

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Soluções periódicas para equações diferenciais contínuas por partes

Relatório Final de Atividades do
Programa Institucional de Bolsas
de Iniciação Científica - CNPq

Aluna: Beatriz Benatti da Rocha e Silva RA:213459
Orientador: Ricardo Miranda Martins

Campinas
2021

1 Introdução

Um sistema dinâmico é um sistema de equações diferenciais capaz de analisar a evolução de um conjunto de parâmetros conforme o tempo avança ou retrocede. É fácil de ver que a modelação através desses sistemas pode ter muitas aplicações, uma vez que a grande maioria dos fenômenos da natureza se comporta como um deles. Como exemplo, temos as populações, os sistemas físicos (especialmente mecânicos), a teoria de controle em uma fábrica, etc.

Nesse meio nasceram os 23 problemas de Hilbert, que ocupariam os matemáticos durante os séculos XX e XXI, e entre eles o 16^o Problema de Hilbert. A meta seria encontrar um padrão entre a quantidade de ciclos limite em sistemas em \mathbb{R}^2 e o grau das equações do sistema, a função $H(n)$. Assim, o estudo dessa Iniciação Científica procurou familiarizar a aluna com os diferentes métodos algébricos de se obter um ciclo limite num sistema suave por partes, com uso de métodos computacionais para encontrar e garantir a existência dos mesmos para, num futuro, iniciar a busca pela resposta do problema em pauta.

2 Metodologia

O processo de aprendizado constituiu-se, em maior parte, no estudo da teoria através de artigos e livros seguido da implementação computacional de exemplos que embasassem o conceito. Os assuntos foram gradativamente dificultados e cada novo tópico era acompanhado de uma reunião para apresentar as ideias principais, sendo repetida caso houvessem dúvidas. Na grande maioria das vezes foi necessária consulta em materiais além dos indicados pelo orientador, em livros, fóruns e artigos, para complementar a compreensão. Todo o projeto foi executado com computador e livros, sem necessidade de material extra.

3 Resultados e Discussão [1]

3.1 Fundamentos iniciais

O primeiro passo foi fazer uma revisão de assuntos importantes, que a aluna já estudou em disciplinas. São eles: o diagrama traço-determinante e as definições envolvendo fluxos.

3.1.1 Diagrama traço-determinante para sistemas lineares[2][3]

Os sistemas dinâmicos são responsáveis por modelar matematicamente um conjunto de estados interdependentes de determinado sistema na natureza, seja na

biologia, na física ou em processos industriais. Para seu estudo, faz-se uso dos conhecidos **retratos de fase**, "desenhos" que acompanham um campo vetorial e que, dada uma condição inicial sobre uma das linhas do desenho, o sistema progride acompanhando a trajetória marcada. É possível classificá-los em 6 categorias: centros, focos, nós, selas, retas e pontos isolados. Para descobrir em qual categoria um sistema se encaixa, monta-se a matriz associada ao sistema e analisa-se o traço e o determinante dela, seguindo a classificação da imagem abaixo:

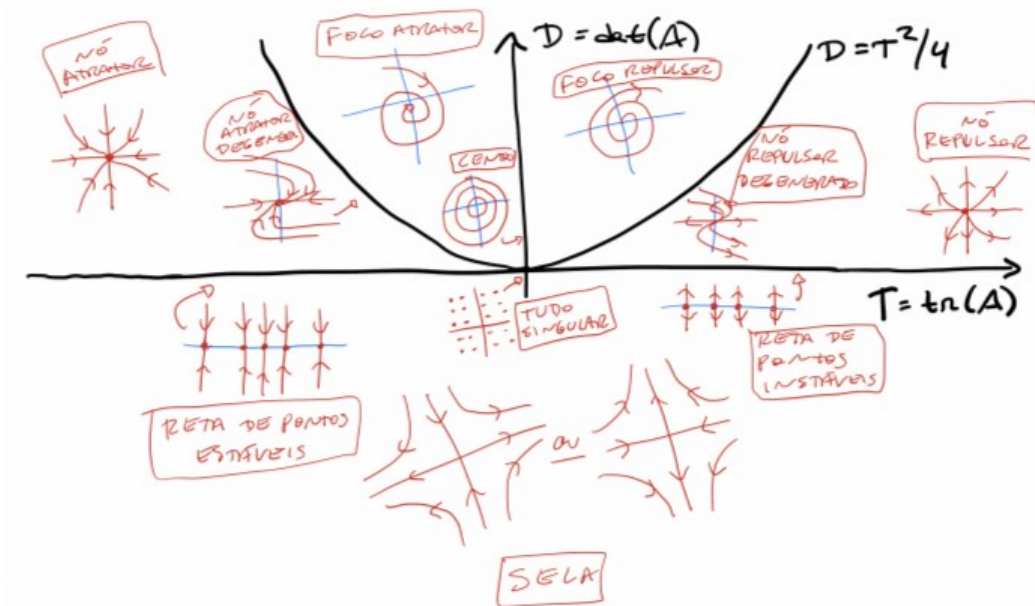


Figura 1: Diagrama Traço - determinante. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/cursos/2020-2-mm442/slides/mm442-aula4-aplicacao-de-poincare.pdf>

