IMECC - UNICAMP - 10/07/2024

Nome:____ RA:______________

Assinatura:____ Turma:___________

EXAME de MA311 - Cálculo III - Matutino

Esta prova está sendo feita como Prova Substitutiva? ______________

Em caso afirmativo, de qual prova? ______________

ATENÇÃO:

- Esta prova consiste em quatro questões, valendo no total no máximo 10 pontos.
- A duração da prova será de 1 hora e 40 minutos.
- É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwhatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Escreva suas respostas de forma clara.
- Use o verso das páginas se necessário.
- Não destaque as folhas da prova!
- Usar somente lápis, lapiseira e/ou caneta azul ou preta
- Não é permitido sair durante a prova.

BOA PROVA!

1	2,5	
2	2,5	
3	2,5	
4	2,5	
Total	10,0	

Questão 1: (2,5 pontos)

(a) Encontre a solução geral da equação

$$y' = \cos(x)y^2$$

(b) Mostre que a equação abaixo é exata e encontre sua solução geral.

$$(2xy + \text{sen}y)dx + (x^2 + x\cos y - 1)dx = 0$$

Resolução:

(a) A equação dada é separável com $g(x) = \cos(x)$ e $h(y) = y^2$.

Primeiramente observemos que $h(y) = y^2 = 0$ se, e somente se, $y = 0$. Logo, $y \equiv 0$ é solução estacionária da equação dada.

Agora, para $y \neq 0$,

$$y' = \cos(x)y^2$$
$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \cos(x)dx$$
$$-\frac{1}{y} = \text{sen}(x) + C$$
$$y = -\frac{1}{\text{sen}(x) + C}$$

Logo a solução geral da equação é $y = -\dfrac{1}{\text{sen}(x) + C}$ e $y = 0$.

(b) Neste caso $M = M(x, y) = 2xy + \text{sen}y$ e $N = N(x, y) = x^2 + x\cos y - 1$. Então,

$$M_y = 2x + \cos y = N_x.$$

Logo a equação é exata.

Portanto, existe $\Psi = \Psi(x, y)$ tal que $\Psi_x = M$ e $\Psi_y = N$. Então,

$$\Psi = \int M(x, y)dx = \int (2xy + \text{sen}y)dx = x^2y + x\text{sen}y + g(y).$$

Derivando em relação a y e igualando a N,

$$\Psi_y = x^2 + x\cos y + g'(y) = N(x, y) = x^2 + x\cos y - 1 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -y.$$

Logo,

$$\Psi = x^2y + x\text{sen}y - y.$$

Solução geral (implícita):

$$x^2y + x\text{sen}y - y = C.$$

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre a solução geral da equação linear homogênea de ordem superior abaixo

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 5y^{(3)} - 8y'' + y' = 0$$

sabendo que $r^5 - 2r^4 + 5r^3 - 8r^2 + r = r(r^2 - 2r + 1)(r^2 + 4)$.

Resolução:

Equação característica: $r^5 - 2r^4 + 5r^3 - 8r^2 + r = 0$

Como $r^5 - 2r^4 + 5r^3 - 8r^2 + r = r(r^2 - 2r + 1)(r^2 + 4) = r(r-1)^2(r^2 + 4)$, temos que

$$r_1 = 0,\ r_2 = r_3 = 1,\ r_4 = 2i,\ r_5 = -2i.$$

De onde,

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^t,\ y_3 = t.e^t,\ y_4 = \cos(2t),\ y_5 = \operatorname{sen}(2t).$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 t.e^t + c_4 \cos(2t) + c_5 \operatorname{sen}(2t).$$

Questão 3: (2,5 pontos) Considere o sistema linear não-homogêneo

$$X^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que a solução geral do sistema linear homogêneo associado é

$$X_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \mathrm{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix},$$

encontre uma solução particular do linear não-homogêneo dado usando **variação de parâmetros** e apresente a solução geral do mesmo.

