

**UNICAMP**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

JOYCE APARECIDA CASIMIRO

**Ciclos limite para sistemas dinâmicos suaves  
por partes em dimensão  $n > 2$  e em variedades  
compactas**

Campinas

2019

Joyce Aparecida Casimiro

**Ciclos limite para sistemas dinâmicos suaves por partes  
em dimensão  $n > 2$  e em variedades compactas**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Ricardo Miranda Martins

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Joyce Aparecida Casimiro e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins.

Campinas

2019

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C269c Casimiro, Joyce Aparecida, 1995-  
Ciclos limite para sistemas dinâmicos suaves por partes em dimensão  $n > 2$   
e em variedades compactas / Joyce Aparecida Casimiro. – Campinas, SP :  
[s.n.], 2019.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ciclo limite. 2. Órbitas periódicas. 3. Método averaging (Equações  
diferenciais). 4. Teoria dos sistemas dinâmicos. 5. Sistemas dinâmicos  
diferenciais. 6. Filippov, Sistemas de. I. Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Limit cycles for piecewise smooth dynamical systems in dimension  $n > 2$  and in compact manifolds

**Palavras-chave em inglês:**

Limit cycles

Periodic orbits

Averaging method (Differential equations)

Dynamical systems theory

Differentiable dynamical systems

Filippov systems

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestra em Matemática

**Banca examinadora:**

Ricardo Miranda Martins [Orientador]

Gabriel Ponce

Luis Fernando de Osório Mello

**Data de defesa:** 28-02-2019

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-3870-978X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/2732520266360169>

**Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2019 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS**

**Prof(a). Dr(a). GABRIEL PONCE**

**Prof(a). Dr(a). LUIS FERNANDO DE OSÓRIO MELLO**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado aos meus pais.*

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, a fé sempre me deu forças para continuar.

Aos meus pais, Adriana e Helder, que me incentivam a realizar meus sonhos, me apoiam e se sacrificam para tornar minha jornada mais leve e agradável. Que confiam e acreditam em mim e fazem com que eu me sinta boa o suficiente para minhas escolhas, mesmo que eu não seja. Por me ouvirem e darem ótimos conselhos e por estarem comigo nos piores e melhores momentos da minha vida, os primeiros por tornarem a carga mais leve e o segundo por somar minha alegria com a de vocês, não há nada mais gratificante que sentir o quanto vocês ficam orgulhosos das minhas conquistas, e todas elas são suas.

Aos meus avós por serem tão amáveis comigo e que no meio da correria me proporcionam um momento de paz ao telefone com os convites para comer pão de queijo, e que sempre se preocupam com como estou indo na "escola", essa tal "escola" que está demorando muito para acabar para que eu volte a morar perto deles. A minha família que fornece todo apoio quando necessário, eu amo todos vocês.

Ao meu namorado Francisco Bruno, por estar sempre presente, por apoiar e incentivar meus planos, inclusive os que parecem loucura. Por ser tão bem humorado e alegrar meus dias. Você é a melhor dupla de estudos e é um prazer poder crescer com você, ainda temos que crescer bastante, tampinha.

Aos meus amigos, por tornarem minha vida mais divertida, em especial para os que parecem estar sempre ao meu lado apesar da distância. E a todos aqueles que o mestrado me deu, vocês são minha família em Campinas.

Ao meu orientador Ricardo Miranda, por compartilhar e incentivar nós, alunos, a agarrar as boas oportunidades, graças a você atravessei o oceano pela primeira vez e realizei dois sonhos, viajar e participar de um evento internacional. Duas vezes. Por escutar as lamentações e ser tão paciente, e obviamente por tornar esse trabalho real.

Ao professor Luis Fernando, não só pelas aulas maravilhosas, a excelente didática e por ser preocupado com seus alunos e acessível para tirar dúvidas, mas também por todo apoio durante as iniciações científicas e o trabalho final de graduação, aprendi e cresci muito com você e foi um privilégio graduar na UNIFEI.

Ao professor Artur César Fassoni, que me orientou durante a graduação, me proporcionando um novo ponto de vista matemático, e me mostrou um pouquinho do que é a biomatemática. Também por ter me incentivado fortemente a estudar na UNICAMP.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), por

financiar este projeto, cujo número do processo é 2017/04689-4.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“A menos que modifiquemos a nossa  
maneira de pensar, não seremos capazes de  
resolver os problemas causados pela forma  
como nos acostumamos a ver o mundo.”*

*Albert Einstein.*

# Resumo

O estudo de conjuntos minimais ajuda na compreensão do comportamento qualitativo global dos sistemas dinâmicos. Sendo assim, determinar a existência ou não existência desses conjuntos é um assunto importante e bastante estudado na área. Nesta dissertação nós investigamos quando um campo vetorial que possui uma subvariedade compacta preenchida de órbitas periódicas admite ciclos limite após uma pequena perturbação. Além da existência obtemos uma cota superior para a quantidade dos ciclos limite e para alguns casos, foi mostrado que esta cota é atingida. A principal ferramenta empregada na obtenção destes resultados foi a Teoria da Média. Foram considerados dois tipos de sistemas: os suaves e os descontínuos, sendo que para estes últimos utilizamos a convenção de Filippov.

**Palavras-chave:** Ciclo limite. Órbitas periódicas. Teoria da Média. Sistemas dinâmicos. Sistemas de Filippov.

# Abstract

The study of minimal sets helps to comprehend the global qualitative behaviour of dynamical systems. In this way, to determine the existence or not of such sets is an important and widely studied topic in this area. In this dissertation we investigate whether a vector field possessing a compact manifold filled by periodic orbits admits limit cycles after a small perturbation. Besides the existence of limit cycles, we obtain an upper bound for the number of limit cycles and, in some cases, we proved that this upper bound is attained. The main tool employed to obtain these results was the Averaging Theory. Two types of systems were considered: the smooth and the non-smooth ones, where for the latter type of systems, we used Filipov's Convention.

**Keywords:** Limit cycles. Periodic Orbits. Averaging Theory. Dynamical Systems. Filippov Systems.

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>15</b>
1.1	Resultados Clássicos . . . . .	15
1.2	Redução de Lyapunov-Schmidt para funções de dimensão finita . . . . .	16
1.3	Sistemas de Filippov . . . . .	18
1.4	Regularização de Sotomayor-Teixeira . . . . .	21
<b>2</b>	<b>TEORIA DA MÉDIA</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1	Teoria Clássica . . . . .	24
2.2	Outras versões do Teorema da Média . . . . .	29
<b>3</b>	<b>CICLOS LIMITES EM VARIEDADES</b> . . . . .	<b>34</b>
3.1	Ciclos limite em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ e em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . . . . .	34
3.2	Ciclos limite em um toro isócrono bidimensional em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	44
3.3	Ciclos limite em um cilindro isócrono . . . . .	58
3.3.1	Perturbações suaves . . . . .	58
3.3.2	Perturbações não suaves . . . . .	62
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	<b>81</b>
4.1	Trabalhos futuros . . . . .	81
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>82</b>

# Introdução

Em 1900, David Hilbert, matemático alemão, apresentou no II Congresso Internacional de Matemáticos, que ocorreu em Paris, uma lista com vinte e três problemas que seriam importantes para a matemática no século que se iniciava. Apesar dos esforços contínuos da comunidade matemática muitos destes problemas permanecem sem solução, entre eles o *XVI Problema de Hilbert* que, segundo o medalhista filsofo Stephen Smale, é o problema mais desafiador que foi proposto depois da Hipótese de Riemann.

Este problema lida com a questão da existência de ciclos limites para equações diferenciais polinomiais no plano, e está em aberto até mesmo para campos quadráticos. Versões simplificadas do problema proposto surgiram na tentativa de resolvê-lo. Desta forma, ele inspirou um progresso significativo na teoria geométrica das equações diferenciais planares, bem como na teoria de bifurcações, formas normais, folheações e alguns tópicos da geometria algébrica, conforme [3].

## XVI Problema de Hilbert

O *XVI Problema de Hilbert*, em sua versão mais atual e baseado em [9], considera um sistema diferencial da forma,

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

onde  $P, Q$  são polinômios. E propõe de responder a seguintes perguntas:

*Existe  $K \in \mathbb{N}$  que limita o número de ciclos limites do sistema acima, com  $K \leq d^q$ , onde  $d$  é o máximo dos graus dos polinômios  $P$  e  $Q$ , e  $q$  é uma constante universal? E qual a posição desses ciclos limites quando eles existem?*

No início de 1920, conforme [12], Dulac publicou uma prova da finitude da quantidade de ciclos limites, e foi considerado que essa parte do *XVI Problema de Hilbert* estava resolvida até o final de 1970 quando alguns matemáticos, após ler com cuidado sua demonstração não entenderam algumas passagens. Em 1979, Il'iashenko mostrou que havia uma falha na demonstração de Dulac, e logo após publicou um livro de trezentas páginas contendo a demonstração detalhada sobre a finitude dos ciclos limites.

## Estrutura dos tópicos apresentados

Este trabalho foi organizado em três capítulos.

**Capítulo 1:** São apresentadas as definições e resultados clássicos de sistemas dinâmicos que são necessários para o entendimento dos assuntos apresentados nos demais capítulos,

bem como para a demonstração dos Teoremas da Teoria da Média, que é a principal ferramenta para encontrar ciclos limite para os campos estudados.

**Capítulo 2:** Apresentamos a Teoria da Média, que relaciona a existência de ciclos limite para um sistema diferencial com a quantidade de zeros de uma função de dimensão finita. Ela permite aproximar as soluções de um campo vetorial perturbado por soluções de um sistema menos complexo. O Teorema clássico desta teoria foi demonstrado, assim como uma outra versão que foi empregada nos demais capítulos.

**Capítulo 3:** Neste capítulo são enunciados e provados os resultados principais da dissertação. Apresentamos três tipos de problemas para determinar a existência de ciclos limite e a quantidade máxima deles em campos que são obtidos perturbando sistemas que possuem uma subvariedade compacta preenchida por órbitas periódicas, sendo, algumas delas, conjuntos isócronos, ou seja, todas as órbitas possuem o mesmo período. Primeiro foram resolvidos os campos suaves onde a Teoria da Média foi fortemente utilizada. Depois, na última seção, é apresentado um campo descontínuo, onde utilizamos a convenção de Filippov e a regularização de Sotomayor-Teixeira. Os resultados deste capítulo foram inspirados principalmente nos artigos [6], [4] e [2].

Em [6], os autores estudam ciclos limite para sistemas em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$  e outras variedades. Adaptando os resultados deste artigo conseguimos estabelecer cotas para o número de ciclos limite. Por exemplo, provamos que para o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= r - 1 + \varepsilon(a_0 + a_1 r + a_2 \theta + a_3 \varphi), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(b_0 + b_1 r + b(\varphi, \theta)), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon(c_0 + c_1 r + c(\varphi, \theta)), \end{cases}$$

onde  $b, c$  são funções  $C^1$  e  $2\pi$ -periódicas nas duas variáveis, a existência de ciclos limite está relacionada à existência de zeros para o sistema

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (b(t + \theta_0, \phi_0 + t) + b_0 + b_1) dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (c(t + \theta_0, \phi_0 + t) + c_0 + c_1) dt &= 0, \end{aligned}$$

nas variáveis  $\theta_0, \phi_0$ . Apresentamos mais detalhes no Capítulo 3.

Em [4] os autores consideram o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)f(x, y, z) - z) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon P(x, y, z), \\ \dot{y} &= ((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)f(x, y, z) - z) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= z f(x, y, z) + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + \varepsilon R(x, y, z) \end{aligned}$$

definido em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ , onde  $f(x, y, z) = 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - z^2$ ,  $\varepsilon$  é um parâmetro suficientemente pequeno,  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  são polinômios. O toro

bidimensional, definido por,

$$\mathbb{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$$

é uma superfície invariante para o sistema anterior com  $\varepsilon = 0$ .

O principal resultado obtido é o seguinte:

**Teorema A:** Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, se  $d$  é o maior valor entre os graus dos polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$ , e  $\mathcal{F}(\phi)$  não é nula, onde

$$\mathcal{F}(\phi) := \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, 1) \sin \phi}{2 + \cos \theta} d\theta$$

onde  $\phi \in \mathbb{S}^1$  e  $\tilde{P}(\theta, \phi, 1)$ ,  $\tilde{Q}(\theta, \phi, 1)$  são os polinômios  $P$  e  $Q$  após a mudança de coordenadas, então o número máximo de ciclos limite do sistema anterior que bifurca das órbitas periódicas do toro  $\mathbb{T}$  do sistema não perturbado é  $2(d+1)$ . Além disto, esta cota é atingida.

Em [2], os autores consideram sistemas definidos em um cilindro. Observamos que este artigo é uma generalização de [5], onde os autores consideram o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 + y^2 - 1) - y + \varepsilon P(x, y, z) \\ \dot{y} &= y(x^2 + y^2 - 1) + x + \varepsilon Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon R(x, y, z) \end{aligned}$$

e demonstram o seguinte resultado:

**Teorema B:** Para  $\varepsilon$  não nulo e suficientemente pequeno, cada raiz simples do polinômio obtido resolvendo a integral

$$\int_0^{2\pi} (R(\cos \theta, \sin \theta, z_0 \sin \theta) - \cos \theta [\cos \theta \tilde{Q} - \sin \theta \tilde{P}]) d\theta,$$

onde  $\tilde{P} = P(\cos \theta, \sin \theta, z_0 \sin \theta)$  e  $\tilde{Q} = Q(\cos \theta, \sin \theta, z_0 \sin \theta)$  são polinômios, o sistema diferencial anterior tem um ciclo limite bifurcando de uma órbita periódica contida no cilindro  $C$  invariante para o sistema não-perturbado.

Em [2], os autores consideram o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{z} &= h(x, y) \end{aligned}$$

perturbado por funções polinomiais por partes e demonstram que o número de ciclos limite depende, de certa forma, do grau dos polinômios: o número máximo de ciclos limite é no máximo o maior dos graus dos polinômios da perturbação. Apresentamos mais detalhes na Seção 3.3.

# 1 Preliminares

Iremos exibir alguns conceitos e teoremas básicos neste capítulo, que são importantes para o entendimento desta dissertação. Primeiro definiremos objetos matemáticos clássicos da teoria de equação diferenciais e apresentaremos alguns resultados envolvendo-os. Abaixo estão os principais que serão utilizados no capítulo 2.

## 1.1 Resultados Clássicos

**Definição 1.** Uma função  $f : D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $D$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ , é dita **periódica** na variável  $t$  se existe  $L > 0$ ,  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x, t, \varepsilon) = f(x, t + L, \varepsilon)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in D$ ,  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ , e o período de  $f$  é dado por:

$$T = \inf\{L : f(x, t_0, \varepsilon) = f(x, t_0 + L, \varepsilon) \quad \forall x \in D, \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)\}.$$

Neste caso, dizemos que  $f$  é  $T$ -periódica.

Abaixo está enunciado os principais teoremas que serão utilizados e estes foram retirados de [10].

**Teorema 1.** Seja  $f$  uma função contínua num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$ , onde  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ,  $\Lambda$  é um espaço euclidiano, com a derivada de  $f$  com respeito a segunda variável,  $D_2f$  contínua em  $\Omega$ . Então para  $\lambda$  fixo, a solução  $\phi = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$  de  $x' = f(t, x, \lambda)$ ,  $x(t_0) = x_0$  é única e admite derivada parcial  $D_3\phi$  com relação a  $x_0$ . Mais ainda, a aplicação  $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow D_3\phi(t, t_0, x_0, \lambda)$  é contínua no seu domínio  $D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$ , onde  $\omega_{\pm}$  denotam os extremos do intervalo maximal onde a solução está definida e

$$x(t) = D_3\phi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda), \quad \forall 1 \leq k \leq \dim(\mathbb{E})$$

é solução do sistema

$$\begin{cases} x' &= D_2f(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)x, \\ x(t_0) &= e_k. \end{cases}$$

**Corolário 1.** Se além das hipóteses do Teorema 1 supusermos que  $f$  é diferenciável relativamente a  $\lambda$  e que  $D_3f$  é contínua em  $\Omega$ , então  $\phi$  será diferenciável relativamente a  $\lambda$  e  $D_4\phi \cdot e_k = \partial\phi/\partial\lambda^k$  será contínua em  $D$ . Além disto, teremos que

$$x(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda^k}(t, t_0, x_0, \lambda)$$

é solução sistema

$$\begin{cases} x' &= D_2 f(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)x + b(t), \\ x(t_0) &= 0, \end{cases}$$

onde  $b(t) = D_3 f(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \cdot e_k + 2$ .

Considere agora as equações matriciais lineares

$$X' = A(t)X, \quad (1.1)$$

em  $I \times M(n)$ , onde  $M(n)$  é o espaço das matrizes  $X = (x_{ij})_{n \times n}$  com  $n$  linhas e  $n$  colunas, de elementos reais ou complexos, identificado com o espaço  $\mathbb{R}^{n^2}$  ou  $\mathbb{C}^{n^2}$ . A equação (1.1) é chamada de equação linear homogênea.

**Proposição 1.** *Sejam  $\phi(t), \psi(t)$  soluções de (1.1), sendo  $\phi$  a matriz fundamental, então existe uma única matriz  $C_{n \times n}$  tal que  $\forall t \in I$ ,*

$$\psi(t) = \phi(t)C.$$

A matriz  $C$  é não singular se, e somente se,  $\psi(t)$  é a matriz fundamental.

**Teorema 2.** *Se  $\phi(t)$  é matriz fundamental de (1.1), então a solução  $\varphi(t, t_0, x_0)$  de  $x' = A(t)x + b(t)$  tal que  $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$  é dada por*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t) \left[ \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

Em particular,  $\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0$ , no caso homogêneo.

## 1.2 Redução de Lyapunov-Schmidt para funções de dimensão finita

O resultado desta subseção é conhecido na teoria de Lyapunov-Schmidt. No Teorema 3, que por completude será demonstrado, apresentaremos um caso específico da teoria geral, que será necessário na demonstração do Teorema 5.

**Definição 2.** *Uma função  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  é dita de dimensão finita se  $f(\Omega)$  está contida em um subespaço de dimensão finita de  $Y$ .*

No que segue, considere  $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , respectivamente, a projeção de  $\mathbb{R}^n$  nas  $k$  primeiras coordenadas, isto é,  $\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  e a projeção nas  $(n - k)$  últimas coordenadas.

**Teorema 3** (Redução de Lyapunov-Schmidt para funções de dimensão finita). *Sejam  $g : \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  funções  $C^2$ , onde  $\Omega$  é um subconjunto aberto de*

$\mathbb{R}^n$  e  $V$  é um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^k$ . Assumimos que:

i)  $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)) : \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$  e que para cada  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ ,  $g(z_\alpha, 0) = 0$ .

ii) A matriz  $G_\alpha = D_z g(z_\alpha, 0)$  possui no canto superior direito a matriz nula  $k \times (n - k)$  e no canto inferior direito a matriz  $\Delta_\alpha : (n - k) \times (n - k)$ , com  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ .

Consideramos a função  $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$  definida por  $\mathcal{F}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\xi g)(z_\alpha, 0)$ . Se existe  $a \in V$  com  $\mathcal{F}(a) = 0$  e  $\det(d\mathcal{F}(a)/d\alpha) \neq 0$ , então existe  $\alpha_\varepsilon$  tal que  $g(z_{\alpha_\varepsilon}, 0) = 0$  e que  $z_{\alpha_\varepsilon} \rightarrow z_\alpha$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Considere a função:

$$\xi^\perp g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$(\alpha, \beta, \varepsilon) \mapsto \xi^\perp g(\alpha, \beta, \varepsilon)$$

Como pela primeira hipótese do Teorema 3 temos  $g(z_\alpha, 0) = 0$ , então  $\xi^\perp g(z_\alpha, 0) = 0$ . Note que a derivada  $D_z g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é dada por uma matriz  $n \times (n + 1)$ , de modo que

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(\xi^\perp g)(z_\alpha, 0)$$

é uma matriz  $(n - k) \times (n - k)$ . Assim,  $(\partial(\xi^\perp g)/\partial \beta)(z_\alpha, 0) = M_{(n-k) \times (n-k)} = \Delta_\alpha$  que por hipótese tem determinante não nulo, isto é,  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ . O Teorema da Função Implícita implica que, para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno, podemos escrever  $\beta$  em função de  $\alpha$  e  $\varepsilon$ , ou seja, existe uma função  $\beta$  com  $(\alpha, \varepsilon) \rightarrow \beta(\alpha, \varepsilon)$  tal que  $\beta(\alpha, 0) = \beta_0(\alpha)$  e  $\xi^\perp g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon) = 0$ .

Agora consideramos a função

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^k \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (\alpha, \varepsilon) &\mapsto \delta(\alpha, \varepsilon) = \xi g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon) \end{aligned}$$

Temos que  $\delta(\alpha, 0) = \xi g(\alpha, \beta(\alpha, 0), 0) = \xi g(z_\alpha, 0) = \xi(0) = 0$ , e

$$\delta_\varepsilon(\alpha, 0) = \frac{d}{d\beta}(\xi g)(z_\alpha, 0) \cdot \frac{d\beta}{d\varepsilon}(\alpha, 0) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\xi g)(z_\alpha, 0) \quad (1.2)$$

Como  $\xi g : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ , temos que  $D(\xi g) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , e sendo  $\beta$  uma variável em  $\mathbb{R}^{n-k}$ , a derivada de  $(\xi g)$  com respeito a  $\beta$  é uma matriz  $k \times (n - k)$ , que por hipótese é nula quando aplicada em  $(z_\alpha, 0)$ , isto é,

$$\frac{d}{d\beta}(\xi g)(z_\alpha, 0) = [0]_{n \times (n-k)}$$

Logo, substituindo a informação acima na equação (1.2), obtemos que

$$\delta_\varepsilon(\alpha, 0) = \frac{d}{d\beta}(\xi g)(z_\alpha, 0) \frac{d\beta}{d\varepsilon}(\alpha, 0) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\xi g)(z_\alpha, 0) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\xi g)(z_\alpha, 0) = \mathcal{F}(\alpha).$$

Se a derivada de  $\delta$  com respeito a  $\varepsilon$  é  $\mathcal{F}(\alpha)$ , segue que

$$\delta(\alpha, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{F}(\alpha) + \varepsilon^2 r(\alpha, \varepsilon). \quad (1.3)$$

Pelo Teorema da Função Implícita, para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno existe  $\alpha(\varepsilon)$  tal que  $\alpha(0) = a$  e  $\mathcal{F}(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon r(\alpha, \varepsilon) = 0$ , lembre que  $\mathcal{F}(a) = 0$ . Portanto  $\delta(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon(\mathcal{F}(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon r(\alpha, \varepsilon)) = 0$  e além disso, denotando  $z_{\alpha_\varepsilon} = (\alpha(\varepsilon), \beta(\alpha(\varepsilon)), \varepsilon)$ , temos que  $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$ .  $\square$

### 1.3 Sistemas de Filippov

Seja  $V$  uma vizinhança arbitrária de  $0 \in \mathbb{R}^2$ , considere a variedade de codimensão 1 em  $\mathbb{R}^2$ , denotada por  $\Sigma$  e dada por  $\Sigma = f^{-1}(0)$ , onde  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave tal que 0 é valor regular, isto é,  $\nabla f(p) \neq 0$ , para todo  $p \in f^{-1}(0)$ . Chamaremos  $\Sigma$  de região de descontinuidade que está separando a fronteira das regiões  $\Sigma^+ = \{q \in V : f(q) \geq 0\}$  e  $\Sigma^- = \{q \in V : f(q) \leq 0\}$ .

Um *Sistema Planar de Filippov*  $\mathcal{Z} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo vetorial suave por partes definido da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{para } (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & \text{para } (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases}$$

onde  $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \mathcal{C}^k$ , o espaço dos campos  $\mathcal{C}^k$  munido com a topologia produto definidos em  $V \subset \mathbb{R}^2$  com  $r \geq 1$  suficientemente grande para os nossos propósitos. As trajetórias de  $\mathcal{Z}$  são soluções de  $\dot{q} = \mathcal{Z}(q)$  e aceitamos que isto seja multivalorado em pontos de  $\Sigma$ .

A derivada de Lie de  $f$  com respeito ao campo  $X$  é calculada da seguinte forma:

$$Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle \quad \text{e} \quad X^i f(p) = \langle \nabla X^{i-1} f(p), X(p) \rangle, \quad \text{para } i \geq 2,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^2$ . Para estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov  $\mathcal{Z} = (X, Y)$  em  $V$ , iremos definir a trajetória local por um ponto  $p \in V$  de maneira usual dada pelos campos  $X$  e  $Y$  quando  $p \in \Sigma^\pm$ . Porém, se  $p \in \Sigma$ , a fim de estender a definição de trajetória para  $\Sigma$ , dividiremos a região de descontinuidade  $\Sigma$ , como:

- i.  $\Sigma^c \subset \Sigma$  a região de costura se  $(Xf)(Yf) > 0$ , em  $\Sigma^c$ .
- ii.  $\Sigma^s \subset \Sigma$  a região de deslize se  $(Xf) < 0$  e  $(Yf) > 0$ , em  $\Sigma^s$ .
- iii.  $\Sigma^e \subset \Sigma$  a região de escape se  $(Xf) > 0$  e  $(Yf) < 0$ , em  $\Sigma^e$ .

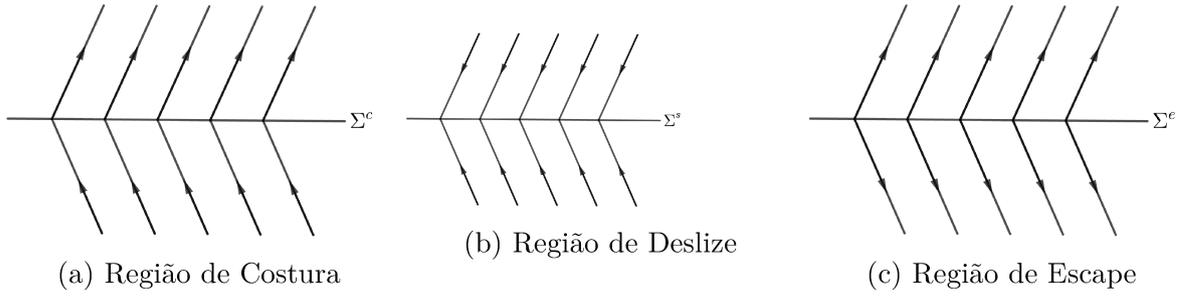


Figura 1 – Exemplos das três regiões.

Estas três regiões são abertos da topologia induzida em  $\Sigma$  e podem ter mais que uma componente conexa. A Figura 1 ilustra exemplos das três regiões.

Pode-se observar que ao definir as regiões acima não estamos incluindo os *pontos de tangência*, ou seja, os pontos  $p \in \Sigma$  para os quais  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$ . Estes pontos estão nas fronteiras das regiões  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ , que serão denotadas por  $\partial\Sigma^c$ ,  $\partial\Sigma^s$  e  $\partial\Sigma^e$ , respectivamente.

Observe que, se  $X(p) = 0$ , então  $Xf(p) = 0$ , logo os pontos críticos de  $X$  em  $\Sigma$  também estão incluídos nos pontos de tangência. Agora, se  $X(p) \neq 0$  e  $Xf(p) = 0$ , temos que a trajetória de  $X$  passando por  $p$  é de fato tangente à  $\Sigma$ .