3.1.2 Campos vetoriais e o Fluxo [4][5]

Definição 1 (formal). Considere Δ um aberto em \mathbb{R}^n e I um intervalo em \mathbb{R} . Definimos um campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^λ . Ao campo vetorial associa-se a EDO

$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$

As soluções da equação, i.e., as aplicações diferenciáveis $\phi : I \rightarrow \Delta$ tais que $\frac{d\phi}{dt}(t) = X(\phi(t)) \forall t \in I$ são chamadas trajetórias ou curvas integrais de X . A função $\phi(t)$ que satisfaz as condições é denominada *fluxo* de um sistema dife-

rencial.

Definição 2. *Um sistema é dito invertível se o conjunto indexador I possuir valores menores que zero.*

Um retrato de fase X , um conjunto indexador I e um operador ϕ definem um sistema dinâmico se:

- $\phi^0(x) = x \forall x \in X$;
- $\phi^{t+s}(x) = \phi^s(\phi^t(x)) \forall x \in X, t, s \in I$
- $\phi^t \phi^{-t} = Id = \phi^0$, caso o sistema seja invertível.

Caso todas as condições sejam satisfeitas, pode-se garantir que $\phi(t)$ está unicamente definido para todo $t \in I$

Definição 3. *Uma curva integral chama-se máxima se, para toda curva $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\phi = \psi|I$ (ϕ é ψ restrita a I), então $I = J$ e, conseqüentemente, $\phi = \psi$. Nesse caso, I chama-se intervalo máximo.*

Corolário 1. *Se ϕ é solução de (1) definida no intervalo máximo I e $\phi(t_1) = \phi(t_2), t_1 \neq t_2$, então $I = \mathbb{R}$ e $\phi(t+c) = \phi(t) \forall t \in I$, onde $c = t_1 - t_2$. Em outras palavras, ϕ é periódica.*

Definição 4. *Um ponto p é chamado de fixo se permanece constante, i.e., $\phi(p) = p \forall t \in I$*

3.2 Closing Equations [5]

Estabelecidos os conceitos iniciais, o estudo se dirige para encontrar ciclos limite de sistemas dinâmicos planares lineares por partes, com descontinuidade na reta $x = 1$.

Considere x uma variável vetorial, A, B matrizes quadradas e o sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax, & x < 1, \\ Bx, & x > 1. \end{cases}$$

Para assegurar que haja a formação de um ciclo, algumas condições são necessárias:

- O retrato de fase de cada sistema, individualmente, deve retornar à linha de fronteira, i.e., deve ser da forma de um ciclo ou de um foco, seja ele atrator ou repulsor;
- Considere ϕ_A, ϕ_B os fluxos de A e B , respectivamente. Dados pontos $p \in x = 1$ e $\phi_A^{t_1}(p) \in x = 1$, diferente de p , devemos ter $\phi_B^{t_2}(\phi_A^{t_1}(p)) = p$.

Note que o segundo ponto dado define uma coordenada ($x = 1$) e o segundo item aponta duas determinações, uma vez que o fluxo está igualado a um ponto específico.

Computacionalmente, a maneira utilizada para encontrar as closing equations é adicionar constantes ao sistema da direita, no caso, o sistema B. Assim,

$$B = \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1(t) + bx_2(t) + p \\ \dot{x}_2 = cx_1(t) + dx_2(t) + q \end{cases}$$

Exemplo 1. *Considere o exemplo:*

$$A = \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 6y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}, B = \begin{cases} \dot{w}(r) = 2w(r) - 5z(r) + p \\ \dot{z}(r) = 2w(r) - 2z(r) + q \end{cases}$$

ambos formando ciclos, invertíveis. Usando o software Mathematica para auxiliar nas contas, concluímos que

$$\phi_A = \left(\frac{1}{11}(11 \cos(\sqrt{11}t) - 5\sqrt{11} \sin(\sqrt{11}t)), \frac{1}{11}(11 \cos(\sqrt{11}t) + \sqrt{11} \sin(\sqrt{11}t)) \right)$$

e

$$\phi_B = (2p - 5q + (1 - 2p + 5q) \cos(r) + (-3 + p) \sin(r), p - 2q + (1 - p + 2q) \cos(r) + (-1 + q) \sin(r)).$$

Estabelecendo $(1, -2/3)$ como condição inicial e $(1, 1)$ como condição final do sistema B, encontramos o valor de $p = -7/6$ e q indeterminado; de fato, o valor assumido para q afeta apenas o tempo r , mas não interfere no fechamento das duas curvas. Assim, estabelece-se $q = 0$, chegando no resultado de $r \approx -5,35589$. Observe as duas curvas se fechando no esquema abaixo, retirado do software:

