

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Conjuntos invariantes em sistemas dinâmicos suaves por partes definidos em variedades compactas de dimensão 2

Relatório Final de Atividades de
Iniciação Científica da Fundação de Amparo
à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP
Processo 2021/07017-2
Vigência: 01/09/21 a 31/08/22

Aluna: Beatriz Benatti da Rocha e Silva
Orientador: Ricardo Miranda Martins

Campinas
2021

1 Resumo

O relatório apresenta os principais resultados do projeto de Iniciação Científica financiado pela FAPESP, cujo tema é campos lineares em variedades compactas de dimensão 2, imersas em \mathbb{R}^3 . Para tanto, iniciamos com uma base de parametrizações e colagens de seções do plano \mathbb{R}^2 , difeomorfos a tais variedades, de forma que o cálculo em regiões do plano pudesse ser comparado àqueles da superfície; em seguida, foram produzidos uma série de exemplos de campos que possuem ciclos limite, ou demonstrações de casos em que não há existência deles. Todas as contas foram feitas com o software Mathematica, que a aluna já tinha contato por conta do projeto anterior, desenvolvido em 2020/21.

2 Resultados[7]

Nesta seção, exibirá-se o conteúdo escrito pela aluna durante o projeto.

2.1 Fundamentos Iniciais [1] [2]

2.1.1 Parametrização de curvas

Uma parametrização é uma função $P : I \rightarrow S, I \in \mathbb{R}^m, S \in \mathbb{R}^n$ responsável por indicar a quantidade de variáveis livres que a superfície S possui. O conjunto I é definido como o(s) intervalo(s) que o(s) parâmetro(s) percorre(m) para descrever toda a figura, geralmente contido em alguma figura de retas poligonais com ângulo de $\frac{\pi}{2}$ i.e., um intervalo de \mathbb{R} , um retângulo em \mathbb{R}^2 , etc. Considerando a característica de indicar as variáveis livres, é preciso que $m < n$ para garantir uma parametrização eficiente.

Dada uma curva $S(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_n$, temos que a parametrização trivial é dada por:

$$x_1 = \rho_1, x_2 = \rho_2, \dots, x_{n-1} = \rho_{n-1}, x_n = S(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1})$$

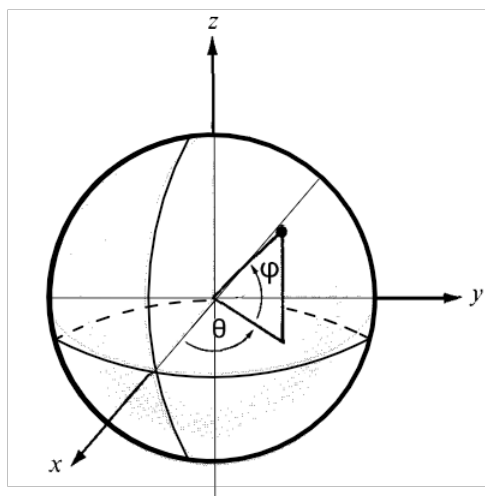
Prosseguiremos para os casos clássicos de parametrizações de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 que serão fundamentais para o seguimento do projeto.

2.1.2 Esfera

Proposição 1. *Considere a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$, centrada na origem. Então a parametrização $(x = r \cos \theta \sin \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \phi)$ é uma parametrização para a esfera.*

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi = \\ &= r^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2 \cos^2 \phi = r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r^2 \end{aligned}$$

Note que a parametrização é construída a partir dos ângulos da esfera, o que induz um intervalo comum; $I := [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, como sugere a figura abaixo:

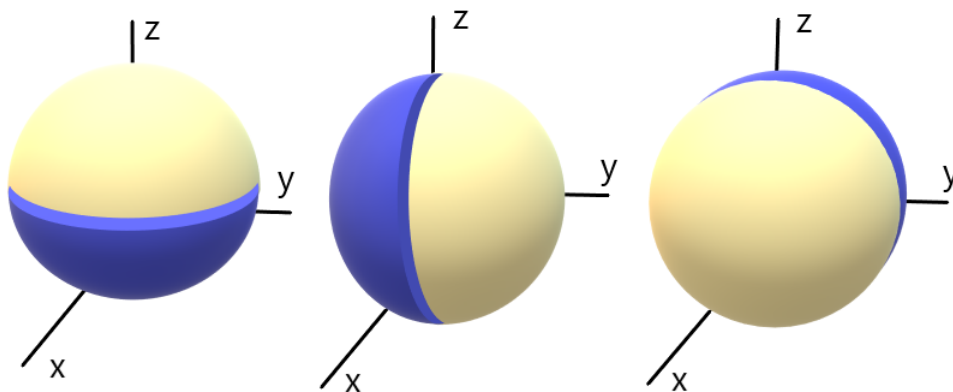


Outras parametrizações relevantes da esfera: Começemos por considerações na parametrização trivial.