Podemos distinguir os tipos de tangências entre um campo suave e uma variedade, dependendo do modo como se dá o contato entre a trajetória do campo e da variedade. A seguir, definimos dois tipos de tangências.

**Definição 3.** *Um campo vetorial suave  $X$  possui uma dobra ou tangência quadrática com  $\Sigma = \{(x, y) \in V : f(x, y) = 0\}$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ .*

**Definição 4.** *Um campo vetorial suave  $X$  possui uma cúspide ou tangência cúbica com  $\Sigma = \{(x, y) \in V : f(x, y) = 0\}$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = X^2f(p) = 0$  e  $X^3f(p) \neq 0$ .*

Se  $p \in \Sigma^c$ , os campos vetoriais  $X$  e  $Y$  apontam ambos para  $\Sigma^+$  ou  $\Sigma^-$  simultaneamente e, portanto para definirmos a trajetória passando por  $p$  é suficiente justapor as trajetórias de  $X$  e  $Y$  que passam por  $p$ . Agora se  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ , temos que os campos apontam para direções opostas, sendo assim, não podemos concatenar as trajetórias. Desse modo, a órbita local será dada pela convenção de Filippov. Definimos assim o *campo vetorial deslizante*

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)). \quad (1.4)$$

Observe que  $Z^s$  representa a combinação linear convexa de  $X(p)$  e  $Y(p)$  de modo que  $Z^s(p)$  é tangente à  $\Sigma$ , além disso, sua trajetórias estão contidas em  $\Sigma^s$  ou  $\Sigma^e$ . Sendo assim, a trajetória por  $p$  é dada por (1.4). A Figura 2 mostra um campo vetorial deslizante da forma  $Z^s$ .

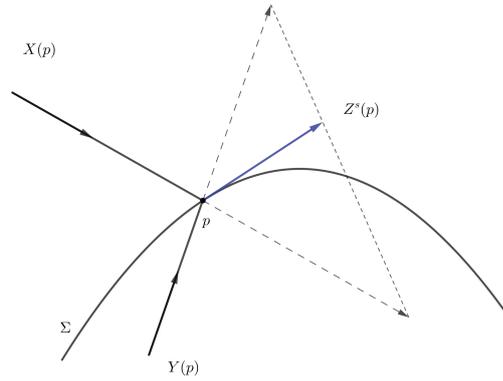


Figura 2 – Campo Deslizante  $Z^s$ .

Agora iremos exibir um exemplo, no qual o campo possui ponto de tangencia, para ilustrar a definição dada anteriormente.

**Exemplo 1.** Seja  $p = (0, 0)$  e  $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ . Considere  $f(x, y) = y$  e

$$Z(x, y) = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Calculando as derivada de Lie, primeira e segunda ordem, de  $f$  com respeito ao campo  $X$ , temos que

$$\begin{aligned} Xf(x, 0) &= \langle X(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, x), (0, 1) \rangle = x, \\ X^2f(x, 0) &= \langle X(x, 0), \nabla Xf(x, 0) \rangle = \langle (1, x), (1, 0) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para o campo  $Y$ , obtemos

$$\begin{aligned} Yf(x, 0) &= \langle Y(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (-1, x), (0, 1) \rangle = x, \\ Y^2f(x, 0) &= \langle Y(x, 0), \nabla Yf(x, 0) \rangle = \langle (-1, x), (1, 0) \rangle = -1. \end{aligned}$$

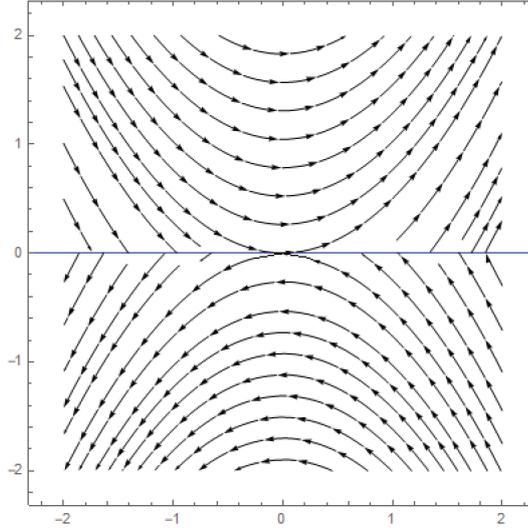


Figura 3 – Retrato de fase do campo (1.5)

Desse modo, obtemos que  $Xf(x,0) \cdot Yf(x,0) = x^2 = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Então, o único ponto de tangência de  $Z_2$  é  $p = (0,0)$  que é um ponto de dobra de  $X$  e  $Y$ . Além disso,  $Xf(x,0) \cdot Yf(x,0) > 0$  se  $x \neq 0$ , logo,  $\Sigma \setminus \{p\} = \Sigma^c$  e  $p \in \partial\Sigma^c$ . A Figura 5 mostra o retrato de fase do campo  $Z$  onde pode ser visualizado o que foi descrito neste parágrafo.

## 1.4 Regularização de Sotomayor-Teixeira

A regularização de Sotomayor-Teixeira é uma ferramenta importante no estudo de campos vetoriais suaves por partes pois após ser feita a regularização do campo, o campo regularizado é suave e a teoria de equações diferenciais ordinárias para campos vetoriais suaves já está bem desenvolvida.

A ideia principal do processo de regularização por Sotomayor e Teixeira, presente em [11] é aproximar um Sistema de Filippov  $Z = (X, Y)$  por uma família a um parâmetro de campos vetoriais suaves  $Z_\varepsilon(x, y)$  de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon(x, y) = Z(x, y).$$

Uma função contínua  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada função de transição se

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \leq -1, \\ 1 & \text{se } t \geq 1, \end{cases}$$

e ainda  $\varphi'(t) > 0$  para todo  $t \in (-1, 1)$ .

**Definição 5.** Uma  $\varphi_\delta$ -regularização de  $Z = (X, Y)$  é a família a um parâmetro de campos vetoriais  $Z_\delta$ , com  $\delta \in (0, 1]$ , dada por

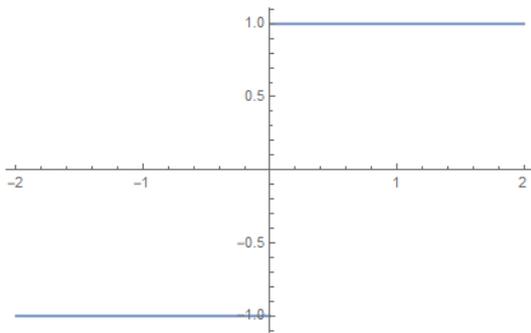
$$Z_\delta(t, \mathbf{x}) = \frac{X(t, \mathbf{x}) + Y(t, \mathbf{x})}{2} + \varphi\left(\frac{f(t, \mathbf{x})}{\delta}\right) \frac{X(t, \mathbf{x}) - Y(t, \mathbf{x})}{2}$$

onde

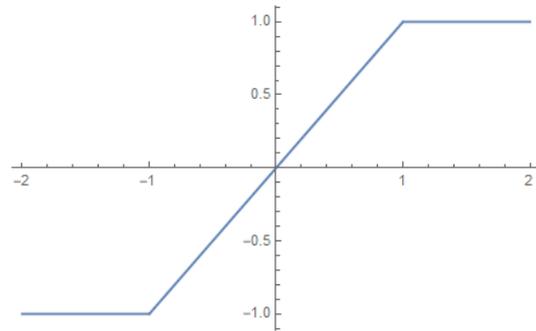
$$\varphi_\delta(t) = \varphi\left(\frac{t}{\delta}\right).$$

Neste trabalho consideraremos na seção 3.3.2 a seguinte função de transição, que está representada na Figura 4,

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t \leq -\delta \\ \frac{t}{\delta}, & \text{se } -\delta < t < \delta \\ 1, & \text{se } t \geq \delta \end{cases}, \quad (1.6)$$



(a) Função descontínua em zero, que será aproximada pela função de transição.



(b) Função de transição com  $\delta > 0$ .

Figura 4 – Função de transição

**Exemplo 2.** Sejam  $U = \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = y$ , então,  $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ . Considere o sistema de Filippov dado no Exemplo 1 pela equação (1.5). O campo regularizado é dado por:

$$\begin{aligned} Z_\delta(t, \mathbf{x}) &= \frac{X(t, \mathbf{x}) + Y(t, \mathbf{x})}{2} + \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) \frac{X(t, \mathbf{x}) - Y(t, \mathbf{x})}{2} \\ &= \frac{(1, x) + (-1, x)}{2} + \varphi_\delta(y) \frac{(1, x) - (-1, x)}{2} = \frac{1}{2} ((0, 2x) + \varphi_\delta(y)(2, 0)) \\ &= (\varphi_\delta(y), x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

A Figura 5 apresenta o retrato de fase do campo (1.7), que é a regularização de Sotomayor Teixeira, do campo (1), com a função de transição dada por (1.6)

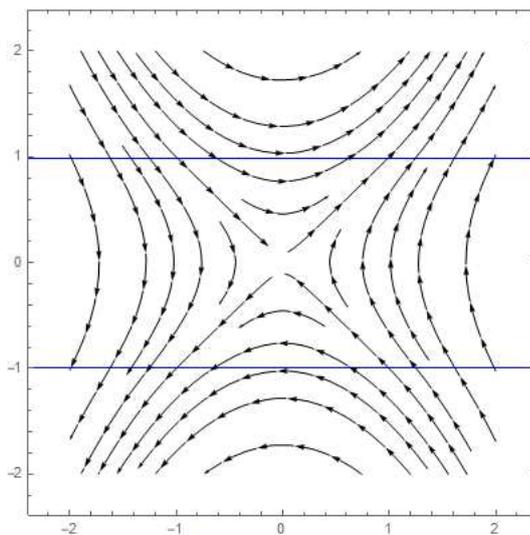


Figura 5 – Regularização de Sotomayor Teixeira para o campo com duas dobras visíveis

## 2 Teoria da Média

O método da média nos permite estudar a existência de alguns tipos de ciclos limite simplesmente resolvendo um sistema de equações. Em geral, quando os sistemas são analíticos, este sistema de equações envolve funções racionais e funções trigonométricas. Apesar da solução dos sistemas promediados poder ser bastante complicada, quase sempre é mais fácil do que achar os ciclos limite utilizando a definição, ou seja, encontrando os pontos fixos de uma aplicação de Poincaré com respeito a alguma seção transversal, já que aplicações de Poincaré raramente podem ser calculadas explicitamente. Portanto apresentaremos neste capítulo versões do Teorema da Média que foram utilizados ao longo da dissertação.

### 2.1 Teoria Clássica

Nesta seção serão apresentados resultados básicos da Teoria da Média que serão usados ao longo da dissertação. Os Teoremas 3 e 5 foram estudados utilizando [1] enquanto o Teorema 4 foi retirado de [8].

**Teorema 4.** *Considere a equação diferencial*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

onde  $F_1 : \mathbb{R} \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $R : \mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Assuma que

- i.  $F_1, R, \partial F_1/\partial x, \partial^2 F_1/\partial x^2$  e  $\partial R/\partial x$  são definidas, contínuas e limitadas por uma constante  $M > 0$  independente de  $\varepsilon$  em  $[0, \infty) \times D$ , para  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f$ ;
- ii.  $F_1$  e  $R$  são  $T$ -periódicas em  $t$ , com  $T$  independente de  $\varepsilon$ .

Defina a média

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.2)$$

e considere o problema promediado

$$\dot{y} = \varepsilon f_1(y). \quad (2.3)$$

Se  $p \in D$  é uma singularidade de (2.3), isto é,  $f_1(p) = 0$ , tal que

$$\det \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \neq 0,$$

então existe uma solução  $T$ -periódica,  $\varphi(t, \varepsilon)$ , da equação (2.1) a qual está próxima de  $p$  tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \varepsilon) = p. \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Considere a função

$$u(t, y) = \int_0^t F_1(s, y) - f_1(y) ds. \quad (2.5)$$

Observamos que  $u$  é  $T$ -periódica em  $t$  e limitada em  $D$ . De fato,

$$\begin{aligned} u(t+T, y) &= \int_0^{t+T} F_1(s, y) - f_1(y) ds = \int_0^T F_1(s, y) - f_1(y) ds + \int_T^{t+T} F_1(s, y) - f_1(y) ds \\ &= \int_0^T F_1(s, y) ds - \int_0^T f_1(y) ds + \int_T^{t+T} F_1(s, y) - f_1(y) ds \end{aligned}$$

Pela equação (2.2) temos que  $\int_0^T F_1(s, y) ds = T f_1(y)$  e observe que  $f_1(y)$  não depende de  $s$ . Portanto

$$\begin{aligned} u(t+T, y) &= T f_1(y) - T f_1(y) + \int_0^t F_1(s+T, y) - f_1(y) ds \\ &= \int_0^t F_1(s, y) - f_1(y) ds = u(t, y), \end{aligned}$$

onde foi utilizado, na penúltima igualdade, que  $F_1$  é  $T$ -periódica em  $t$ . Note que,

$$\int_0^t F_1(s, y) ds = \int_0^t F_1(s, y) \frac{T}{T} ds = \int_0^t F_1(s, y) \frac{1}{T} \int_0^T dr ds = \int_0^t \left( \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, y) \right) dr ds$$

Então, calculando a norma de  $u(t, y)$ , e utilizando a igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} \|u(t, y)\| &= \left\| \int_0^t F_1(s, y) - f_1(y) ds \right\| = \left\| \int_0^t \left( \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, y) dr - \frac{1}{T} \int_0^T F_1(r, y) dr \right) ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T F_1(s, y) - F_1(r, y) dr ds \right\| \leq \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T \|F_1(s, y) - F_1(r, y)\| dr ds \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \|F_1(s, y)\| + \|F_1(r, y)\| dr ds \leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T 2M dr ds = \frac{2MT^2}{T} = 2MT. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a norma de  $u(t, y)$  é limitada, isto é,

$$\|u(t, y)\| \leq 2MT, \quad t \geq 0, \quad y \in D.$$

Além disso, a derivada parcial de  $u$  com respeito a  $y$  é limitada em  $D$ . Com efeito, como vale a estimativa

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial y}(y) \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t, y) ds \right) \right\| = \frac{1}{T} \left\| \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial y}(s, y) ds \right\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \frac{\partial F_1}{\partial y}(s, y) \right\| ds \leq M,$$

Utilizando a estimativa acima na norma da derivada parcial de  $u(t, y)$  com respeito a variável  $y$ , temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right\| &= \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_0^t F_1(s, y) - f_1(y) ds \right) \right\| = \left\| \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial y}(s, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(y) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \left\| \frac{\partial F_1}{\partial y}(s, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(y) \right\| ds \leq \int_0^T \left\| \frac{\partial F_1}{\partial y}(s, y) \right\| ds + \int_0^T \left\| \frac{\partial f_1}{\partial y}(y) \right\| ds \leq 2MT. \end{aligned}$$

Considere a transformação  $x(t)$  dada por

$$x(t) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)). \quad (2.6)$$

Primeiro observe que se  $y(t)$  é  $T$ -periódica, então

$$x(t + T) = y(t + T) + \varepsilon u(t + T, y(t + T)) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)) = x(t),$$

isto é,  $x(t)$  também é periódica. Lembrando a equação (2.5), segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) = F_1(t, y(t)) - f_1(y(t))$$

Agora, derivando ambos os lados de (2.6) com respeito a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{y}(t) + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \dot{y}(t) \right) = \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right) \dot{y}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)) \\ &= \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right) \dot{y}(t) + \varepsilon (F_1(t, y(t)) - f_1(y(t))). \end{aligned}$$

Por (2.1), temos que

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon)$$

Das duas equações de  $\dot{x}(t)$  que obtemos anteriormente, e substituindo a expressão da transformação  $x(t)$ , segue que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon F_1(t, y(t) + \varepsilon u(t, y(t))) + \varepsilon^2 R(t, y(t) + \varepsilon u(t, y(t)), \varepsilon) \\ &= \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right) \dot{y}(t) + \varepsilon (F_1(t, y(t)) - f_1(y(t))). \end{aligned}$$

Rearranjando a igualdade acima e omitindo a dependência de  $y$  em  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right) \dot{y} &= \varepsilon F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) + \varepsilon^2 R(t, y + \varepsilon u(t, y), \varepsilon) - \varepsilon (F_1(t, y) - f_1(y)) \\ &= \varepsilon f_1(y) + \varepsilon (F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) - F_1(t, y)) + \varepsilon^2 R(t, y + \varepsilon u(t, y), \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como  $\partial u / \partial y$  é limitada em  $D$ , então podemos inverter a matriz que multiplica  $\dot{y}$ . Observe que

$$\left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right) \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right)^{-1} = \text{Id}$$

implica que ao derivarmos com respeito a  $\varepsilon$ , obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right) \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right)^{-1} + \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right)^{-1} &= 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right) \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right)^{-1} + \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right)^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando a direita por  $\left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right)$ , resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y) + \left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right)^{-1} \left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right) = 0.$$

Aplicando em  $\varepsilon = 0$  :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right)^{-1} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\partial u}{\partial y}(t, y).$$

Desta forma, expandindo em Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  para ordem dois, temos que

$$\left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right)^{-1} = \text{Id} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Substituindo na equação (2.7) multiplicada pela direita por  $\left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right)^{-1}$ , temos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(\text{Id} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\right)^{-1} (\varepsilon f_1(y) + \varepsilon (F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) - F_1(t, y)) \\ &\quad + \varepsilon^2 R(t, y + \varepsilon u(t, y), \varepsilon)) \\ &= \left(\text{Id} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) + \mathcal{O}^2\right) (\varepsilon f_1(y) + \varepsilon (F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) - F_1(t, y)) \\ &\quad + \varepsilon^2 R(t, y + \varepsilon u(t, y), \varepsilon)). \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{O}^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Defina  $r(t, y, \varepsilon) = \varepsilon (F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) - F_1(t, y)) + \varepsilon^2 R(t, y + \varepsilon u(t, y), \varepsilon)$ .

Então

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(\text{Id} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) (\varepsilon f_1(y) + r(t, y, \varepsilon)) \\ &= \varepsilon f_1(y) + r(t, y, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) (\varepsilon f_1(y) + r(t, y, \varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon f_1(y) + r(t, y, \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) f_1(y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Agora, vamos expandir  $r(t, y, \varepsilon)$  em torno de  $\varepsilon = 0$  até ordem 2. Assim,  $r(t, y, 0) = 0$ .

Expandindo  $F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) - F_1(t, y)$  em torno de  $\varepsilon = 0$  até primeira ordem, obtemos

$$F_1(t, y + \varepsilon u(t, y)) - F_1(t, y) = \varepsilon \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y) u(t, y)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Desta forma, obtemos para  $r(t, y, \varepsilon)$  a seguinte expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} r(t, y, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\varepsilon \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y) u(t, y)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) + \varepsilon^2 (R(t, y, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y) u(t, y) + R(t, y, 0)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Portanto, a equação para  $y$  fica:

$$\dot{y} = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y)u(t, y) + R(t, y, 0) - \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)f_1(z) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Defina  $f_*(t, y, \varepsilon) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y)u(t, y) + R(t, y, 0) - \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)f_1(z) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Então a equação anterior fica

$$\dot{y} = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon f_*(t, y, \varepsilon).$$

Note que o lado direito desta equação é  $T$ -periódico em  $t$  e é continuamente diferenciável em  $y$ . Assim,  $y$  é dado por

$$y(t) = y(0) + \varepsilon \int_0^t f_1(y(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_*(s, y(s), \varepsilon)ds.$$

$y(t)$  é  $T$ -periódico se  $y(t+T) = y(t)$ , para todo  $t \geq 0$ . Daí,  $0 = y(t) - y(t+T)$  e

$$\begin{aligned} y(t) - y(t+T) &= y(0) + \varepsilon \int_0^t f_1(y(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_*(s, y(s), \varepsilon)ds \\ &\quad - \left( y(0) + \varepsilon \int_0^{t+T} f_1(y(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^{t+T} f_*(s, y(s), \varepsilon)ds \right) \\ &= \varepsilon \int_0^t f_1(y(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_*(s, y(s), \varepsilon)ds - \varepsilon \int_0^T f_1(y(s))ds \\ &\quad - \varepsilon \int_T^{T+t} f_1(y(s))ds - \varepsilon^2 \int_0^T f_*(s, y(s), \varepsilon)ds - \varepsilon^2 \int_T^{T+t} f_*(s, y(s), \varepsilon)ds \\ &= -\varepsilon \int_0^T f_1(y(s))ds - \varepsilon^2 \int_0^T f_*(s, y(s), \varepsilon)ds, \end{aligned}$$

o que nos leva à equação

$$h(y(0), \varepsilon) := \int_0^T f_1(y(s))ds + \varepsilon \int_0^T f_*(s, y(s), \varepsilon)ds = 0.$$

Podemos ver que  $h(p, 0) = 0$ . Além disso, tomando a derivada parcial de  $h$  em relação à primeira variável, obtemos pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(y(0), \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_0^T f_1(y(s))ds + \varepsilon \int_0^T f_*(s, y(s), \varepsilon)ds \right) \\ &= \int_0^T \frac{\partial f_1}{\partial y}(y(s))ds + \varepsilon \int_0^T \frac{\partial f_*}{\partial y}(s, y(s), \varepsilon)ds. \end{aligned}$$

Então

$$\det \frac{\partial h}{\partial y}(p, 0) = \det \int_0^T \frac{\partial f_1}{\partial y}(p)ds = T \det \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, concluímos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  e uma função suave  $\varepsilon \mapsto p_\varepsilon$  tal que  $p_0 = p$  e  $h(p_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ , para todo  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Ou seja, encontramos, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, condições iniciais  $p_\varepsilon$ , tais que cada solução de (2.1),  $\varphi(t, \varepsilon)$ , que comece nestes pontos são  $T$ -periódicas. Usando o Teorema de Dependência Contínua das soluções em relação às condições iniciais, concluímos que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \varepsilon) = p$ .  $\square$

## 2.2 Outras versões do Teorema da Média

No que segue apresentaremos uma outra versão do Teorema 4 que será utilizada nos resultados futuros presentes no capítulo 3. A diferença com o caso anterior é que aqui o campo vetorial tem uma parte não perturbada, ou seja, que não acompanha  $\varepsilon$ . Consideremos um sistema da forma

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon) \quad (2.8)$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. As funções  $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  são  $C^2$ ,  $T$ -periódicas na primeira variável e  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . A principal hipótese nesta teoria é que o sistema não perturbado

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) \quad (2.9)$$

possui uma subvariedade de soluções periódicas. Determinar se após perturbar o sistema (2.9) obtendo o campo vetorial dado em (2.8), as órbitas periódicas persistem e se algumas delas passam a ser isoladas, ou seja, ciclos limite é um problema que pode ser resolvido aplicando a Teoria da Média.

Seja  $x(t, z, \varepsilon)$  uma solução do sistema (2.8) tal que  $x(0, z, \varepsilon) = z$ . A linearização do sistema ao longo da solução periódica  $x(t, z, 0)$  é dada por

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z, 0))y \quad (2.10)$$

No que segue, denotaremos a matriz fundamental do sistema diferenciável linear (2.10) por  $M_z(t)$  e  $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  são, respectivamente, a projeção de  $\mathbb{R}^n$  nas  $k$  primeiras coordenadas, isto é,  $\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  e de maneira análoga, a projeção nas  $(n - k)$  últimas coordenadas.

O primeiro passo para demonstrar o Teorema 5 que será enunciado a seguir, é reduzir o problema de bifurcações das soluções  $T$ -periódicas do sistema (2.8) para bifurcações dos pontos fixos do mapa de Poincaré-Andronov ou, de maneira equivalente, encontrar zeros de uma função conveniente  $f : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da qual falaremos mais no próximo parágrafo. Em geral, não é possível aplicar o Teorema da Função Implícita para a função  $f$ , então iremos utilizar a Redução de Lyapunov-Schmidt, mas não na sua forma geral, e sim na forma apresentada na Seção 1.2.

Como vimos no Teorema 3, uma das suposições principais é a existência de soluções  $T$ -periódicas do sistema (2.9). Sob esta suposição existe um subconjunto aberto  $D$  e  $\Omega$  e  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno tal que para todo  $(z, \varepsilon) \in D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ , a solução  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  está bem definida no intervalo  $[0, T]$ . Assim, podemos considerar a função  $f : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por

$$f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z \quad (2.11)$$

Então, cada  $(z_\varepsilon, \varepsilon)$  tal que  $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ , temos que

$$f(z_\varepsilon, \varepsilon) = x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - z_\varepsilon = 0 \Rightarrow x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = z_\varepsilon = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$$

ou seja,  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$  o que nos dá uma solução periódica de (2.9), se denotarmos por  $z_\varepsilon$  seu valor em  $t = 0$ , então vale  $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ , isto é, em  $t = 0$  a solução vale  $z_\varepsilon$  e em  $t = T$  a solução  $x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$  vale  $z_\varepsilon$ , ou seja,  $x$  é T-periódica. Desta forma, o problema de encontrar uma solução T-periódica de (2.9) pode ser substituído pelo problema de encontrar os zeros da função de dimensão finita  $f(\cdot, \varepsilon)$  dada por (2.11).

**Teorema 5.** *Seja  $V \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto aberto e limitado, e seja  $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  uma função de classe  $C^1$ . Assuma que*

- (i)  $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$  e que para cada  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$  a solução  $x(t, z_\alpha, 0)$  de (2.9) é T-periódica.
- (ii) para cada  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ , existe uma solução, matriz fundamental de (2.10),  $M_{z_\alpha}(t)$  tal que a matriz  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  possui no canto superior direito a matriz nula  $k \times (n-k)$  e no canto inferior direito a matriz  $\Delta_\alpha : (n-k) \times (n+k)$  com  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ .

Consideramos a função  $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$  definida por

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.12)$$

- a) Se existe  $a \in V$  com  $\mathcal{F}(a) = 0$  e  $\det \left( \frac{d\mathcal{F}}{d\alpha}(a) \right) \neq 0$  então existe um ciclo limite  $\varphi(t, \varepsilon)$  de período T do sistema (2.8) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- b) Se  $k = 1$  e  $\mathcal{F}'(\alpha_0) = \dots = \mathcal{F}^{(s-1)}(\alpha_0) = 0$  e  $\mathcal{F}^{(s)}(\alpha_0) \neq 0$ , com  $s \leq k$  então para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, existem no máximo s soluções T-periódicas,  $\varphi_1(t, \varepsilon), \dots, \varphi_s(t, \varepsilon)$  do sistema (2.8) tal que  $\varphi_i(t, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* a) Precisamos estudar os zeros da função (2.11), ou equivalentemente de  $g(z, \varepsilon) = M_z^{-1}(T)f(z, \varepsilon)$ , pois como  $M_z^{-1}(T)$  é uma matriz invertível,  $\text{Ker } M_z^{-1}(T) = \{0\}$ . Logo  $(z, \varepsilon)$  é zero de  $g$  se, e somente se,  $(z, \varepsilon)$  é zero de  $f$ , pois assim  $f(z, \varepsilon) = 0$  o que implica que  $M_z^{-1}(T)(0) = 0$ .

