de fácil acesso.

- i. $\mu(S_Z) = 0$, sendo μ a medida de Borel associado a variedade Σ (com respeito à métrica riemanniana definida em Σ);
- ii. $\text{Int}(U)$ é uma variedade suave 2-dimensional;
- iii. $\text{Int}(U)$ é Z -invariante; e
- iv. $\text{Int}(U)$ é maximal, *i.e.*, qualquer vizinhança própria de $\text{Int}(U)$ em Σ não é Z^d -invariante.

Caso $U = \Sigma$ seja um Σ -bloco, U é chamado de Σ -bloco trivial de Z .

Definição 5.1.3. $Z_0 \in \Omega^r(M, \Sigma)$ é chamado de Σ -bloco estruturalmente estável se for satisfeito uma das condições

- Z_0 não possui Σ -blocos; ou
- Z_0 é semilocalmente estruturalmente estável em cada Σ -bloco de Z_0 .

N.B. 5.1.1. Perceba que se U é um Σ -bloco, então a condição ii. da definição 5.1.2 implica que $\text{Int}(U) \subset \Sigma^d$. Além disso, se $Z \in \Xi_0$ e U é um Σ -bloco, então U é uma componente conexa de $\overline{\Sigma^d(Z)}$. Por fim, se Z tem um bloco trivial, então $S_Z = \emptyset$ e portanto $\Sigma = \Sigma^u$ ou $\Sigma = \Sigma^s$.

Definição 5.1.4. Sejam M uma variedade suave de dimensão dois, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e γ uma órbita periódica de X . Perceba que γ está contido numa vizinhança coordenada difeomorfa a um anel em \mathbb{R}^2 (uma região do tipo $B_2(0) \setminus B_1(0)$), tomando coordenadas (x_1, x_2) em torno de γ , dizemos que a órbita periódica γ é simples se

$$\exp \left(\int_{\gamma} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dt \right) \neq 1,$$

sendo X_1 e X_2 o campo X colocado nas coordenadas (x_1, x_2) . Essa definição independe da escolha das coordenadas (x_1, x_2) .

Agora iremos citar dois resultados conhecidos da teoria clássica.

Teorema 5.1.1 (Teorema de Peixoto para Variedades Compactas). *Sejam M uma variedade compacta e conexa de dimensão dois sem bordo e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. X é globalmente estruturalmente estável em M se e somente se forem satisfeitos*

- B1**– todas as singularidades de X são hiperbólicas;
- B2**– os conjuntos α e ω -limites são singularidades ou órbitas fechadas;
- B3**– não existem conexões de selas; e
- B4**– Existe apenas um número finito de ciclos limites, todos simples.

Mais ainda, o conjunto dos campos globalmente estruturalmente estáveis em M é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Teorema 5.1.2 (Peixoto para Variedades Compactas com Quinas). *Seja M uma variedade com quina compacta e conexa, contida em uma variedade compacta e conexa sem bordo N , de forma que $\dim(M) = \dim(N) = 2$. Então, um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é globalmente estruturalmente estável se, e somente se, forem satisfeitos:*

- B1**— todas as singularidades de X são hiperbólicas ;
- B2**— os conjuntos α e ω -limites são singularidades ou órbitas fechadas;
- B3**— não existem conexões de selas;
- B4**— existe apenas um número finito de ciclos limites, todos simples;
- A1**— todas as singularidades de X estão contidas no interior de M ;
- A2**— todas as órbitas periódicas estão contidas no interior de M ;
- A3**— todas as trajetórias de X têm no máximo um ponto de tangência em ∂M (note que não faz sentido verificar tal condição em pontos do bordo que não são quinas);
- A4**— as variedades estáveis e instáveis associadas a cada ponto de sela são transversais a ∂M ;
- A5**— se uma trajetória de X é tangente ao ∂M , então o contato entre essas duas curvas é de ordem 2;
- A6**— existe apenas um número finito de pontos de tangência de ∂M ;
- A7**— as trajetórias que passam pelas quinas não são tangentes a nenhum ponto do bordo;
e
- A8**— não existem conexões entre quinas ou conexões entre quinas e selas.

Mais ainda, o conjunto dos campos globalmente estruturalmente estáveis em M é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.

N.B. 5.1.2. Para mais informações sobre variedades com quinas, veja a subseção *Manifolds with Corners* que se inicia na página 415 da referência [13].

A demonstração do Teorema 5.1.1 pode ser encontrada em [20]. Por outro lado a demonstração do teorema Teorema 5.1.2 é direta consequência direta das técnicas descritas nos artigos [19], [20] e [25].

Podemos agora demonstrar os resultados com respeito à estabilidade estrutural deslizante.

Proposição 5.1.1 ([6]). *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi_0$ de forma que Z_0 não possui Σ -blocos, então $S_{Z_0} = \emptyset$, $\Sigma = \Sigma^c$ e Z_0 é Σ -semilocalmente estruturalmente estável em $\Omega^r(M, \Sigma)$.*

Demonstração. Perceba que se $S_{Z_0} \neq \emptyset$, então $\text{Int}(\Sigma^s) \neq \emptyset$ (em decorrência da análise da caracterização local dos campos em Ξ_0 descrita durante toda a seção 4), implicando que Σ tem um Σ -bloco, conseqüentemente $S_{Z_0} = \emptyset$ e $\Sigma = \Sigma^c$.

Considere os mapas contínuos

$$F^\pm : \mathfrak{X}^r(M^\pm) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R},$$

tais que $F^\pm(X, p) = Xf(p)$. Uma vez que Σ é compacto, existem vizinhanças \mathcal{U} de X_0 e \mathcal{V} de Y_0 , de forma que $Xh(p)Yh(p) > 0$, para todo $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathcal{V}$ e $p \in \Sigma$.