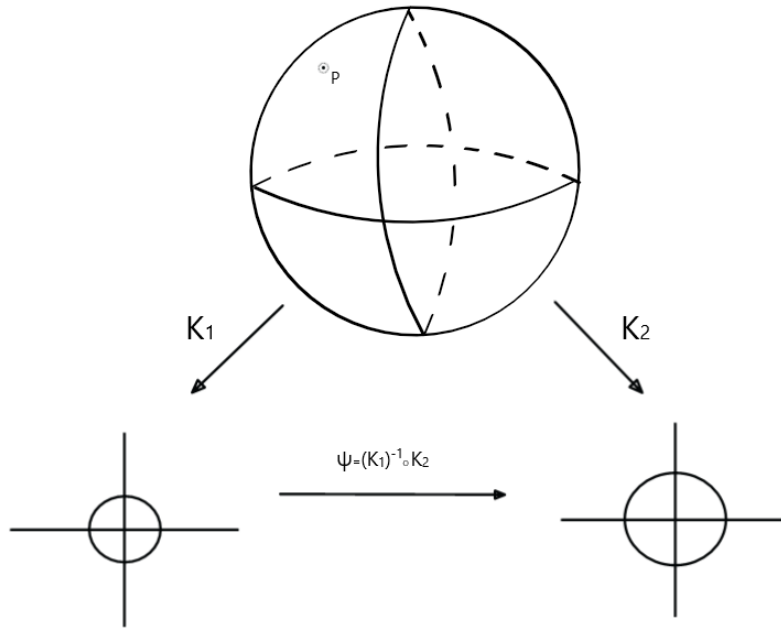
Em teoria, a parametrização trivial da esfera é dada por $(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Note que há alguns problemas: a terceira coordenada não engloba pontos abaixo ou contidos do plano xy . O primeiro problema é facilmente resolvido: basta tomar $(u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$, mas o segundo exige maior delicadeza. Para resolvê-lo, tomaremos mais quatro parametrizações;

$$K_{\pm} = (u, \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), \quad L_{\pm} = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

Assim, cada ponto da esfera é descrito por pelo menos uma parametrização:



Porém isso induz outro problema: há pontos mapeados por mais de uma parametrização. Nesse caso, perceba que cada parametrização tem uma inversa; conseqüentemente basta criar um mapa entre os dois espaços cartesianos (i.e., uma mudança de variável) compondo parametrizações e suas inversas: tome $p \in S^1$ mapeado pelas parametrizações k_1, k_2 e o mapa abaixo:



Pela composição de funções é possível mapear o ponto p sem conflitos entre as diferentes parametrizações que o representam.

2.1.3 Cilindro

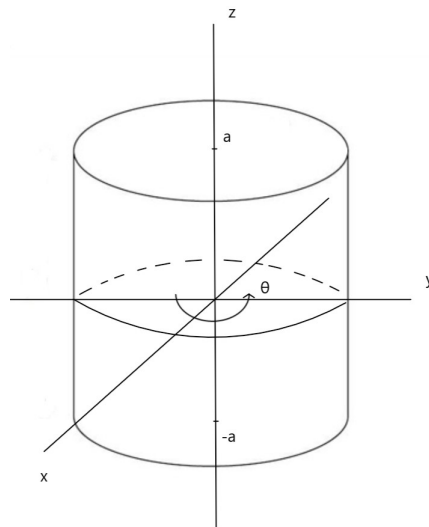
Proposição 2. Considere o cilindro de equação $x^2 + y^2 = r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$, centrado na origem. Então a parametrização $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z)$ é uma parametrização para a superfície.

Demonstração. Basta observar que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