Resolução: Procuremos por uma solução particular na forma

$$Y_p(t) = \Psi(t)U(t),$$

onde $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental e

$$\Psi(t)U'(t) = g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{0.0.1}$$

Utilizando a solução geral da solução geral dada da equação homogênea associada, temos que uma matriz fundamental é

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t & -\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Calculando a inversa, segue que

$$\psi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \psi(t)} \begin{pmatrix} -\cos 2t & -\mathrm{sen}\, 2t \\ -\mathrm{sen}\, 2t & \cos 2t \end{pmatrix} = -1. \begin{pmatrix} -\cos 2t & -\mathrm{sen}\, 2t \\ -\mathrm{sen}\, 2t & \cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t & -\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Assim, por (0.0.1), temos

$$\begin{aligned} U'(t) &= \psi^{-1}(t)g(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t & -\cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\, 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que nos leva a $u_1' = -\mathrm{sen}\, 2t$ e $u_2' = \cos 2t$. Integrando, e escolhendo as constantes de integração nulas, obtemos uma solução particular com $U(t) = \dfrac{1}{2}(\cos 2t, \mathrm{sen}\, 2t)$ dada por

$$Y_p(t) = \Psi(t)U(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t & -\cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

e então a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \text{sen}2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \text{sen}2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

0,5cm

Questão 4: (2,5 pontos) Usando o método de separação de variáveis, resolva a equação da onda abaixo:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \ 0 < x < \pi, \ t > 0; \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0, \ t > 0; \\ u_t(x,0) = 0, \ u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}\,(2x) - 2\,\mathrm{sen}\,(8x), \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Resolução: Sejam $a^2 = 4$, $L = \pi$, (1) $a^2 u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < L$, $t > 0$ e (2) $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$, $t > 0$. Tomamos $u(x,t) = X(x)T(t)$ e por (1) obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\sigma(\text{constante}) \Longrightarrow \begin{cases} (3)\ X'' + \sigma X = 0; \\ (4)\ T'' + a^2\sigma T = 0. \end{cases}$$

Segue pelas condições de contorno (2) que $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ e $u(L,t) = X(L)T(t) = 0$, para qualquer $t > 0$ e assim, como $u(x,t)$ não é nula, devemos ter $X(0) = X(L) = 0$.

Suponhamos $\sigma = 0$. Pela equação (3) temos $X'' = 0$ e assim $X = k_1 x + k_2$. Como $X(0) = X(L) = 0$ obtemos que $X(x) = 0$ para qualquer x e portanto $u(x,t) = 0$ para qualquer x e qualquer t, o que é uma contradição.

Suponhamos $\sigma < 0$, $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda > 0$. Pela equação (3) temos $X'' - \lambda^2 X = 0$ e assim $X = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}$. Como $X(0) = X(L) = 0$ obtemos que $X(x) = 0$ para qualquer x e portanto $u(x,t) = 0$ para qualquer x e qualquer t, o que é uma contradição.

Suponhamos agora $\sigma > 0$, $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$. Pela equação (3) temos $X'' + \lambda^2 X = 0$ e assim $X = k_1 \cos(\lambda x) + k_2\,\mathrm{sen}\,(\lambda x)$. Como $X(0) = 0$ obtemos que $k_1 = 0$ e como $X(L) = 0$ obtemos que $k_2 = 0$ ou $\mathrm{sen}\,(\lambda L) = 0$. Mas $u(x,t)$ não é nula e logo $\mathrm{sen}\,(\lambda L) = 0$, isto é, $\lambda L = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\lambda = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$. Tomamos

$$X_n(x) = \mathrm{sen}\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Substituindo $\sigma = \lambda^2 = n^2\pi^2/L^2$ na equação (4) obtemos

$$T''_n + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T_n = 0 \Longrightarrow T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + \beta_n\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{an\pi t}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A função

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\alpha_n \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + \beta_n\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{an\pi t}{L}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\,(nx)\left(\alpha_n \cos(2nt) + \beta_n\,\mathrm{sen}\,(2nt)\right) \end{aligned}$$

(pois $a = 2$ e $L = \pi$) é uma solução da equação da onda (1) que satisfaz as condições de contorno (2) e verifica

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\,\mathrm{sen}\,(nx)\left(-\alpha_n\,\mathrm{sen}\,(2nt) + \beta_n \cos(2nt)\right).$$

Da condição inicial $u_t(x,0) = 0$ segue que $\beta_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e da condição inicial $u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}\,(2x) - 2\,\mathrm{sen}\,(8x)$ segue que $\alpha_2 = 3$, $\alpha_8 = -2$ e $\alpha_n = 0$ para $n \neq 2$ e $n \neq 8$. Portanto a solução procurada é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \,\mathrm{sen}\,(nx)\cos(2nt) = 3\,\mathrm{sen}\,(2x)\cos(4t) - 2\,\mathrm{sen}\,(8x)\cos(16t)\,.$$