Perceba que $\Sigma^c(Z) = \Sigma$, e Z_0 e Z são semilocalmente equivalentes em Σ , para $Z = (X, Y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. De fato, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_Z(t, x)$ é definida para todo $Z \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ e $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Tomemos $Z \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Uma vez que $\Sigma = \Sigma^c(Z_0) = \Sigma^c(Z)$, os conjuntos

$$U_0 = \{\varphi_{Z_0}(t, x); x \in \Sigma \text{ e } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

e

$$U = \{\varphi_Z(t, x); x \in \Sigma \text{ e } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

são abertos.

Consideramos então o homeomorfismo

$$\begin{aligned} h : U_0 &\rightarrow U \\ \varphi_{Z_0}(t, x) &\mapsto \varphi_Z(t, x), \end{aligned}$$

temos que h é uma conjugação entre os campos $Z_0|_{U_0}$ e $Z|_U$, mostrando assim a estabilidade estrutural Σ -semilocal de Z_0 . \square

Proposição 5.1.2 ([6]). *Seja $Z_0 \in \Xi_0$. Então, Z_0 é Σ -bloco estruturalmente estável se, e somente se, Z_0 é Σ -semilocalmente estruturalmente estável em Σ .*

Demonstração. Suponha primeiramente que Z_0 é Σ -bloco estruturalmente estável. Se Z_0 não possui Σ -blocos, então a Proposição 5.1.1 garante que Z_0 é Σ -semilocalmente estruturalmente estável.

Assuma agora que U_1, U_2, \dots, U_k são todos os Σ -blocos de Z_0 . Por hipótese, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe uma vizinhança \mathcal{U}_i de Z_0 em $\Omega^r(M, \Sigma)$ tal que Z_0 e Z são semilocalmente equivalentes em U_i para cada $Z \in \mathcal{U}_i$.

Tome $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_k$ e $Z \in \mathcal{U}$. Então existem vizinhanças compactas disjuntas V_i de U_i em M e homeomorfismos $h_i : V_i \rightarrow V_i$ que levam órbitas de Z_0 em órbitas de Z , preservando a orientação, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. É claro que Z_0 e Z são transversais a $\partial V_i \cap \Sigma$, mais ainda, podemos construir cada h_i de forma que $h_i|_{\partial V_i} = \text{id}$.

Defina então $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Como $Z_0 \in \Xi_0$, temos que $\Sigma \setminus V \subset \Sigma^c(Z_0)$ e $\Sigma \setminus V \subset \Sigma^c(Z)$. Definindo $h|_V = h_i$ e $h|_{\Sigma \setminus V} = \text{id}$. Podemos então construir um homeomorfismo $h : U \rightarrow U$ (como feito diversas vezes na seção 4) que mapeia órbitas de Z_0 em órbitas de Z , sendo U uma vizinhança de Σ . Portanto, Z_0 é Σ -semilocalmente estruturalmente estável em Σ . \square

Definiremos agora um conjunto importantíssimo para a análise da estabilidade estrutural deslizante.

Definição 5.1.5. O conjunto $\Omega_{SLR}^r(M, \Sigma) \subset \Xi_0$ é o conjunto dos campos $Z \in \Omega^r(M, \Sigma)$ tais que Z satisfaz

$$G) Z \in \Xi_0;$$

$F_1)$ se $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra hiperbólico ou elíptico de Z , então Z_N^d não possui variedade central em $V_p \cap \overline{\Sigma^d}$, sendo V_p uma vizinhança de p em Σ ;

$F_2)$ se $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra parabólico de Z , então F_Z^N é transiente em $V_p \cap \overline{\Sigma^d}$ (isto é, toda órbita começando em $V_p \cap \overline{\Sigma^d}$ escapa de tal conjunto em tempo positivo e negativo); ou possui uma singularidade hiperbólica em p , sendo V_p uma vizinhança de p em Σ ;

- F_3) não existem conexões de pontos de dobra-dobra por meio das órbitas de Z^d em Σ^d ;
- F_4) não existem conexões entre um ponto de dobra-dobra e um ponto de sela de Z_N^d ;
- I_1) $Z_N^d|_{\overline{\Sigma^d}}$ possui apenas um número finito de pontos de pseudoequilíbrio, estando todos esses pontos contidos em $\text{Int}(\Sigma^s)$;
- I_2) $Z_N^d|_{\overline{\Sigma^d}}$ possui apenas finitas órbitas periódicas, todas elas hiperbólicas, estando tais órbitas contidas em $\text{Int}(\Sigma^d)$;
- I_3) Z_N^d não possui conexão de selas em $\overline{\Sigma^d}$;
- B_1) não existe órbita de Z_N^d contida em Σ^s com dois pontos de tangência de Z_N^d com $\partial\Sigma^d$;
- B_2) cada separatriz de Z_N^d é transversal a $\partial\Sigma^d$ (exceto em pontos de dobra-dobra); e
- R) Z_N^d não possui órbitas recorrentes.

Demonstraremos agora o teorema principal da seção.

Teorema 5.1.3 ([6]). *X estruturalmente deslize estável em $\Omega^r(M)$ se, e somente se, $X \in \Omega_{SLR}^r(M, \Sigma)$.*

Demonstração. Tomemos $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_{SLR}^r(M, \Sigma)$. Se $\Sigma = \Sigma^s(Z_0)$, então Z_0^d está definido em todo Σ . Uma vez que Σ é compacto, existe uma vizinhança \mathcal{V} de Z_0 em $\Omega^r(M, \Sigma)$ de forma que para todo $Z \in \mathcal{V}$, o campo de deslize Z^d está definido para todo Σ . Portanto, Z_0 é deslize estruturalmente estável em decorrência do Teorema 5.1.1.