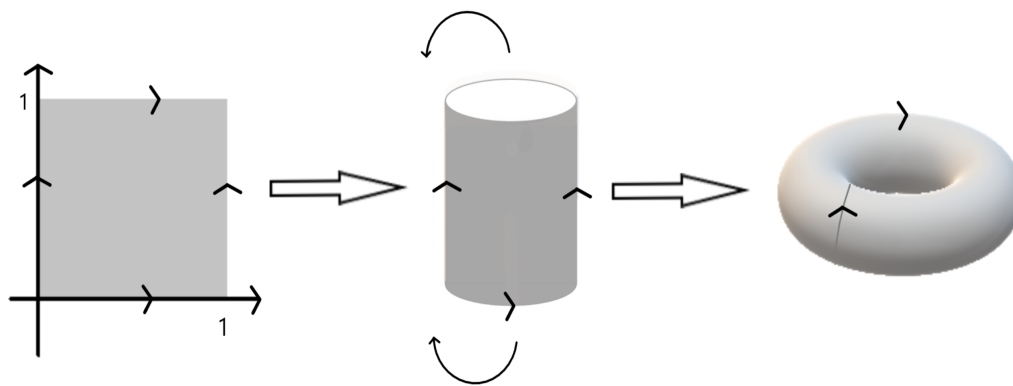
□

Novamente o ângulo θ induz um dos domínios do intervalo, enquanto o comprimento do cilindro induz o outro domínio; $I := [0, 2\pi] \times [-a, a]$, como mostra a figura:



2.1.4 Toro

O toro é uma variedade construída a partir de um quadrado $Q := [0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$ unindo as duas extremidades opostas para formar um cilindro, e depois unindo as extremidades circulares do cilindro, como mostra a figura:



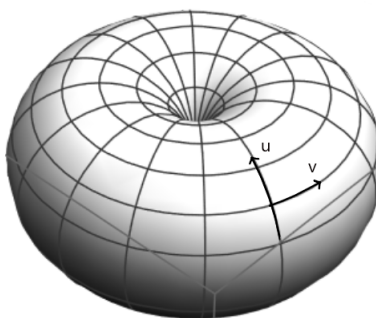
Proposição 3. *Considere o toro de equação $(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2$, $a, c \in \mathbb{R}^+$. Então $(x = \cos u(a \cos v + c), y = \sin u(a \cos v + c), z = a \sin v)$ é uma parametrização para o toro.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} (c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 &= (c - \sqrt{(\cos u(a \cos v + c))^2 + (\sin u(a \cos v + c))^2})^2 + (a \sin v)^2 = \\ (c - \sqrt{(\sin^2 u + \cos^2 u)(a \cos v + c)^2})^2 + (a \sin v)^2 &= (c - (a \cos v + c))^2 + a^2 \sin^2 v = a^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v = a^2 \end{aligned}$$

□

Portanto, $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ no caso abordado, passível de intuição pela figura abaixo:



Observação 1. 1. *As superfícies unitárias, que serão de interesse durante a pesquisa, supõe que o valor das constantes reais é 1 para todos os casos com exceção de c , que valerá 0.*

2. Há mais parametrizações possíveis para uma mesma superfície. As mencionadas foram escolhidas porque são clássicas dentro da teoria.

Observação 2. Mais considerações sobre o intervalo I : o leitor deve perceber que, apesar do domínio cobrir toda a superfície, é incoerente afirmar que os valores de \sin e \cos são indefinidos fora do intervalo. A sutileza está no retorno da variável ao começo (i.e., quando o ângulo se aproxima de 2π e "cruza a fronteira" do intervalo, ele retorna ao valor 0, do início dele). Portanto, I é um intervalo quocientado: $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] / \sim$ não caso do toro, por exemplo. O mesmo se aplica aos ângulos da esfera e do cilindro. Note que o intervalo pode ser substituído sem perdas por $I[0, 1] \times [0, 1] / \sim$ concordando com a construção do toro feita acima. Em notação matemática, indicamos o segundo intervalo quocientado como S^1 , e $I = S^1 \times S^1$.

Definição 1. Uma função $f := A \rightarrow B$, A, B abertos de \mathbb{R} , $f \in C^\infty$ é chamada de difeomorfismo se existir $f^{-1} := B \rightarrow A$ inversa de f , tal que f^{-1} também seja diferenciável.

Definição 2. Um subconjunto S de \mathbb{R}^n é chamada de variedade k -dimensional se, para cada $x \in S$, temos que existe um subconjunto U que contém x , outro subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ ambos abertos, e um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ tal que:

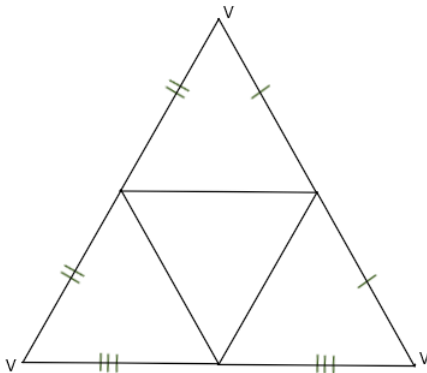
$$h(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^{k+1} = \dots = y^n = 0\}$$

Isto é, uma variedade é uma superfície que se assemelha ao plano cartesiano localmente, em que é possível construir um difeomorfismo entre aquele e este.