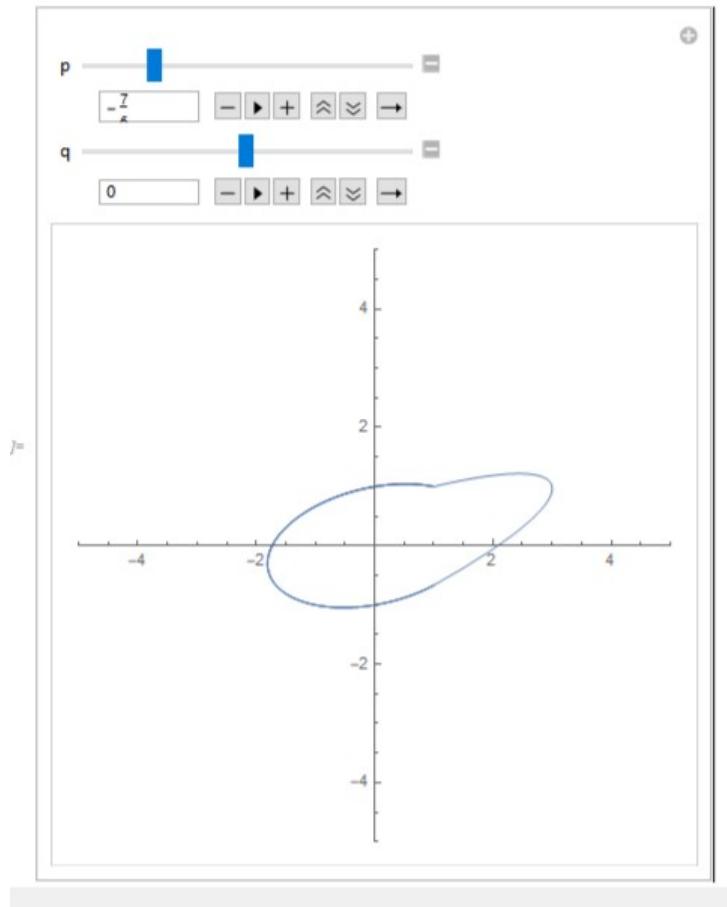


Figura 2: Exemplo de equação de fechamento

3.3 Sistemas Hamiltonianos [6][7]

Os Sistemas Hamiltonianos, oriundos da física, são um caso particular de órbitas fechadas em sistemas que descrevem movimentos onde a energia total é conservada. Matematicamente, oferece uma gama de estudos sobre os sistemas integráveis, equações que independem da primeira derivada.

Definição 5. *Uma função escalar é considerada uma Integral para um campo vetorial qualquer $\dot{x} = f(x)$ se seu valor for constante em trajetórias, i.e.:*

$$\dot{I}(x) = \nabla I(x) \circ \dot{x} = \nabla I(x) \circ f(x) = 0$$

Para sistemas planares, as curvas da função integral oferecem o retrato de fase do sistema em questão. O foco dessa seção são os sistemas num plano ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$),

num cilindro ($\mathbb{S} \times \mathbb{R}$) ou num toro ($\mathbb{S} \times \mathbb{S}$), com mais ênfase no primeiro caso, escrevendo o sistema como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

Essa espécie de sistema aparece em peso nos assuntos relacionados à física, especialmente na Mecânica Clássica, de onde é proveniente o exemplo do tópico. Como introdução, considere a Segunda Lei de Newton $F(x) = m\ddot{x}$; como F depende exclusivamente de x e \ddot{x} , ele é conservativo. Portanto, dado uma energia potencial $V(x)$, temos que

$$m\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \int \ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = E$$

sempre constante.

Sobre esses sistemas, afirma-se que:

Proposição 1. : *Existe $E(x)$ constante em órbitas fechadas para sistemas conservativos (e não constante em trajetórias abertas).*

Proposição 2. : *Um sistema conservativo não possui pontos fixos atratores/repulsores (caso contrário haveria conflito com a proposição anterior).*

Proposição 3. : *Os retratos de fase de sistemas conservativos são compostos, em sua maioria, por selas e órbitas.*

Como ilustração, será feita a análise de um exemplo clássico, o oscilador não forçado de Duffing. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \mu y, \quad \mu = 0\end{aligned}$$

que possui uma integral. Para obtê-la, utilizaremos um artifício:

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0 \Rightarrow \dot{x}(\ddot{x} - x + x^3) = 0$$

portanto

$$\frac{d}{dt}(\ddot{x} - x + x^3) = 0 \Rightarrow (\text{integrando o termo de dentro}) \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) = h \in \mathbb{R}$$

ou $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = h$ Fisicamente falando, afirma-se que a função de energia do oscilador de Duffing é constante em órbitas; se o termo $\frac{y^2}{2}$ representar a energia

cinética (com a massa escalonada para 1), então os termos restantes equacionariam a função de energia potencial $V(x)$, tornando h a energia total do sistema, constante.

O exemplo é capaz de indicar o retrato de fase e sua construção, a partir do raciocínio seguinte: Tome a primeira integral como:

$$h = \frac{y^2}{2} + V(x) \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}\sqrt{h - V(x)}$$

tomando o sinal positivo, inicialmente.

