IMECC - UNICAMP - 21/06/2024

Nome:GABARITO______________________________ RA:______________

Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Segunda Prova de MA311 - Cálculo III - Matutino

ATENÇÃO:

- Esta prova consiste em quatro questões, valendo no total no máximo 10 pontos.
- A duração da prova será de 1 hora e 40 minutos.
- É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwhatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Escreva suas respostas de forma clara.
- Use o verso das páginas se necessário.
- Não destaque as folhas da prova!
- Usar somente lápis, lapiseira e/ou caneta azul ou preta
- Não é permitido sair durante a prova.

BOA PROVA!

1	3,0	
2	2,5	
3	2,5	
4	3,0	
Total	10,0	

Questão 1: (3,0 pontos) Considere a equação

$$(x-1)y'' + y = 0.$$

a) Mostre que a equação tem ponto ordinário em $x = 0$.

b) Encontre duas soluções linearmente independentes por séries de potências em torno de $x = 0$. Expresse explicitamente os 5 primeiros termos de cada uma das soluções.

Solução:

a) Como os coeficientes da EDO são polinômios e o coeficiente de y'' só se anula no ponto $x = 1$, o único ponto singular desta EDO é $x = 1$. Portanto, $x = 0$ é ponto ordinário. 0,5cm

b) Seja $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Então $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$.

Substituindo na EDO temos,

$$0 = (x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$= c_0 - 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k + k(k+1)c_{k+1} - (k+1)(k+2)c_{k+2}\right]x^k$$

1,0cm

Deste modo,

$$c_0 = 2c_2$$

E, para $k > 1$,

$$c_k + k(k+1)c_{k+1} - (k+1)(k+2)c_{k+2} = 0.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$c_{k+2} = \frac{c_k + k(k+1)c_{k+1}}{(k+1)(k+2)}.$$

0,5cm

Deste modo, tomando $c_0 \neq 0$ e $c_1 = 0$

$$c_2 = c_0/2$$

$$c_3 = \frac{c_1 + 2c_2}{2.3} = \frac{c_0}{2.3} = \frac{c_0}{6}$$

$$c_4 = \frac{c_2 + 2.3c_3}{3.4} = \frac{c_0/2 + c_0}{3.4} = \frac{c_0}{2.4} = \frac{c_0}{8}$$

$$c_5 = \frac{c_3 + 3.4c_4}{4.5} = \frac{c_0/6 + 3c_0/2}{3.4} = \frac{c_0}{12}$$

Tomando $c_0 = 0$ e $c_1 \neq 0$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{c_1}{2.3} = \frac{c_1}{6}$$

$$c_4 = \frac{2.3c_3}{3.4} = \frac{c_1}{3.4} = \frac{c_1}{12}$$

$$c_5 = \frac{c_3 + 3.4c_4}{4.5} = \frac{c_1/6 + c_1}{4.5} = \frac{7c_1/6}{4.5} = \frac{7c_1}{4.5.6} = \frac{7c_1}{120}$$

$$c_6 = \frac{c_4 + 4.5c_5}{5.6} = \frac{10c_1 + 140c_1}{120.5.6} = \frac{c_1}{24}$$

0,5cm

Se a solução geral é da forma $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$, então

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{12} + \cdots$$

e

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{7x^5}{120} + \frac{x^6}{24} + \cdots$$

0,5cm

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre a solução geral do sistema linear homogêneo

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

Solução:

Comecemos achando os autovalores da matriz de coeficientes.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Donde temos autovalores reais repetidos $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 0,5cm

Agora encontremos um autovetor associado a $\lambda = 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Tomando $y = 1$ temos o autovetor

$$K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então, uma solução será da forma

$$X_1 = Ke^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

0,5cm

Como não encontramos dois autovetores L.I. correspondentes ao autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade 2, a segunda solução que buscamos será da forma

$$X_2 = Kte^t + Pe^t$$

Com

$$(A - \lambda_1 I)P = K$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 - p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 1 + p_2.$$

Tomando $p_2 = 0$, temos $p_1 = 1$. Donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

1,0cm

Assim, a solução geral é da forma

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right)$$

0,5cm

Questão 3: (2,5 pontos) Considere o sistema linear não-homogêneo

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que a solução geral do sistema linear homogêneo associado é

$$X_h(t) \quad = \quad c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t,$$

encontre uma solução particular do linear não-homogêneo dado usando **variação de parâmetros** e apresente a solução geral do mesmo.

Solução: Procuremos por uma solução particular na forma

$$Y_p(t) = \Psi(t)U(t),$$

onde $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental e

$$\Psi(t)U'(t) = g(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.0.1}$$

0,5cm

Utilizando a solução geral da equação homogênea associada, temos que uma matriz fundamental é

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Calculando a inversa, segue que

$$\psi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \psi(t)} \begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

0,5cm

Assim, por (0.0.1), temos

$$\begin{aligned} U'(t) &= \psi^{-1}(t)g(t) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que nos leva a $u_1' = e^t$ e $u_2' = 0$. 0,5cm

Integrando, e escolhendo as constantes de integração nulas, obtemos uma solução particular com $U(t) = (e^t, 0)$ dada por

$$Y_p(t) = \Psi(t)U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

0,5cm

e então a solução geral é dada por

$$X(t) = X_h(t) + Y_p(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

0,5cm

Questão 4: (3,0 pontos) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

periódica de período $2L = 2$.

(a) Encontre a série de Fourier de $f(x)$.

(b) Utilize a série de Fourier encontrada no item (a) para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Solução:

(a) Calculando os coeficientes da série de Fourier

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_0^1 1\ dx = x|_0^1 = 1, \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^1 \cos(n\pi x)\ dx = \frac{1}{n\pi}\text{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 = 0, \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^1 \text{sen}(n\pi x)\ dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

1,5cm

Série de Fourier de $f(x)$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\text{sen}(2n-1)\pi x$$

0,5cm

(b) Calculando a série de Fourier de $f(x)$ em $x = 1/2$ e levando em consideração que $f(x)$ é contínua neste ponto, temos

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\text{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2} = f(1/2)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}(-1)^{n+1} = 1$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

1,0cm