2.2 Fluxos em um poliedro

Sabendo que a esfera é topologicamente semelhante a poliedros que não contém furos, o estudo de fluxos na esfera é extremamente semelhante ao daqueles nesse tipo de sólido, em que cada face representaria uma seção de S^1 . Portanto, aqui focaremos em sistemas contínuos por partes, em que cada parte é uma face do sólido e cada linha de descontinuidade é uma aresta. Um estudo parecido foi feito em [4, 5].

Para simplificar, tomaremos a planificação com relações de equivalência entre as faces e arestas, como mostra a figura:



2.2.1 O problema das arestas[3]

Antes de tudo, especificaremos convenções sobre o comportamento do fluxo quanto às arestas do poliedro. Partimos de três classificações diferentes considerando a orientação vetorial do campo nas vizinhanças da aresta:

- **Região de costura:** caso em que o vetor encontra uma aresta por uma das faces e emerge dela na face adjacente, seguindo o curso do novo campo;
- **Região de deslize:** situação na qual os vetores vão em direção a aresta nas duas faces. Para contornar o problema, estabelecemos que o fluxo segue a linha da aresta até o vértice;
- **Região de escape:** oposta à região de deslize, temos vetores emergindo da aresta nas duas faces. É estabelecido que o passado dos campos é a linha da aresta, e encontramos dois futuros distintos.

Abaixo, uma ilustração:

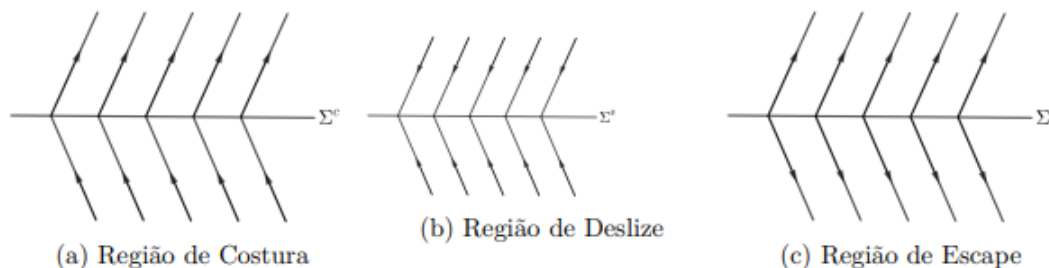
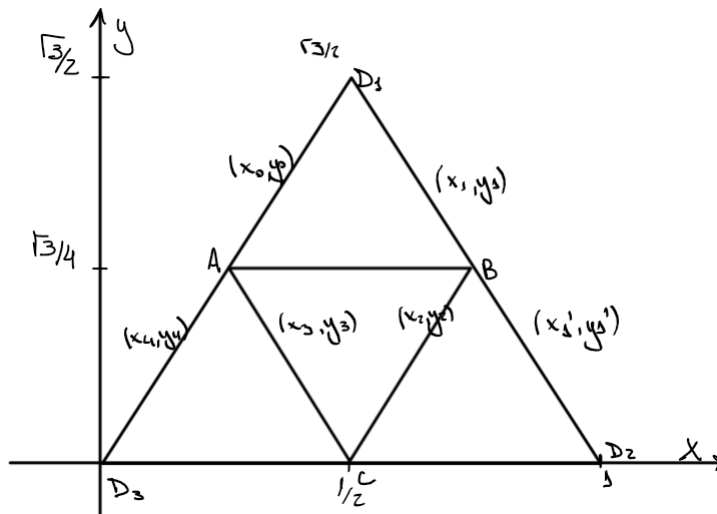


Figura 1: Fonte: consulte [3]

2.2.2 Closing equations

Os próximos passos consistirão em estender a análise para outros tipos de campo, começando pelos centros. Para tanto, montaremos as equações de fechamento de um ciclo no tetraedro equilátero, considerando a planificação imersa em \mathbb{R}^2 .



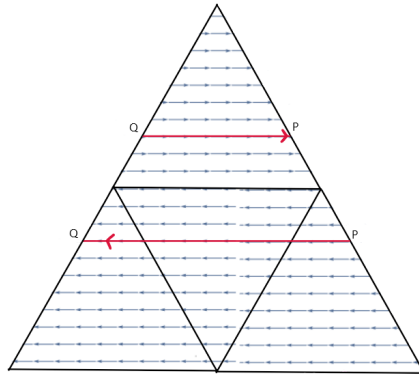
Tome $H_i(f(x, y), g(x, y))$ o campo que passa pela face i . Dessa forma, dada condição inicial $(x_0, y_0) \in \overline{AD}$:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= H_1(x_0, y_0) \cap \overline{BD_1} \\ (x'_1, y'_1) &= \left(\frac{3}{2}x_1, \frac{\sqrt{3}}{2}y_1\right) \in \overline{BD_2} \\ (x_2, y_2) &= H_2(x'_1, y'_1) \cap \overline{BC} \\ (x_3, y_3) &= H_3(x_2, y_2) \cap \overline{AC} \\ (x_4, y_4) &= H_4(x_3, y_3) \cap \overline{BD_3} \\ (x_0, y_0) &= \left(\frac{1}{2} - x_4, \frac{\sqrt{3}}{2} - y_4\right) \in \overline{AD} \end{aligned}$$