Fixando h e aumentando x , vemos que o valor na raiz aumenta entre $(0, 1)$ e diminui a partir desse intervalo, chegando a zero em algum momento e cruzando o eixo x . Caso tomemos o sinal negativo, o retrato fará exatamente a mesma figura, mas no quarto quadrante do gráfico. Como todas as funções envolvidas são pares, podemos supor que os segundo e terceiro quadrante serão uma reflexão do primeiro e do quarto. Assim, chegamos ao seguinte retrato de fase:

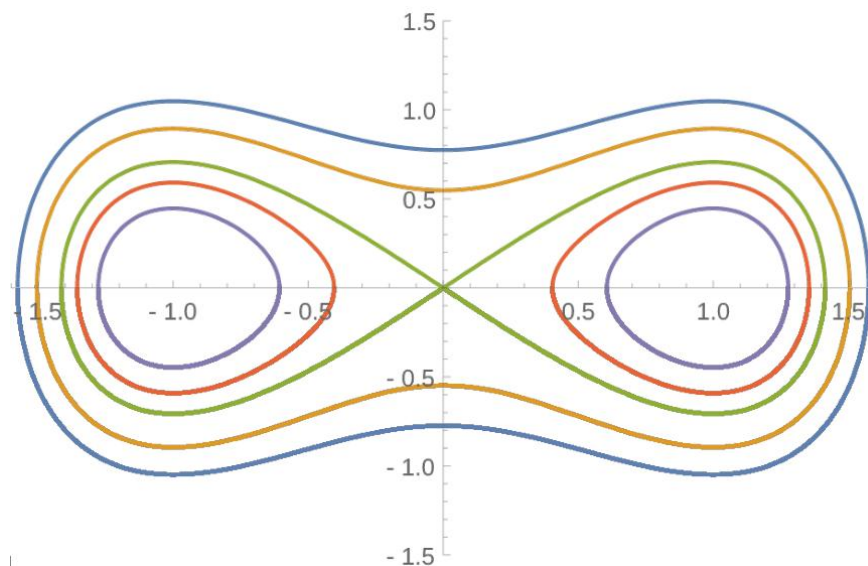


Figura 3: Retrato de fase de Sistemas Hamiltonianos

Note que há uma órbita que divide dois comportamentos do retrato de fase: aquela que passa pela origem. Por essa característica, ela é chamada de *órbita homoclínica*. Esse retrato de fase é comum a muitos Sistemas Hamiltonianos

3.4 Ciclos limite algébricos de sistemas diferenciais [8]

Em 1900, Hilbert propôs que haveriam estimativas para o número de ciclos limite de sistemas polinomiais de determinado grau, bem como uma distribuição e propriedades padronizadas. Anos depois, Bamon, Écalle e Ilyashenko demonstraram que esse número é finito, apesar de seu máximo ainda ser desconhecido. Um tipo de sistema é aquele cujos ciclos limites são curvas algébricas invariantes, a serem estudados no momento, aqui com foco nos sistemas quadráticos. Para tanto, comecemos com definições.

Definição 6. *Tome o sistema*

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

. Tome também $f \in \mathbb{R}[x, y]$, i.e., f é um polinômio nas variáveis x e y . A curva algébrica $f(x, y) = 0$ é dita uma curva algébrica invariante do sistema polinomial de equações diferenciais se, para algum polinômio $K(x, y)$, nós temos:

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf$$

O polinômio K é conhecido como cofator da curva algébrica invariante e o grau da curva é o grau do polinômio f .

Observação 1. *Note que, se o sistema tem grau i , então o cofator K tem grau, no máximo, $i - 1$.*

Definição 7. *Considere os pontos fixos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, e também os reais a, m , fixos. Um Oval é o locus de todos os pontos S tais que $d(P, S) \pm md(Q, S) = \pm a$.*

Portanto, um ciclo limite algébrico de grau k é um oval de uma curva algébrica invariante irreduzível $f(x, y) = 0$ de grau k que é ciclo limite do sistema. Algumas considerações sobre sistemas quadráticos :

- Podem ter ciclos limites algébricos de grau 2, e quando há ocorrência ele é o único ciclo limite do sistema.
- Não têm ciclos limites algébricos de grau 3 (demonstrado por Evdokimenco)

Observação 2. *Os únicos sistemas quadráticos com ciclos limites algébricos de grau 4 são os sistemas de Yablonskii, de Filipstov e os casos:*

$$\dot{x} = 5x + 6x^2 + 4(1+a)xy + ay^2, \quad \dot{y} = 8 - 3k - 14kx - 2kxy - 8y^2 \quad a \in \left(\frac{-71 + 17\sqrt{17}}{32}, 0 \right),$$

$$\dot{x} = 2(1 + 2x - 2kx^2 + 6xy), \dot{y} = 8 - 3k - 14kx - 2kxy - 8y^2, k \in (0, \frac{1}{4})$$

cujos ciclos limite são:

$$(y + cx^2)^2 + x^2(x - a)(x - b) = 0, 3(1 + a)(ax^2 + y)^2 + 2y^2(2y - 3(1 + a)x) = 0,$$

$$x^2 + x^3 + x^2y + 2axy^2 + 2axy^3 + a2y^4 = 0, \frac{1}{4} + x - x^2 + kx^3 + xy + x^2y^2 = 0$$

respectivamente.