Por i) temos que cada  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$  fornece uma única solução T-periódica  $x_\alpha$  de (2.9) e as soluções T-periódicas são os zeros de  $f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z$ . Logo  $f(z_\alpha, 0) = 0$ , e assim  $g(z_\alpha, 0) = 0$  pois  $x(\cdot, z_\alpha, 0)$  é T-periódica e devemos mostrar que

$$G_\alpha = \frac{d}{dz} g(z_\alpha, 0) = M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T). \quad (2.13)$$

Para usar ii) e poder, posteriormente, aplicar o Teorema 3.

Como  $g(z, \varepsilon) = M_z^{-1}(T)f(z, \varepsilon)$  temos que

$$\frac{dg}{dz} = d = \frac{d}{dz} (M_z^{-1}(T))f(z, \varepsilon) + M_z^{-1}(T) \frac{d}{dz} (f(z, \varepsilon)) \quad (2.14)$$

Lembrando que  $f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z$ , temos que:

$$\frac{d}{dz}f(z, \varepsilon) = \frac{\partial x}{\partial z}(T, z, \varepsilon) - \frac{dz}{dz}$$

Aplicando a equação acima em  $(z_\alpha, 0)$  resulta que

$$\frac{\partial x}{\partial z}(T, z_\alpha, 0) - \frac{dz}{dz}$$

Portanto precisamos calcular  $\frac{\partial x}{\partial z}(\cdot, z, 0)$ . Note que  $x$  é solução de

$$\frac{d}{dt}x(t, z, 0) = x'(t) = F_0(t, x)$$

então segue do Teorema 1 que  $x'(\cdot, z, 0)$  é solução do linearizado (2.10) e ainda  $x'(0, z, 0) = Id$ . Logo temos duas soluções de (2.10), sendo uma delas  $x'(\cdot, z, 0)$  como vimos acima, e a outra foi dada por hipótese em ii), sendo ela a matriz fundamental  $M_{z_\alpha}(t)$ . Então, pela Proposição 1, existe uma única matriz  $C$  tal que

$$\frac{d}{dt}x(t, z, 0) = M_z(T)C, \quad \forall t \in \Omega.$$

Mas  $\frac{d}{dt}x(0, z, 0) = Id = M_z(0)C$  o que implica que  $C = M_z^{-1}(0)$ . Portanto  $\frac{d}{dt}x(t, z, 0) = M_z(T)M_z^{-1}(0)$ . Voltando em (2.14), temos que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz}(z, 0) &= \frac{\partial x}{\partial z}(T, z, 0) - \frac{dz}{dz} = M_z(T)M_z^{-1}(0) - Id, \\ \frac{dg}{dz}(z, 0) &= \frac{d}{dz}M_z^{-1}(T)f(z, 0) + M_z^{-1}(T)\frac{df}{dz}(z, 0) \\ &= \frac{d}{dz}M_z^{-1}(T)f(z, 0) + M_z^{-1}(T)(M_z(T)M_z^{-1}(0) - Id) \\ &= \frac{d}{dz}M_z^{-1}(T)f(z, 0) + M_z^{-1}(0) - M_z^{-1}(T). \end{aligned}$$

Aplicando em  $z = z_\alpha$ , temos que  $f(z_\alpha, 0) = 0$ , pois a solução é  $T$ -periódica, logo

$$\frac{dg}{dz}(z, 0) = \frac{d}{dz}M_{z_\alpha}^{-1}(T)f(z_\alpha, 0) + M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T) = M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$$

assim obtemos (2.13). Temos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}M_z^{-1}(T)f(z, 0) + M_z^{-1}(T)\frac{\partial}{\partial \varepsilon}f(z, \varepsilon) \\ &= M_z^{-1}(T)\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(x(T, z, \varepsilon) - z)\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= M_z^{-1}(T)\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(T, z, 0) \end{aligned}$$

A função  $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\cdot, z, 0)$  é a única solução do PVI

$$\begin{cases} y' &= D_x F_0(t, x(t, z, 0))y + F_1(t, x(t, z, 0)), \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

pelo Corolário (1). Note que para este caso

$$b(t) = D_3 h(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) e_k$$

onde  $h = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)$  da equação (2.10). Assim  $D_3 h = F_1(t, x) + 2\varepsilon R(t, x, \varepsilon)$ . Para  $\varepsilon = 0$  segue que  $D_3 h = F_1(t, x(t, z, 0))$ . Pelo Teorema 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) &= M_z(T) \left[ M_z^{-1}(0) M_z(0) + \int_0^t M_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds \right] \\ &= M_z(T) \int_0^t M_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) = M_z^{-1}(T) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(T, z, 0) = M_z^{-1}(T) M_z(T) \int_0^t M_z^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds$$

lembrando que a derivada da projeção é ela mesma, segue que:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\xi g)(z_\alpha, 0) = \xi \left[ \int_0^t M_{z_\alpha}^{-1}(s) F_1(s, x(s, z, 0)) ds \right] = \mathcal{F}(\alpha)$$

Então o resultado fica demonstrado aplicando o Teorema 3.

b) Se  $k = 1$  a função  $\mathcal{F}(\alpha)$  possui apenas uma variável, então podemos calcular as derivadas de grau superior da função  $\mathcal{F}$ . Tomando  $\delta(\alpha, \varepsilon) = \xi g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon)$ , sendo a mesma função definida na demonstração do Teorema 3 da Redução de Lyapunov-Schmidt. Lembrando a equação (1.3), dada por  $\delta(\alpha, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{F}(\alpha) + \varepsilon^2 r(\alpha, \varepsilon)$ , denotaremos por  $\tilde{\delta}(\alpha, \varepsilon) = \mathcal{F}(\alpha) + \varepsilon r(\alpha, \varepsilon)$ . Por hipótese, temos que

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \alpha}(\alpha_0, 0) = \mathcal{F}'(\alpha_0) = 0, \dots, \frac{\partial^{s-1} \tilde{\delta}}{\partial \alpha^{s-1}}(\alpha_0, 0) = \mathcal{F}^{(s-1)}(\alpha_0) = 0$$

e ainda,

$$\frac{\partial^s \tilde{\delta}}{\partial \alpha^s}(\alpha_0, 0) = \mathcal{F}^{(s)}(\alpha_0) \neq 0.$$

Queremos mostrar que existem no máximo  $s$  soluções T-periódicas do sistema (2.8) bifurcando de  $x(t, z_{\alpha_0})$ . Suponhamos por absurdo que existem pelo menos  $s + 1$  soluções T-periódicas do sistema (2.8), bifurcando de  $x(t, z_{\alpha_0})$ . Então para cada inteiro  $j$  existem  $\varepsilon_j > 0$  e  $\eta_j > 0$ , tais que  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  e  $\eta_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$  e a função  $g(z, \varepsilon_j)$  possui no mínimo  $s + 1$  zeros em  $|z - z_{\alpha_0}| < \eta_j$ . Equivalentemente a função  $\tilde{\delta}(\alpha, \varepsilon)$  tem no mínimo  $s + 1$  zeros em  $|\alpha - \alpha_0| < \eta_j$ , pois  $\delta(\alpha, \varepsilon)$  é a projeção de  $g(\alpha, \varepsilon)$  e  $\tilde{\delta}(\alpha, \varepsilon) = \delta(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$ . Sabemos que se  $\tilde{\delta}(\alpha, \varepsilon)$  tem no mínimo  $s + 1$  zeros, então ela assume o mesmo valor em

pelo menos  $s + 1$  pontos. Aplicando o Teorema de Rolle, existem pelo menos  $s$  pontos tais que a derivada de primeira ordem com respeito a variável  $\alpha$  de  $\tilde{\delta}(\alpha, \varepsilon)$  é nula. Aplicando este argumento sucessivas vezes, obtemos que existe  $\alpha_j$  tal que  $|\alpha - \alpha_0| < \eta_j$  tal que

$$\frac{\partial^s \tilde{\delta}}{\partial \alpha^s}(\alpha_j, \varepsilon) = \mathcal{F}^{(s)}(\alpha_j) + \varepsilon_j \frac{\partial^s r}{\partial \alpha^s}(\alpha_j, \varepsilon) = 0. \quad (2.15)$$

Tomando o limite de  $j \rightarrow \infty$ , temos que  $\eta_j \rightarrow 0$  de modo que  $|\alpha_j - \alpha_0| \rightarrow 0$ , ou seja,  $\alpha_j \rightarrow \alpha_0$ , e da equação (2.15) segue então que  $\mathcal{F}^{(s)}(\alpha_0) = 0$ . Contrariando a hipótese do teorema.  $\square$

**Corolário 2.** *Sob as hipóteses do Teorema 5, se todos os autovalores das matrizes  $\Delta_{\alpha_0}$  e  $(\partial \mathcal{F} / \partial \alpha)(\alpha_0)$  possuem parte real não nula, então as soluções  $T$ -periódicas  $\varphi_1(t, \varepsilon)$  do Teorema 5 são hiperbólicas.*

Neste teorema assumimos que existe um conjunto aberto  $V$  no qual  $\bar{V} \subset D$  e tal que para cada  $z \in \bar{V}$ , a solução  $x(t, z, 0)$  é  $T$ -periódica. O conjunto  $\bar{V}$  é isócrono para o sistema (2.9), isto é, é um conjunto formado somente por órbitas periódicas, todas possuindo o mesmo período. Então, uma resposta para o problema da bifurcação de soluções  $T$ -periódicas das soluções periódicas  $x(t, z, 0)$  contidas em  $\bar{V}$  para o sistema (2.8) é dada no seguinte resultado, retirado de [6].

**Teorema 6. Perturbações em um conjunto isócrono:** *Assuma que existe um conjunto aberto e limitado  $V$ , com  $\bar{V} \subset \Omega$  tal que para cada  $z \in \bar{V}$ , a solução  $x(t, z, 0)$  é  $T$ -periódica, e considere a função  $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por*

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^T M_z^{-1}(t, z) F_1(t, x(t, z, 0)) dt$$

*Se existir  $a \in V$  com  $\mathcal{F}(a) = 0$  e  $\det(d\mathcal{F}/dz)(a) \neq 0$ , então existirá um ciclo limite  $\varphi(t, \varepsilon)$  de período  $T$  do sistema (2.8) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

## 3 Ciclos limites em variedades

Neste capítulo serão apresentados campos vetoriais suaves e não suaves definidos em variedades, predominantemente compactas. O objetivo é encontrar ciclos limites que bifurcam de orbitas periódicas já existentes no sistema não perturbado, para isso aplicaremos a teoria da média. As demonstrações dos teoremas seguem estão detalhadas ao longo das seções e seguem o algoritmo abaixo:

- Calcular as soluções do sistema não perturbado.
- Linearizar o sistema não perturbado.
- Checar o item (i) do Teorema da Média 5.

$$\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega.$$

- Calcular a Matriz Fundamental.
- Checar o item (ii) do Teorema da Média 5.

$$M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T).$$

- Encontrar a  $\mathcal{F}$ .
- Determine os zeros simples de  $\mathcal{F}$ .

Como cada teorema tem a sua particularidade, em alguns deles é feita mudança de coordenadas e alteração da variável temporal. E em cada teorema foi utilizada uma estratégia diferente para determinar os zeros simples.

### 3.1 Ciclos limite em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ e em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$

O conteúdo desta seção é baseado no artigo [6], no qual a motivação é encontrar o número de ciclos limite de um campo vetorial em uma variedade conexa de classe  $C^1$ . Porém, mostraremos aqui um resultado diferente, no qual a perturbação dos campos vetoriais não é linear, a fim de garantir que o campo continua bem definido e possui órbitas periódicas. Além disso, esta seção exemplifica o que foi estudado ao longo deste trabalho, mostrando como são feitos os cálculos e como são aplicados os teoremas das seções anteriores em alguns casos específicos.

Seja  $M$  uma variedade conexa de classe  $C^1$  e  $TM$  seu fibrado tangente,  $X : M \rightarrow TM$  um campo vetorial em  $M$  de classe  $C^1$  tal que  $X(x) \in T_x M$ , onde  $T_x M$  é o

espaço tangente a  $M$  no ponto  $x$ . Consideraremos apenas variedades  $M$  difeomorfas a  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}^1)^m$ , onde  $\mathbb{S}^1$  denota o círculo  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ . Seja  $\mathbb{R}^+$  o conjunto de todos os números reais positivos. Considere  $X$  um campo vetorial na variedade conexa  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  com coordenadas  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $z \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in \mathbb{S}^1$  associado com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} &= -z, \\ \dot{z} &= r - 1, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Como  $\dot{\theta} = 1$ , ou seja, independente de  $r$  e  $z$ , vamos resolver primeiro o sistema formado pelas duas primeiras equações

$$\begin{cases} \dot{r} &= -z \\ \dot{z} &= r - 1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{z} = \dot{r} = -z.$$

Visto que  $\ddot{z} = -z$ , temos que  $z$  é uma combinação linear de seno e cosseno, então tomando  $c, d \in \mathbb{R}$ , temos

$$z(t) = c \cos t + d \sin t. \quad (3.2)$$

Da primeira equação do sistema, temos:

$$\dot{r} = -z = -(c \cos t + d \sin t). \quad (3.3)$$

Integrando ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} r(t) - r(0) &= - \left[ \int_0^t (c \cos s + d \sin s) ds \right] = - \left[ c \sin s \Big|_0^t - d \cos s \Big|_0^t \right] \\ &= -c \sin t - d(\cos t - d) = -c \sin t + d \cos t - d. \end{aligned}$$

Portanto,  $r(t) = -c \sin t + d \cos t - d + r(0)$ . Ainda, derivando  $z(t)$ , é possível encontrar o valor da constante  $d$ ,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -c \sin t + d \cos t = r - 1 = (-c \sin t + d \cos t - d + r(0)) - 1 \\ &\Rightarrow -d + r(0) - 1 = 0 \Rightarrow d = r(0) - 1. \end{aligned}$$

É possível encontrar o valor de  $c$  integrando  $\dot{z}(t)$  que é da forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (-c \sin t + d \cos t - d + r(0)) - 1 = -c \sin t + d \cos t - (r(0) - 1) + r(0) - 1 \\ &= -c \sin t + d \cos t. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{z}(s) ds &= z(t) - z(0) = \int_0^t (-c \sin s + d \cos s) ds = c \cos t - c + d \sin t = \\ &= -c + z(t) \Rightarrow z(t) - z(0) = -c + z(t) \Rightarrow c = z(0). \end{aligned}$$

Denotando  $r(0) = r_0$ ,  $z(0) = z_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ , temos

$$\begin{aligned} z(t) &= c \cos t + d \sin t = z_0 \cos t + (r_0 - 1) \sin t, \\ r(t) &= -c \sin t + d \cos t - d + r_0 \\ &= -z_0 \sin t + (r_0 - 1) \cos t - (r_0 - 1) + r_0 \\ &= -z_0 \sin t + (r_0 - 1) \cos t + 1. \end{aligned}$$

Agora como  $\dot{\theta} = 1$ ,  $\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \dot{\theta}(s) ds = \int_0^t 1 ds = t$ . Logo  $\theta(t) = t + \theta_0$ . Portanto, a solução geral de (3.1) é dada por

$$\begin{cases} r(t) = 1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \sin t, \\ z(t) = z_0 \cos t + (r_0 - 1) \sin t, \\ \theta(t) = t + \theta_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Note que

$$z^2 + (r - 1)^2 = [z_0 \cos t + (r_0 - 1) \sin t]^2 + [(r_0 - 1) \cos t - z_0 \sin t]^2.$$

Desenvolvendo o membro direito da equação acima, obtemos

$$z_0^2 \cos^2 t + 2z_0(r_0 - 1) \cos t \sin t + (r_0 - 1)^2 \sin^2 t + (r_0 - 1)^2 \cos^2 t - 2z_0(r_0 - 1) \cos t \sin t + z_0^2 \sin^2 t,$$

que simplificando se torna

$$z^2 + (r - 1)^2 = [z_0^2 + (r_0 - 1)^2](\cos^2 t + \sin^2 t) = z_0^2 + (r_0 - 1)^2 = a^2,$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ , já que obtemos um valor não negativo.

Então as órbitas periódicas de (3.1) estão contidas no toro invariante  $z_0^2 + (r_0 - 1)^2 = a^2$ , com  $a \in (0, 1)$  e possuem período  $2\pi$ . Seja  $V$  a subvariedade de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  formada pela união de todos os toros invariantes junto com as órbitas periódicas  $z_0^2 + (r_0 - 1)^2 = 0$ . Então  $V$  é uma subvariedade formada por órbitas  $2\pi$ -periódicas.

Estudaremos uma perturbação do sistema diferencial (3.1). Primeiro, considere o Hamiltoniano  $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$\begin{aligned} H(r, z, w, \theta) &= \frac{z^2 + (r - 1)^2}{2} + w + \varepsilon(a_1 r + a_2 z + a_3 w + a_4 r^2 + a_5 z^2 + a_6 w^2 \\ &\quad + a_7 r z + a_8 r w + a_9 z w + (b_1 w + b_2 w^2)(c_0 - 2\pi c_2 \theta + c_2 \theta^2)). \end{aligned}$$

Então, o sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade associado a  $H$  é dado por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -H_z = -z - \varepsilon(a_2 + 2a_5 z + a_7 r + a_9 w), \\ \dot{z} &= H_r = r - 1 + \varepsilon(a_1 + 2a_4 r + a_7 z + a_8 w), \\ \dot{w} &= -H_\theta = 2\pi w^2 \varepsilon b_2 c_2 - 2\theta w^2 \varepsilon b_2 c_2 + 2\pi w \varepsilon b_1 c_2 - 2\theta w \varepsilon b_1 c_2, \\ \dot{\theta} &= H_w = 1 + \varepsilon(a_3 + 2a_6 w + a_8 r + a_9 z + (b_1 + 2wb_2)(c_0 - 2c_2\pi\theta + c_2\theta^2)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $H_v$  denota a derivada parcial da função  $H$  com respeito a variável  $v$ . Lembrando que  $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$  e  $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$ , para  $\varepsilon = 0$  o sistema (3.5) se reduz ao sistema não perturbado

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -z, \\ \dot{z} &= r - 1, \\ \dot{w} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

O sistema (3.5) é invariante no hiperplano  $w = 0$ , isto é, se uma órbita de (3.5) possui um ponto neste hiperplano, então a órbita inteira está contida nele. De fato, se  $w = 0$  implica  $\dot{w} = 0$ , então não temos variação em  $w$ , logo as soluções são constantes em  $w$  com  $w = 0$ . Vamos restringir a atenção ao caso em que  $w = 0$ , ou seja, consideremos o sistema (3.5) restrito ao hiperplano  $w = 0$ ,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -z - \varepsilon(a_2 + 2a_5z + a_7r), \\ \dot{z} &= r - 1 + \varepsilon(a_1 + 2a_4r + a_7z), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(a_3 + a_8r + a_9z + b_1(c_0 - 2c_2\pi\theta + c_2\theta^2)).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Observe que se  $\varepsilon = 0$  então o sistema (3.6) coincide com o sistema (3.1). Para o sistema (3.6), temos o seguinte resultado.

**Teorema 7.** *Para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno o campo vetorial linear associado ao sistema Hamiltoniano perturbado (3.5), restrito ao hiperplano invariante  $w = 0$ , isto é, sistema (3.6) com  $(a_4 + a_5) \neq 0$  possui um ciclo limite bifurcando das órbitas periódicas do sistema (3.1) quando  $\theta_0$  é um zero da equação*

$$K(Z) = 2\pi^2 b_1 c_2 - 3Z^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8.$$

*Mais ainda, este ciclo limite bifurca da órbita periódica  $z^2 + (r - 1)^2 = 0$  do sistema (3.1).*

*Demonstração.* Desde que  $r > 0$  as órbitas periódicas (3.4) do sistema diferencial linear (3.1) preenchem o toro invariante  $f_a(r, z, \theta) = z^2 + (r - 1)^2 - a^2 = 0$  com  $a \in (0, 1)$ , e possuem período  $2\pi$ . O toro  $f_a(r, z, \theta) = 0$  é invariante pelo fluxo do sistema (3.1), pois para toda solução periódica (3.4) em  $f_a(r, z, \theta) = 0$  temos que

$$\frac{df_a}{dt}(r(t), z(t), \theta(t)) = \frac{\partial f_a}{\partial r} \dot{r}(t) + \frac{\partial f_a}{\partial z} \dot{z}(t) + \frac{\partial f_a}{\partial \theta} \dot{\theta}(t) = 2(r - 1)(-z) + 2z(r - 1) = 0.$$

Seja  $V$  a subvariedade de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  formada pela união de todos os toros invariantes com a órbita periódica  $z^2 + (r - 1)^2 = 0$ , então  $V$  é uma subvariedade aberta e limitada formada por órbitas  $2\pi$ -periódicas. Usando o Teorema 6 desejamos estudar os ciclos limite do sistema perturbado (3.6) para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno, os quais bifurcam das

órbitas periódicas do sistema (3.1). Então, para aplicar o Teorema 6, temos

$$\begin{aligned} n &= 3, \\ x &= (r, z, \theta), \\ z &= (r_0, z_0, \theta_0), \\ x(t, z, 0) &= (r(t), z(t), \theta(t)), \end{aligned}$$

onde  $r(t), z(t), \theta(t)$  é solução de (3.1) dada em (3.4). Ainda

$$\begin{aligned} F_0(t, x) &= (-z, r - 1, 1), \\ F_1(t, x) &= (g_1(t, x), g_2(t, x), g_3(t, x)), \end{aligned}$$

onde  $g_1(t, x) = -a_2 - a_7r(t) - 2a_5z(t)$ ,  $g_2(t, x) = a_1 + 2a_4r(t) + a_7z(t)$ ,  $g_3(t, x) = a_3 + a_8r(t) + a_9z(t) + b_1(c_0 - 2c_2\pi\theta(t) + c_2\theta^2(t))$ ,  $F_2(t, x, \varepsilon) = 0$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  e o período é  $T = 2\pi$ . Temos que

$$D_x F_0(t, x(t, z, 0)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz fundamental do sistema (2.10) é dada por

$$M_z(t) = \exp \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\text{sent} t & 0 \\ \text{sent} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema (3.1) a matriz fundamental  $M_z(t)$  não depende de uma solução periódica particular  $x(t, z, 0)$ , isto é, a matriz é independente da condição inicial  $z$ . Todas as hipóteses do Teorema 6 são satisfeitas, então precisamos encontrar as raízes em  $V$  do sistema  $\mathcal{F}(z) = 0$ , onde

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^T M_z^{-1}(t, z) F_1(t, x(t, z, 0)) dt.$$

Observe que a inversa de  $M_z(t, z)$  é dada por

$$M_z^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \text{sent} t & 0 \\ -\text{sent} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M_z^{-1}(t) F_1(t, x(t, z, 0)) = \begin{bmatrix} \cos t(-a_2 - a_7r(t) - 2a_5z(t)) + \text{sent} t(a_1 + 2a_4r(t) + a_7z(t)) \\ \text{sent} t(a_2 + a_7r(t) + 2a_5z(t)) + \cos t(a_1 + 2a_4r(t) + a_7z(t)) \\ a_3 + a_8r(t) + a_9z(t) + b_1(c_0 - 2c_2\pi\theta(t) + c_2\theta^2(t)) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^{2\pi} M_z^{-1}(t, z) F_1(t, x(t, z, 0)) dt = (\mathcal{F}_1(r_0, z_0, \theta_0), \mathcal{F}_2(r_0, z_0, \theta_0), \mathcal{F}_3(r_0, z_0, \theta_0)),$$

onde,

$$\mathcal{F}_1(r_0, z_0, \theta_0) = \int_0^{2\pi} \cos t(-a_2 - a_7 r(t) - 2a_5 z(t)) + \text{sent}(a_1 + 2a_4 r(t) + a_7 z(t)) dt,$$

$$\mathcal{F}_2(r_0, z_0, \theta_0) = \int_0^{2\pi} -\text{sent}(-a_2 - a_7 r(t) - 2a_5 z(t)) + \cos t(a_1 + 2a_4 r(t) + a_7 z(t)) dt,$$

$$\mathcal{F}_3(r_0, z_0, \theta_0) = \int_0^{2\pi} a_3 + a_8 r(t) + a_9 z(t) + b_1 (c_0 - 2c_2 \pi \theta(t) + c_2 \theta^2(t)) dt.$$

Substituindo  $r(t), z(t), \theta(t)$  dadas pela solução (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(r_0, z_0, \theta_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t[-a_2 - a_7(1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \text{sent}) - 2a_5(z_0 \cos t + (r_0 - 1) \text{sent})] dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \text{sent}[a_1 + 2a_4(1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \text{sent}) + a_7(z_0 \cos t + (r_0 - 1) \text{sent})] dt \\ &= [-a_7(r_0 - 1) - 2a_5 z_0] \pi + [a_7(r_0 - 1) - 2a_4 z_0] \pi = -2\pi(a_4 + a_5)z_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(r_0, z_0, \theta_0) &= \int_0^{2\pi} -\text{sent}[-a_2 - a_7(1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \text{sent}) - 2a_5(z_0 \cos t + (r_0 - 1) \text{sent})] dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \cos t[a_1 + 2a_4(1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \text{sent}) + a_7(z_0 \cos t + (r_0 - 1) \text{sent})] dt \\ &= [2a_5(r_0 - 1) - a_7 z_0] \pi + [2a_4(r_0 - 1) + a_4 z_0] \pi = 2\pi(a_5 + a_4)(r_0 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(r_0, z_0, \theta_0) &= \int_0^{2\pi} a_3 + a_8(1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \text{sent}) dt \\ &+ \int_0^{2\pi} a_9(z_0 \cos t + (r_0 - 1) \text{sent}) dt \\ &+ \int_0^{2\pi} b_1(c_0 - 2c_2 \pi(t + \theta_0)) + c_2(t + \theta_0)^2 dt \\ &= \frac{-2\pi}{3}(2\pi^2 b_1 c_2 - 3\theta_0^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{F}(z) = (-2\pi(a_4 + a_5)z_0, 2\pi(a_4 + a_5)(r_0 - 1), \frac{-2\pi}{3}(2\pi^2 b_1 c_2 - 3\theta_0^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8)).$$

De modo que  $\mathcal{F}(z) = 0$  se, e somente se,  $\mathcal{F}_1(r_0, z_0, \theta_0) = \mathcal{F}_2(r_0, z_0, \theta_0) = \mathcal{F}_3(r_0, z_0, \theta_0) = 0$ . Por hipótese  $(a_4 + a_5) \neq 0$  e temos que  $\mathcal{F}_1(r_0, z_0, \theta_0) = 0 \Leftrightarrow -2\pi(a_4 + a_5)z_0 = 0 \Leftrightarrow (a_4 + a_5) = 0$  ou  $z_0 = 0$ . Visto que o primeiro não ocorre, resta que  $z_0 = 0$ . Ainda,  $\mathcal{F}_2(r_0, z_0, \theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2\pi(a_4 + a_5)(r_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow (a_4 + a_5) = 0$  ou  $r_0 = 1$ , portanto

obtemos  $r_0 = 1$ . E por fim,  $\mathcal{F}_3(r_0, z_0, \theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2\pi^2 b_1 c_2 - 3\theta_0^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8 = 0$ . Observe que,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dz}(z) = \frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(r_0, z_0, \theta_0)} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi(a_4 + a_5) & 0 \\ 2\pi(a_4 + a_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi b_1 c_2 \theta_0 \end{bmatrix},$$

então  $\det(d\mathcal{F}(z)/dz) = 16\pi^3(a_4 + a_5)^2 b_1 c_2 \theta_0 = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = 0$ , porém  $\theta_0 = 0$  não anula  $\mathcal{F}_3$ . Aplicando o Teorema 6 existe solução periódica  $(r(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon))$  do sistema diferencial (3.6), tal que  $(r(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon), \theta(0, \varepsilon)) \rightarrow (1, 0, Z)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , onde  $Z$  denota os zeros de  $K(Z) = 2\pi^2 b_1 c_2 - 3Z^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8$ . Assim provamos o Teorema 7.  $\square$

**Comentário 1.** A função  $(b_1 w + b_2 w^2)(c_0 - 2\pi c_2 \theta + c_2 \theta^2)$  foi escolhida a fim de que o sistema Hamiltoniano seja periódico e esteja bem definido na variedade. Além disso, como restringimos o campo ao hiperplano invariante  $w = 0$  era importante o termo quadrático em  $(b_1 w + b_2 w^2)$ , já que assim, após a primeira derivada com respeito a variável  $w$  o campo continua tendo um termo quadrático em  $\theta$ . A matriz  $\frac{d\mathcal{F}}{dz}(z)$  depende dos coeficientes dos polinômios que perturbam o sistema original, dessa forma o resultado se altera a cada escolha. Podemos reproduzir o mesmo resultado para qualquer função que satisfaça a periodicidade do campo, visando o que foi mencionado nesta observação.