Assumimos agora que $\Sigma^s(Z_0) \neq \Sigma$. Sejam $p_1(Z_0), \dots, p_n(Z_0)$ os pontos de dobra-dobra de $\Sigma^s(Z_0)$. Considere o conjunto $\overline{\Sigma^s(Z_0)} \setminus \{p_1(Z_0), \dots, p_n(Z_0)\}$, podemos definir $C_i(Z_0)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, as componentes conexas de $\overline{\Sigma^s(Z_0)} \setminus \{p_1(Z_0), \dots, p_n(Z_0)\}$. Uma vez que $Z_0 \in \Xi_0$, cada

$$R_i(Z_0) := \overline{C_i(Z_0)}, \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

é uma 2 variedade compacta e conexa com quinas. Mais ainda, perceba que Z_0^d é transversal a ∂R_i (relembre que só faz sentido falar de transversalidade em pontos que não são quinas). Em decorrência da demonstração do Teorema 3.2 e do Teorema 3.3 podemos tomar uma vizinhança \mathcal{V}_1 suficientemente pequena em torno de Z_0 em $\Omega^r(M, \Sigma)$, tal que todo $Z \in \mathcal{V}_1$ possui os únicos pontos de dobra como sendo $\{p_1(Z), \dots, p_n(Z)\}$ e

$$\|p_i(Z_0) - p_i(Z)\| < \varepsilon, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

onde ε é um número positivo tão pequeno quanto se queira (relembre que M está mergulhada em algum \mathbb{R}^n e a norma descrita acima é a norma em tal espaço euclidiano). Podemos também supor que cada $p_i(Z)$ possui o mesmo tipo de visibilidade que $p_i(Z_0)$. Mais ainda, conseguimos diminuir \mathcal{V}_1 de forma que

$$\text{dist}_H(R_i(Z_0), R_i(Z)) < \varepsilon,$$

sendo dist_H a distância de Hausdorff, isto é, se X e Y são subconjuntos de R^n ,

$$\text{dist}_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\| \right\}.$$

Dessa forma, tomando ε suficientemente pequeno podemos garantir que cada $R_i(Z_0)$ é homeomorfo a $R_i(Z)$, para todo $Z \in \mathcal{V}_1$.

Afirmção 5.1.1. Tomando $Z \in \mathcal{V}_1$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, existe um homeomorfismo $h_Z^i : R_i(Z_0) \rightarrow R_i(Z)$ que preserva o tipo de singularidade na fronteira e que carrega órbitas do campo de deslize de Z_0^d em órbitas de deslize de Z^d , preservando a orientação. Mais ainda, $h_Z^i(p_j(Z_0)) = p_j(Z)$, para todo $p_j(Z_0) \in R_i(Z_0)$.

Demonstração. Por simplicidade, denote $R := R_i(Z_0)$ e $\tilde{R} := R_i(Z)$.

Suponha primeiramente que R não possui vértices, o que implica ∂R é suave e portanto R é uma variedade suave com bordo. Sendo assim, existe um difeomorfismo $\Psi : R \rightarrow \tilde{R}$ de forma que $\tilde{R} = R_i(Z)$. Portanto existe um homeomorfismo $\tilde{h} : R \rightarrow R$ que é uma equivalência entre Z_0 e $\Psi_* Z$, por meio do Teorema 5.1.2 (perceba que toda variedade com bordo é uma variedade com quinas). Dessa forma, $h = \Psi \circ \tilde{h}$ satisfaz as propriedades requeridas.

Vimos na Proposição 3.2 que não é possível existir apenas um ponto de dobra-dobra de Z_0 . Iremos fazer a demonstração apenas o caso em que existem apenas dois pontos de dobra-dobra em Z . Ficará claro da demonstração que o mesmo método consegue mostra o resultado para uma quantidade arbitrária de pontos de dobra-dobra. Sejam $p_1 = p_1(Z_0)$ e $p_2 = p_2(Z_0)$ os pontos de dobra-dobra em R , de maneira análoga, denotamos $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(Z)$, $i \in \{1, 2\}$. Podemos decompor $\partial R = A_1 \cup A_2$, sendo cada A_i uma variedade com bordo de forma que $\partial A_i = \{p_1, p_2\}$. Relembre que Z_0^d é transversal a A_i (só faz sentido falar de transversalidade em pontos que não são os extremos de A_i). Segue que Z_0^d satisfaz as condições do Teorema 5.1.2, exceto pelos pontos p_i . Dessa forma, precisamos entender a dinâmica pontos de p_i . É fácil ver que conseguimos uma vizinhança V_i de p_i em Σ , difeomorfo a um disco, de forma que é satisfeito apenas um dos seguintes casos:

- I - (i) Z_0^d é transversal a $\partial V_i \cap R$; (ii) existe uma única órbita Γ de Z_0^d partindo de p_i e atingindo $\partial V_i \cap R$; e (iii) cada órbita passando através de outro ponto de $V_i \cap R$ parte de um arco A_i e atinge $\partial V_i \cap R$ em tempo finito.
- II - (i) Z_0^d é transversal a $\partial V_i \cap R$, sendo que x_0 tem contato quadrático com $\partial V \cap R$; (ii) cada órbita passando por um ponto $V \cap R$ parte de $\partial V \cap R) \cup (A_1 \cap V) \cup (A_2 \cup V)$ e atinge p_i em tempo infinito.
- III - (i) Z_0^d é transversal a $\partial V_i \cap R$, exceto em um ponto $x_0 \in \partial V_i \cap \text{Int}(R)$; e (ii) Cada órbita de $V_i \cap R$ ou parte de A_1 e atinge A_2 ou parte de ∂V_i e atinge ∂V .
- IV - (i) Z_0^d é transversal a $\partial V_i \cap R$; (ii) existe uma Σ -separatriz (do tipo nó) Γ_0 de p_i que atinge $\partial V_i \cap R$ em x_0 ; e (iii) a órbita passando através de outro ponto de $V_i \cap R \setminus \Gamma_0$ ou parte de A_{i_1} e atinge ∂V_i ou parte p_i e atinge $A_{i_2} \text{cap} \partial V$, $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$.
- V - (i) Z_0^d é transversal a $\partial V_i \cap R$, exceto em um ponto $x_0 \in \partial V_i \cap \text{Int}(R)$, que possui um contato quadrático com $\partial V_i \cap \text{Int}(R)$; (ii) existem duas separatrizes (do tipo sela) em p_i que atingem ∂V_i em x_1 e x_2 , respectivamente, e x_0 está entre x_1 e x_2 ; (iii) cada órbita que passa através de um ponto $V_i \cap R$ ou parte de ∂V_i e atinge A_{i_1} , ou parte de ∂V_i e atinge ∂V_i , ou parte de A_{i_2} e atinge ∂V_i , $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$.