Iniciaremos o estudo considerando fluxos constantes em cada face de um tetraedro, por enquanto relevando as linhas de campo que cruzam um vértice.

Proposição 4. *Tome um tetraedro com sistemas constantes em cada face. Então existem órbitas periódicas que passam por todas as faces do tetraedro.*

Exemplo 1. *Para fins de orientação, considere que o eixo das abscissas coincide com uma das arestas que não possui relação de equivalência, i.e., que divide o plano em duas regiões de campos diferentes. Considere agora o campo $(x, y) = (1, 0)$ na face contida em $y > 0$ e o campo $(x, y) = (-1, 0)$ nas outras três faces. Assim, obteremos uma órbita:*



Proposição 5. *Considere um tetraedro com sistemas constantes em cada face e uma órbita periódica que engloba três delas nesse poliedro. Então a órbita periódica não é um ciclo limite.*

Demonstração. (Caso 3 faces que não passa pelo vértice): Simples consequência do Teorema de Tales e semelhança de triângulos. Considere a figura abaixo:

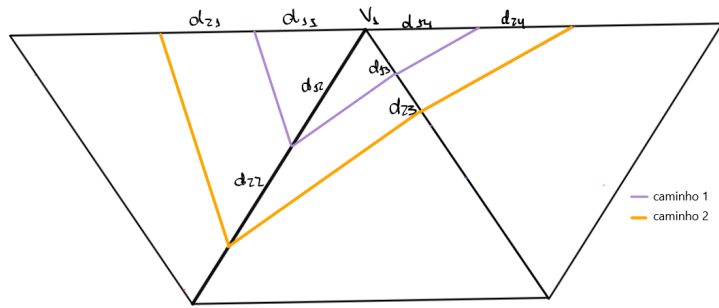


Figura 2: Ciclos que envolvem três faces. A medida da distância é tomada do vértice V_1 ao ponto de intersecção entre a aresta e a linha de campo

Note que, como as linhas de campo são paralelas, então temos, pelo Teorema de Tales, a seguinte relação:

$$d_{n,1} = K.d_{n,2}, \quad n \in 1, 2, 3, 4$$

Como o caminho 1 é uma órbita, temos, pela relação de equivalência, que $d_{1,1} = d_{1,4}$ e, portanto:

$$K.d_{1,2} = K.d_{4,2} \Rightarrow d_{1,2} = d_{4,2}$$

i.e., o caminho 2 também é um ciclo.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar qualquer caminho que esteja a uma distância menor que ε , e certamente será um ciclo.

Caso que passa pelo vértice: Similar ao anterior: dada vizinhança do vértice, existe condição inicial que recai num caminho por 3 faces fora dele. \square

Proposição 6. *Considere um tetraedro equilátero com sistemas constantes em cada face e uma órbita periódica que engloba três delas nesse poliedro. Então a órbita periódica é um ciclo limite.*

Demonstração. Para fins de nomenclatura, tome a imagem abaixo:

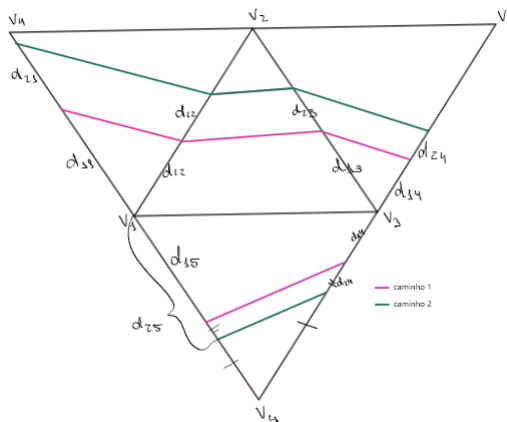


Figura 3: Ciclos que envolvem quatro faces. A medida da distância é tomada dos vértice V_1 ou V_3 ao ponto de intersecção entre a aresta e a linha de campo, conforme a congruência exigir