Também serão estudadas órbitas periódicas de campos vetoriais na variedade conexa  $\mathbb{R} \times (\mathbb{S}^1)^2$  com coordenadas  $r \in \mathbb{R}$  e  $(\theta, \varphi) \in (\mathbb{S}^1)^2$  associado com o sistema diferencial:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r - 1 + \varepsilon(a_0 + a_1 r + a_2 \theta + a_3 \varphi), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(b_0 + b_1 r + b_3 \varphi^2 - 2b_3 \pi \varphi + b_4), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon(c_0 + c_1 r + c_2 \theta^2 - 2c_2 \pi \theta + c_3). \end{cases} \quad (3.7)$$

Note que a topologia da variedade conexa, onde o sistema (3.6) é definido é diferente da topologia da variedade conexa onde o sistema (3.7) está definido. O sistema (3.7) com  $\varepsilon = 0$ , é dado por

$$\begin{cases} \dot{r} &= r - 1, \\ \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Neste caso todas as órbitas periódicas estão contidas no toro invariante  $r = 1$  e possuem período  $2\pi$ . Seja  $\mathcal{Z}$  este toro. Então,  $\mathcal{Z}$  é uma subvariedade de dimensão 2 da variedade  $\mathbb{R} \times (\mathbb{S}^1)^2$  de dimensão 3. Para o sistema (3.7) temos o seguinte resultado:

**Teorema 8.** Para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno, o campo vetorial linear associado com o sistema (3.7) possui ciclo limite bifurcando das órbitas periódicas do sistema (3.7) com  $\varepsilon = 0$ , isto é, do sistema (3.8) se  $b_3, c_2 \neq 0$ . Mais ainda, se  $a_0 + a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , então

o toro  $r = 1$  é invariante pelo fluxo do sistema (3.7), e tal ciclo limite é único no toro quando existir.

*Demonstração.* Vamos encontrar a solução de (3.7) para  $\varepsilon = 0$ , isto é, para o sistema não perturbado (3.8). Como  $\dot{r} = r - 1$  temos que a solução é da forma  $x(t) = \exp(t)c + b$ , queremos ainda que  $x(0) = r_0$  então  $\exp(0)c + b = r_0$ , logo  $b = r_0 - c$ . Por outro lado,  $\dot{x}(t) = \exp(t)c = r - 1$ , segue que  $c = (r - 1)/\exp(t)$ , em particular, para  $t = 0$ , temos que  $c = (r_0 - 1)/\exp(0)$ , sendo  $c$  constante, segue que  $c = r_0 - 1$  e daí  $b = r_0 - (r_0 - 1) = 1$ . Assim, a solução do PVI é dada por  $r(t) = 1 + \exp(t)(r_0 - 1)$ . Para o sistema (3.1) calculamos  $\theta(t)$  e neste sistema a conta é análoga, tanto para  $\theta(t)$  como para  $\varphi(t)$ . Então, a solução do sistema (3.8), tal que  $(r(0), \theta(0), \varphi(0)) = (r_0, \theta(0), \varphi(0))$  é dada por

$$r(t) = 1 + \exp(t)(r_0 - 1), \quad \theta(t) = t + \theta_0, \quad \varphi(t) = t + \varphi_0.$$

Portanto as órbitas periódicas do sistema (3.8) são

$$r(t) = 1, \quad \theta(t) = t + \theta_0, \quad \varphi(t) = t + \varphi_0. \quad (3.9)$$

Assim, as órbitas periódicas do sistema (3.8) preenchem o toro invariante  $r = 1$  e possuem período  $2\pi$ . Para o sistema (3.7), note que  $\dot{r}|_{r=1} = 0$  se, e somente se,  $\varepsilon(a_0 + a_1r + a_2\theta + a_3\varphi) = 0$ , sendo que isto ocorre quando  $\varepsilon = 0$  ou  $a_0 + a_1r + a_2\theta + a_3\varphi = 0 \forall r, \theta, \varphi$ , ou seja,  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

Queremos estudar os ciclos limite do sistema (3.7) para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno, que bifurcam das órbitas periódicas do sistema (3.8), para isto utilizaremos o Teorema 5. Assim, tome  $t = 2\pi$ ,  $\Omega = (\mathbb{S}^1)^2 \times \mathbb{R}$ ,  $k = 2$ ,  $n = 3$ ,  $x = (\theta, \varphi, r)$ ,  $\alpha = (\theta_0, \varphi_0)$ ,  $\beta_0(\alpha) = 1$ , e

$$\begin{aligned} z_\alpha &= (\alpha, \beta_0(\alpha)) = (\theta_0, \varphi_0, 1), \\ \mathcal{Z} &= \{(\theta_0, \varphi_0, r) \in (\mathbb{S}^1)^2 \times \mathbb{R} : r = 1\}, \\ x(t, z_\alpha, 0) &= (\theta(t), \varphi(t), r(t)) = (t + \theta_0, t + \varphi_0, 1 + \exp(t)(r_0 - 1)), \\ F_0(t, x) &= (1, 1, r - 1), \\ F_1(t, x) &= (r - 1 + \varepsilon(a_0 + a_1r + a_2\theta + a_3\varphi), 1 + \varepsilon(b_0 + b_1r + b_3\varphi^2 - 2b_3\pi\varphi + b_4), \\ &\quad 1 + \varepsilon(c_0 + c_1r + c_2\theta^2 - 2c_2\pi\theta + c_3)), \\ F_2(t, x) &= 0. \end{aligned}$$

Note que o toro aberto sólido  $(\mathbb{S}^1)^2 \times \mathbb{R}$  pode ser visto como um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Assim, o subconjunto aberto e limitado  $V \subset \mathcal{Z}$  pela hipótese do Teorema 5 deve ser tomado como  $V = \{(\theta_0, \varphi_0) \in (\mathbb{S}^1)^2\}$ , isto é,  $V$  é difeomorfo a  $\mathcal{Z}$ . Para a função  $F_0(t, x) = (1, 1, r - 1)$  a solução periódica  $x(t, z_\alpha, 0) = (t + \theta_0, t + \varphi_0, 1)$  temos que a matriz fundamental de (2.10) é dada por

$$M_{z_\alpha}(t) = \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Note que para o sistema (3.7) a matriz fundamental  $M_{z_\alpha}(t)$  não depende da órbita periódica particular  $x(t, z_\alpha, 0)$ , isto é, independe da condição inicial  $z_\alpha$ . Então,

$$M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(2\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{bmatrix},$$

satisfazendo as condições do Teorema 5. Precisamos encontrar os zeros em  $V$  para o sistema  $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ , onde

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha, 0)) dt.$$

Temos que,

$$M_{z_\alpha}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha, 0)) = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 r + b_3 \varphi^2 - 2b_3 \pi \varphi + b_4 \\ c_0 + c_1 r + c_2 \theta^2 - 2c_2 \pi \theta + c_3 \\ e^{-t}(a_0 + a_1 r + a_2 \theta + a_3 \varphi) \end{bmatrix}.$$

Temos ainda que  $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , então  $\mathcal{F}(\alpha)$  terá duas componentes, ou seja,  $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\theta_0, \varphi_0), \mathcal{F}_2(\theta_0, \varphi_0))$ , onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\theta_0, \varphi_0) &= \int_0^{2\pi} b_0 + b_1 r(t) + b_3 \varphi^2(t) - 2b_3 \pi \varphi(t) + b_4(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} b_0 + b_1 + b_3(t + \theta_0)^2 - 2b_3(t + \varphi_0) + b_4 dt \\ &= \frac{8b_3\pi^3}{3} + 2\pi^2(2b_3\varphi_0 - 2b_3\pi) + 2\pi(b_0 + b_1 + b_4 + b_3\varphi_0^2 - 2b_3\varphi_0\pi) \\ &= \frac{2}{3}\pi(3b_0 + 3b_1 + 3b_4 + 3b_3\varphi_0^2 - 2b_3\pi^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\theta_0, \varphi_0) &= \int_0^{2\pi} c_0 + c_1 r(t) + c_2 \theta^2(t) - 2c_2 \pi \theta(t) + c_3(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} c_0 + c_1 + c_2(t + \theta_0)^2 - 2c_2(t + \varphi_0) + c_3 dt \\ &= \frac{8c_2\pi^3}{3} + 2\pi^2(2c_2\varphi_0 - 2c_2\pi) + 2\pi(c_0 + c_1 + c_3 + c_2\varphi_0^2 - 2c_2\varphi_0\pi) \\ &= \frac{2}{3}\pi(3c_0 + 3c_1 + 3c_3 + 3c_2\theta_0^2 - 2c_2\pi^2). \end{aligned}$$

Assim,  $\mathcal{F}(\alpha) = 0$  se, e somente se,  $\mathcal{F}_1(\theta_0, \varphi_0) = \mathcal{F}_2(\theta_0, \varphi_0) = 0$ . Supondo que  $c_2, b_3 \neq 0$ , temos então as seguintes soluções

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi(3b_0 + 3b_1 + 3b_3\varphi_0^2 - 2b_3\pi^2) = 0 &\Leftrightarrow \varphi_0 = \pm \frac{\sqrt{-3b_0 - 3b_1 - 3b_4 + 2b_3\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{b_3}}, \\ \frac{2}{3}\pi(3c_0 + 3c_1 + 3c_3 + 3c_2\theta_0^2 - 2c_2\pi^2) = 0 &\Leftrightarrow \theta_0 = \pm \frac{\sqrt{-3c_0 - 3c_1 - 3c_3 + 2c_2\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{c_2}}. \end{aligned}$$

Ainda, temos que

$$\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(\theta_0, \varphi_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4\pi b_3 \varphi_0 \\ 4\pi c_2 \theta_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,  $\det(\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)/\partial(\theta_0, \varphi_0)) = -16\pi^2 \varphi_0 \theta_0 b_3 c_2 \neq 0$ , já que por hipótese  $b_3, c_2 \neq 0$  e  $\varphi_0, \theta_0 = 0$  não anulam  $\mathcal{F}(\alpha)$ . Assim aplicando o Teorema 5, existe um ciclo limite para o sistema (3.7) tal que  $(\theta(0, \varepsilon), \varphi_0(0, \varepsilon)) \rightarrow (\theta_0, \varphi_0)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , onde  $\theta_0, \varphi_0$  são a solução do sistema. Mais que isso, é possível obter quatro soluções, sendo elas:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\sqrt{-3b_0 - 3b_1 - 3b_4 + 2b_3\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{b_3}}, & \theta_0 &= \frac{\sqrt{-3c_0 - 3c_1 - 3c_3 + 2c_2\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{c_2}}, \\ \varphi_0 &= \frac{\sqrt{-3b_0 - 3b_1 - 3b_4 + 2b_3\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{b_3}}, & \theta_0 &= -\frac{\sqrt{-3c_0 - 3c_1 - 3c_3 + 2c_2\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{c_2}}, \\ -\varphi_0 &= \frac{\sqrt{-3b_0 - 3b_1 - 3b_4 + 2b_3\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{b_3}}, & \theta_0 &= \frac{\sqrt{-3c_0 - 3c_1 - 3c_3 + 2c_2\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{c_2}}, \\ -\varphi_0 &= \frac{\sqrt{-3b_0 - 3b_1 - 3b_4 + 2b_3\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{b_3}}, & \theta_0 &= -\frac{\sqrt{-3c_0 - 3c_1 - 3c_3 + 2c_2\pi^2}}{\sqrt{3}\sqrt{c_2}}. \end{aligned}$$

Assim o Teorema 8 fica demonstrado.  $\square$

**Teorema 9.** *Sejam  $b(\varphi, \theta), c(\varphi, \theta)$  funções de classe  $C^1$ ,  $2\pi$ -periódicas. O número de ciclos limite do sistema:*

$$\begin{cases} \dot{r} &= r - 1 + \varepsilon(a_0 + a_1 r + a_2 \theta + a_3 \varphi), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(b_0 + b_1 r + b(\varphi, \theta)), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon(c_0 + c_1 r + c(\varphi, \theta)), \end{cases} \quad (3.10)$$

é dado pela quantidade de zeros simples do sistema:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (b(t + \theta_0, \phi_0 + t) + b_0 + b_1) dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (c(t + \theta_0, \phi_0 + t) + c_0 + c_1) dt &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

nas variáveis  $\theta_0$  e  $\phi_0$ .

*Demonstração.* De fato, procedendo de maneira análoga ao que foi feito no Teorema 8, temos que  $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\theta_0, \varphi_0), \mathcal{F}_2(\theta_0, \varphi_0))$ , onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\theta_0, \varphi_0) &= \int_0^{2\pi} (b(t + \theta_0, \phi_0 + t) + b_0 + b_1) dt = 0, \\ \mathcal{F}_2(\theta_0, \varphi_0) &= \int_0^{2\pi} (c(t + \theta_0, \phi_0 + t) + c_0 + c_1) dt = 0. \end{aligned}$$

Então, segue do Teorema 5 que os ciclos limite do sistema (3.10) são os zeros do sistema (3.11).  $\square$

## 3.2 Ciclos limite em um toro isócrono bidimensional em $\mathbb{R}^3$

Seja  $\mathbb{T}$  um toro bidimensional de um sistema integrável Hamiltoniano com dois graus de liberdade contido em  $\mathbb{R}^3$  e folheado por órbitas periódicas. Sob as hipóteses do Teorema de Poincaré-Birkhoff estudaremos as órbitas periódicas de  $\mathbb{T}$  que persistem quando perturbamos este sistema integrável dentro da classe de todos os sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, baseado em [4].

Assuma agora que  $\mathbb{T}$  é um toro isócrono bidimensional de um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^3$ , e que  $\mathbb{T}$  é preenchido por órbitas com mesmo período. Suponha ainda, que não existe outro toro invariante em uma vizinhança de  $\mathbb{T}$ . Queremos estudar quantas órbitas periódicas de  $\mathbb{T}$  persistem quando perturbamos o sistema em uma classe de sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^3$ . Claramente, não podemos aplicar o Teorema de Poincaré-Birkhoff, pois ele funciona apenas quando perturbamos níveis de energia de um sistema Hamiltoniano integrável, e nestes níveis de energia as órbitas periódicas do toro invariante não são isoladas.

Em geral podemos considerar um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^3$ , com campo vetorial associado  $X_0$ , possuindo um subconjunto  $S$  isócrono de dimensão dois, isto é, o subconjunto  $S$  é composto de órbitas periódicas, todas com o mesmo período. Se tomarmos o campo vetorial  $X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon X$ , como uma  $\varepsilon$ -perturbação de  $X_0$ , então a pergunta natural a se fazer é: O campo vetorial perturbado  $X_\varepsilon$  possui orbitas periódicas ou ciclos limite emergindo de  $S$ ? Como conta-los? Quantos são? Estas questões podem ser consideradas análogas sobre a teoria dos ciclos limites de sistemas diferenciais planares. A ferramenta utilizada para resolver estes problemas é a Teoria da Média.

Iremos ilustrar o método de estudar os ciclos limite que bifurcam de órbitas periódicas que preenchem um toro bi-dimensional isócrono em um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^3$  com o seguinte exemplo, mas o método pode ser aplicado para qualquer sistema diferencial sob as mesmas hipóteses.

Nesta seção consideramos o sistema diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)f(x, y, z) - z) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon P(x, y, z), \\ \dot{y} &= ((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)f(x, y, z) - z) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= z f(x, y, z) + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + \varepsilon R(x, y, z), \end{aligned} \quad (3.12)$$

definido em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ , onde  $f(x, y, z) = 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - z^2$ ,  $\varepsilon$  é um parâmetro suficientemente pequeno,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  são polinômios. Ainda, o ponto denota a derivada com respeito ao tempo  $t$ .

O toro bidimensional, definido por,

$$\mathbb{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$$

é uma superfície invariante para o sistema não perturbado (3.12) com  $\varepsilon = 0$ . Temos ainda, que a solução do sistema não perturbado, que em  $t = 0$ , passa pelo ponto

$$((2 + \cos \theta_0) \cos \phi_0, (2 + \cos \theta_0) \text{sen} \phi_0, \text{sen} \theta_0) \in \mathbb{T}$$

é dada por

$$x(t) = (2 + \cos(t + \theta_0)) \cos \phi_0, \quad y(t) = (2 + \cos(t + \theta_0)) \text{sen} \phi_0, \quad z(t) = \text{sen}(t + \theta_0),$$

que é  $2\pi$ -periódica, o que significa que  $\mathbb{T}$  é isócrono.

Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno estudamos quantos ciclos limite o sistema (3.12) possui bifurcando das órbitas periódicas no toro invariante  $\mathbb{T}$  do sistema não perturbado; lembramos que uma órbita periódica de um sistema diferencial é um ciclo limite se ela é isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema. Nós não fornecemos uma resposta completa, apenas estudamos os ciclos limites bifurcados que são controlados até a primeira ordem em  $\varepsilon$  usando Teoria da Média.

**Teorema 10.** *Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, se  $d$  é o maior valor entre os graus dos polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$ , e  $\mathcal{F}(\phi)$  não é nula, com*

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, 1) \text{sen} \phi}{2 + \cos \theta} d\theta, \quad (3.13)$$

onde  $\phi \in \mathbb{S}^1$  e  $\tilde{P}(\theta, \phi, 1)$ ,  $\tilde{Q}(\theta, \phi, 1)$  são os polinômios  $P$  e  $Q$  após a mudança de coordenadas, então o número máximo de ciclos limite do sistema (3.12) que bifurca das órbitas periódicas do toro  $\mathbb{T}$  do sistema não perturbado é  $2(d + 1)$ . Além disto, esta cota é atingida.

Para demonstrar o Teorema 10, iremos separar em lemas os resultados importantes, a fim de aplicar o Teorema 5.

**Lema 1.** *Usando a mudança de coordenadas  $(\theta, \phi, r)$  em uma vizinhança do toro  $\mathbb{T}$ , o sistema (3.12) pode ser transformado em (2.8). O sistema transformado satisfaz i) e ii) do Teorema 5 e (2.12) fica da forma de (3.13).*

*Demonstração.* Se  $\theta, \phi \in \mathbb{S}^1$  e  $r \in (0, 2)$ , então

$$x = (2 + r \cos \theta) \cos \phi, \quad y = (2 + r \cos \theta) \text{sen} \phi, \quad z = r \text{sen} \theta, \quad (3.14)$$

é a mudança de coordenadas em  $\mathbb{S}^1 \times \Omega$ , com  $\Omega := \{(\phi, r) | \phi \in \mathbb{S}^1, 0 < r < 2\}$ . O toro  $\mathbb{T}$  corresponde aos pontos em que  $r = 1$ .

Vamos agora encontrar o sistema (3.12) nas novas coordenadas. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -r\text{sen}\theta \cos \phi, & \frac{dx}{d\phi} &= -(2 + r \cos \theta)\text{sen}\phi, & \frac{dx}{dr} &= \cos \theta \cos \phi. \\ \frac{dy}{d\theta} &= -r\text{sen}\theta\text{sen}\phi, & \frac{dy}{d\phi} &= (2 + r \cos \theta) \cos \phi, & \frac{dy}{dr} &= \cos \theta\text{sen}\phi. \\ \frac{dz}{d\theta} &= r \cos \theta, & \frac{dz}{d\phi} &= 0, & \frac{dz}{dr} &= \text{sen}\theta.\end{aligned}$$

Temos, pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{dx}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dx}{dr} \frac{dr}{dt} = -r\text{sen}\theta \cos \phi \dot{\theta} - (2 + r \cos \theta)\text{sen}\phi \dot{\phi} + \cos \theta \cos \phi \dot{r}, \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{dy}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dy}{dr} \frac{dr}{dt} = -r\text{sen}\theta\text{sen}\phi \dot{\theta} + (2 + r \cos \theta) \cos \phi \dot{\phi} + \cos \theta\text{sen}\phi \dot{r}, \\ \dot{z} &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{dz}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dz}{dr} \frac{dr}{dt} = r \cos \theta \dot{\theta} + \text{sen}\theta \dot{r}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r\text{sen}\theta \cos \phi \dot{\theta} - (2 + r \cos \theta)\text{sen}\phi \dot{\phi} + \cos \theta \cos \phi \dot{r}, \\ \dot{y} &= -r\text{sen}\theta\text{sen}\phi \dot{\theta} + (2 + r \cos \theta) \cos \phi \dot{\phi} + \cos \theta\text{sen}\phi \dot{r}, \\ \dot{z} &= r \cos \theta \dot{\theta} + \text{sen}\theta \dot{r}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Por outro lado, substituindo  $x, y, z$  dados em (3.14) no sistema (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left[ \frac{((2 + r \cos \theta)^2 \cos^2 \phi + (2 + r \cos \theta)^2 \text{sen}^2 \phi)^{1/2} - 2}{2 + r \cos \theta} \tilde{f}(\theta, \phi, r) - r\text{sen}\theta \right] \\ &= r \cos \phi (\cos \theta \tilde{f}(\theta, \phi, r) - \text{sen}\theta) + \varepsilon \tilde{P}(\theta, \phi, r), \\ \dot{y} &= \left[ \frac{((2 + r \cos \theta)^2 \cos^2 \phi + (2 + r \cos \theta)^2 \text{sen}^2 \phi)^{1/2} - 2}{2 + r \cos \theta} \tilde{f}(\theta, \phi, r) - r\text{sen}\theta \right] \\ &= r\text{sen}\phi (\cos \theta \tilde{f}(\theta, \phi, r) - \text{sen}\theta) + \varepsilon \tilde{Q}(\theta, \phi, r), \\ \dot{z} &= r\text{sen}\theta \tilde{f}(\theta, \phi, r) + r \cos \theta + \varepsilon \tilde{R}(\theta, \phi, r),\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde  $\tilde{Y}(\theta, \phi, r) = Y((2 + r \cos \theta) \cos \phi, (2 + r \cos \theta)\text{sen}\phi, r\text{sen}\theta)$ . Temos ainda que

$$f((2 + r \cos \theta) \cos \phi, (2 + r \cos \theta)\text{sen}\phi, r\text{sen}\theta) = 1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \text{sen}^2 \theta = 1 - r^2.$$

Então, substituindo a expressão de  $\tilde{f}(\theta, \phi, r)$  em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r(\cos \theta(1 - r^2) - \text{sen}\theta) \cos \phi + \varepsilon \tilde{P}(\theta, \phi, r), \\ \dot{y} &= r(\cos \theta(1 - r^2) - \text{sen}\theta)\text{sen}\phi + \varepsilon \tilde{Q}(\theta, \phi, r), \\ \dot{z} &= r(\text{sen}\theta(1 - r^2) + \cos \theta) + \varepsilon \tilde{R}(\theta, \phi, r).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Igualando as expressões de  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  nos sistemas (3.15) e (3.17), temos

$$r(\cos \theta(1 - r^2) - \text{sen}\theta) \cos \phi + \varepsilon \tilde{P}(\theta, \phi, r) = -r\text{sen}\theta \cos \phi \dot{\theta} - (2 + r \cos \theta)\text{sen}\phi \dot{\phi} + \cos \theta \cos \phi \dot{r},\tag{3.18}$$

$$r(\cos \theta(1 - r^2) - \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \phi + \varepsilon \tilde{Q}(\theta, \phi, r) = -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \dot{\theta} + (2 + r \cos \theta) \cos \phi \dot{\phi} + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \dot{r}, \quad (3.19)$$

$$r(\operatorname{sen} \theta(1 - r^2) + \cos \theta) + \varepsilon \tilde{R}(\theta, \phi, r) = r \cos \theta \dot{\theta} + \operatorname{sen} \theta \dot{r}. \quad (3.20)$$

Com objetivo de encontrar expressões para  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{r}$ , vamos multiplicar a equação (3.18) por  $\cos \phi$  e somar com a equação (3.19) multiplicada por  $\operatorname{sen} \phi$ . Fazendo isto, obtemos

$$r(\cos \theta(1 - r^2) - \operatorname{sen} \theta) + \varepsilon(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r)) = -r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} + \cos \theta \dot{r}. \quad (3.21)$$

Multiplicando a equação (3.20) por  $\cos \theta$  e subtraindo a equação (3.21) multiplicada por  $\operatorname{sen} \theta$ , temos

$$r + \varepsilon(\tilde{R}(\theta, \phi, r) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r))) = r \dot{\theta}.$$

Isolando  $\dot{\theta}$  na equação acima, temos

$$\dot{\theta} = 1 + \varepsilon(\tilde{R}(\theta, \phi, r) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r)))/r.$$

Fazendo agora a equação (3.18) multiplicada por  $\operatorname{sen} \phi$  e subtraindo a equação (3.19) multiplicada por  $\cos \phi$ , obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi - \tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi) &= -(2 + r \cos \theta)(\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) \dot{\phi} \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \varepsilon(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)/(2 + r \cos \theta). \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.21) por  $\cos \theta$  e somando com a equação (3.20) multiplicada por  $\operatorname{sen} \theta$ , segue que

$$\begin{aligned} r(1 - r^2)(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + \varepsilon[\cos \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r)) + \tilde{R}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \theta] &= \dot{r} \\ \Rightarrow \dot{r} &= r(1 - r^2) + \varepsilon[\cos \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r)) + \tilde{R}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \theta]. \end{aligned}$$

Portanto o sistema (3.12) nas novas coordenadas se torna no sistema (3.22),

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(\tilde{R}(\theta, \phi, r) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r)))/r, \\ \dot{\phi} &= \varepsilon(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)/(2 + r \cos \theta), \\ \dot{r} &= r(1 - r^2) + \varepsilon[\cos \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r)) + \tilde{R}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \theta]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Trocando a variável independente  $t$  do sistema (3.22) pela variável  $\theta$ , obtemos um sistema equivalente. Fazendo isto, obtemos