3.4.1 Implementação

Computacionalmente, montou-se um sistema com coeficientes arbitrários variando de -1000 a 1000, obtendo um ciclo limite de curva algébrica. Assim, Obtivemos que o sistema

$$\dot{x} = \frac{-55570089}{48719320} + \frac{206370579x}{48719320} + \frac{339x^2}{26} - \frac{1895362617y}{34103524} + \frac{172589xy}{9464} - \frac{363165y^2}{9464}$$

$$\dot{y} = \frac{-4729727411}{48719320} + 10x + 14x^2 - \frac{5650309283y}{42629405} + 15xy - \frac{228281y^2}{9464}$$

possui curva algébrica $f(x, y) = -703 - 898x + 364x^2 - 474y - 730xy + 465y^2$ como ciclo limite:

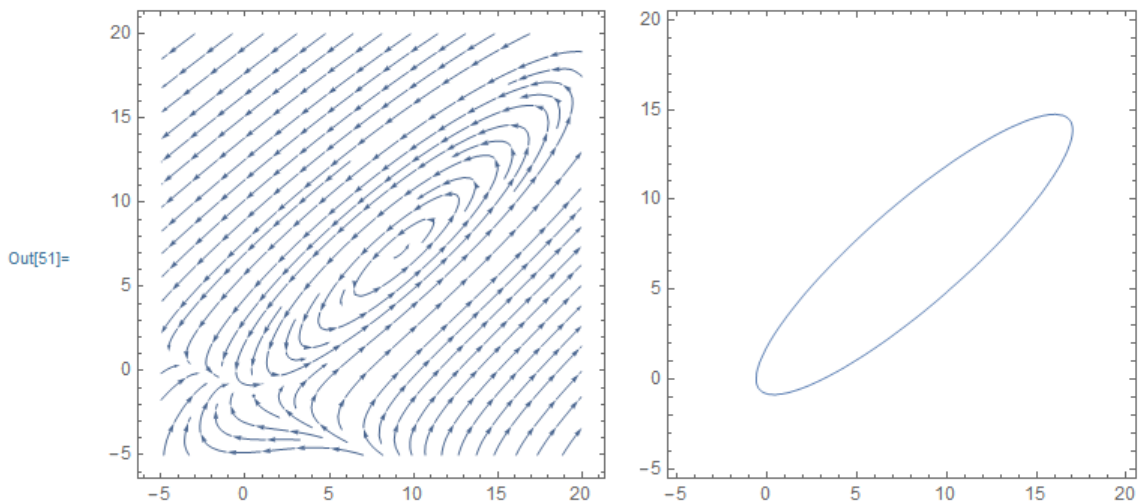
```

In[51]:= GraphicsRow[
  |rangée de graphiques
  {StreamPlot[
    |tracé de flot
    {
      
$$-\frac{55570089}{48719320} + \frac{206370579x}{48719320} + \frac{339x^2}{26} - \frac{1895362617y}{34103524} + \frac{172589xy}{9464} - \frac{363165y^2}{9464},$$

      
$$-\frac{4729727411}{48719320} + 10x + 14x^2 - \frac{5650309283y}{42629405} + 15xy - \frac{228281y^2}{9464}$$

    }, {x, -5, 20}, {y, -5, 20}],
  ContourPlot[
    |tracé de champ scalaire par ses contours
    
$$-703 - 898x + 364x^2 - 474y - 730xy + 465y^2 = 0, \{x, -5, 20\}, \{y, -5, 20\}]]$$

```



3.5 Teoria de Bifurcações [9]

O tópico aqui abordado traz um estudo dos parâmetros dentro de um sistema de equações. Um exemplo nítido da relevância desse estudo é o já abordado Oscilador de Duffing, em que o parâmetro $\mu = 0$ permite a análise feita; além disso vemos a presença de parâmetros em sistemas populacionais, na equação de Van- Der- Pol, etc.

A essência da investigação é a mudança de estabilidade/retrato de fase quando o parâmetro μ_c passa pr valores específicos, e averiguar o que acontece com o sistema ao passar por pontos críticos definidos em função de μ_c . Esta é chamada Teoria de Bifurcações. Sem perda de generalidade, será considerada a bifurcação da solução trivial $x = 0$: os demais resultados são obtidos por translação.