Note que, novamente pelo Teorema de Tales, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} (1) \quad & d_{1,2} = K_1 \cdot d_{1,1} \\ (2) \quad & l - d_{1,3} = K_2 \cdot (l - d_{1,2}) \\ (3) \quad & d_{2,4} = K_3 \cdot d_{2,3} \\ (4) \quad & l - d_{1,5} = K_4 \cdot (l - d_{1,4}) \end{aligned}$$

Em que l é o comprimento do lado do triângulo equilátero. Substituindo a distância inicial por outra, as relações serão exatamente as mesmas, i.e, o sistema é válido para qualquer condição inicial. Fazendo as substituições, temos que:

$$d_{1,5} = K_4 K_3 K_2 K_1 d_{1,1} + l(K_4(K_3(-K_2 + 1) - 1) + 1)$$

O sistema é formado primeiramente pela definição dos fluxos em cada face e depois pela análise de existência de ciclos, portanto cada K_i é uma constante. Assim, a relação entre $d_{1,5}$ e $d_{1,1}$, é uma reta r . A condição em que $d_{1,1} = d_{1,5}$ é a interseção entre r e a reta $x = y$, que é única para todas as condições exceto uma: o caso $k_1 K_2 K_3 K_4 = 1$, $(K_4(K_3(-K_2 + 1) - 1) + 1) = 0$, ilustrado anteriormente. Concluimos que o ciclo, quando existe, é único nas situações diferentes da exceção. Caso passando pelo vértice: caso particular do anterior, em que $d_{1,1} = l$ \square

Proposição 7. *Tome tetraedro equilátero com fluxos que contém órbitas elípticas em cada uma das faces. Então existe sistema que possui pelo menos dois ciclos limite.*

Demonstração. O sistema cujos fluxos são dados por:

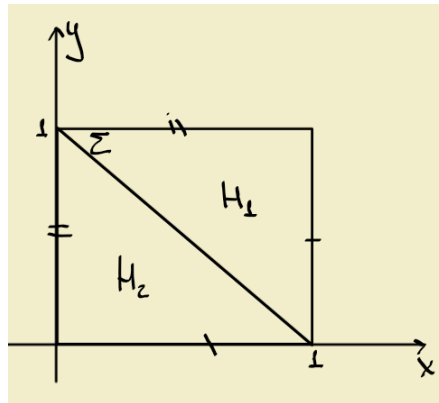
$$\begin{aligned} H_1 &= \{1.6y + 1.98, -2.23x + 2.12\} \\ H_2 &= \{-6.58y - 3, 1.28x + 1\} \\ H_3 &= \{-4.66y - 0.23, 2.94x - 1.45\} \\ H_4 &= \{-8y - 0.4, 0.1x - 0.5\} \end{aligned}$$

Possui um ciclo limite envolvendo as 4 faces e outro envolvendo as faces 2, 3 e 4: escolhendo condições iniciais adequadas, encontramos as seguintes pares de condição inicial e final, em valores aproximados:

inicial	final
(1; 0)	(0,948; 0,09)
(0,82; 0,31)	(0,87; 0,22)
(0,8; 0)	(0,82; 0)
(0,55; 0)	(0,537; 0)

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem dois ciclos limite para o campo descrito. \square

Proposição 8. *Considere o quadrado $([0, 1]) \cap \mathbb{R}^2$ com linha de descontinuidade na reta $\Sigma : y = 1 - x$ e a colagem conforme a figura.*



Então, se o sistema for composto por fluxos constantes, não há ciclos limite; caso seja constituído de órbitas elípticas em torno de uma singularidade, existe exemplo que contém pelo menos um ciclo limite.

Demonstração. A demonstração da primeira afirmação é análoga à da Proposição 5. Para a segunda afirmação, segue o sistema:

$$H_1 = \{-1.45y - 7.15, 6.9x - 3.6\}$$

$$H_2 = \{7.82y - 1.1, -7x - 6.86\}$$

e as condições iniciais e finais da tabela abaixo:

inicial	final
(1; 0,15)	(1; 0,324)
(1; 0,75)	(1; 0,61)