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{d\phi}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^{-1}, \\ \phi' &= \frac{r\varepsilon(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)}{(2 + r \cos \theta)(r + \varepsilon(\tilde{R}(\theta, \phi, r) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r))))}. \end{aligned}$$

Como em  $\varepsilon = 0$  temos que  $\phi'(\varepsilon) = 0$ , e ainda

$$\frac{d\phi'}{d\varepsilon}(0) = \frac{(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)(2 + r \cos \theta)}{(2 + r \cos \theta)^2}.$$

Segue que a expansão de Taylor de primeira ordem da função  $\phi'$  em  $\varepsilon = 0$  é dada por

$$\phi' = \frac{\varepsilon(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)}{(2 + r \cos \theta)} + O(\varepsilon^2). \quad (3.23)$$

Analogamente,

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^{-1},$$

$$r' = \frac{r(1 - r^2) + \varepsilon(\cos \theta(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)) + \operatorname{sen} \theta \tilde{R}(\theta, \phi, r)r}{(r + \varepsilon(\tilde{R}(\theta, \phi, r) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r))))}$$

e como temos que  $r'(0) = r(1 - r^2)$ , e

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{d\varepsilon}(0) &= (\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r))(\cos \theta + (1 - r^2) \operatorname{sen} \theta) \\ &\quad + \tilde{R}(\theta, \phi, r)(\operatorname{sen} \theta - (1 - r^2) \cos \theta), \end{aligned}$$

a expansão por série de Taylor de primeira ordem da função  $\phi'$  em  $\varepsilon = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r^2) + \varepsilon(\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r))(\cos \theta + (1 - r^2) \operatorname{sen} \theta) \\ &\quad + \varepsilon \tilde{R}(\theta, \phi, r)(\operatorname{sen} \theta - (1 - r^2) \cos \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto, as equações (3.23) e (3.24) formam um sistema equivalente ao sistema (3.22), e delas temos que

$$F_1(\theta, \mathbf{x}) = \left( \frac{(\tilde{Q}(\theta, \phi, r) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, r) \operatorname{sen} \phi)}{(2 + r \cos \theta)}, S(\theta, \phi, r) \right),$$

onde

$$\begin{aligned} S(\theta, \phi, r) &= (\cos \phi \tilde{P}(\theta, \phi, r) + \operatorname{sen} \phi \tilde{Q}(\theta, \phi, r))(\cos \theta + (1 - r^2) \operatorname{sen} \theta) \\ &\quad + \tilde{R}(\theta, \phi, r)(\operatorname{sen} \theta - (1 - r^2) \cos \theta). \end{aligned}$$

Denotando por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ r \end{pmatrix},$$

então o sistema formado pelas equações (3.23) e (3.24) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}(\theta) = \begin{pmatrix} \phi'(\theta) \\ r'(\theta) \end{pmatrix} = F_0(\mathbf{x}) + \varepsilon F_1(\theta, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(\theta, \mathbf{x}, \varepsilon),$$

onde,  $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$  e  $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \Omega$  são  $2\pi$ -periódicas em  $\theta$  e são analíticas, ou seja, (3.23), (3.24) tem a forma (2.8). Considere o conjunto

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{z}_\phi = (\phi, 1) \mid \phi \in \mathbb{S}^2\} \subset \Omega.$$

A solução de (3.23) e (3.24) para  $\varepsilon = 0$  passando pelo ponto  $\mathbf{z}_\phi$  é dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \mathbf{z}_\phi) = \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix},$$

que é constante e  $2\pi$ -periódica em  $\theta$ , visto que  $\phi' = 0$ , então  $\phi = c$  e em  $r = 1$  temos que  $r' = 0$ . Temos que  $\mathcal{Z}$  é uma variedade unidimensional invariante e folheada por órbitas periódicas do sistema não perturbado formado pelas equações (3.23) e (3.24) quando  $\varepsilon = 0$ , que corresponde ao toro invariante  $\mathbb{T}$  do sistema (3.22) para  $\varepsilon = 0$ . Note que em  $\varepsilon = 0$  o sistema formado pelas equações (3.23) e (3.24) é dado por

$$\begin{aligned} \phi' &= 0, \\ r' &= r(1 - r^2). \end{aligned} \tag{3.25}$$

A linearização do sistema (3.25) em  $\mathcal{Z}$  é dada por

$$\begin{pmatrix} \phi' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi'}{d\phi}(\phi, 1) & \frac{dr'}{dr}(\phi, 1) \\ \frac{dr'}{d\phi}(\phi, 1) & \frac{dr'}{dr}(\phi, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ r \end{pmatrix},$$

no qual as soluções são  $\phi(\theta) = c$  e  $r(\theta) = e^{-2\theta}$ . A matriz fundamental e sua inversa são, respectivamente

$$\mathbf{M}_{\mathbf{z}_\phi(\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{z}_\phi(\theta)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\theta} \end{pmatrix},$$

então,

$$\mathbf{M}_{\mathbf{z}_\phi(\mathbf{0})}^{-1} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}_\phi(2\pi)}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-4\pi} \end{pmatrix}.$$

Tomando  $V = \mathbb{S}^1$  e  $\beta_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow (0, 2)$  tal que para todo  $\alpha \in \mathbb{S}^1$  temos que  $\beta_0(\alpha) = 1$ , e assim as hipóteses do Teorema 5 são satisfeitas para (3.23) e (3.24). Neste caso (2.12) fica da forma

$$\mathcal{F}(\phi) := \xi \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-4\pi} \end{pmatrix} F_1(\theta, \mathbf{x}(\theta, \mathbf{z}_\phi)) d\theta.$$

Portanto

$$\mathcal{F}(\phi) := \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, 1) \sin \phi}{2 + \cos \theta} d\theta,$$

e assim fica demonstrado o lema.  $\square$

**Definição 6.** *Seja  $A$  é um compacto e topologicamente Hausdorff. O conjunto de  $j + 1$  funções reais  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_j(x)$  definidas em  $A$  formam um sistema de Chebyshev em  $A$  se qualquer combinação linear não trivial  $a_0 f_0(x) + \dots + a_j f_j(x)$  possui no máximo  $j$  zeros em  $A$  contando com as multiplicidades.*

**Lema 2.** Se  $d$  é um número natural, então

$$\sum_{i+j=0}^d c_{ij} \cos^i \phi \operatorname{sen}^j \phi = \tilde{a}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{a}_l \cos(l\phi) + \tilde{b}_l \operatorname{sen}(l\phi)),$$

onde  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_d, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d$  são funções de  $c_{ij}$  com  $0 \leq i + j \leq d$ .

*Demonstração.* A expansão em série de Fourier de

$$\sum_{i+j=0}^d c_{ij} \cos^i \phi \operatorname{sen}^j \phi,$$

é exatamente

$$\tilde{a}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{a}_l \cos(l\phi) + \tilde{b}_l \operatorname{sen}(l\phi)),$$

onde  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_d, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d$  são funções de  $c_{ij}$ , visto que para  $i + j \geq d$  os coeficientes da série de Fourier são todos nulos.  $\square$

**Lema 3.** Se  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  são polinômios de graus no máximo  $d$ , então

$$\mathcal{F}(\phi) := \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, 1) \operatorname{sen} \phi}{2 + \cos \theta} d\theta$$

pode ser escrito na forma

$$\mathcal{F}(\phi) = a_0 + \sum_{l=1}^{d+1} (a_l \cos(l\phi) + b_l \operatorname{sen}(l\phi)), \quad (3.26)$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_{d+1}, b_1, \dots, b_{d+1}$  são funções dos coeficientes dos polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$ . Se esta função não for identicamente nula, então ela possui no máximo  $2(d+1)$  zeros isolados contando as multiplicidades em  $\mathbb{S}^1$ .

*Demonstração.* Suponha que os polinômios são da seguinte forma

$$P(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^d p_{ijk} x^i y^j z^k, \quad Q(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^d q_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Então, como pela mudança de coordenadas dada em (3.14), temos que

$$x = (2 + r \cos \theta) \cos \phi, \quad y = (2 + r \cos \theta) \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \operatorname{sen} \theta$$

e denotando por

$$\tilde{P}(\theta, \phi, r) := P((2 + r \cos \theta) \cos \phi, (2 + r \cos \theta) \operatorname{sen} \phi, r \operatorname{sen} \theta),$$

$$\tilde{Q}(\theta, \phi, r) := Q((2 + r \cos \theta) \cos \phi, (2 + r \cos \theta) \operatorname{sen} \phi, r \operatorname{sen} \theta),$$

os polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$ , após a mudança de coordenadas, são dados por,

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\theta, \phi, 1) &= \sum_{i+j+k=0}^d p_{ijk} (2 + \cos \theta)^i \cos^i \phi (2 + \cos \theta)^j \sin^j \phi \sin^k \theta \\ &= \sum_{i+j+k=0}^d p_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j} \cos^i \phi \sin^j \phi \sin^k \theta. \\ \tilde{Q}(\theta, \phi, 1) &= \sum_{i+j+k=0}^d q_{ijk} (2 + \cos \theta)^i \cos^i \phi (2 + \cos \theta)^j \sin^j \phi \sin^k \theta \\ &= \sum_{i+j+k=0}^d q_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j} \cos^i \phi \sin^j \phi \sin^k \theta.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{P}(\theta, \phi, 1)}{2 + \cos \theta} &= \sum_{i+j=0}^d \left( \sum_{k=0}^{d-i-j} p_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta \right) \cos^i \phi \sin^j \phi, \\ \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1)}{2 + \cos \theta} &= \sum_{i+j=0}^d \left( \sum_{k=0}^{d-i-j} q_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta \right) \cos^i \phi \sin^j \phi.\end{aligned}$$

Integrando as expressões acima no intervalo  $[0, 2\pi]$ , obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{P}(\theta, \phi, 1)}{2 + \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^d \left( \sum_{k=0}^{d-i-j} p_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta \right) \cos^i \phi \sin^j \phi d\theta \\ &= \sum_{i+j=0}^d \left( \sum_{k=0}^{d-i-j} \int_0^{2\pi} p_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta d\theta \right) \cos^i \phi \sin^j \phi \\ &= \sum_{i+j=0}^d \tilde{p}_{ij} \cos^i \phi \sin^j \phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1)}{2 + \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^d \left( \sum_{k=0}^{d-i-j} q_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta \right) \cos^i \phi \sin^j \phi d\theta \\ &= \sum_{i+j=0}^d \left( \sum_{k=0}^{d-i-j} \int_0^{2\pi} q_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta d\theta \right) \cos^i \phi \sin^j \phi \\ &= \sum_{i+j=0}^d \tilde{q}_{ij} \cos^i \phi \sin^j \phi,\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{ij} &= \sum_{k=0}^{d-i-j} \int_0^{2\pi} p_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta d\theta, \\ \tilde{q}_{ij} &= \sum_{k=0}^{d-i-j} \int_0^{2\pi} q_{ijk} (2 + \cos \theta)^{i+j-1} \sin^k \theta d\theta.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=0}^d \tilde{p}_{ijk} \cos^i \phi \operatorname{sen}^j \phi &= \tilde{a}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{a}_l \cos(l\phi) + \tilde{b}_l \operatorname{sen}(l\phi)), \\ \sum_{i+j=0}^d \tilde{q}_{ijk} \cos^i \phi \operatorname{sen}^j \phi &= \tilde{c}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{c}_l \cos(l\phi) + \tilde{d}_l \operatorname{sen}(l\phi)), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_d, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d$  são funções de  $\tilde{p}_{ij}$  e  $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_d, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_d$  são funções de  $\tilde{q}_{ij}$ . Lembrando que

$$\begin{aligned} \cos \phi \cos(l\phi) &= (\cos((l+1)\phi) + \cos(l-1)\phi)/2, \\ \cos \phi \operatorname{sen}(l\phi) &= (\operatorname{sen}((l+1)\phi) - \operatorname{sen}(l-1)\phi)/2, \\ \operatorname{sen} \phi \cos(l\phi) &= (\operatorname{sen}((l+1)\phi) + \operatorname{sen}(l-1)\phi)/2, \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}(l\phi) &= (\cos((l-1)\phi) - \cos(l+1)\phi)/2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Como no Lema 3 encontramos a expressão para a função  $\mathcal{F}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1) \cos \phi}{2 + \cos \theta} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{P}(\theta, \phi, 1) \operatorname{sen} \phi}{2 + \cos \theta} d\theta \\ &= \cos \phi \left( \tilde{c}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{c}_l \cos(l\phi) + \tilde{d}_l \operatorname{sen}(l\phi)) \right) - \operatorname{sen} \phi \left( \tilde{a}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{a}_l \cos(l\phi) + \tilde{b}_l \operatorname{sen}(l\phi)) \right) \\ &= \cos \phi \tilde{c}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{c}_l \cos \phi \cos(l\phi) + \tilde{d}_l \cos \phi \operatorname{sen}(l\phi)) \\ &\quad - \left( \operatorname{sen} \phi \tilde{a}_0 + \sum_{l=1}^d (\tilde{a}_l \operatorname{sen} \phi \cos(l\phi) + \tilde{b}_l \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}(l\phi)) \right) \\ &= a_0 + \sum_{l=1}^{d+1} (a_l \cos(l\phi) + b_l \operatorname{sen}(l\phi)), \end{aligned}$$

onde para obter a última igualdade utilizamos as equações (3.27). Agora, baseado em [7], vamos mostrar que as funções  $1, \cos \phi, \operatorname{sen} \phi, \dots, \cos((d+1)\phi), \operatorname{sen}((d+1)\phi)$  formam um sistema de Chebyshev em  $\mathbb{S}^1$ , ou seja, o sistema não identicamente nulo, abaixo

$$T(\phi) = a_0 + a_1 \cos \phi + b_1 \operatorname{sen} \phi + \dots + a_{d+1} \cos((d+1)\phi) + b_{d+1} \operatorname{sen}((d+1)\phi)$$

não possui mais que  $2(d+1)$  zeros em  $\mathbb{S}^1$ . Para isto, considere a correspondência injetora entre os pontos no círculo  $|z| = 1$  e os valores  $\phi \pmod{2\pi}$  dados por  $e^{i\phi} = z$ . Pela formula de Euler temos que

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i},$$

logo

$$T(\phi)e^{in\phi} = P(z),$$

onde  $P$  é um polinômio de grau  $2n$ . Se  $T$  possui mais que  $2n$  zeros distintos módulo  $2\pi$ , então  $P$  possui mais que  $2n$  zeros distintos em  $|z| = 1$ . Logo,  $P$  é identicamente nulo e,

portanto,  $T$  também é identicamente nulo, contradizendo a hipótese. Portanto, a função  $\mathcal{F}(\phi)$  possui no máximo  $2(d+1)$  zeros em  $\mathbb{S}^1$ , no caso em que ela não é identicamente nula.  $\square$

**Lema 4.** *Temos que*

- i. *Existem polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  tais que os coeficientes da função  $\mathcal{F}(\phi)$  dada em (3.26) são todos independentes.*
- ii. *Para cada natural  $d$ , podemos encontrar polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  ambos de grau  $d$  tais que a função  $\mathcal{F}(\phi)$  dada em (3.26) possui exatamente  $\nu = 2(d+1)$  zeros e cada um deles é simples.*

*Demonstração.* i. Vamos construir polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  ambos de grau  $d$  de modo que os coeficientes de  $\mathcal{F}(\phi)$  são todos independentes. Tome  $G_0(x, y) = 1$ ,  $H_0(x, y) = 0$  e defina recursivamente

$$\begin{aligned} G_{d+1}(x, y) &= xG_d(x, y) - yH_d(x, y), \\ H_{d+1}(x, y) &= yG_d(x, y) + xH_d(x, y), \end{aligned}$$

onde  $G_d(x, y)$  e  $H_d(x, y)$  são polinômios de grau  $d$ . Se definirmos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_d(\theta, \phi, r) &= G_d((2+r\cos\theta)\cos\phi, (2+r\cos\theta)\sin\phi), \\ \tilde{H}_d(\theta, \phi, r) &= H_d((2+r\cos\theta)\cos\phi, (2+r\cos\theta)\sin\phi), \end{aligned}$$

note que

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= xG_0(x, y) - yH_0(x, y) = x, \\ G_2(x, y) &= xG_1(x, y) - yH_1(x, y) = x^2 - y^2, \\ G_3(x, y) &= xG_2(x, y) - yH_2(x, y) = x^3 - xy^2 - 2xy^2, \\ H_1(x, y) &= yG_0(x, y) + xH_0(x, y) = y, \\ H_2(x, y) &= yG_1(x, y) + xH_1(x, y) = 2xy, \\ H_3(x, y) &= yG_2(x, y) + xH_2(x, y) = 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(\theta, \phi, r) &= (2+r\cos\theta)\cos\phi, \\ \tilde{G}_2(\theta, \phi, r) &= (2+r\cos\theta)^2\cos^2\phi - (2+r\cos\theta)^2\sin^2\phi \\ &= (2+r\cos\theta)^2\cos 2\phi, \\ \tilde{G}_3(\theta, \phi, r) &= (2+r\cos\theta)^3\cos^3\phi - (2+r\cos\theta)^3\cos\phi\sin^2\phi + \\ &\quad - 2(2+r\cos\theta)^3\cos\phi\sin^2\phi \\ &= (2+r\cos\theta)^3\cos 3\phi, \end{aligned}$$

e

$$\tilde{H}_1(\theta, \phi, r) = (2 + r \cos \theta) \operatorname{sen} \phi,$$

$$\tilde{H}_2(\theta, \phi, r) = 2(2 + r \cos \theta)^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi = (2 + r \cos \theta)^2 \operatorname{sen} 2\phi.$$

Assim,

$$\tilde{G}_d(\theta, \phi, r) = (2 + r \cos \theta)^d \cos d\phi, \quad (3.28)$$

$$\tilde{H}_d(\theta, \phi, r) = (2 + r \cos \theta)^d \operatorname{sen} d\phi. \quad (3.29)$$

Agora definimos os seguintes polinômios em  $\mathbb{R}^3$  que só dependem das variáveis  $x$  e  $y$ :

$$P_d(x, y, z) = -a_0 y + \sum_{l=0}^d \frac{-b_{l+1} G_l + a_{l+1} H_l}{c_{l+1}}, \quad (3.30)$$

$$Q_d(x, y, z) = a_0 x + \sum_{l=0}^d \frac{a_{l+1} G_l + b_{l+1} H_l}{c_{l+1}}, \quad (3.31)$$

onde  $a_{0,1}, \dots, a_{d+1}, b_1, \dots, b_{d+1} \in \mathbb{R}$  e

$$c_{l+1} = \int_0^{2\pi} (2 + r \cos \theta)^{l-1} d\theta \neq 0, \quad l = 0, 1, \dots, d.$$

Note que  $P_0(x, y, z), Q_0(x, y, z), P_1(x, y, z)$  e  $Q_1(x, y, z)$  são de grau 1. Para  $d \geq 1$  os polinômios tem grau  $d$ . Então,

$$\operatorname{sen} \phi \tilde{P}_d(\theta, \phi, 1) = -a_0 (2 + \cos \theta) \operatorname{sen}^2 \phi + \sum_{l=0}^d \frac{-b_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + a_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \operatorname{sen} \phi,$$

$$\cos \phi \tilde{Q}_d(\theta, \phi, 1) = a_0 (2 + \cos \theta) \cos^2 \phi + \sum_{l=0}^d \frac{a_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + b_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \cos \phi.$$

Substituindo  $\tilde{P}_d(\theta, \phi, 1)$  e  $\tilde{Q}_d(\theta, \phi, 1)$  em (3.13), temos

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_0^{2\pi} \left[ a_0 (2 + \cos \theta) \cos^2 \phi + \sum_{l=0}^d \frac{a_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + b_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \cos \phi + \left( a_0 (2 + \cos \theta) \operatorname{sen}^2 \phi - \sum_{l=0}^d \frac{-b_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + a_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \operatorname{sen} \phi \right) \right] \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta.$$

Colocando  $a_0(2 + \cos \theta)$  em evidência, obtemos

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_0^{2\pi} \left[ a_0 (2 + \cos \theta) (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) + \sum_{l=0}^d \frac{a_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + b_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \cos \phi - \sum_{l=0}^d \frac{-b_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + a_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \operatorname{sen} \phi \right] \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta.$$

Como,  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ , resulta que

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_0^{2\pi} \left[ a_0(2 + \cos \theta) + \sum_{l=0}^d \frac{a_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + b_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \cos \phi - \sum_{l=0}^d \frac{-b_{l+1} \tilde{G}_l(\theta, \phi, 1) + a_{l+1} \tilde{H}_l(\theta, \phi, 1)}{c_{l+1}} \sin \phi \right] \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta.$$

Utilizando as equações (3.28), temos

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{l=0}^d \frac{\cos \phi (a_{l+1} (2 + \cos \theta)^{l-1} \cos(l\phi) + b_{l+1} (2 + \cos \theta)^{l-1} \sin(l\phi)) - \sum_{l=0}^d \frac{\sin \phi (-b_{l+1} (2 + \cos \theta)^{l-1} \cos(l\phi) + a_{l+1} (2 + \cos \theta)^{l-1} \sin(l\phi))}{c_{l+1}}}{c_{l+1}} d\theta$$

e substituindo os coeficientes  $c_{l+1}$  que aparecem nos denominadores e desenvolvendo as equações, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi) &= \int_0^{2\pi} a_0 + \frac{a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi}{c_1 (2 + \cos \theta)} d\theta + \\ &+ \left[ \sum_{l=1}^d [a_{l+1} (\cos(l\phi) \cos \phi - \sin(l\phi) \sin \phi) + b_{l+1} (\sin(l\phi) \cos \phi - \cos(l\phi) \sin \phi)] \int_0^{2\pi} \frac{(2 + \cos \theta)^{l-1}}{c_{l+1}} d\theta \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Usando que

$$\begin{aligned} \cos((l+1)\phi) &= \cos(\phi) \cos(l\phi) - \sin(\phi) \sin(l\phi), \\ \sin((l+1)\phi) &= \cos(\phi) \sin(l\phi) - \sin(\phi) \cos(l\phi), \end{aligned}$$

e pela definição de  $c_{l+1}$ , segue que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(2 + \cos \theta)^{l-1}}{c_{l+1}} d\theta = \frac{1}{c_{l+1}} \int_0^{2\pi} (2 + \cos \theta)^{l-1} d\theta = 1.$$

Em particular,

$$c_1 = \int_0^{2\pi} (2 + \cos \theta)^{-1} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

E ainda

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a_0 + \frac{a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi}{c_1 (2 + \cos \theta)} d\theta &= 2\pi a_0 + \int_0^{2\pi} \frac{a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (2 + \cos \theta)} d\theta \\ &= 2\pi a_0 + (a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi) \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \\ &= 2\pi a_0 + a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi. \end{aligned}$$

Então, substituindo em (3.32), obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\phi) &= 2\pi a_0 + a_1 \cos \phi + b_1 \operatorname{sen} \phi + \sum_{l=1}^d a_{l+1} \cos((l+1)\phi) + b_{l+1} \operatorname{sen}((l+1)\phi) \\ &= 2\pi a_0 + \sum_{l=1}^{d+1} a_l \cos(l\phi) + b_l \operatorname{sen}(l\phi).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Como os coeficientes  $a_0, \dots, a_{d+1}, b_1, \dots, b_{d+1}$  foram escolhidos de maneira independente, (i) está provado.

ii. Consideremos dois casos:  $d \geq 1$  e  $d = 0$ .

$d \geq 1$  : Tome  $\nu = 2(d+1)$ . Usando os polinômios  $P_d(x, y, z)$  e  $Q_d(x, y, z)$  de grau  $d$  dados por (3.30) e (3.31), a equação (3.33) se torna

$$\mathcal{F}(\phi) = \tilde{a}_0 + \sum_{l=0}^{d+1} (a_l \cos(l\phi) + b_l \operatorname{sen}(l\phi)).\tag{3.34}$$

Como as  $\nu + 1 = 2(d+1) + 1$  funções  $1, \cos \phi, \operatorname{sen} \phi, \dots, \cos(\nu\phi/2), \operatorname{sen}(\nu\phi/2)$  formam um sistema de Chebyshev em  $\mathbb{S}^1$ , encontramos uma única solução para  $\tilde{a}_0, a_1, \dots, a_{\nu/2}, b_1, \dots, b_{\nu/2}$  tal que a função  $\mathcal{F}(\phi)$  em (3.34) possui um zero simples para cada um dos pontos  $\phi_1, \dots, \phi_\nu$ . Sejam  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\nu/2}, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{\nu/2}$  esta solução. Agora consideramos os polinômios  $P_d(x, y, z)$  e  $Q_d(x, y, z)$  dados por (3.30) e (3.31) tais que

$$\tilde{a}_0 = \bar{a}_0, \dots, a_{\nu/2} = \bar{a}_{\nu/2}, b_1 = \bar{b}_1, \dots, b_{\nu/2} = \bar{a}_{\nu/2}.$$

Então a função  $\mathcal{F}(\phi)$  dada em (3.33) possui exatamente  $\nu$  zeros e cada um deles é simples.

$d = 0$  : Então  $\nu_\varepsilon = 2(d+1)$  só pode assumir o valor  $\nu = 2$ . Seja  $\tilde{a}_0 = 0$  e  $d = 0$  em (3.30) e (3.31), então obtemos  $P_0(x, y, z) = b_1, Q_0(x, y, z) = a_1$  de grau  $d = 0$  e  $\mathcal{F}(\phi) = a_1 \cos \phi + b_1 \operatorname{sen} \phi$ . Tomando  $a_1 = 1$  e  $b_1 = 0$ , temos  $\mathcal{F}(\phi) = \cos \phi$  que possui exatamente dois zeros, ambos simples. Estes dois casos provam (ii).

□

**Nota 1.** *Pela estrutura de  $\mathcal{F}(\phi)$  ela não pode ter um número ímpar de zeros e cada um deles ser um zero simples.*

Ainda, se  $\nu$  é ímpar, não é fácil encontrar polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  tal que o sistema (3.12) possui exatamente  $\nu$  ciclos limites bifurcando de uma órbita periódica no toro para o sistema (2.9).

**Teorema 11.** *Para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno, temos:*

- i.* Se o grau máximo dos polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  é  $d$  e  $\mathcal{F}(\phi)$  dado em (3.13) não se anula identicamente, então  $2(d + 1)$  é o número máximo de ciclos limites do sistema (3.12) que bifurca das órbitas periódicas o toro  $\mathbb{T}$  do sistema (2.9).
- ii.* Para  $\nu = 2(d + 1)$  podemos encontrar polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  de grau  $d$  tal que o sistema (3.12) possui exatamente  $\nu$  ciclos limites, os quais são todos hiperbólicos, bifurcando das órbitas periódicas no toro  $\mathbb{T}$  do sistema (2.9).

**Comentário 2.** O Teorema 11 não depende de  $R(x, y, z)$ , pois  $\mathcal{F}(\phi)$  dada em (3.13) independe da função  $R(x, y, z)$ .