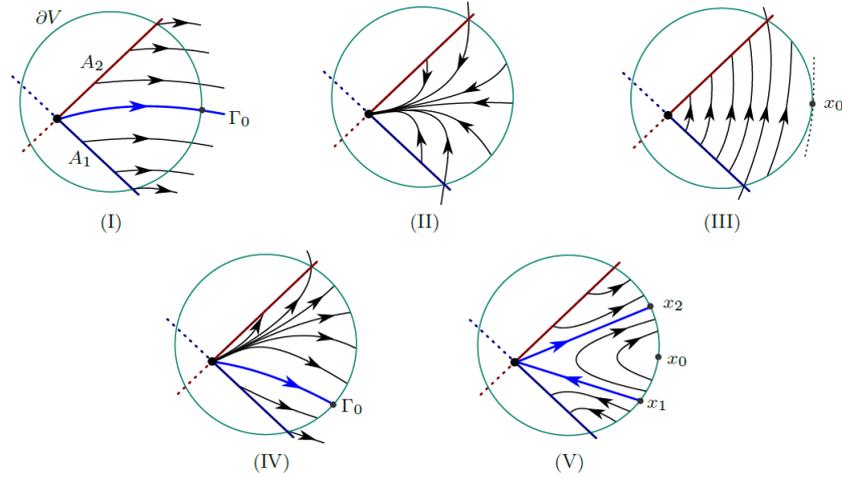


Figura 5.1: Representação dos casos (I)-(V), retirada de [6].

Perceba que todas as dinâmicas acima podem ocorrer também em tempo negativo. É imediato ver que se Z está suficientemente próximo de Z_0 em \tilde{p}_i , existem vizinhanças \tilde{V}_i de forma que Z_N^d também satisfaz uma das condições de (I-V) em \tilde{V}_i . Note ainda que tomando as vizinhanças V_i e \tilde{V}_i suficientemente pequenas a variedade com quina $B := R \setminus (\text{Int}(V_1) \cup \text{Int}(V_2))$ é difeomorfa a $\tilde{B} := \tilde{V} \setminus (\text{Int}(\tilde{V}_1) \cup \text{Int}(\tilde{V}_2))$. Seja $\Psi : B \rightarrow \tilde{B}$ tal difeomorfismo. Uma vez que $Z_0^d|_B$ satisfaz as condições do Teorema 5.1.2, se Z está suficientemente próximo de Z_0 existe um homeomorfismo $h : B \rightarrow B$ que é uma equivalência topológica entre $Z_0^d|_B$ e $\Psi_* Z_N^d$. Portanto, $\tilde{h} = \Psi \circ h$ é uma equivalência topológica entre $Z_0^d|_B$ e $Z_0^d|_{\tilde{B}}$, e é claro que $\tilde{h}(\partial V_i \cap R) = \partial \tilde{V}_i \cap \tilde{R}$. Mais ainda, das técnicas padrões da teoria é claro que existem homeomorfismos

$$f_i : V_i \cap R \rightarrow \tilde{V}_i \cap \tilde{R},$$

tais que $f_i|_{\tilde{R}}(x) = \tilde{h}(x)$ são equivalências topológicas entre $Z_0^d|_{R \cap V}$ e $Z_N^d|_{\tilde{R} \cap \tilde{V}}$. Sendo assim, definimos

$$\theta : R \rightarrow \tilde{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \tilde{h}(x) & , \text{ se } x \in B \\ f_i(x) & , \text{ se } x \in V_i \cap R. \end{cases}$$

Em R , Z_0^d e $\pm Z_0^d$ são topologicamente equivalentes, assim como Z^d e $\pm Z_0^d$ são equivalentes em \tilde{R} . O homeomorfismo θ é uma equivalência entre os campos $Z_0^d|_R$ e $Z^d|_{\tilde{R}}$. Definindo $h_Z^i := \theta$, a demonstração da afirmação é completada. \square

Usando os homeomorfismos h_Z^i , podemos então o homeomorfismo $h : \overline{\Sigma^d(Z_0)} \rightarrow \overline{\Sigma^d(Z)}$ por $h(x) = h_Z^i(x)$, $x \in R_i$. Por fim, tomando qualquer extensão de h em Σ , mostramos que Z_0 é deslize estruturalmente estável em $\Omega^r(M, \Sigma)$.

A recíproca do teorema é óbvia, pois no caso o campo Z não apresente uma das condições listadas na definição do conjunto Ω_{SLR}^r , é claro que é possível encontrar um campo suficientemente próximo de Z com o qual não existe equivalência de deslize. \square

N.B. 5.1.3. *Utilizando os mesmas técnicas de 5.1.1 e 5.1.2, pode-se mostrar que $\Omega_{SLR}^r(M, \Sigma)$ é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$.*

5.2 Estabilidade Estrutural Σ -Semilocal

O propósito dessa seção é a caracterização da Σ -estabilidade estrutural semilocal no conjunto Ξ_0 . Para isso, precisaremos primeiramente de algumas definições.