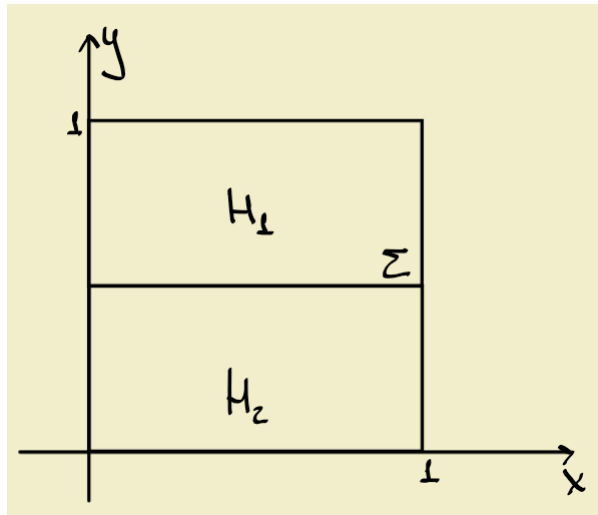
Pelo Teorema do Valor Intermediário, há ciclo limite. □

2.3 Fluxos no toro

Da mesma forma que fluxos na esfera foram analisados em poliedros, estudaremos os fluxos na superfície do toro a partir da análise no quadrado $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$

2.3.1 Closing Equations

Nessa seção, montaremos as equações de fechamento do quadrado. Consideraremos a linha de descontinuidade Σ do sistema em $y = 0.5$, com sistema H_1 na parte superior e H_2 na inferior:



Portanto, dada condição inicial (x_0, y_0) a existência de órbita periódica deve respeitar as equações:

$$(x_0, y_0) = (x_0, 1)$$

$$(x_1, y_1) = H_1(x_0, 1) \cap y = 0.5 \rightarrow (x_1, y_1) = (x_1, 0.5)$$

$$(x_2, y_2) = H_2(x_1, 0.5) \cap y = 0 \rightarrow (x_2, y_2) = (x_2, 0).$$

se $x_2 = x_0$, há órbita periódica

OBS: os sistemas H_1 e H_2 são cuidadosamente escolhidos para que $0 < x_0, x_1, x_2 < 1$, e as condições não atravessem a outra linha de equivalência do toro.

2.3.2 Ilustrações do Teorema de Hartman-Grobman

Teorema 1. (*Hartman-Grobman*): *Sejam X um campo vetorial num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in U$ uma singularidade de X . Suponha que a matriz jacobiana $J = dX(x_0)$ seja hiperbólica, i.e., a parte real dos autovalores é não nula. Então o comportamento do fluxo regido por J é semelhante ao de X numa vizinhança de x_0 .*

O teorema afirma, em resumo, que o comportamento de um fluxo X pode ser aproximado pelo sistema linearizado DX em torno de uma singularidade.

Teorema 2. (*Poincaré-Bendixson*): *Considere o compacto V , seus pontos fixos x_0, \dots, x_n e o ω -limite da órbita invariante em V . Então, uma delas acontece:*

- x_i é centro de órbita periódica
- x_i faz parte de um conjunto finito de pontos fixos conectados por órbitas.

Um ponto fixo inicial pode ser conectado a mais de um ponto fixo e podem existir órbitas que conectem um ponto a ele mesmo.

Dados os dois teoremas, as ilustrações são exemplos de fluxos no quadrado $[0, L]^2 \in \mathbb{R}^2$ (i.e., em superfície equivalente ao toro) estudados em [6], em que os pontos fixos são conectados por órbitas, e cujo comportamento é descrito por fluxos com polinômios trigonométricos nas entradas. Seguem dois exemplos realizados no artigo.

Exemplo 2. *Considere a função $f(x, y) = -b \cos x + \cos y$. Definimos Y_b ortogonal a ∇f , dada por $Y_b = (-\sin y, -b \sin x)$, que será estudado. Pelo teorema de Hartman-Grobman, o sistema em torno das singularidades de Y_b , localizadas em $(m\pi, n\pi)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, deve se comportar de acordo com o sistema da matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ -b \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

substituindo os pontos críticos nas funções. De fato, para b negativo, temos que se $m + n$ é ímpar, então os sinais de $\cos x, \cos y$ são opostos e a matriz possui autovalores imaginários, gerando ciclos. Em contrapartida, se $m + n$ é par, temos que $\cos x = \cos y$ e a matriz possui autovalor real, definindo uma sela. Para b positivo, acontece o oposto.

Exemplo 3. *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + b \sin x + cy + d \sin y$. Então estudaremos o fluxo do gradiente de f , dado por $\nabla f = (a + b \cos x, c + d \cos y)$. Note que o sistema possui singularidades em $\arccos -\frac{a}{b}, \arccos -\frac{c}{d}$ se, e só se, $|\frac{a}{b}| < 1, |\frac{c}{d}| < 1$, e que tais singularidades são infinitas graças à periodicidade da função cosseno. Dados valores de a, b, c, d que respeitem o critério e considerando a função cosseno como polinômio, as singularidades deverão se comportar conforme o sistema regido pela matriz*

$$\begin{pmatrix} -b \sin x & 0 \\ 0 & -d \sin y \end{pmatrix}$$

, com x e y alternando entre valores positivos e negativos. Assim, os pontos críticos são selas, nós atratores ou nós repulsores e, de acordo com o Teorema de Poincaré-Bendixson, conectados entre si.