*Demonstração.* i. Pelo Lema 3, o sistema (3.12) se torna (2.8) e podemos aplicar o Teorema 5 para estudar as órbitas periódicas isoladas do sistema original (3.12). Se o grau máximo de  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  é  $d$  e a função  $\mathcal{F}(\phi)$  não se anula identicamente, então pelo Lema 3 a função  $\mathcal{F}(\phi)$  possui no máximo  $2(d + 1)$  zeros isolados em  $\mathbb{S}^1$ . Como  $\mathcal{F}(\phi) \in \mathbb{R}$ , segue de (ii) do Teorema 2.8 que teremos  $2(d + 1)$  ciclos limite, o que prova (i) do Teorema 11.

- ii. Precisamos mostrar que para  $\nu = 2(d + 1)$  existem polinômios  $P(x, y, z)$  e  $Q(x, y, z)$  ambos de grau  $d$  tais que a função  $\mathcal{F}(\phi)$  possui exatamente  $\nu$  zeros em  $\mathbb{S}^1$ , sendo cada um deles simples. Isto não segue direto do Lema 3, pois, em geral, os coeficientes de  $\mathcal{F}(\phi)$  dados em (3.26) não são independentes, porém no Lema 4 mostramos que eles podem ser independentes e aplicando o Teorema 5 (b) e o Corolário 2, o resultado segue.

□

### 3.3 Ciclos limite em um cilindro isócrono

Detectar o nascimento de ciclos limite em campos vetoriais suaves por parte é algo bastante estudado na teoria dos sistemas dinâmicos e nas ciências aplicadas. O objetivo neste capítulo é estudar bifurcações de ciclos limite de um contínuo de órbitas periódicas preenchendo um cilindro isócrono bidimensional de um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ . A abordagem envolve o processo de regularização de um campo vetorial não-suave e o método baseada na função de bifurcação de Malkin para perturbações  $\mathcal{C}^r$ . Os resultados fornecem condições suficientes para obter ciclos limite emergindo do cilindro através de perturbações suaves e não-suaves do campo. Neste capítulo iremos apresentar uma generalização do que foi feito em [5] para uma classe maior de cilindros considerando perturbações não suaves. Os dois artigos serão tratados neste capítulo, começando por [5] e depois [2].

#### 3.3.1 Perturbações suaves

Os resultados presentes nesse subcapítulo foram a motivação para o artigo [2], conforme citado na introdução do mesmo. Ou seja, estes resultados serão generalizados posteriormente e foram retirados do artigo [5]. Considere o sistema diferencial dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x^2 + y^2 - 1) - y + \varepsilon P(x, y, z), \\ \dot{y} &= y(x^2 + y^2 - 1) + x + \varepsilon Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon R(x, y, z),\end{aligned}\tag{3.35}$$

Considerando o sistema (3.35) não perturbado, ou seja, quando  $\varepsilon = 0$ , a órbita que em  $t = 0$  passa pelo ponto  $(\cos \theta_0, \sin \theta_0, z_0) \in C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  é dada por,

$$x(t) = \cos(t + \theta_0) \quad y(t) = \sin(t + \theta_0) \quad z(t) = z_0 + \sin(t + \theta_0) - \sin \theta_0.\tag{3.36}$$

Observe que restrito a  $C$ , o sistema (3.35) não perturbado se reduz a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Além disso (3.36) satisfaz o sistema acima, portanto no cilindro, todas as órbitas são periódicas de período  $2\pi$ . Queremos agora, verificar quantas órbitas periódicas em  $C$  bifurcam em ciclos limite do sistema perturbado (3.35), para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

**Teorema 12.** *Para  $\varepsilon$  não nulo e suficientemente pequeno, cada raiz simples do polinômio*

$$\int_0^{2\pi} (R(\cos \theta, \sin \theta, z_0 \sin \theta) - \cos \theta [\cos \theta \tilde{Q} - \sin \theta \tilde{P}]) d\theta,$$

onde os polinômios são dados por  $\tilde{P} = P(\cos \theta, \sin \theta, z_0 \sin \theta)$  e  $\tilde{Q} = Q(\cos \theta, \sin \theta, z_0 \sin \theta)$ , o sistema diferencial (3.35) tem um ciclo limite bifurcando da órbita periódica (3.36) no cilindro  $C$  que é uma órbita do sistema (3.35) não perturbado.

*Demonstração.* Passamos o sistema para coordenadas cilíndricas,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z. \quad (3.37)$$

Portanto, se derivarmos com respeito à variável  $t$  as expressões (3.37) acima, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo a mudança de coordenadas (3.37) em (3.35), segue que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r \cos \theta (r^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 1) - r^2 \operatorname{sen} \theta + \varepsilon P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) \\ &= r \cos \theta (r^2 - 1) - r^2 \operatorname{sen} \theta + \varepsilon P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z), \\ \dot{y} &= r \operatorname{sen} \theta (r^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 1) - r^2 \cos \theta + \varepsilon Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) \\ &= r \operatorname{sen} \theta (r^2 - 1) - r^2 \cos \theta + \varepsilon Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z), \\ \dot{z} &= \cos \theta + \varepsilon R(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Denotaremos por  $\tilde{Y} = Y(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$ , os polinômios nas novas coordenadas, ou seja,  $Y$  pode ser qualquer um dos polinômios  $P, Q$  e  $R$ . Igualando as expressões de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ , obtidas em (3.38) e (3.39), temos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} = r \cos \theta (r^2 - 1) - r^2 \operatorname{sen} \theta + \varepsilon \tilde{P}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \dot{\theta} = r \operatorname{sen} \theta (r^2 - 1) - r^2 \cos \theta + \varepsilon \tilde{Q}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Multiplicando a expressão de  $\dot{x}$  na equação (3.40) por  $\cos \theta$  e a expressão de  $\dot{y}$  por  $\operatorname{sen} \theta$  e somando, temos que

$$\dot{r} = r(r^2 - 1) + \varepsilon(\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q}).$$

Multiplicando a expressão de  $\dot{x}$  na equação (3.40) por  $(-\operatorname{sen} \theta)$  e a expressão de  $\dot{y}$  por  $\cos \theta$  e somando, segue que

$$\begin{aligned} r \dot{\theta} &= r + \varepsilon(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}), \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}). \end{aligned}$$

Observe que o ponto denota a derivada com respeito a variável temporal  $t$ , seja agora linha denotando a derivada com respeito a variável  $\theta$ , assim

$$r' = \frac{d}{d\theta} r = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{r(r^2 - 1) + \varepsilon(\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q})}{1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})}.$$

Para calcular a expansão em série de Taylor de primeira ordem em  $\varepsilon$  para  $r'$ , precisamos calcular a derivada com respeito a  $\varepsilon$  da função aplicada em  $\varepsilon = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{d\varepsilon} &= \frac{(\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q})(1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}))}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})\right)^2} \\ &\quad - \frac{((r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q}))(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})\right)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando em  $\varepsilon = 0$ , temos

$$\left. \frac{dr'}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = (\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q}) - ((r^2 - 1)(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})).$$

Portanto, a expansão em série de Taylor é dada por

$$r' = r^3 - r + (\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q})\varepsilon - ((r^2 - 1)(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}))\varepsilon.$$

De maneira análoga, temos que

$$z' = \frac{d}{d\theta} z = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\cos \theta + \varepsilon \tilde{R}}{1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})}.$$

Então, derivando com respeito a variável  $\varepsilon$ , segue que

$$\frac{dz'}{d\varepsilon} = \frac{\tilde{R}(1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})) - \frac{1}{r}(\cos \theta + \varepsilon \tilde{R})(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})\right)^2}. \quad (3.41)$$

Aplicando (3.41) em  $\varepsilon = 0$ , obtemos

$$\left. \frac{dz'}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \tilde{R} - \frac{\cos \theta}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}).$$

Portanto, a expansão em série de Taylor é dada por

$$z' = \cos \theta + \tilde{R}\varepsilon - \frac{\cos \theta}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})\varepsilon.$$

Temos então que o sistema abaixo é equivalente ao sistema (3.35),

$$\begin{aligned} r' &= r^3 - r + (\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q})\varepsilon - ((r^2 - 1)(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}))\varepsilon, \\ z' &= \cos \theta + \tilde{R}\varepsilon - \frac{\cos \theta}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})\varepsilon. \end{aligned}$$

Quando  $\varepsilon = 0$  temos o sistema não perturbado  $F_0(\theta, x)$ , onde  $x = (z, r)$  que é dado por

$$F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ r^3 - r \end{pmatrix}.$$

Seguindo a notação do sistema (3.12), temos ainda

$$F_1(\theta, x) = \begin{pmatrix} \tilde{R} - \frac{\cos \theta}{r}(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P}) \\ (\cos \theta \tilde{P} + \operatorname{sen} \theta \tilde{Q}) - ((r^2 - 1)(\cos \theta \tilde{Q} - \operatorname{sen} \theta \tilde{P})) \end{pmatrix}.$$

Tomaremos a função  $\beta(\alpha) = 1$ , onde  $\alpha = z_0$ , pois estamos no cilindro de raio 1. Então,  $z_\alpha = (z_0, 1)$  e  $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (z_0, 1) : z_0 \in V\}$ . Temos então que resolver o sistema não perturbado dado por  $F_0(\theta, x)$ , ou analogamente, resolver o PVI abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = \cos \theta & z(0) = z_0 \\ \frac{dr}{d\theta} = r^3 - r & r(0) = 1. \end{cases}$$

Temos que  $z(\theta) = \text{sen}\theta + K$  e como  $z(0) = z_0 \Rightarrow z(0) = \text{sen}0 + K = K \Rightarrow K = z_0$ . Assim, a solução é  $z(\theta) = \text{sen}\theta + z_0$ . E  $r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{e^{2\theta}l + 1}}$ , como  $r(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot l + 1}} \Rightarrow l = 0 \Rightarrow r(\theta) = 1$ . Como o não perturbado é dado por

$$F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ r^3 - r \end{pmatrix},$$

o linearizado é da forma

$$D_x F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3r^2 - 1 \end{pmatrix},$$

onde  $x = (z, r)$ . Aplicando em  $z_\alpha = (z_0, 1)$ , obtemos

$$D_x F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{w} = 0 & \Rightarrow w(t) = w_0 = 1, \\ \dot{s} = 2s & \Rightarrow s(t) = e^{2s}. \end{cases}$$

$$M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{z_\alpha}^{-1}(\theta) = \frac{1}{e^{2\theta}} \begin{pmatrix} e^{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\theta} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2\theta}(1 - e^{-4\theta}) \end{pmatrix}.$$

A matriz acima satisfaz as hipóteses do Teorema 5, então podemos aplica-lo. Defina

$$\begin{pmatrix} f_1(\theta, z, r) \\ f_2(\theta, z, r) \end{pmatrix} = M_{z_\alpha}^{-1}(\theta) F_1(\theta, z, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\theta} \end{pmatrix} F_1(\theta, z, r).$$

Tomando a primeira componente da expressão acima, visto que queremos a projeção nas primeiras coordenadas, temos

$$\begin{aligned} f_1(\theta, x(\theta, z_\alpha)) &= f_1(\theta, z_0 + \text{sen}\theta, 1) \\ &= R - \cos \theta [\cos \theta Q - \text{sen}\theta P], \end{aligned}$$

onde as variáveis dos polinômios  $P, Q$  e  $R$  são  $(\cos \theta, \text{sen}\theta, z_0 + \text{sen}\theta)$ . Os ciclos limites são os zeros da função abaixo

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^{2\pi} f_1(\theta, x(\theta, z_\alpha)) d\theta.$$

pelo Teorema 5. □

### 3.3.2 Perturbações não suaves

Agora encontraremos ciclos limite emergindo de um contínuo de órbitas periódicas preenchendo um cilindro bidimensional por uma perturbação não suave do campo vetorial. Considere o sistema diferencial,

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad (3.42a)$$

$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1), \quad (3.42b)$$

$$\dot{z} = h(x, y). \quad (3.42c)$$

A função  $h(x, y)$  não depende de  $z$  e o cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  é um conjunto invariante para o sistema (3.42). De fato, se  $(x, y, z) \in C$ , então temos que

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) = -y,$$

$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) = x,$$

$$\dot{z} = h(x, y).$$

Fixada uma altura  $z$ , temos que a solução no plano  $xy$  é um centro. Portanto,  $C$  é invariante. A solução passando pelo ponto  $(\cos \theta_0, \text{sen} \theta_0, z_0) \in C$  em  $t = 0$  é dada por

$$x(t) = \cos(t + \theta_0), \quad y(t) = \text{sen}(t + \theta_0), \quad z(t) = z_0 + \int_0^t h(\cos(s + \theta_0), \text{sen}(s + \theta_0)) ds,$$

pois o linearizado é dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Solução para  $\dot{x} = Ax$  é:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \text{sen}(-t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \text{sen}(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\text{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\text{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \text{sen} \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \text{sen} t \\ c_1 \text{sen} t + c_2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos t - \text{sen} \theta_0 \text{sen} t \\ \cos \theta_0 \text{sen} t + \text{sen} \theta_0 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \theta_0) \\ \text{sen}(t + \theta_0) \end{pmatrix}.$$

Ainda, como  $\dot{z}(t) = h(x(t), y(t)) = h(\cos(t + \theta_0), \text{sen}(t + \theta_0))$ , segue que

$$z(t) - z(0) = \int_0^t \dot{z}(s) ds = \int_0^t h(\cos(s + \theta_0), \text{sen}(s + \theta_0)) ds. \quad (3.43)$$

Já sabemos que no plano  $xy$  a solução é periódica. Assim as soluções no cilindro  $C$  são periódicas se a integral em (3.43) é periódica. Para verificar tal propriedade sobre essa integral, devemos impor algumas condições sobre a função  $h$ . Por outro lado, o cilindro é invariante mas não é preenchido por órbitas periódicas. De fato, vamos considerar funções  $h$  que podem ser expressas da forma

$$h(x, y) = \rho(x^2 + y^2)\bar{h}(x, y),$$

onde

$$\bar{h}(x, y) = \sum_{i+j \geq 1} a_{ij} x^i y^j.$$

Então, vamos encontrar condições nos valores naturais  $i$  e  $j$  nos quais

$$\int_0^t h(\cos s, \text{sen} s) ds = \rho(1) \sum_{i+j \geq 1} a_{ij} \int_0^t \cos^i s \text{sen}^j s ds$$

é periódica, onde aqui tomamos  $\theta_0 = 0$  para simplificar as expressões. Lembrando que  $x = \cos(t + \theta_0)$  e  $y = \text{sen}(t + \theta_0)$ . Sabemos que

$$\cos^i s \text{sen}^j s = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} c_m \cos((i+j-2m)s), \text{ se } i+j \text{ é par}, \quad (3.44a)$$

$$\cos^i s \text{sen}^j s = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} d_m \text{sen}((i+j-2m)s), \text{ se } i+j \text{ é ímpar}. \quad (3.44b)$$

Usando as expressões acima e uma tabela de integrais, temos que as integrais são periódicas em ambas os casos, exceto quando  $i+j-2m=0$  quando  $j$  é par. Pois, se  $j$  é par,  $j=2k$  e como  $i+j-2m=0$ , temos  $0=i+2k-2mi+2(k-m)$ . E então,  $i=-2(k-m)$ , ou seja,  $i$  é par. Logo,  $i+j$  é par e vale (3.44a). Assim,

$$\int_0^t \cos^i s \text{sen}^j s ds = \int_0^t \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} c_m \cos((i+j-2m)s) ds = \int_0^t \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} c_m ds = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} c_m t,$$

não é periódico. Então, vamos supor que  $j, i$  não são pares simultaneamente. Podemos escrever

$$\bar{h}(x, y) = h_1(x^2, y^2) + xh_2(x^2, y^2) + xyh_3(x^2, y^2) + yh_4(x^2, y^2).$$

Como as potências de  $x, y$  não podem ser simultaneamente pares, então estamos interessados em funções da forma

$$\tilde{h}(x, y) = x\phi(x^2, y^2) + xy\chi(x^2, y^2) + y\Psi(x^2, y^2).$$

Como as órbitas periódicas estão no cilindro  $C$ , a função  $h(x, y) = \rho(x^2 + y^2)\bar{h}(x, y)$  tem que satisfazer a condição  $\rho(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \text{sen}^2 \theta)$  para  $r=1$  nas coordenadas polares.

Nesta seção, estamos executamos uma perturbação não-suave em (3.42). Isto significa que consideramos duas perturbações especiais do sistema (3.42) dependendo

da região de  $\mathbb{R}^3$ , que nos conduz a um sistema não-suave. Os resultados serão obtidos utilizando uma função de bifurcação de Malkin depois da realização de uma regularização dos sistemas não-suaves.

Consideramos um plano separando o cilindro  $C$  em duas partes para perturbarmos cada uma delas por funções diferentes. No entanto, devido a disposição de  $C$ , tomaremos  $y = 0$  como sendo este plano de tal modo que cada órbita no cilindro intersecta  $\Sigma$  transversalmente em dois pontos distintos. É claro que a variedade de descontinuidade é dada neste caso por  $\Sigma = F^{-1}(0)$ , onde  $F(x, y, z) = y$ . Note que a interseção do cilindro  $C$  com  $\Sigma$  são as duas linhas retas  $x = \pm 1$ . De fato,  $C : x^2 + y^2 = 1$ ; se  $y = 0$ , então  $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ . Note ainda que  $\Sigma$  separa  $C$  em duas componentes conexas.

Agora perturbamos o sistema (3.42) levando em conta a geometria de  $\Sigma$ . Iremos considerar polinômios  $g^\pm = (p^\pm, q^\pm, r^\pm)$  dados por

$$p^\pm(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq m} a_{ijk}^\pm x^i y^j z^k, q^\pm(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq n} b_{ijk}^\pm x^i y^j z^k, r^\pm(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq s} c_{ijk}^\pm x^i y^j z^k,$$

com  $i, j, k \in \mathbb{N}$  e  $a_{ijk}^\pm, b_{ijk}^\pm, c_{ijk}^\pm \in \mathbb{R}, \forall i, j, k \in \mathbb{N}$ . Considere a função

$$g(x, y, z) = \frac{g^+(x, y, z) + g^-(x, y, z)}{2} + \operatorname{sgn}(y) \frac{g^+(x, y, z) - g^-(x, y, z)}{2},$$

e observe que a expressão de  $g$  toma formas diferentes dependendo do sinal de  $y$ , isto é,  $g(p) = g^+(p)$ , se  $p \in \Sigma^+ = \{y \geq 0\}$  e  $g(p) = g^-(p)$ , se  $p \in \Sigma^- = \{y \leq 0\}$ , para cada  $p \in \mathbb{R}^3$ , pois se  $p \in \Sigma^+$ , então  $\operatorname{sgn}(y) = 1$  e, portanto,

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{g^+(p) + g^-(p)}{2} + \frac{g^+(p) - g^-(p)}{2} \\ &= g^+(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $p \in \Sigma^-$ , então  $\operatorname{sgn}(y) = -1$  e, portanto,

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{g^+(p) + g^-(p)}{2} - \frac{g^+(p) - g^-(p)}{2} \\ &= g^-(p). \end{aligned}$$

Então, perturbando (3.42) por uma função não-suave, no caso  $g$ , obtemos um sistema diferencial não-suave dado por

$$\dot{X}_\varepsilon = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g(\mathbf{x}), \quad (3.46)$$

onde  $f(t, \mathbf{x})$  é o campo vetorial dado em (3.42) e  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e  $\varepsilon$  é um parâmetro pequeno.

Pela convenção de Filippov, temos que

$$\begin{aligned} XF(x, y, z) &= \langle \nabla F(x, y, z), X \rangle \\ &= \langle (0, 1, 0), X \rangle \\ &= x + y(x^2 + y^2 - 1) \\ &= YF(x, y, z). \end{aligned}$$

No sistema (3.42), para  $\varepsilon = 0$  :

$$Y = X = \begin{cases} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} &= x + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{z} &= h(x, y), \end{cases}$$

ou seja,  $XF(x, y, z) = YF(x, y, z) = y(x^2 + y^2 - 1) + x$  para  $\varepsilon = 0$ . Então,

$$XF(\pm 1, 0, z) \cdot YF(\pm 1, 0, z) = (0((\pm 1)^2 + 0 + 1) + (\pm 1))^2 = 1 > 0.$$

Assim,  $C \cap \Sigma \subset \Sigma^c$ . Se  $|\varepsilon| \neq 0$  é suficientemente pequeno, a interseção  $C \cap \Sigma$  ainda ocorre em pontos de costura desde que a transversalidade das soluções passando pelos pontos de costura seja estável.

**Teorema 13.** *Considere o sistema diferencial  $T$ -periódico*

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \quad (3.47)$$

onde  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  e  $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  são  $T$ -periódicas na primeira variável e  $g$  é localmente e uniformemente Lipschitz com respeito à segunda variável. Para  $z \in \mathbb{R}^n$ , denote por  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  a solução de (3.47) tal que  $x(0, z, \varepsilon) = z$ . Assuma que o sistema não perturbado

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.48)$$

satisfaz as seguintes condições:

1. Existe uma bola aberta  $U \subset \mathbb{R}^k$  com  $k \leq n$  e uma função  $\xi \in \mathcal{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  tal que para  $h \in \bar{U}$  a matriz  $n \times k$ ,  $D\xi(z)$ , possui rank (posto)  $k$  e  $\xi(z)$  é a condição inicial da solução  $T$ -periódica de (3.48).
2. Para cada  $h \in \bar{U}$ , o sistema linear

$$\dot{y} = D_x f(t, x(t, z, 0))y, \quad (3.49)$$

com  $z = \xi(z)$  possui multiplicador de Floquet com multiplicidade geométrica igual a  $k$ .

Sejam  $u_1(\cdot, x), \dots, u_k(\cdot, x)$  as soluções  $T$ -periódicas linearmente independentes do sistema linear

$$\dot{u} = -(D_x f(t, x(t, \xi(z), 0)))^* u,$$

tal que  $u_1(0, x), \dots, u_k(0, x)$  são  $\mathcal{C}^1$  com respeito a  $h$  e defina a função  $M : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$  por

$$M(z) = \int_0^T \begin{pmatrix} \langle u_1(s, z), g(s, x(s, \xi(z), 0)), 0 \rangle \\ \dots \\ \langle u_k(s, z), g(s, x(s, \xi(z), 0)), 0 \rangle \end{pmatrix} ds.$$

Então ocorre:

1. Para alguma sequência  $(\varphi_m)_{m \geq 1}$  de  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  e  $(\varepsilon_m)_{m \geq 1}$  de  $[0, 1]$  tal que  $\varphi_m \rightarrow \xi(z_0) \in \xi(\bar{U})$ ,  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$  e  $\varphi_m$  é uma solução  $T$ -periódica de (3.47) com  $\varepsilon = \varepsilon_m$ , temos que  $M(z_0) = 0$ .

2. Se  $M(z) \neq 0$  para algum  $z \in \partial U$  e  $d(M, U) \neq 0$ , então existe  $\varepsilon_1 > 0$  suficientemente pequeno tal que para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$  temos pelo menos uma solução  $T$ -periódica  $\varphi_\varepsilon$  do sistema (3.47) tal que  $\rho(\varphi_\varepsilon(0), \xi(\bar{U})) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , onde  $\rho(\varphi_\varepsilon(0), \xi(\bar{U})) = \min_{\zeta \in \xi(\bar{U})} \|\varphi_\varepsilon(0) - \zeta\|$  e  $\|\cdot\|$  é a norma em  $\mathbb{R}^n$ .

Se ainda assumirmos que existe  $z_0 \in U$  tal que  $M(z_0) = 0$  e  $M(z) \neq 0, \forall z \in \bar{U} \setminus \{z_0\}$  e o grau de Brouwer  $d(M, U)$  de  $M$  em  $U$  satisfaz  $d(M, U) \neq 0$ . Mais ainda, chamando  $w_0 = \xi(z_0)$ , assumimos que

3. Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno existe  $M_\delta \subset [0, T]$  Lebesgue mensurável com  $\text{mes}(M_\delta) = \bar{o}(\delta)$  tal que

$$\|g(t, w_1 + \zeta, \varepsilon) - g(t, w_1, 0) - g(t, w_2 + \zeta, \varepsilon) + g(t, w_2, 0)\| \leq \bar{o}(\delta) \|w_1 - w_2\|,$$

para todo  $t \in [0, T] \setminus M_\delta$  e  $L_M > 0$  tal que

$$\|M(z_1) - M(z_2)\| \geq L_M \|z_1 - z_2\|, \forall z_1, z_2 \in B_{\delta_1}(z_0).$$

Ocorre ainda:

1. Existe  $\delta_2 > 0$  tal que para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ ,  $\varphi_\varepsilon$  é a única solução  $T$ -periódica de (3.47) com condição inicial em  $B_{\delta_2}(w_0)$ . Mais ainda,  $\varphi_\varepsilon(0) \rightarrow \xi(z_0)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Comentário 3.** A condição (3) é muito técnica, ao invés de usá-la iremos usar a condição mais simples para a função  $g$  dada a seguir:

(v) Para algum  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno, existe  $M_\lambda \subset [0, T]$  Lebesgue mensurável com  $\text{mes}(M_\lambda) = o(\lambda)/\lambda$  e tal que para cada  $t \in [0, T] \setminus M_\lambda$  e para todo  $w \in B_\delta(w_0), \varepsilon \in [0, \lambda]$

$$\|D_w g(t, w, \varepsilon) - D_w g(t, w_0, 0)\| \leq \frac{o(\lambda)}{\lambda}.$$

Para obter os resultados vamos trabalhar com a regularização do sistema (3.46) já que a parte perturbada é não suave. Seja agora  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  um ponto em  $\mathbb{R}^3$  e  $F(t, \mathbf{x}) = y$ . Considere a função de transição de classe  $C'$  dada por

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t \leq -\delta \\ \frac{t}{\delta}, & \text{se } -\delta < t < \delta \\ 1, & \text{se } t \geq \delta \end{cases},$$

Então, como o sistema (3.46) pode ser escrito como

$$X_\varepsilon = \begin{cases} f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^+(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^+, \\ f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^-(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^-, \end{cases}$$

a regularização de (3.46) pode ser escrita por

$$\begin{aligned}\dot{X}_\delta^\varepsilon &= \frac{1}{2} (f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^+(\mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^-(\mathbf{x})) \\ &\quad + \frac{\varphi_\delta(y)}{2} (f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^+(\mathbf{x}) - (f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^-(\mathbf{x}))) \\ &= f(t, \mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2} (g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})) + \frac{\phi_\delta(y)}{2} \varepsilon (g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})) \\ &= f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \left( \frac{g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})}{2} + \varphi_\delta(y) \frac{g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})}{2} \right).\end{aligned}$$

Observe que se  $y \leq -\delta$ , então  $\varphi_\delta(y) = -1$ , de onde

$$\dot{X}_\delta^\varepsilon = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \left( \frac{g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})}{2} - \frac{g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})}{2} \right) = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^-(\mathbf{x}).$$

Se  $-\delta < y < \delta$  então  $\varphi_\delta(y) = t/y$ , então

$$\dot{X}_\delta^\varepsilon = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \left( \frac{g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})}{2} + \frac{y}{\delta} \frac{g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})}{2} \right)$$

Se  $y \geq \delta$  então  $\varphi_\delta(y) = 1$ , então

$$\dot{X}_\delta^\varepsilon = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \left( \frac{g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})}{2} + \frac{g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})}{2} \right) = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g^+(\mathbf{x})$$

Portanto

$$\dot{X}_\delta^\varepsilon = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \left( \frac{g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})}{2} + \varphi_\delta(y) \frac{g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})}{2} \right) = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g_\delta(\mathbf{x}) \quad (3.50)$$

onde,

$$g_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} g^+(\mathbf{x}), & \text{se } y \leq -\delta \\ \frac{g^+(\mathbf{x}) + g^-(\mathbf{x})}{2} + \frac{y}{\delta} \frac{g^+(\mathbf{x}) - g^-(\mathbf{x})}{2}, & \text{se } -\delta < y < \delta \\ g^-(\mathbf{x}), & \text{se } y \geq \delta \end{cases}, \quad (3.51)$$

Note que o sistema (3.50) é suave e possui a mesma parte não perturbada do sistema (3.46), isto é, o sistema (3.50) também possui um cilindro  $C$  preenchido por órbitas periódicas quando  $\varepsilon = 0$ , para todo  $\delta > 0$ . Ainda se  $\delta \rightarrow 0$  o sistema (3.50) se transforma no sistema (3.46) que é suave por partes. Aplicaremos o Teorema 13 no campo regularizado e aplicando o limite fazendo  $\delta$  se aproximar de zero, estenderemos o resultado para o sistema não suave (3.46).