Considere as seguintes propriedades:

$\Xi(P)$: Se $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra invisível-visível de $Z \in \Xi_0$, então o germe de involução ϕ_X em p associado a Z (referente ao Lema 4.2.4.6) satisfaz;

- 1) $\phi_X(S_Y) \pitchfork S_Y$ em p ;
- 2) F_Z^N e $\varphi_{X_*} F_Z^N$ são transversais a cada ponto de $\Sigma^s \cap \phi_X(\Sigma^u)$; e
- 3) $\phi_X(S_Y) \pitchfork F_Z^N$ em p .

$\Xi(E)$: Se $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra elíptico, o mapa de primeiro retorno ϕ_Z associado a Z possui um ponto fixo do tipo sela com ambas as variedades invariantes $W_{loc}^{u,s}$ estão contidas em Σ^c .

Definição 5.2.1. Consideramos o conjunto $\Omega_\Sigma^r \subset \Xi_0$ como sendo o conjunto dos campos $Z \in \Xi_0$ tais que

$$S) Z \in \Omega_{SLR}^r;$$

F) Se $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra de Z , então $\Xi(P)$ ou $\Xi(E)$ são satisfeitos em P .

O objetivo dessa seção é a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 5.2.1 ([6]). *O campo $Z \in \Xi_0$ é Σ -semilocalmente estruturalmente estável se, e somente se, $Z \in \Omega_\Sigma^r$. Mais ainda Ω_Σ^r não é residual em Ξ_0 e conseqüentemente não é aberto e denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$.*

Antes de seguir com a demonstração de tal teorema iremos fazer algumas observações pertinentes. Começaremos avaliando a existência de variedades invariantes com respeito ao conjunto de tangência.

Definição 5.2.2. Seja N_p o vetor normal a Σ em p , de modo que $N_p \in T_p M$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\Sigma_\lambda = \{p + \lambda N_p; p \in \Sigma\}$$

é chamado de λ -laminação de Σ .

N.B. 5.2.1. *É fácil ver que $\cup_{(-\lambda, \lambda)} \Sigma_\lambda \cap M$ é um aberto de M .*

Iremos estudar propriedades básicas em torno de uma singularidade tangencial genérica, *i.e.*, um ponto ou de dobra-regular, ou de cúspide regular, ou de dobra-dobra. Esse entendimento em torno desse tipo de singularidade nos possibilitará o entendimento da estabilidade estrutural Σ -semilocal.

Começaremos considerando um campo $Z = (X, Y) \in \Omega_\Sigma^r$. Perceba que para cada $p \in \Sigma$ então p é ou um ponto regular-regular ou um ponto dobra-regular ou cúspide-regular ou dobra-dobra, uma vez que $Z \in \Xi_0$.

Se p é um ponto dobra-regular, lembre da demonstração do Teorema 4.2.2.1 que existe um difeomorfismo

$$\Psi : V_p \rightarrow R_p := [-l(p), l(p)] \times [-H(p), H(p)]^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

de forma que $H(p), l(p) > 0$ e a órbita de X que passa por p é levada na órbita de $\Psi_*X(x, y, z) = (0, 1, \delta y)$ passando por $\Psi(p) = 0$, sendo $\delta = \text{sgn}(X^2 f(p))$. Então φ_{Ψ_*X} de Ψ_*X é dado por

$$\varphi_{\Psi_*X}(t, (x, y, z)) = \left(x, t + y, \sigma \left(\frac{(t + y_0)^2}{2} + z - \frac{y^2}{2} \right) \right).$$

Perceba ainda que $l(p)$ é um número real que pode ser tomado pequeno o bastante para que $Xf(q) \neq 0$, qualquer $q \in V_p$. No caso $\delta > 0$, é claro que Ψ_*X é transversal a cada lado de $R_p \cap M^+$, com exceção na curva de pontos dobra-regular $L = \{(x, y, z); -l(p) \leq x \leq l(p), y = z = 0\}$.

Consideramos os pontos $x^\pm = (x, \pm\sqrt{2H(p)}, H(p))$. Quando $t = \pm\sqrt{2H(p)}$ (respectivamente), temos que $\varphi_{\Psi_*X}(t, (x, 0, 0)) = H(p)$. Podemos escolher $H(p)$ suficientemente pequeno de forma que $x^\pm \in R_p$ para todo $x \in L$. O teorema 4.2.2.1 nos garante que as órbitas de Y são levadas em órbitas de $(0, 0, 1)$ respeitando a orientação. Consideramos então a variedade invariante 2-dimensional de Z com respeito a p ,

$$W_p = \Psi^{-1}(W_p^+ \cup W_p^-),$$

com

$$W_p^- = \{(x, 0, t); |x| \leq l(p), -H(p) \leq x \leq 0\},$$

e

$$W_p^+ = \left\{ \left(x, t, \frac{t^2}{2} \right); |x| \leq l(p), |t| \leq \sqrt{2H(p)} \right\}.$$

N.B. 5.2.2. *É importante notar que o conjunto W_p não é uma variedade de fato, porém $W_p \setminus L$ é composto por 2 variedades suaves disjuntas.*

Agora, se $\delta < 0$, podemos definir os mesmos objetos, considerando os conjuntos

$$W_p^- = \{(x, 0, t); |x| \leq l(p), -H(p) \leq t \leq 0\}$$

e

$$W_p^+ = \left\{ \left(x, t, -\frac{t^2}{2} + H(p) \right); |x| \leq l(p), |t| \leq 2\sqrt{2H(p)} \right\}.$$

Sendo assim, o conjunto

$$W_p = \Psi^{-1}(W_p^- \cup W_p^+)$$

consiste da união de 2 variedades conexas.