3.5.1 Sobre estabilidade de Liapunov

Definição 8. Um sistema é dito estável se, para uma vizinhança $V(x)$ existe outra vizinhança $W(x)$; $W(x) \subseteq V(x)$ tal que, para qualquer condição inicial em $W(x)$, temos que o sistema permanece em $V(x)$ para $t \geq 0$. Em outros termos, temos que:

$$\forall t_0, \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon, t_0) > 0 \text{ tal que } |x_0 - \phi(t_0)| \leq \delta \Rightarrow |x(t; t_0, x_0 - \phi(t))| \leq \epsilon \text{ para } t \geq t_0$$

Ou seja, retratos cujas condições iniciais são próximas de uma solução periódica tendem a permanecer perto de tal solução, mesmo quando há uma pequena perturbação. Quando o sistema não é estável, dizemos que ele é instável no ponto x_0 .

Note que a noção de estabilidade pode ser analisada através da derivada do fluxo, i.e.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \text{sistema estável em } x \in W(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Exemplo 2. Tome o sistema

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

As duas soluções para a bifurcação são $x = 0, x = \mu$. Sabendo que a derivada $Df(\mu, x) = \mu - 2x$, temos que, para $x = 0, Df(\mu, 0) = \mu$, ou seja, o sistema é estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$. De modo análogo, para $x = \mu$, temos $Df(\mu, \mu) = -\mu$, e há estabilidade para $\mu > 0$. Note que, quando $\mu = 0$, o sistema descreve uma sela, ou seja, instável.

3.5.2 A bifurcação de Hopf

A bifurcação de Hopf é um tipo de bifurcação envolvendo ciclos limites em que, a partir da manipulação do parâmetro, o ciclo surge ou se dissipa. É subdividido em duas categorias: quando o ciclo envolve um ponto instável, é chamado de *bifurcação supercrítica de Hopf*; caso contrário, é uma **bifurcação subcrítica de Hopf**.

Exemplo 3. Tome o sistema em coordenadas polares:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2)$$

$$\dot{\theta} = -1$$

$$r \geq 0$$

Encontramos bifurcações para variações de raio iguais a 0, i.e., $r = 0$ ou $r = \sqrt{\mu}$. Note que assumir $r = 0$ não faz sentido, uma vez que a órbita deve ter algum valor

positivo de raio. Dada a raiz, é esperado que os valores aceitáveis de μ sejam os positivos. Analisemos os casos:

$\mu = 0$: Nesse caso,

$$\dot{r} = -r^3 < 0 \Rightarrow \text{inviável!}$$

$\mu < 0$: Dada essa condição, temos que:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) = -r|\mu| - r^3 < 0 \Rightarrow \text{inviável!}$$

$\mu > 0$: Então:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \Rightarrow \dot{r} > 0 \forall r \in (0, \sqrt{\mu}) \text{ e } \dot{r} < 0 \forall r \in (\sqrt{\mu}, \infty)$$

Então há uma órbita quando $r = \sqrt{\mu}$.

Teorema 1. (Hopf): Dado um sistema:

$$\dot{x} = f_\mu = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g_\mu = g(x, y)$$

Com parâmetro μ e ponto fixo em $(0, 0)$ (outros resultados obtidos por translação). Tome também a matriz linearizada do sistema, de autovalores $\lambda_1, \lambda_2 = a(\mu) \pm b(\mu)$ se para algum valor de μ o sistema satisfaz:

- 1.

$$a(0) = 0, b(0) = \omega \neq 0, \text{ onde } \text{sgn}(\omega) = \text{sgn}[(\partial g_\mu / \partial x)|_{\mu=0}(0, 0)]$$

- 2.

$$\left. \frac{da(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = d \neq 0$$

- 3.c $\neq 0$, onde

$$c = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy})$$

em que os índices representam derivadas parciais. Com as condições satisfeitas, garante-se uma bifurcação de Hopf para valores de $\mu > 0$ quando $ad < 0$ e $\mu < 0$ quando $ad > 0$.

3.5.3 Implementação: sistema de Liénard

A implementação do exemplo escolhido seguiu as verificações das condições básicas para ocorrência de bifurcação. Tome o sistema:

$$\ddot{x} = -x + (\mu - x^2)\dot{x}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (\mu - x^2)y\end{aligned}$$

Note que:

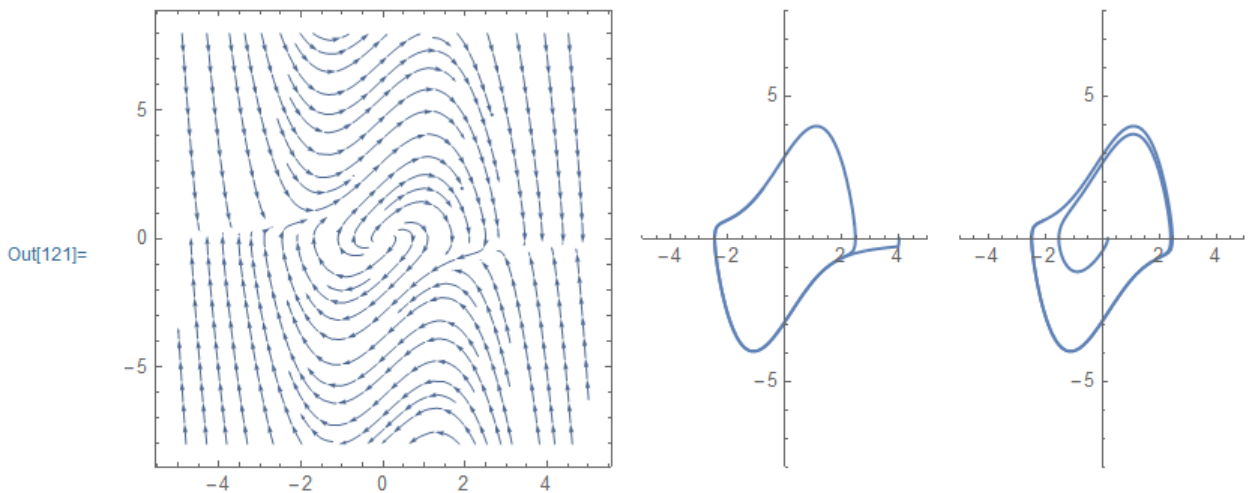
$$\det \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right] = k^2 - \mu k + 1$$

Portanto as raízes serão da forma $\frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{-\mu^2 + 4})$, com $a(0) = 0$, $b(0) \neq 0$, $\frac{da(\mu)}{d\mu} = 1/2 \neq 0$, $c = \frac{1}{8}$, i.e., todas as condições de formação do ciclo são satisfeitas. Como $ad < 0$ temos que para qualquer valor positivo de μ ocorrerá bifurcação. Escolhe-se o valor $\mu = 1.5$ e plotam-se dois gráficos, um com valor inicial dentro do ciclo, e outro por fora:

```

In[121]:= GraphicsRow[{
  [rangée de graphiques
    StreamPlot[{y, -x + (1.5 - x^2) * y}, {x, -5, 5}, {y, -8, 8}],
    [tracé de flot
    ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. s12, {t, 0, 17}, PlotRange -> {{-5, 5}, {-8, 8}}],
    [représentation graphique de courbes paramétrées [zone de tracé
    ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. s22, {t, 0, 17}, PlotRange -> {{-5, 5}, {-8, 8}}]
    [représentation graphique de courbes paramétrées [zone de tracé
  ]]}

```



3.6 Método da Média [10][11]

Até o momento, os sistemas apontados tinham uma característica em comum, a autonomia em relação ao tempo. Para eles, as equações polinomiais eram dependentes apenas das funções x e y , o que facilitava a descrição do retrato de fase. No entanto, uma maioria dos modelos não possui esse perfil, e assim surge a necessidade do método da média.

Em suma, ele é responsável por fornecer uma aproximação autônoma satisfatória para um sistema oscilante não-autônomo fazendo uso do comportamento médio do tempo. Historicamente falando, seu uso ocorre antes mesmo da formalização matemática do procedimento, que foi concluída décadas depois.

Vale ressaltar que o método da média é válido majoritariamente para análises qualitativas tais como a estabilidade, invariância e, no caso, periodicidade.

Teorema 2. (*Método da Média de primeira ordem*): *Considere que, para cada $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $\epsilon_0 > 0$ existe $L > 0$ e $\epsilon \leq \epsilon_0$ tal que o sistema não autônomo seja*

periódico, com período T , dado por

$$\dot{x} = \epsilon f(x, t, \epsilon), \quad a \in D, \quad 0 < \epsilon \ll 1,$$

tem solução $x(t, \epsilon)$, com $f \in C^1$. Então existe uma constante c tal que a solução $y(t, \epsilon)$ do sistema médio:

$$\dot{y} = \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(y, s) ds =: \epsilon \bar{f}(y), \quad y(0, \epsilon) = a$$

seja

$$\|x(t, \epsilon) - y(t, \epsilon)\| < c\epsilon$$

para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ e $0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon}$

Durante o estudo, foi considerado o sistema em coordenadas polares, já que o período é facilmente obtido: 2π .