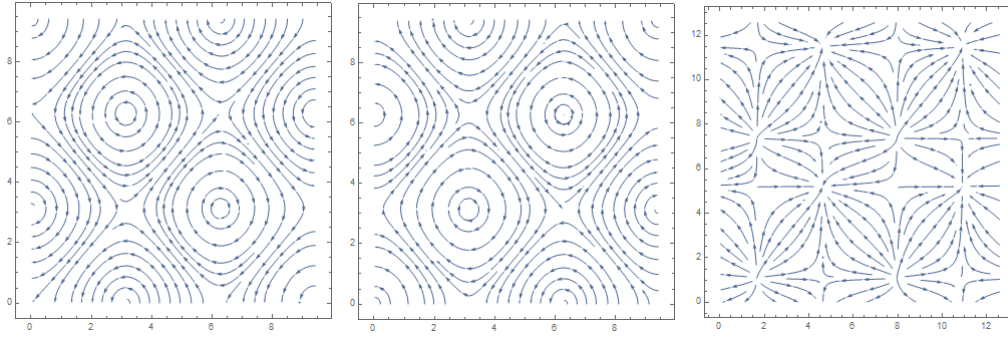


Figura 4: Da esquerda para a direita: fluxo do exemplo 2 com $b=1.2$; fluxo do exemplo 2 com $b=-1.2$; fluxo do exemplo 3 com $a=-0.2$, $b=-2$, $c=0.7$, $d=-1.5$

Proposição 9. *Tome quadrado como o construído na seção 2.3.1. Então, se os fluxos H_1 e H_2 são constantes e existe órbita periódica, ela não é um ciclo limite. Se H_1 e H_2 são sistemas lineares com autovalores imaginários puros, existe exemplo que contém pelo menos um ciclo limite.*

Demonstração. A demonstração da primeira afirmação segue semelhante à Proposição 5; para a segunda afirmação há o sistema:

$$H_1 = \{-3.4 * y + 3.3, 10 * x - 9\}$$

$$H_2 = \{1.48 * y - 1.8, -9 * x - 0.6\}$$

E as seguintes condições inicial e final:

inicial	final
(0,625; 1)	(0,84; 1)
(0,4; 1)	(0,31; 1)

Pelo Teorema do Valor Intermediário, há ciclo limite. □

3 Considerações finais

A segunda metade do projeto pôde se desenvolver presencialmente, graças ao retorno presencial por completo da Unicamp. Além disso, houve avanço na parte computacional em relação ao primeiro projeto, visto que a aluna optou por iniciar cursos do software Mathematica ao final da entrega do relatório parcial. De forma geral, foram apresentados resultados sólidos, alguns inéditos, mostrando bom aproveitamento dos recursos durante o período de estudo. Cabe também um agradecimento ao prof. Ricardo Miranda Martins, que me orientou durante a vigência da bolsa e se dedicou à minha formação.

4 Participação em evento científico

A aluna está inscrita para o XXX Congresso de Iniciação Científica da Unicamp, apresentando o projeto em 25/10/2022.

5 Itens 3,5-7

Nada a declarar.

Referências

- [1] APOSTOL, T.M. *Calculus Volume II: Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*. Segunda Edição. Indiana University: John Wiley & Sons, 1969.
- [2] SPIVAK, M. *Calculus On Manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. Primeira Edição. Brandeis University: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- [3] CASIMIRO, Joyce Aparecida. *Ciclos limite para sistemas dinâmicos suaves por partes em dimensão $n > 2$ e em variedades compactas*. 2019. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.
- [4] CASTRO, Matheus Manzatto de. *Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes: Teoria Local e Global*. 2016. Relatório (Iniciação Científica em Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.
- [5] BROUCKE, M. E.; PUGH, C.C.; SIMIC, S. N. *Structural Stability of Piecewise Smooth Systems*. Parcialmente apoiado por NASA grant NAG-2-1039 e EPRI grant EPRI-353526089 (2001).
- [6] ANJOS, Adairto G. dos *Polynomial Vector Fields on the Torus*. Sociedade Brasileira de Matemática, Vol 17. Nº2 (pag 22), 1986.
- [7] SILVA, Beatriz B.R. *Conjuntos invariantes em sistemas dinâmicos suaves por partes definidos em variedades compactas de dimensão 2*. 2022. Relatório Parcial (Iniciação Científica em Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2022.