Agora, se p é um ponto cúspide-regular, a demonstração do Teorema 4.2.3.1 garante que existe uma vizinhança V_p em torno de p de forma que é possível a criação de uma carta

$$\Psi : V_p \rightarrow R(p)$$

que leva cada órbita de $q \in V_p$ em uma órbita de $\Psi_*X(x, y, z) = (1, 0, \delta(x^2 - y))$, passando por $\Psi(q)$ e preservando a orientação, sendo $\delta = \text{sgn}(X_0^3 f(p))$.

Considere $\delta = 1$ (o caso em que $\delta = -1$ é análogo). Em tal situação, o fluxo φ_{Ψ_*X} de Ψ_*X é dado por

$$\varphi_{\Psi_*X}(t, (x, y, z)) = \left(t + x, y, \frac{(t+x)^3}{3} + yt + z - \frac{x^3}{3} \right).$$

Ψ_*X é transversal a cada lado de $R_p \cap M^+$, exceto na curva $L = \{(x, y, z); |x| < \sqrt{l(p)}, y = -x^2, z = 0\}$. Mais ainda,

$$\text{sgn} \left((\Psi_*X)^2 f(x, y, z) \right) = \text{sgn}(x),$$

para cada $(x, y, z) \in L$. Além disso, $(0, 0, 0)$ é um ponto de cúspide de Ψ_*X tal que $\text{sgn}(\Psi_*X)(0, 0, 0) = 1$.

Consideremos o ponto de dobra regular $p_x = (x, -x^2, 0)$ ($x > 0$). Segue que a órbita que passa por p_x é definida por

$$\gamma_x(t) = \left(t + x, -x^2, \frac{(t+x)^3}{3} - x^2t - \frac{x^3}{3} \right).$$

Em particular, se $h_0 = \frac{3}{4}H(p) > 0$, então $\gamma_h(H(p)) = (-h_0, -h_0^2, H(p))$, sendo tal ponto um ponto de dobra-regular.

Note aqui que a curva γ_{h_0} é tangente aos planos $z = 0$ e $z = \frac{4}{3}h^3 =: \delta_h$ e está contida no plano $y = -h^2$. Mais ainda, γ_h intercepta $z = 0$ em $(h, -h^2, 0)$ e em $P_h = (-2h, -h^2, 0)$. Essa órbita também atinge $z = \delta_h$ em $Q_h = (-h, -h^2, \delta_h)$ e no ponto $(2h, -h^2, \delta_h)$. Mais ainda, se $h \rightarrow 0$, então $P_h, Q_h \rightarrow 0$ e $\delta_h \rightarrow 0$. Portanto, podemos considerar o conjunto

$$W_p(0)^+ = \left\{ \gamma_x(t); 0 \leq x \leq \sqrt{l(p)}, t \in I_x = [T_-(x), T_+(x)] \right\},$$

onde I_x é o intervalo maximal tal que $\gamma_x(I_x) \subset R_p$.

Agora, se fizermos as mesmas contas acima, analisando o plano $z = 0$, analisássemos o plano $z = H(p)$ ao invés do plano $z = 0$. Definimos de maneira análoga a variedade invariante 2-dimensional

$$W_p^+(H(p)) = \left\{ \varphi_{\Psi_*X}(t, (x, -x^2, H(p))); -\sqrt{-l(p)} \leq x < 0, t \in I_x = [T_-(x), T_+(x)] \right\},$$

onde I_x é o intervalo maximal tal que $\varphi_{\Psi_*X}(I_x, (x, -x^2, H(p))) \subset R_p$.

Perceba então que $W_p^+(0)$ e $W_p^+(H(p))$ se interceptam em γ_{h_0} . Seja $W_p^+ = W_p^+ \cup W_p^+(H(p))$ e considere $S = (W_p \cup S_{\Psi_*X}) \cap \{z = 0\}$, definimos

$$W_p^- = \{(x, y, t); -H(p) \leq t < 0, (x, y, 0) \in S\}.$$

E consideramos $W_{p_0} = \Psi^{-1}(W_p^+ \cup W_p^-)$.

Finalmente, se p é um ponto de dobra-dobra, construímos as variedades invariantes como no caso de dobra-regular. Perceba que como Z pertence a Σ_Σ^r , o ponto p satisfaz as condições de estabilidade estrutural local em p . Então, pelos resultados da subseção 4.2.4, existe um homeomorfismo $h_p : V_p \rightarrow V_p$ que carrega órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .

Mais ainda, todas as trajetórias que não pertencem às variedades invariantes interceptam ∂V_p de maneira transversal e, se considerarmos uma vizinhança V de Σ em M

suficientemente pequena, uma órbita contida em V pode interceptar Σ mais de uma vez somente dentro da vizinhança V_p e em pontos de dobra-dobra elípticos.

Portanto, existem mapas de primeiro retorno apenas localmente em V e como h_p é uma equivalência local entre Z e \tilde{Z} em p , podemos estender tais mapas em uma equivalência semlocal entre Z e \tilde{Z} em Σ . Segue então que os primeiros retornos não são uma obstrução a Σ -estabilidade estrutural semilocal.

Sendo assim, para cada $p \in \Sigma$ somos capazes de podemos escolher V_p de p em M da seguinte forma:

1. se p é regular regular, então cada $q \in \Sigma \cap V_p$ é um ponto regular-regular de Z e X, Y são transversais a ∂V_p ; e
2. se p é uma singularidade tangencial elementar, consideramos V_p a vizinhanças construídas acima.

Por compactidade, existe uma subcobertura finita $\{V_{p_i}\}_{i=1}^n$ de Σ . Dessa maneira, existe um atlas finito

$$\{(\varphi_i, V_{p_i})\}_{i=1}^n, \quad (5.2.1)$$

de forma que V_{p_i} satisfaz 1 ou 2.