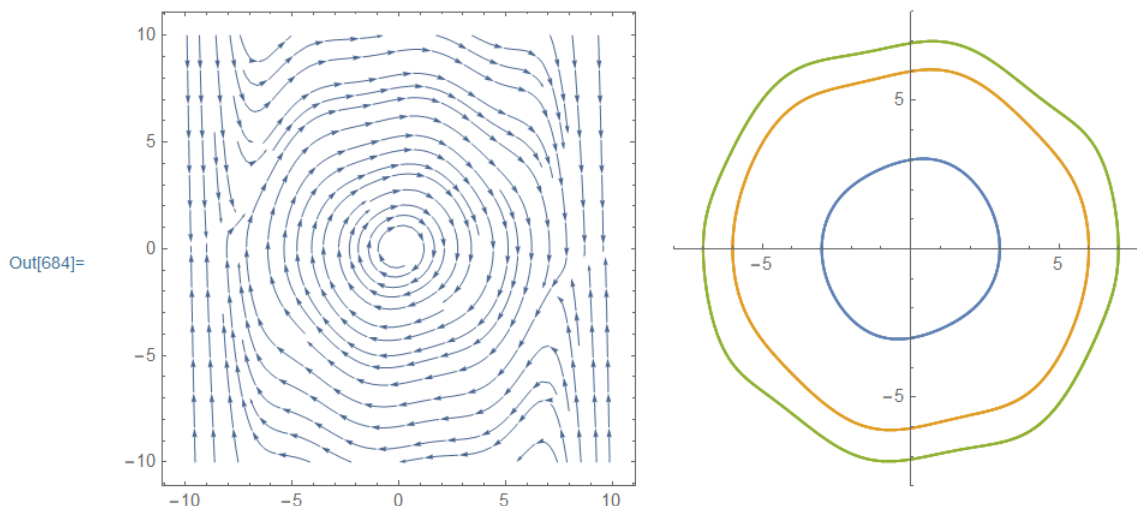
3.6.1 Implementação

A implementação do método da média no software Mathematica seguiu naturalmente os passos indicados pela construção da proposição acima. O programa consistiu em etapas que incluíam: definir o campo alterar as coordenadas do sistema de cartesianas para polares (r, θ) , efetuar a divisão do sistema pela equação relativa a y (o que facilitou a resolução, mas tornou o sistema não-autônomo), integrar o sistema com relação a θ eliminando essa variável. Depois, o objetivo foi encontrar função polinomial que fornecesse os ciclos limite do problema: foi encontrado o polinômio $-15876 + x + 10116x^2 + 3x^3 - 752x^4 - x^5 + \frac{64x^6}{5}$ em que os coeficientes dos termos de grau par foram consequência do processo computacional, enquanto os de grau ímpar foram definidos arbitrariamente. Como solução, encontrou-se três ciclos, com r valendo 3, 6 e 7, respectivamente, como a figura abaixo:


```

In[684]= GraphicsRow[{StreamPlot[Z, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}],
[rangée de graph... [tracé de flot]
ParametricPlot[{{x[t], y[t]} /. s1, {x[t], y[t]} /. s2, {x[t], y[t]} /. s3}, {t, 0, 20},
[représentation graphique de courbes paramétrées
PlotRange -> {{-8, 8}, {-8, 8}}]]]
[zone de tracé

```



Vale ressaltar que os valores de ϵ para os quais a aproximação é suficientemente precisa variaram conforme o ciclo. O interior foi obtido com $\epsilon < \frac{1}{10000}$, o exterior com $\epsilon < \frac{1}{20000}$ e o central com $\epsilon < \frac{1}{50000}$; para fins de visualização, o gráfico exibido foi plotado com o menor valor para garantir as condições em todos os ciclos. Vale ressaltar também que o ciclo central apresentou maior instabilidade conforme a evolução do tempo que os outros.

4 Conclusão

Conclui-se que, apesar da improbabilidade de ocorrência, há inúmeras formas de encontrar ciclos limites algebricamente de acordo com a característica que um sistema apresenta, podendo fornecer indicativos dos valores esperados dentro do 16^o Problema de Hilbert.

Durante a pesquisa, houveram poucas dificuldades, relacionadas principalmente à complexidade do conteúdo e à parte computacional; a última se enquadrava em meta pessoal da aluna, cuja evolução foi significativa. O prosseguimento da pesquisa não foi afetado pela pandemia, já que é um estudo majoritariamente teórico e sem dependência de laboratório. Vale ressaltar também que a pesquisa continuará em desenvolvimento no próximo ano, com ênfase em variedades compactas de dimensão 2.

Referências

- [1] SILVA, Beatriz B.R. **Relatório Parcial de Atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - CNPq**. 2021
- [2] M. HIRSCH, S. SMALE, **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. University of California, Academic Press, 1970
- [3] Stephanie G. Nietto, **Notas de aula de Sistemas Dinâmicos**, IMECC/Unicamp, 2021.
- [4] J. SOTOMAYOR, **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA, 1979.
- [5] M. DI BERNARDO, C. BUDD, A. R. CHAMPNEYS, P. KOWALCZYK, **Piecewise-smooth Dynamical Systems - Theory and Applications**. Volume 163. Editora Springer, 2008.
- [6] S. WIGGINS, **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. Segunda Edição. Editora Springer, 2000.
- [7] S. STROGATZ, **Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. Perseus Books, 1994.
- [8] LLIBRE, Jaume; ZHAO, Yulin. Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations. **Journal of Physics A Mathematical and Theoretical**. 2007
- [9] MUÑOZ-ALICEA, Roberto. **Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem**. Colorado, 2011.
- [10] MARTINS, R.M.; MEREU, A. C.; OLIVEIRA, R. D. S. An estimation for the number of limit cycles in a Liénard-like perturbation of a quadratic nonlinear center
- [11] Martins, R.M.; MEREU, A.C; OLIVEIRA, R. D. S. **An estimation for the number of limit cycles in a Liénard-like perturbation of a quadratic nonlinear center**. Springer, 2014