Agora vamos introduzir duas funções que dependem da função  $h$  (que determina a forma das órbitas periódicas no cilindro  $C$ .) e as perturbações  $p^\pm, q^\pm$  e  $r^\pm$  que são muito importantes para os resultados. Primeiro considere a função

$$A_h(\theta) = \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial h}{\partial y}(\cos \theta, \sin \theta). \quad (3.52)$$

Observe que  $A_h(\theta)$  é bastante técnico, mas possui um papel importante na implementação teórica do Teorema 13 para o sistema (3.50), e que depende apenas da função  $h$ .

Seja  $M_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por

$$\begin{aligned}
 M_\delta(z) = & \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \left[ h(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) (-\cos \theta (q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma)) + \operatorname{sen} \theta (p^+(\varsigma) + p^-(\varsigma))) \right. \\
 & + (r^+(\varsigma) + r^-(\varsigma)) + (h(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) (\cos \theta (-q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma)) \\
 & \left. + \operatorname{sen} \theta (p^+(\varsigma) - p^-(\varsigma))) + (r^+(\varsigma) - r^-(\varsigma)) \varphi_\delta(\operatorname{sen} \theta) \right] ds
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde,  $\varsigma = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, z + \int_0^s h(\cos v, \operatorname{sen} v) dv)$ , para  $z$  um número real. Veremos que sob boas condições os zeros simples da função  $M_\delta$  são ciclos limite bifurcando do contínuo de órbitas periódicas do cilindro  $C$ .

**Lema 5** (Lema Fundamental). *Suponha que  $A_h(\theta) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi)$ . Então, para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno e para todo  $z_0$  tal que  $M_\delta(z_0) = 0$  e  $M'_\delta(z_0) \neq 0$ , o sistema suave dado por (3.50) possui um ciclo limite bifurcando das órbitas periódicas no cilindro  $C$  com  $\varepsilon = 0$ . Mais ainda, existe no máximo  $s = m, n, p$  valores de  $z$  nos quais  $M_\delta(z) = 0$ , onde  $m, n, p$  são os coeficientes dos polinômios  $p^\pm, q^\pm, r^\pm$ .*

**Comentário 4.** *Note que a condição  $A_h(\theta) = 0$  não é vazia. Para isto, vamos verificar que para cada  $c_i \in \mathbb{R}$  a função*

$$\tilde{h}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{(x^2 + y^2)^{\frac{2i+1}{2}}} x^{2i+1}$$

satisfaz a propriedade.

*Primeiro note que a potência do polinômio  $c_i x^{2i+1}$  é sempre ímpar, então a integral em (3.43) fornece uma solução periódica. Note ainda que*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{h}(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)c_i x^{2i} (x^2 + y^2)^{\frac{2i+1}{2}} - c_i x^{2i+1} \frac{2i+1}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{2i-1}{2}} 2x}{(x^2 + y^2)^{2i+1}} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \tilde{h}(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-c_i x^{2i+1} \frac{2i+1}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{2i-1}{2}} 2y}{(x^2 + y^2)^{2i+1}}
 \end{aligned}$$

*Nas coordenadas cilíndricas, as expressões acima se reduzem, respectivamente, a*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{h}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)c_i \cos^{2i} \theta - (2i+1)c_i \cos^{2i+2} \theta \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)c_i \cos^{2i} \theta \operatorname{sen}^2 \theta
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{h}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} -(2i+1)c_i \cos^{2i+1} \theta \operatorname{sen} \theta$$

*Substituindo na equação (3.52), obtemos  $A_h(\theta) = 0$ .*

*Demonstração (Lema Fundamental).* Considere o sistema (3.50) e suponha que para este sistema tenhamos verificado que  $A_h(\theta) = 0$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi)$ . Como as órbitas periódicas do sistema (3.42) que estamos perturbando moram no cilindro  $C$ , faremos uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas  $(z, r, \theta)$  dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z.$$

Derivando com respeito a variável  $t$  as equações que definem a mudança de coordenadas cilíndricas, temos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \dot{x} &= \frac{dx}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dr} \frac{dr}{dt} + \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \cos \theta \dot{r} - r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{dy}{dr} \frac{dr}{dt} + \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \operatorname{sen} \theta \dot{r} + r \cos \theta \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.54)$$

A equação para  $\dot{z}$  permanece a mesma. O sistema (3.50) é da forma,

$$\dot{X}_\delta^\varepsilon = f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon g_\delta(\mathbf{x}) \quad (3.55)$$

onde  $f(t, \mathbf{x})$  é dada pelo sistema (3.42) e  $g_\delta(\mathbf{x})$  foi dada em (3.51), com  $g^\pm$  definido em (3.45). Portanto, podemos reescrever (3.50) do seguinte modo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon \left( \frac{p^+(\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{x})}{2} + \varphi_\delta(y) \frac{p^+(\mathbf{x}) - p^-(\mathbf{x})}{2} \right) \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon \left( \frac{q^+(\mathbf{x}) + q^-(\mathbf{x})}{2} + \varphi_\delta(y) \frac{q^+(\mathbf{x}) - q^-(\mathbf{x})}{2} \right) \\ \dot{z} &= h(x, y) + \varepsilon \left( \frac{r^+(\mathbf{x}) + r^-(\mathbf{x})}{2} + \varphi_\delta(y) \frac{r^+(\mathbf{x}) - r^-(\mathbf{x})}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Então, escrevendo o sistema (3.56) nas novas coordenadas, temos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r \operatorname{sen} \theta + r^2 \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta - 1) + \frac{\varepsilon}{2} P(\theta, \varsigma) \\ &= -r (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta (r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2} P(\theta, \varsigma) \\ \dot{y} &= r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) + \frac{\varepsilon}{2} Q(\theta, \varsigma) \\ &= r (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta (r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2} Q(\theta, \varsigma) \\ \dot{z} &= h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\varepsilon}{2} R(\theta, \varsigma) \end{aligned}$$

onde,  $B(\theta, \varsigma) := b^+(\varsigma) + b^-(\varsigma) + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta) (b^+(\varsigma) - b^-(\varsigma))$ , onde  $B = P, Q, R$  e  $b$  denota algum dos polinômios  $p, q, r$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta (r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2} P(\theta, \varsigma) \\ \dot{y} &= r (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta (r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2} Q(\theta, \varsigma) \\ \dot{z} &= h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\varepsilon}{2} R(\theta, \varsigma) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Então vamos encontrar as expressões de  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  utilizando as equações de  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  dadas em (3.57) e (3.54). Assim,

$$-r(\sin\theta - \cos\theta(r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2}P(\theta, \varsigma) = \cos\theta\dot{r} - r\sin\theta\dot{\theta} \quad (3.58a)$$

$$r(\cos\theta + \sin\theta(r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2}Q(\theta, \varsigma) = \sin\theta\dot{r} + r\cos\theta\dot{\theta} \quad (3.58b)$$

Multiplicando a equação (3.58a) por  $-\sin\theta$  e somando com a (3.58b) multiplicada por  $\cos\theta$ , obtemos

$$\begin{aligned} & r\sin(\sin\theta - \cos\theta(r^2 - 1)) + r\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta(r^2 - 1)) - \frac{\varepsilon}{2}P(\theta, \varsigma)\sin\theta + \frac{\varepsilon}{2}Q(\theta, \varsigma)\cos\theta \\ &= r\dot{\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &\rightarrow \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta(r^2 - 1) + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2}(Q(\theta, \varsigma)\cos\theta - P(\theta, \varsigma)\sin\theta) \\ &= \dot{\theta} \\ &\rightarrow \dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{2r}(Q(\theta, \varsigma)\cos\theta - P(\theta, \varsigma)\sin\theta) \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.58a) por  $\cos\theta$  e somando com a (3.58b) multiplicada por  $\sin\theta$ , obtemos

$$\begin{aligned} & -r\cos(\sin\theta - \cos\theta(r^2 - 1)) + r\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta(r^2 - 1)) + \frac{\varepsilon}{2}P(\theta, \varsigma)\cos\theta + \frac{\varepsilon}{2}Q(\theta, \varsigma)\sin\theta \\ &= \sin^2\theta\dot{r} + \cos^2\theta\dot{r} \\ &\rightarrow -\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta(r^2 - 1) + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2}(P(\theta, \varsigma)\cos\theta + Q(\theta, \varsigma)\sin\theta) \\ &= \dot{r} \\ &\rightarrow \dot{r} = r(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2}(P(\theta, \varsigma)\cos\theta + Q(\theta, \varsigma)\sin\theta) \end{aligned}$$

Logo, o sistema (3.50) nas novas coordenadas é dado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= h(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\varepsilon}{2}R(\theta, \varsigma) \\ \dot{r} &= r(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2}(P(\theta, \varsigma)\cos\theta + Q(\theta, \varsigma)\sin\theta) \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{2r}(Q(\theta, \varsigma)\cos\theta - P(\theta, \varsigma)\sin\theta) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agora iremos alterar a variável pela qual o sistema está sendo derivado, de  $t$  para  $\theta$ .

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dz}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^{-1} = \frac{\dot{z}}{\dot{\theta}} = \frac{h(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\varepsilon}{2}R(\theta, \varsigma)}{1 + \frac{\varepsilon}{2r}(Q(\theta, \varsigma)\cos\theta - P(\theta, \varsigma)\sin\theta)} \quad (3.60)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^{-1} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{r(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2}(P(\theta, \varsigma)\cos\theta + Q(\theta, \varsigma)\sin\theta)}{1 + \frac{\varepsilon}{2r}(Q(\theta, \varsigma)\cos\theta - P(\theta, \varsigma)\sin\theta)} \quad (3.61)$$

Derivando (3.60) com respeito a  $\varepsilon$ , visto que depois iremos expandir a expressão em Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dz}{d\theta} \right) &= \frac{\frac{1}{2}R(\theta, \varsigma)(1 + \frac{\varepsilon}{2}(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta))}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta)\right)^2} \\ &\quad + \frac{-\left(h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta) + \frac{\varepsilon}{2}R(\theta, \varsigma)\right)(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta) \frac{1}{2r}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta)\right)^2} \end{aligned}$$

Aplicando em  $\varepsilon = 0$ , temos que

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dz}{d\theta} \right) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}R(\theta, \varsigma) - h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta)(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta) \frac{1}{2r}$$

Logo, fazendo a expansão em Taylor de ordem dois, em torno de  $\varepsilon = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= \left. \frac{dz}{d\theta} \right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dz}{d\theta} \right) \right|_{\varepsilon=0} + O^2 \\ &= h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta) + \frac{\varepsilon}{2r} (R(\theta, \varsigma)r - h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta)(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta)) + O^2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde  $O^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Substituindo as expressões  $P(\theta, \varsigma)$ ,  $Q(\theta, \varsigma)$ ,  $R(\theta, \varsigma)$  em (3.62), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta) + \frac{\varepsilon}{2r} (R(\theta, \varsigma)r - h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta)(Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \text{sen}\theta)) + O^2 \\ &= h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta) + \frac{\varepsilon}{2r} ((r^+(\varsigma) + r^-(\varsigma) + \varphi_\delta(r \text{sen}\theta))(r^+(\varsigma) - r^-(\varsigma)))r \\ &\quad - h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta)((q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma) + \varphi_\delta(r \text{sen}\theta))(q^+(\varsigma) - q^-(\varsigma))) \cos \theta \\ &\quad - (p^+(\varsigma) + p^-(\varsigma) + \varphi_\delta(r \text{sen}\theta))(p^+(\varsigma) - p^-(\varsigma)) \text{sen}\theta) + O^2 \end{aligned}$$

Colocando  $\varphi_\delta(r \text{sen}\theta)$  em evidência, temos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta) + \frac{\varepsilon}{2r} [(r^+(\varsigma) + r^-(\varsigma))r - h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta) (\cos \theta(q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma)) \\ &\quad - \text{sen}\theta(p^+(\varsigma) + p^-(\varsigma))) + \varphi_\delta(r \text{sen}\theta) ((r^+(\varsigma) - r^-(\varsigma))r \\ &\quad - h(r \cos \theta, r \text{sen}\theta)(\cos \theta(q^+(\varsigma) - q^-(\varsigma)) - \text{sen}\theta(p^+(\varsigma) - p^-(\varsigma)))] + O^2. \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\theta} &= h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\varepsilon}{2r} \left[ (h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)(-\cos \theta q^+(\varsigma) + \operatorname{sen} \theta p^+(\varsigma)) + r^+(\varsigma)r) \right. \\
&\quad + (h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)(-\cos \theta q^-(\varsigma) + \operatorname{sen} \theta p^-(\varsigma)) + r^-(\varsigma)r) \\
&\quad + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta)(h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)(-\cos \theta q^+(\varsigma) + \operatorname{sen} \theta p^+(\varsigma)) + r^+(\varsigma)r) \\
&\quad \left. - (h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)(-\cos \theta q^-(\varsigma) + \operatorname{sen} \theta p^-(\varsigma)) + r^-(\varsigma)r) \right] + O^2 \\
&= h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \varepsilon \left[ \frac{(f_1^+ + f_1^-)(\theta, \varsigma, r)}{2r} + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta) \frac{(f_1^+ - f_1^-)(\theta, \varsigma, r)}{2r} \right] + O^2 \\
&= h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \varepsilon G_\delta^1(\theta, z, r, \varepsilon),
\end{aligned}$$

onde

$$G_\delta^1(\theta, z, r, \varepsilon) = \left[ \frac{(f_1^+ + f_1^-)(\theta, \varsigma, r)}{2r} + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta) \frac{(f_1^+ - f_1^-)(\theta, \varsigma, r)}{2r} \right] + O^2$$

e

$$f_1^\pm(\theta, \varsigma, r) = h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)(-\cos \theta q^\pm(\varsigma) + \operatorname{sen} \theta p^\pm(\varsigma)) + r^\pm(\varsigma)r.$$

Agora vamos aplicar o mesmo procedimento acima para a equação (3.61). Note

que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dr}{d\theta} \right) &= \frac{P(\theta, \varsigma) \cos \theta + Q(\theta, \varsigma) \operatorname{sen} \theta}{2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2r} (Q \cos \theta - P \operatorname{sen} \theta) \right)^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2r} (Q \cos \theta - P \operatorname{sen} \theta) \right) \\
&\quad - \frac{(r(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2} (P(\theta, \varsigma) \cos \theta + Q(\theta, \varsigma) \operatorname{sen} \theta))}{2r \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2r} (Q \cos \theta - P \operatorname{sen} \theta) \right)^2} (Q(\theta, \varsigma) \cos \theta - P(\theta, \varsigma) \operatorname{sen} \theta).
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dr}{d\theta} \right) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{P(\theta, \varsigma) \cos \theta + Q(\theta, \varsigma) \operatorname{sen} \theta - (r^2 - 1)(Q \cos \theta - P \operatorname{sen} \theta)}{2}.$$

Assim, expandindo m torno de  $\varepsilon = 0$  nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= r(r^2 - 1) + \varepsilon \frac{P(\theta, \varsigma) \cos \theta + Q(\theta, \varsigma) \operatorname{sen} \theta - (r^2 - 1)(Q \cos \theta - P \operatorname{sen} \theta)}{2} + O^2 \\
&= r(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ (p^+(\varsigma) + p^-(\varsigma) + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta)(p^+(\varsigma) - p^-(\varsigma)))(\cos \theta + (r^2 - 1) \operatorname{sen} \theta) \right. \\
&\quad \left. + (q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma) + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta)(q^+(\varsigma) - q^-(\varsigma)))(\operatorname{sen} \theta - (r^2 - 1) \cos \theta) \right] + O^2 \\
&= r(r^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ (p^+(\varsigma) + p^-(\varsigma))(\cos \theta + (r^2 - 1) \operatorname{sen} \theta) + (q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma))(\operatorname{sen} \theta \right. \\
&\quad \left. - (r^2 - 1) \cos \theta) + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta) \left( (p^+(\varsigma) - p^-(\varsigma))(\cos \theta + (r^2 - 1) \operatorname{sen} \theta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (q^+(\varsigma) - q^-(\varsigma))(\operatorname{sen} \theta - (r^2 - 1) \cos \theta) \right) \right] + O^2 \\
&= -r + r^3 + \varepsilon \left[ \frac{(f_2^+ + f_2^-)(\theta, \varsigma, r)}{2} + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta) \frac{(f_2^+ - f_2^-)(\theta, \varsigma, r)}{2} \right] + O^2 \\
&= -r + r^3 + \varepsilon G_\delta^2(\theta, z, r, \varepsilon),
\end{aligned}$$

onde

$$G_\delta^2(\theta, z, r, \varepsilon) = \frac{(f_2^+ + f_2^-)(\theta, \varsigma, r)}{2} + \varphi_\delta(r \operatorname{sen} \theta) \frac{(f_2^+ - f_2^-)(\theta, \varsigma, r)}{2} + O^2$$

e

$$f_2^\pm(\theta, \varsigma, r) = p^\pm(\varsigma)(\cos \theta + (r^2 - 1)\operatorname{sen} \theta) + q^\pm(\varsigma)(\operatorname{sen} \theta - (r^2 - 1)\cos \theta).$$

Desta forma, o sistema 3.59 na nova variável temporal  $\theta$  fica

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = h(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \varepsilon G_\delta^1(\theta, z, r, \varepsilon), \\ \frac{dr}{d\theta} = -r + r^3 + \varepsilon G_\delta^2(\theta, z, r, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.63)$$

O sistema (3.63) é  $2\pi$ -periódico. Para mostrar que a parte perturbada é localmente uniformemente Lipschitz nas variáveis  $(z, r) \in \mathbb{R}^2$ , considere a função  $G_\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como sendo  $G_\delta(\theta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon) = (G_\delta^1(\theta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon), G_\delta^2(\theta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon))$ , e os conjuntos,

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(\theta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]; \omega_2 \operatorname{sen} \theta \leq -\delta\}, \\ R_2 &= \{(\theta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]; -\delta \leq \omega_2 \operatorname{sen} \theta \leq \delta\}, \\ R_3 &= \{(\theta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]; \omega_2 \operatorname{sen} \theta \geq \delta\}, \end{aligned}$$

e seja  $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2[0, 1] = \cup_{i=1,2,3} R_i$  um conjunto compacto. Para verificarmos que  $G_\delta$  é Lipschitz em  $K$  é suficiente mostrar que ela é Lipschitz no fecho convexo  $\bar{K}_c$  de  $K$ , ou seja, o menor conjunto convexo que contém  $K$ , assim,  $K \subset \bar{K}_c$ . De fato, sejam  $x, y \in \bar{K}_c$ , onde  $x, y$  são pontos de  $\mathbb{R}^2$  pois deixaremos  $\theta, \varepsilon$  fixos. Agora considere  $S$  como sendo o segmento de reta que passa por  $x$  e  $y$  e tome  $S_i = S \cap R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Esta interseção consiste de um número finito de segmentos fechados contidos em  $S$ , já que a fronteira entre  $R_1$  e  $R_2$  e entre  $R_2$  e  $R_3$  são variedades de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$  com dimensão um. A restrição de  $G_\delta$  em  $S_i$  para cada  $i = 1, 2, 3$  fornece um polinômio nas variáveis  $\omega_1, \omega_2$ , já que  $p, q, r$  são polinômios e cada segmento  $S_i$  está contido na região  $R_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  e nestas regiões a função  $\varphi_\delta$  está definida como sendo

$$\varphi_\delta(p) = \begin{cases} -1, & \text{se } p \in R_1, \\ \frac{t}{\delta}, & \text{se } p \in R_2, \\ 1, & \text{se } p \in R_3, \end{cases}$$

restando apenas os polinômios. Assim,  $G_\delta|_{S_i}$  é de classe  $C^\infty$ . Isto significa que cada restrição  $G_\delta|_{S_i}$  é localmente  $L_i$ -Lipschitz no conjunto compacto  $S_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  que é equivalente a ser  $L_i$ -Lipschitz, ou seja,  $\|G_\delta|_{S_i}(\theta, x, \varepsilon) - G_\delta|_{S_i}(\theta, y, \varepsilon)\| \leq L_i d(x, y)$ . Então para todo  $(\theta, x, \varepsilon), (\theta, y, \varepsilon) \in \bar{K}_c$  existe  $L = \max\{L_1, L_2, L_3\}$  tal que

$$\begin{aligned} & \|G_\delta(\theta, x, \varepsilon) - G_\delta(\theta, y, \varepsilon)\| \leq \sum_{p^i \in S_i} L_i \|p_i - p_{i+1}\| \\ & \leq L \left( \sum_{p^j \in S_1} L_j \|p_j - p_{j+1}\| + \sum_{p^k \in S_2} L_k \|p_k - p_{k+1}\| + \sum_{p^l \in S_3} L_l \|p_l - p_{l+1}\| \right) \end{aligned}$$

onde  $p^s$  é o segmento com extremos  $p_s$  e  $p_{s+1}$  para  $s \in \{i, j, k, l\}$ ,  $x = p_s$  e  $y = p_r$  para algum  $s, r \in \mathbb{N}$ . Se  $n$  é o número de interseções de  $S$  com fronteira de cada  $R_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , então uma vez que  $S$  é um segmento obtemos:

$$\|G_\delta(\theta, x, \varepsilon) - G_\delta(\theta, y, \varepsilon)\| \leq L(\|x - p_1\| + \dots + \|p_n - y\|) \leq L\|x - y\|.$$

Então  $G_\delta$  é localmente, uniformemente Lipschitz nas variáveis  $(z, r) \in \mathbb{R}^2$ .

Agora, chamando de  $X = (z, r)$  e considerando o sistema (3.63) com  $\varepsilon = 0$ , obtemos

$$\frac{dX}{d\theta} = f(\theta, X) \tag{3.64}$$

onde  $f(\theta, X) = (h(r \cos \theta, r \sin \theta), -r + r^3)$ . Por hipótese  $f \in C^2$ . No plano  $zr$  a reta  $r = 1$  é invariante pois para  $r = 1$  temos que  $dr/d\theta = 0$  e  $dz/d\theta = h(\cos \theta, \sin \theta)$ , ou seja, não existe variação na direção do raio  $r$ , logo as soluções do sistema (3.64) com condições iniciais sobre a reta  $r = 0$  permanecem sobre essa reta. Assim, a solução  $X(\theta, X_0, 0)$  com condição inicial  $X_0 = (z_0, 1)$  é dada por

$$X(\theta, X_0, 0) = (z(\theta, z_0), r(\theta, z_0)) = \left( z_0 + \int_0^\theta h(\cos s, \sin s) ds, 1 \right)$$

Como  $\int_0^\theta h(\cos s, \sin s) ds$  é periódica segue que  $z(\theta, z_0)$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$  e para cada ponto em uma vizinhança de  $z = z_0$  na reta  $r = 1$  passa uma solução  $2\pi$ -periódica que encontra-se no espaço de fase  $(z, r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Consequentemente o sistema (3.64) possui uma família  $M = \{(z, r) \in \mathbb{R}^2 : r = 1\}$  de soluções  $2\pi$ -periódicas.

Agora considere  $R_0 > 0$ . Existe uma bola aberta contida em  $\mathbb{R}$ , que denotaremos por  $U$ ,  $R_0 \in \mathbb{R}$ , com  $U = \{z \in (-R_0, R_0)\}$  e a função  $\xi \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^2)$ , dada por

$$\xi(z) = \left( z + \int_0^\theta h(\cos s, \sin s) ds, 1 \right)$$

que é uma parametrização para cada solução em  $M$  satisfazendo para qualquer  $z \in \bar{U}$ , que  $D\xi(z) = (1, 0)^T$ , já que toda solução em  $M$  é periódica, de modo que  $\int_0^\theta h(\cos s, \sin s) ds = 0$ , assim  $D\xi(z) = D(z, 1) = (1, 0)^T$ , no qual posto é um. Note que  $\xi(z)$  é a condição inicial de uma solução  $2\pi$ -periódica de (3.64).