Definimos

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_{p_i},$$

segue que existe $l > 0$ com

$$\Lambda := \bigcup_{\lambda \in (-l, l)} \Sigma_\lambda \subset V.$$

Perceba, que para cada $p \in S_Z$ as laminações $\Sigma_{\pm l} \cap V_p$ correspondem a planos $z = \pm a$ na vizinhança de R , para algum $a > 0$. Perceba também que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $H(p) = a$.

Uma vez que Λ é construída pelas laminações de Σ em direção ao vetor normal de Σ , segue que o mesmo tipo de tangência de S_Z persiste em $\partial \Lambda$.

É importante notar que as variedades invariantes de uma singularidade tangencial elementar p só depende do tipo de tangência de $\Psi_* Z$ em $z = 0$, $z = H(p)$ e $z = -H(p)$. Portanto, só existe uma dependência intrínseca nos pontos de tangência de Z com Σ e com Σ_{\pm} .

Sendo assim só existe precisamos apenas provar que todas as variedades invariantes locais são originárias de uma variedade invariante global de S_Z .

Para clarificar ideias, iremos analisar o caso em que as variedades invariantes originais de uma variedade global no caso em que $S_Z = S_X$ e S_X é um conjunto conexo composto por pontos dobra-regulares e apenas 2 pontos cúspide-regulares.

Sejam p, q os pontos cúspide-regulares de Z . O conjunto S_X é composto por dois arcos A_1 e A_2 com extremos p, q , tais que os pontos dobra-regulares em $A_1 \setminus \{p, q\}$ são visíveis e os pontos $A_2 \setminus \{p, q\}$ são invisíveis.

Uma vez que A_1 é compacto e $A_1 \subset \Sigma$, existe $\{V_i\}_{i=1}^k \subset \{V_{p_i}\}_{i=1}^n$ de forma que $A_1 \subset \cup V_i$. Podemos assumir que $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Pelos comentários anteriores, cada V_i possui uma variedade invariante dada pela imagem de $\varphi_X(t; p)$, com $T_-^i(p) \leq t \leq T_+^i(p)$, sendo $T_-^i(p) < 0 < T_+^i(p)$ e $p \in A_1 \cap V_i$. Tome $q \in A_1 \cap f(V_i \cap V_j)$ e restrinja os valores de t ao intervalo com extremos

$$T_+(q) = \min\{T_+^{i,j}(q)\} \text{ e } T_-(q) = \min\{T_-^{i,j}(q)\}.$$

É suficiente então, reduzir as alturas das vizinhanças R_i para concatenar as variedades, e repetindo o processo, podemos estender a variedade invariante para todo o arco A_1 obtendo W_1^+ .

Note agora que as vizinhanças V_1 e V_n possuem os pontos de cúspide-regular de Z , mais ainda, as variedades invariantes de V_1 e V_n concatenam com a variedade invariante do conjunto $V_2 \cup \dots \cup V_{n-1}$, que possui apenas pontos de dobra-regulares visíveis.

Repetindo a construção, encontramos uma variedade invariante global para o arco A_2 , criando assim W_2^+ . Perceba então, que W_1^+ e W_2^- se concatenam de maneira natural, uma vez que V_1 e V_n pertencem à cobertura de ambos os arcos A_1, A_2 .

O caso geral se demonstra de maneira análoga ao caso anterior.

Demonstração do Teorema 5.2.1. Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega_\Sigma^r$ e U_0 um Σ -bloco de Z . Mostraremos que Z é Σ -semilocalmente estruturalmente estável. Se Z não possui Σ -blocos, então o resultado é consequência imediata do Teorema 5.1.1.

Caso $U_0 = \Sigma$, a condição S da Definição 5.2.1 implica por meio do Teorema 5.1.3 a existência de uma vizinhança \mathcal{U} de Z em Ξ_0 , tal que para todo campo $\tilde{Z} \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h_s : \Sigma \rightarrow \Sigma$ que leva órbitas de deslize do campo Z em órbitas de deslize do campo \tilde{Z} . Utilizamos a mesma ideia da demonstração do Teorema 5.1.1 para criar um homeomorfismo $h : V \rightarrow V$, onde V é uma vizinhança aberta de Σ , $h|_\Sigma = h_s$ e h leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} , preservando a orientação. Mostrando estabilidade estrutural Σ -semilocal de Z .

Finalmente, no caso em que $\emptyset \neq U_0 \subsetneq \Sigma$, o que significa que $S_Z \neq \emptyset$. Portanto, ∂U_0 é uma união de círculos de S_X e S_Y que se interseccionam transversalmente nos pontos de dobra-dobra de Z . Pelos Lemas 3.1, 3.2 e 3.3, existem uma vizinhança \mathcal{V} de Z em Ξ_0 e uma vizinhança compacta V de U_0 em Σ , tais que $\partial V \subset \Sigma^c(Z)$ e, para cada $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$, existe um único Σ -bloco U em V com as mesmas características de U_0 , isto é, $Z \in \mathcal{V}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. U_0 e U possuem o mesmo número de pontos cúspide-regulares e dobra-dobras;
2. existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $p \in \partial U$ é um ponto cúspide-regular ou um ponto de dobra-dobra, então existe um único ponto $p_0 \in \partial U_0$ do mesmo tipo que p , tal que $|p - p_0| < \varepsilon$; e
3. se p_0^1 e p_0^2 são pontos de ∂U_0 conectados por uma curva Γ_0 de pontos visíveis ou invisíveis dobra-regular contidos em ∂U_0 , então existem pontos p^1 e p^2 de ∂U do mesmo tipo de p_0^1 e p_0^2 e uma única curva $\Gamma \subset \partial U$ de pontos de dobra-regulares do mesmo tipo que Γ_0 de forma que $d(\Gamma, \Gamma_0) < \varepsilon$.

Note que tal análise implica, em particular, que os círculos de U_0 e U possuem a mesma configuração para cada $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$. Considere então $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$. Construiremos uma equivalência Σ -semilocal entre Z e \tilde{Z} em U .

Primeiramente definimos $h : U_0 \rightarrow U$, usando o Teorema 5.1.3. Consideremos a vizinhança Λ descrita na parte antes do início dessa demonstração. Note que se $p_0 \in \partial U_0$ é um ponto de dobra-dobra, então podemos estender h para uma vizinhança $W_p = V_p \cap \Lambda$, como feito durante a demonstração dos teoremas da seção 4.2.4.

Uma vez que h leva singularidades tangenciais de Z em singularidades tangenciais de \tilde{Z} , é claro que h leva ∂U_0 em ∂U . Então, podemos usar os fluxos de Z e \tilde{Z} para mapear a única variedade invariante de Z na única variedade invariante de \tilde{Z} .

Relembre que, fora da variedade invariante, os fluxos de Z e \tilde{Z} são transversais a $\partial\Lambda$. Considere então uma extensão qualquer de h em uma pequena vizinhança compacta W de $U_0 \cup U$ em Σ .

Seja $V = \{p + \lambda N_p; p \in W, \lambda \in [-l, l]\}$. Podemos facilmente estender h em V através do fluxos de Z e \tilde{Z} . De fato, o comportamento de ambos os campos suaves por é trivial fora da variedade invariante global, de forma que podemos usar os fluxos de tais campos e o mesmo procedimento realizado durante os capítulos 3 e 4 para estender o homeomorfismo h para o aberto V . Segue da construção que h mapeia órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} , preservando a orientação.

Segue portanto do Teorema 5.1.2 que Z é Σ -semilocalmente estruturalmente estável.

Tomemos agora um campo $Z \in \Xi_0 \setminus \Omega_\Sigma^r$. Então Z não satisfaz a propriedade S) ou a propriedade P) de Ω_Σ^r . Caso S) não seja satisfeita, o Teorema 5.1.3 nos garante que não existe estabilidade estrutural de deslize e conseqüentemente não pode existir estabilidade estrutural Σ -semilocal de tal campo. Por outro lado se P) não é satisfeita então existe um ponto p de dobra-dobra que não satisfaz $\Xi(P)$ ou $\Xi(E)$. Em ambos os casos, os resultados da seção 4.2.4 garantem que não pode existir nem mesmo estabilidade estrutural local em p , provando assim o resultado.

Por fim, vemos que Ω_Σ^r não é residual em $\Omega^r(M, \Sigma)$ em decorrência do Teorema 4.2.4.7. Pois $\Sigma_\Sigma^r \subset \Sigma_0$ e por sua vez Σ_0 não é denso em $\Omega^r(M, \Sigma)$. \square

Caracterizamos assim a estabilidade estrutural Σ -semilocal em $\Xi_0 \subset \Omega^r(M, \Sigma)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Robert A Adams and John JF Fournier, *Sobolev spaces*, vol. 140, Elsevier, 2003.
- [2] Aleksandr Andronov and Lev Pontryagin. 1937. *Systèmes Grossiers*. Doklady Akademi Nauk SSSR, (5), pp. 247–250.
- [3] Martin Golubitsky, and Victor Guillemin, *Stable mappings and their singularities*. Vol. 14. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Welington de Melo, *Topologia das variedades*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (2014).
- [5] A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 18, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988, Translated from the Russian. MR 1028776
- [6] Otávio ML Gomide and Marco A Teixeira, *On Structural Stability of 3d Filippov Systems: A Semi-Local Approach*, arXiv preprint arXiv:1708.05989 (2017).
- [7] Otávio ML Gomide and Marco A Teixeira, *On structural stability of 3d filippov systems*, Mathematische Zeitschrift (2019), 1–31.
- [8] Marcel Guardia, TM Seara, and Marco Antonio Teixeira, *Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems*, Journal of Differential Equations **250** (2011), no. 4, 1967–2023.
- [9] Philip Hartman, *On the local linearization of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 568–573. MR 152718
- [10] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [11] Niels Jacob, *Lars Hörmander: “The Analysis of Linear Partial Differential Operators I”*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **116** (2014), no. 3, 171–181.
- [12] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54, Cambridge university press, 1997.
- [13] John M Lee, *Smooth manifolds*, Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2013, pp. 1–31.
- [14] Elon Lage Lima, *Curso de análise*, vol. 2, 1976.

- [15] Elon Lages Lima, *Variedades diferenciáveis*, no. 15, Instituto Matemática Puro e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.
- [16] Solange Mancini, Miriam Manoel, and Marco Antonio Teixeira, *Simultaneous linearization of a class of pairs of involutions with normally hyperbolic composition*, Bull. Sci. Math. **137** (2013), no. 4, 418–433. MR 3054268
- [17] Jorge Mujica, *Notas de topologia geral*, IMECC-UNICAMP, Campinas (2005).
- [18] J Jr Palis and Welington De Melo, *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] Marilia C. Peixoto and M. M. Peixoto, *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, An. Acad. Brasil. Ci. **31** (1959), 135–160. MR 107067
- [20] Mauricio Matos Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology **1** (1962), no. 2, 101–120.
- [21] Mauricio Matos Peixoto, *On Structural Stability*, Annals of Mathematics, pp. 199–222.
- [22] Lawrence Perko, *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7, Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] Jorge Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [24] Jorge Sotomayor .; Marco Antonio Teixeira *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*. Dynamical systems, Valparaiso 1986, 169–195, Lecture Notes in Math., 1331, Springer, Berlin, 1988.
- [25] Marco Antonio Teixeira, *Generic bifurcation in manifolds with boundary*, J. Differential Equations **25** (1977), no. 1, 65–89. MR 442994
- [26] S. M. Višik, *Vector fields in the neighborhood of the boundary of a manifold*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. **27** (1972), no. 1, 21–28. MR 0298691