Agora vamos linearizar o sistema (3.64) ao longo das soluções periódicas  $X(\theta, \xi(z), 0)$ , obtemos

$$\frac{dY}{d\theta} = D_x f(\theta, X(\theta, \xi(z), 0), 0)Y \tag{3.65}$$

consequentemente a matriz  $D_x f(\theta, X(\theta, \xi(z), 0), 0)$  é escrita como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z}(\xi(z)) & \frac{\partial u}{\partial r}(\xi(z)) \\ \frac{\partial(-r + r^3)}{\partial z}(\xi(z)) & \frac{\partial(-r + r^3)}{\partial r}(\xi(z)) \end{pmatrix}$$

com  $u(r, \theta) = h(x(r, \theta), y(r, \theta))$ , com  $x(r, \theta) = r \cos \theta$  e  $y(r, \theta) = r \sin \theta$ . Note que,  $h(x(r, \theta), y(r, \theta))$  não depende de  $z$ , então  $du/dz = 0$ , e ainda

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial h}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial h}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial h}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

Portanto, temos que em  $(\xi(z), 1)$  é

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\xi(z), 1) = \frac{\partial h}{\partial x}(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial h}{\partial y}(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta = A_h(\theta)$$

Então o sistema (3.65) é da forma

$$\frac{dY}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 & A_h(\theta) \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y$$

E possui a matriz fundamental dada por

$$N_Y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^\theta e^{2s} A_h(s) ds \\ 0 & e^{2\theta} \end{pmatrix} Y \quad (3.66)$$

Note que a matriz fundamental  $N_Y(\theta)$  aplicada em  $\theta = 0$  é a matriz identidade. Como, por hipótese,  $A_h(\theta) = 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  então a matriz  $C = N_Y^{-1}(0)N_Y(2\pi)$  é dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4\pi} \end{pmatrix}$$

e conseqüentemente (3.65) possui a multiplicidade do Floquet +1 com multiplicidade geométrica igual a um. Considere o sistema linear adjunto

$$\frac{dV}{d\theta} = -(D_x f(\theta, X(\theta, \xi(z), 0), 0))^* V \quad (3.67)$$

Como o sistema (3.67) é adjunto ao sistema (3.65) a matriz fundamental  $N_V(\theta)$  é dada por  $N_V(\theta) = -(N_Y(\theta))^*$  e conseqüentemente a solução linearmente independente é  $u_1(\theta, z) = (-1, 0)^T$ . Observe que  $u_1(0, z)$  é de classe  $C^1$  com respeito a  $z$ . Assim sendo, a função de bifurcação de Malkin  $M_\delta(z)$  tem a seguinte forma,

$$M_\delta(z) = \int_0^{2\pi} \langle u_1(s, z), G_\delta(s, X(s, \xi(z), 0)) \rangle ds = \int_0^{2\pi} -G_\delta^1(s, X(s, \xi(z), 0))$$

Substituindo  $G_\delta^1$  na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} M_\delta(z) = & \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} [h(\cos \theta, \sin \theta)(-\cos \theta(q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma)) + \sin \theta(p^+(\varsigma) + p^-(\varsigma))) \\ & + (r^+(\varsigma) + r^-(\varsigma)) + (h(\cos \theta, \sin \theta)(\cos \theta(-q^+(\varsigma) + q^-(\varsigma)) \\ & + \sin \theta(p^+(\varsigma) - p^-(\varsigma))) + (r^+(\varsigma) - r^-(\varsigma))\varphi_\delta(\sin \theta)] ds \end{aligned}$$

onde  $\varsigma = (\cos \theta, \text{sen} \theta, z + \int_0^s h(\cos v, \text{sen} v) dv)$ . Com o objetivo de utilizar o Teorema 13 para encontrar os ciclos limite do sistema (3.50), observamos que para cada  $z_0 \in U$ , tal que  $M_\delta(z_0) = 0$  e  $M'_\delta(z_0) \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita diz que  $M'_\delta(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \bar{U}$  e ainda  $d(M_\delta, U) \neq 0$  já que  $M_\delta$  é contínua. Precisamos verificar a condição iii) do Teorema 13. Lembrando da observação 1, basta verificar v) no lugar de iii). De fato, seja  $\lambda$  um número positivo,  $\varepsilon \in [0, \lambda]$ ,  $w_0 = \xi(z_0)$  e considere os valores  $p_+ = \arcsin(\delta/r)$  e  $p_- = \arcsin(-\delta/r)$ . Observe que a função  $\varphi_\delta$  é contínua exceto nos pontos  $\theta = p_\pm$ . Considere os conjuntos  $L_\lambda^\pm = \{w \in [0, 2\pi] : |w - p_\pm| < 2\delta\}$  e  $L_\lambda = L_\lambda^+ \cup L_\lambda^-$ . Então,  $\text{med}(L_\lambda) = 8\lambda = \frac{o(\lambda)}{\lambda}$ .

Agora observe que para todo  $\theta \in [0, 2\pi] \setminus L_\lambda$  e para todo  $w \in B_\lambda(w_0)$ , a função  $G_\delta$  é  $C^\infty$ . De fato, a função  $G_\delta$  não troca de região  $R_i$  para outra  $R_j$  quando  $i \neq j$  e  $w$  varia em  $B_\lambda(w_0)$ , para  $i, j = 1, 2, 3$ . Isso ocorre apenas quando  $\theta \in [0, 2\pi] \cap L_\lambda$  e o raio da bola  $B_\lambda(w_0)$  é menor que o raio de cada vizinhança  $(p_\pm - \lambda, p_\pm + \lambda)$  de  $p_\pm$ . Então pelo Teorema do Valor Médio obtemos

$$\|D_\omega G_\delta(\theta, \omega, \varepsilon) - D_\omega G_\delta(\theta, \omega_0, \varepsilon)\| \leq \sup_{s \in S} \|D_\omega^2 G_\delta(s)\| |\omega - \omega_0|,$$

onde  $S = B_\lambda(\omega_0)$  e  $D_\omega^2 G_\delta$  denota a segunda derivada da função  $G_\delta$ . Então, uma vez que  $D_\omega^2 G_\delta$  é de classe  $C^1$  no conjunto compacto  $K$ , segue que

$$\|D_\omega G_\delta(\theta, \omega, \varepsilon) - D_\omega G_\delta(\theta, \omega_0, \varepsilon)\| \leq \tilde{M} |\omega - \omega_0| \leq \tilde{M} \lambda = \tilde{M} \frac{\lambda^2}{\lambda}$$

e então a condição  $v$  do Teorema 13 é satisfeita com  $\tilde{M} \lambda^2 = o(\lambda)$ . Para provar  $iv$ , primeiro observe que  $M_\delta$  é uma função a valores reais no qual o domínio é o conjunto dos números reais. Dado  $z_0 \in U$  satisfazendo  $M_\delta(z) = 0$  com  $M'_\delta(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in \bar{U}$ , considere  $\delta_1 > 0$  um valor arbitrário tal que  $\tilde{V} = (z_0 - \delta_1, z_0 + \delta_1) \subset U$ . Então, Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in \tilde{V}$ , tal que

$$|M_\delta(b) - M_\delta(a)| = |M'_\delta(c)| |b - a|,$$

$\forall a, b \in \tilde{V}$  e  $c \in (a, b)$ . A prova da condição  $iv$  segue tomando  $L_{M_\delta} = \inf\{|M'_\delta(z)|; v \in \tilde{V}\} > 0$  e observando que  $|M'_\delta(c)| \geq L_{M_\delta}$ , isto é,

$$\frac{|M_\delta(b) - M_\delta(a)|}{|b - a|} \geq L_{M_\delta} \Rightarrow |M_\delta(b) - M_\delta(a)| \geq L_{M_\delta} |b - a|.$$

Portanto o Teorema 13 garante que existe  $\varepsilon_1 > 0$  suficientemente pequeno e  $\delta_2 > 0$  tal que para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ , existe uma única solução  $2\pi$ -periódica, conseqüentemente um ciclo limite,  $\varphi_\delta^\varepsilon \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  do sistema (3.63) regularizado com condição inicial em  $B_{\delta_2}(\xi(z_0))$  satisfazendo  $\varphi_\delta^\varepsilon(0) \rightarrow \xi(z_0)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Conseqüentemente, os sistemas equivalentes (3.59) e (3.50) também possuem ciclo limite  $\varphi_\delta^\varepsilon(t)$  satisfazendo essa propriedade. Observe que o caso particular tratado neste artigo, a regularização (3.50) com  $\varepsilon = 0$  não depende de  $\delta$ . A condição inicial  $\varphi(z)$  também não depende, então  $\varphi_\delta^\varepsilon$  não depende de  $\delta$ . Como

$\xi(z) = \left( z_0 + \int_0^\theta h(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) ds, 1 \right)$  possui a segunda componente igual a 1 (ou seja,  $r = 1$  nas coordenadas cilíndricas), o ciclo limite  $\varphi_\delta^\varepsilon(t)$  mora no cilindro  $C$ , isto é,  $\varphi_\delta^\varepsilon$  bifurca do contínuo de órbitas periódicas em  $C$ .

Finalmente, colocando as expressões de  $p^\pm, q^\pm, r^\pm$  dadas em (3.45) na expressão (3.53), obtemos o polinômio

$$M_\delta(z) = I_s(\delta)z_0^s + \cdots + I_1(\delta)z_0 + I_0(\delta),$$

onde  $s = \max\{m, n, p\}$  e

$$I_j(\delta) = \int_0^{2\pi} \phi_j(\theta, \delta) d\theta \in \mathbb{R},$$

para algum  $\phi_j$  dependendo de  $\theta$  e  $\delta$  com  $j = 0, 1, \dots, s$ . Como  $M_\delta(z)$  é um polinômio em  $z$ , possui no máximo  $s$  zeros, então  $s = \max\{n, m, p\}$  é uma cota superior para o número de zeros de  $M_\delta$ . Conseqüentemente, pelo Teorema 13,  $s$  é também cota superior para o número de ciclos limite que podem bifurcar do cilindro no sistema (3.63). O mesmo pode ser concluído para o sistema (3.50), pois eles são equivalentes.  $\square$

O próximo Teorema é o resultado principal desta seção e diz que os ciclos limites que encontramos para o sistema regularizado (3.50) são preservados para o sistema não suave dado por (3.46) quando  $\delta \rightarrow 0$ .

**Teorema 14.** *Assuma que  $A_h(\theta) = 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Então para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno e para cada zero simples da função de bifurcação de Malkin,  $M_\delta(z_\delta)$ , com  $\lim_{\delta \rightarrow 0} M'_\delta(z_\delta) \neq 0$ , o sistema não suave (3.46) possui um ciclo limite bifurcando das soluções periódicas no cilindro  $C$  com  $\varepsilon = 0$ . Mais ainda, existe no máximo  $s = \max\{m, n, p\}$  valores de  $z$  no qual  $M_\delta(z) = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $A_h(\theta) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi)$  e para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno temos um valor  $z_0$  tal que  $M_\delta(z_0) = 0$  e  $M'_\delta(z_0) \neq 0$ , onde  $M_\delta$  é dada em (3.53). Então pelo Lema Fundamental existe um ciclo limite para o sistema (3.50) satisfazendo  $\varphi_\delta^\varepsilon(0) \rightarrow \xi(z_0)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Considere  $\Sigma^{z_0}$  a seção transversal de  $\varphi_\delta^\varepsilon$  contida no cilindro  $C$  para o mapa de Poincaré  $p_\delta^\varepsilon : \Sigma^{z_0} \rightarrow \Sigma^{z_0}$ , onde  $p_\delta^\varepsilon(z) = X_\delta(2\pi, \xi(z), \varepsilon)\varphi_\delta^\varepsilon(0) \in \Sigma^{z_0}$  e  $X_\delta(t, X, \varepsilon)$  é uma solução do sistema regularizado (3.50). Então segue que  $p_\delta^\varepsilon(\varphi_\delta^\varepsilon(0)) = \varphi_\delta^\varepsilon(0)$ , já que é uma órbita periódica, logo fechada. Considere  $p^\varepsilon : \Sigma^{z_0} \rightarrow \Sigma^{z_0}$  o mapa de Poincaré do sistema não suave (3.46) com  $p_\delta^\varepsilon(z) = X(2\pi, \xi(z), \varepsilon)$ . Observe que tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a aplicação de Poincaré  $p^\varepsilon$  é a composição dos mapas de Poincaré do sistema regularizado que está bem definido e é contínuo para todo  $z \in \Sigma^{z_0}$ . Cada ponto fixo de  $p^\varepsilon$  corresponde a uma solução periódica do sistema não suave dado em (3.46). Então segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} p_\delta^\varepsilon(z) = p^\varepsilon(z),$$

isto é,  $p^\varepsilon$  é o limite de  $p_\delta^\varepsilon$ . O ponto  $\varphi^\varepsilon(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_\delta^\varepsilon(0)$  é um ponto fixo do mapa de Poincaré  $p^\varepsilon(z)$ , ou seja,  $p^\varepsilon(\varphi^\varepsilon(0)) = \varphi^\varepsilon(0)$ . De fato, temos que  $p_\delta^\varepsilon(\varphi_\delta^\varepsilon(0)) = \varphi_\delta^\varepsilon(0) \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} p_\delta^\varepsilon(\varphi_\delta^\varepsilon(0)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_\delta^\varepsilon(0) = \varphi^\varepsilon(0)$ . Como  $\lim_{\delta \rightarrow 0} p_\delta^\varepsilon(\varphi_\delta^\varepsilon(0)) = p^\varepsilon(\varphi^\varepsilon(0))$ , segue que  $p^\varepsilon(\varphi^\varepsilon(0)) = \varphi^\varepsilon(0)$ , é ponto fixo e, como  $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta'(z_\delta) \neq 0$ , os autovalores da diferencial de  $P^\varepsilon$  são maiores que 1. Consequentemente, o sistema não suave (3.46) possui um ciclo limite  $\varphi^\varepsilon(t)$  tal que  $\varphi^\varepsilon(0) \rightarrow \xi(z_0) \in \mathbb{R}^2$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Um caso particular de perturbações do sistema (3.42) é considerar  $g^+ = g^-$  em (3.45), isto é, aplicar a mesma perturbação em  $\Sigma^+$  e em  $\Sigma^-$ . Neste caso particular obtemos um sistema perturbado suave para (3.42). Assim, (3.46) é suave e coincide com a regularização dada em (3.50). O próximo teorema é um resultado sob estas condições.

**Teorema 15.** *Assuma que  $A_h(\theta) = 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $g^+ = g^-$  e considere a função*

$$\overline{M}_\delta(z) = \int_0^{2\pi} -[h(\cos \theta, \text{sen} \theta)(-\cos \theta q^+(\varsigma) + \text{sen} \theta p^+(\varsigma)) + r^+(\varsigma)] ds \quad (3.68)$$

onde,  $\varsigma = (\cos \theta, \text{sen} \theta, z + \int_0^s h(\cos v, \text{sen} v) dv)$ , para  $z$  um número real. Então, para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno e para cada  $z_0$  tal que  $M_\delta(z_0) = 0$  e  $M_\delta'(z_0) \neq 0$ , o sistema suave (3.46) possui ciclo limite bifurcando das órbitas periódicas no cilindro  $C$  com  $\varepsilon = 0$ . Mais ainda, existe no máximo  $s = \max m, n, p$  valores de  $z$  no qual  $\overline{M}_\delta(z) = 0$ .

*Demonstração.* Como  $g^+ = g^-$ , obtemos  $p^+ = p^-$ ,  $q^+ = q^-$  e  $r^+ = r^-$  e ainda  $A_h(\theta) = 0$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi)$ , da fórmula (3.53), obtemos

$$M_\delta(z) = \int_0^{2\pi} -[h(\cos \theta, \text{sen} \theta)(-\cos \theta q^+(\varsigma) + p^+(\varsigma)) + r^+(\varsigma)] ds,$$

onde  $\varsigma = \left( \cos \theta, \text{sen} \theta, z + \int_0^{2\pi} h(\cos v, \text{sen} v) dv \right)$ . Substituindo  $p^+$ ,  $q^+$ ,  $r^+$  dados em (3.45), obtemos

$$\overline{M}_\delta(z) = \overline{I}_s(\delta) z_0^s + \dots + \overline{I}_1(\delta) z_0 + \overline{I}_0(\delta),$$

onde  $s = \max\{m, n, p\}$  e

$$\overline{I}_j(\delta) = \int_0^{2\pi} \overline{\phi}_j(\theta, \delta) d\theta \in \mathbb{R},$$

para algum  $\overline{\phi}_j$  dependendo de  $\theta$  e  $\delta$  com  $j = 0, 1, \dots, s$ . E o resultado segue pelo Lema Fundamental.  $\square$

Agora apresentaremos alguns exemplos para os resultados que foram demonstrados acima.

**Exemplo 3.** Considere  $h(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , então o sistema (3.42) está bem definido em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$  para  $z$  real,  $h$  é de classe  $\mathcal{C}^2$  e, em coordenadas cilíndricas, temos  $h(\theta) = \cos \theta$ . Assim,

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \text{sen}2\pi - \text{sen}0 = 0,$$

e ainda

$$\begin{aligned} A_h(\theta) &= \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \text{sen} \theta \frac{\partial h}{\partial y}(\cos \theta, \text{sen} \theta) \\ &= \cos \theta \left( \frac{1\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{(\cos \theta, \text{sen} \theta)} + \text{sen} \theta \left( \frac{-\frac{x}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}2y}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{(\cos \theta, \text{sen} \theta)} \\ &= \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + \text{sen} \theta (-\cos \theta \text{sen} \theta) = \cos \theta \text{sen}^2 \theta - \cos \theta \text{sen}^2 \theta = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $A_h(\theta) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi)$ . Agora considere as perturbações dadas em (3.45) com  $m = 2, n = p = 0$  e  $a_{ijk}^\pm = 0, \forall i, j, k \in \mathbb{N}$ , satisfazendo  $i + j + k \leq 1$ :

$$p^\pm(x, y, z) = a_{200}^\pm x^2 + a_{020}^\pm y^2 + a_{002}^\pm z^2 + a_{110}^\pm xy + a_{101}^\pm xz + a_{011}^\pm yx \quad (3.69)$$

$$q^\pm(x, y, z) = b_{000}^\pm \quad (3.70)$$

$$r^\pm(x, y, z) = c_{000}^\pm. \quad (3.71)$$

Se  $g^+ = g^-$ , então  $p^+ = p^-, q^+ = q^-$  e  $r^+ = r^-$  e podemos usar (3.68), pois a perturbação é suave. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{M}_\delta(z) &= \int_0^{2\pi} -[h(\cos \theta, \text{sen} \theta)(-\cos \theta q^+(\varsigma) + \text{sen} \theta p^+(\varsigma)) + r^+(\varsigma)] ds \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta b_{000}^+ - \cos \theta \text{sen} \theta p^+(\varsigma) - r^+(\varsigma) ds \\ &= b_{000}^+ \pi - \frac{\pi}{4} a_{110}^+ - \frac{\pi}{4} a_{101}^+ - 2\pi c_{000}^+ \\ &= -\frac{\pi}{4} (a_{110}^+ + a_{101}^+ - 4b_{000}^+ + 8c_{000}^+). \end{aligned}$$

Assim,  $\overline{M}_\delta(z)$  não possui zeros se  $(a_{110}^+ + a_{101}^+ - 4b_{000}^+ + 8c_{000}^+) \neq 0$  e se  $(a_{110}^+ + a_{101}^+ - 4b_{000}^+ + 8c_{000}^+) = 0$  então  $\overline{M}_\delta(z) = 0 \forall z$ , ou seja,  $\overline{M}_\delta$  possui um contínuo de zeros, e assim não podemos garantir nada aplicando o Teorema 15.

Considere inicialmente  $\delta \geq 1$  e a perturbação não suave, ou seja, para  $p^+ \neq p^-, q^+ \neq q^-, r^+ \neq r^-$ . Observe que como  $\delta \geq 1$ , então  $|\text{sen} \theta| \leq \delta$ , e assim  $\varphi_\delta(\text{sen} \theta) = \text{sen} \frac{\text{sen} \theta}{\delta}$ . Calculando  $M_\delta(z)$  que é dado pela equação (3.53), temos que

$$M_\delta(z) = \frac{-\pi}{8} (-4b_{000}^+ - 4b_{000}^- + a_{110}^+ + a_{101}^+ + a_{110}^- + a_{101}^- + 8c_{000}^+ + 8c_{000}^-) - \frac{\pi}{8\delta} (a_{101}^+ - a_{101}^-)z$$

Então se  $(a_{101}^+ - a_{101}^-) \neq 0$ , a função  $M_\delta(z)$  se anula em  $z_0$  dado por

$$z_0 = \frac{\delta(a_{101}^- + a_{110}^+ + a_{101}^+ + a_{110}^- - b_{000}^- - b_{000}^+ + 8c_{000}^- + 8c_{000}^+)}{a_{101}^- - a_{101}^+}.$$

e temos que  $M'_\delta(z_0) = \frac{\pi}{8\delta}(a_{101}^- - a_{101}^+) \neq 0$ . Considere agora o caso  $\delta < 1$ . Este caso é mais delicado, pois a medida que  $\theta$  varia em  $[0, 2\pi]$ , teremos os três casos:

$$\text{sen}\theta \leq -\delta, \quad -\delta \leq \text{sen}\theta \leq \delta, \quad \text{sen}\theta \geq \delta.$$

Isto significa que teremos que dividir a integração na expressão de  $M_\delta(z)$  levando em conta

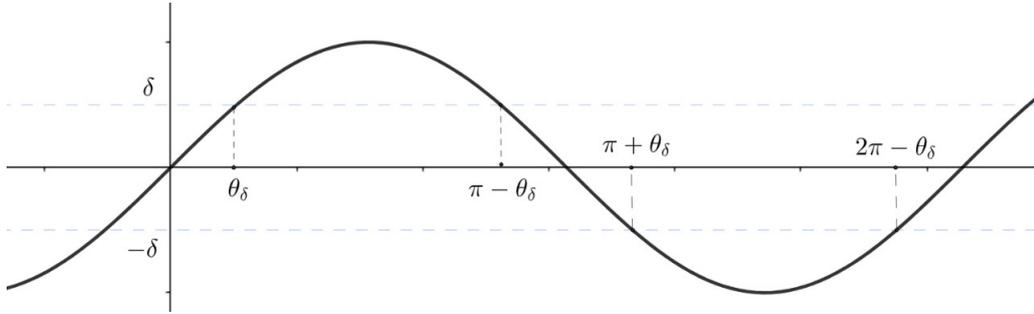


Figura 6 – Partição do intervalo a ser integrado.

cada um dos cenários acima, conforme a Figura 6. Considere inicialmente  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Desta forma, das desigualdades acima, obtemos

$$\theta \leq -\arcsin \delta, \quad -\arcsin \delta \leq \theta \leq \arcsin \delta, \quad \theta \geq \arcsin \delta.$$

Com isto, definindo  $\theta_\delta = \arcsin \delta$ , concluímos que devemos separar a integral em (3.53) nos intervalos definidos pela partição  $\{0, \theta_\delta, \pi - \theta_\delta, \pi + \theta_\delta, 2\pi - \theta_\delta, 2\pi\}$ . Assim, obtemos

$$M_\delta(z) = \frac{z(-\delta\sqrt{1-\delta^2}(2\delta^2-5) + 3\text{sen}^{-1}(\delta))(a_{101}^- - a_{101}^+)}{12\delta} - \frac{\pi(a_{101}^- + a_{110}^- + a_{101}^+ + a_{110}^+ - 4b_{000}^- - 4b_{000}^+ + 8c_{000}^- + 8c_{000}^+)}{8}.$$

Vemos que  $M_\delta(z)$  é um polinômio de grau 1 em  $z$  e, portanto, possui uma única raiz, a qual é dada por

$$z_0 = -\frac{3\pi\delta(a_{101}^- + a_{110}^- + a_{101}^+ + a_{110}^+ - 4b_{000}^- - 4b_{000}^+ + 8c_{000}^- + 8c_{000}^+)}{2(-5\sqrt{1-\delta^2}\delta + 2\sqrt{1-\delta^2}\delta^3 - 3\text{sen}^{-1}(\delta))(a_{101}^- - a_{101}^+)}.$$

Além disso, temos que a derivada de  $M_\delta$  aplicada em  $z_0$  é dada por

$$M'_\delta(z_0) = \frac{(a_{101}^- - a_{101}^+)(\delta^2(5 - 2\delta^2)^2(-1 + \delta^2) + 6\delta\sqrt{1-\delta^2}(-5 + 2\delta^2)\arcsin \delta - 9\arcsin^2 \delta)}{12\delta(\delta\sqrt{1-\delta^2}(-5 + 2\delta^2) - 3\arcsin \delta)},$$

como estamos assumindo  $a_{101}^- - a_{101}^+ \neq 0$ , temos que  $M'_\delta(z_0) \neq 0$ . Portanto o Lema Fundamental garante a existência de um ciclo limite para o sistema (3.50) considerando a função  $h(x, y) = x/(\sqrt{x^2 + y^2})$ , a perturbação (3.69) e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

## 4 Conclusão e trabalhos futuros

Nesta dissertação estudamos a existência de ciclos limite para equações diferenciais suaves e suaves por partes, em vários contextos. O principal método utilizado foi o Método da Média e suas várias variantes.

O primeiro caso estudado foi de sistemas em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ , inspirados no artigo [6], porém os sistemas e suas perturbações utilizados na dissertação não são os mesmos do artigo, afim de garantir que os mesmos estariam bem definidos e que suas soluções seriam periódicas. Após feita as adaptações conseguimos, utilizando o mesmo método, produzir bons resultados para sistemas definidos nestas variedades.

A seguir, estudamos sistemas em  $\mathbb{R}^3$  que possuem um toro invariante folheado de órbitas periódicas isócronas, seguindo o artigo [4]. Nesta parte do trabalho, utilizando a formulação clássica da Teoria da Média, conseguimos estimar cotas para o número de ciclos limite dos sistemas. As estimativas foram obtidas por meio das funções de Chebyshev.

Finalmente, apresentamos os resultados presentes nos artigos [2] e [5]. Nestes artigos, cilindros invariantes são perturbados com funções suaves por partes e cotas para o número máximo de ciclos limite são estabelecidas. Em [2] adicionamos uma hipótese a mais no Teorema 14, que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} M'_\delta(z_\delta) \neq 0$ , pois assim é possível garantir que o ponto fixo da aplicação de Poincaré é de fato um ciclo limite, ou seja, que ele não se degenera com a perturbação do campo.

### 4.1 Trabalhos futuros

Todos os problemas abordados nesta dissertação podem continuar a ser estudados em contextos mais gerais.

Por exemplo, no caso do trabalho inspirado em [6], podemos estudar a existência de conjuntos invariantes em variedades mais gerais que não sejam produto de esferas com espaços euclidianos. Outra possibilidade é estudar, em espaços da forma  $\mathbb{R}^k \times (\mathbb{S}^k)^m$ , a existência de conjuntos invariantes mais gerais (por exemplo a folheação de Reeb em  $\mathbb{S}^3$ ).

Os artigos [2] e [4] também inspiram continuações, pois tratam de um sistema inicial (não-perturbado) particular. Não é considerado, por exemplo, que o toro (ou cilindro) inicial poderiam admitir uma dinâmica caótica, ou seja, que seja inicialmente folheado por órbitas densas.

# Referências

- [1] A. Buică, J.-P. Francoise, and J. Llibre. Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 6(1):103–111, 2007. Cited on page 24.
- [2] C. A. Buzzi, R. D. Euzébio, and A. C. Mereu. Bifurcation of limit cycles from a non-smooth perturbation of a two-dimensional isochronous cylinder. *Bull. Sci. Math.*, 140(5):519–540, 2016. Cited 4 times on pages 13, 14, 58 e 81.
- [3] Y. Ilyashenko. Centennial history of Hilbert’s 16th problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 39(3):301–354, 2002. Cited on page 12.
- [4] J. Llibre, S. Rebollo-Perdomo, and J. Torregrosa. Limit cycles bifurcating from a 2-dimensional isochronous torus in  $\mathbb{R}^3$ . *Adv. Nonlinear Stud.*, 11(2):377–389, 2011. Cited 3 times on pages 13, 44 e 81.
- [5] J. Llibre and M. A. Teixeira. Limit cycles bifurcating from a two-dimensional isochronous cylinder. *Appl. Math. Lett.*, 22(8):1231–1234, 2009. Cited 3 times on pages 14, 58 e 81.
- [6] J. Llibre and X. Zhang. Limit cycles of linear vector fields on manifolds. *Nonlinearity*, 29(10):3120–3131, 2016. Cited 4 times on pages 13, 33, 34 e 81.
- [7] G. G. Lorentz. *Approximation of functions*. Chelsea Publishing Co., New York, second edition, 1986. Cited on page 52.
- [8] J. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2007. Cited on page 24.
- [9] S. Smale. Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer*, 20(2):7–15, 1998. Cited on page 12.
- [10] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Cited on page 15.
- [11] J. Sotomayor and M. A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields. In *International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)*, pages 207–223. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998. Cited on page 21.
- [12] H. Zoladek. The XVith Hilbert problem about limit cycles. In *Panoramas of mathematics (Warsaw, 1992/1994)*, volume 34 of *Banach Center Publ.*, pages 167–174. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1995. Cited on page 12.