Soluções de equações de primeira ordem

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$

Esta é uma equação de primeira ordem, linear, com coeficientes variáveis.

Vamos multiplicar a equação diferencial por um "fator integrante" $\mu(x)$, obtendo

$$\mu(x)y' + \mu(x)a(x)y = \mu(x)b(x).$$

Gostaríamos que o lado esquerdo da equação fosse

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y.$$

Então, comparando os termos, precisamos escolher μ com

$$\mu'(x) = a(x)\mu(x).$$

A solução desta equação é

$$\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}.$$

Agora a equação inicial pode ser escrita da forma

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)b(x).$$

Integrando em ambos os lados (lembre-se da constante de integração) e multiplicando cruzado o μ, temos a solução:

$$y = \frac{c}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)b(x)\,dx$$

Se houver uma condição inicial, agora é a hora de substituí-la e encontrar o valor de c.

O valor de $\mu(x)$ precisa ser substituído, e a integral também precisa ser resolvida (se possível).

Faça você mesmo: usando o método acima, encontre a solução do PVI

$$y' + xy = -2x,\ y(0) = 0.$$

Confira a resposta usando o Mathematica, com o comando
`DSolve[{y'[x] - x*y[x] == -2 x, y[0] == 0}, y, x]`.

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^n,\ n > 1.}$

Esta equação é chamada de Equação de Bernoulli (primeira ordem, não-linear).

Primeiro deixamos o lado direito da equação sem termos em y, multiplicando a equação por y^{-n}:

$$y^{-n}y' + a(x)y^{-n}y = b(x),$$

que se simplifica para

$$y^{-n}y' + a(x)y^{-n+1} = b(x).$$

Agora aplique a mudança de variáveis

$$u(x) = y^{-n+1}(x).$$

Assim,

$$u'(x) = (-n+1)y^{-n}(x)y'(x),$$

ou seja,

$$y^{-n}(x)y'(x) = \frac{1}{1-n}u'(x).$$

Substituindo na equação, temos

$$\frac{1}{1-n}u' + a(x)u = b(x).$$

Esta é uma equação de primeira ordem, e pode ser resolvida com os métodos que vimos antes. É preciso lembrar de retornar para y usando que

$$u(x) = y^{-n+1}(x),$$

ou seja,

$$y(x) = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{u(x)}}.$$

Faça você mesmo: usando o método acima, encontre a solução do PVI

$$y' - xy = xy^2,\ y(0) = 1.$$

Confira a resposta usando o Mathematica, com o comando
`DSolve[{y'[x] - x*y[x] == x*y[x]^2, y[0] == 1}, y, x]`

$\boxed{M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \ (\star)}$

Equações exatas

Definição: A equação $(\star)$ é exata se M, N são de classe C^1 num domínio simplesmente conexo (sem buracos) e $M_y = N_x$.

Definição: A equação $(\star)$ é exata se existe um potencial $V(x,y)$ tal que $V_x = M$ e $V_y = N$.

Se a equação for exata, basta encontrar o potencial V resolvendo as equações $V_x = M$ e $V_y = N$.

Cuidado com a integral e com as constantes de integração (que poderão depender de uma das variáveis).

A solução $y(x)$ vai satisfazer $V(x, y(x)) = c$, onde c é uma constante. A solução $y(x)$ é parte de uma curva de nível de V.

Equações separáveis são um caso particular de equações exatas.

Faça você mesmo: usando o método acima, encontre uma solução para a EDO

$$y + 5x^4y^2 + (x + 2x^5y)y' = 0.$$

Confira a resposta usando o Mathematica, com o comando

```
DSolve[y[x] + 5 x^4 y[x]^2 + (x + 2 x^5 y[x])* y'[x] == 0, y, x]
```

$\boxed{M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \ (\star)}$

Equações que podem ser transformadas em equações exatas

Se a equação $(\star)$ não for exata, vamos procurar um fator integrante $\mu(x,y)$ para a equação. Primeiro multiplicamos a equação por $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0. \quad (\star\star)$$

Agora vamos impor condições para que $(\star\star)$ seja exata.

Defina $\tilde{M} = \mu M$ e $\tilde{N} = \mu N$; então precisamos que $\tilde{M}_y = \tilde{N}_x$, o que é equivalente a

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_y,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\mu}\left(N\mu_x - M\mu_y\right) = M_y - N_x.$$

Caso o fator integrante dependa só de y,

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$$

e daí

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M}\, dy\right).$$

Agora basta resolver a equação $(\star\star)$, que é exata.

Caso o fator integrante dependa só de x,

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

e daí

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N}\, dx\right).$$

Agora basta resolver a equação $(\star\star)$, que é exata.

Faça você mesmo: usando o método acima, encontre uma solução para a EDO

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2) * y' = 0.$$

Confira a resposta usando o Mathematica, com o comando

```
DSolve[{3*x^2*y[x] + 2*x*y[x] + y[x]^3 + (x^2 + y[x]^2)* y'[x] == 0}, y, x]
```

Obs.: O Mathematica vai apresentar a resposta explicitando o valor de y, por isto aparecem alguns termos com números complexos. Não é necessário fazer isto.

Soluções de equações de segunda ordem

$\boxed{x'' + px' + qx = 0}$

Suponha que a solução seja da forma $x(t) = e^{rt}$. Calculando as derivadas temos

$$x'(t) = re^{rt},\ x''(t) = r^2e^{rt}.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$r^2e^{rt} + pre^{rt} + qe^{rt} = 0.$$

Isolando e^{rt} na equação anterior temos

$$e^{rt}(r^2 + pr + q) = 0.$$

Logo, r precisa satisfazer à "equação característica"

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (\star)$$

Se $(\star)$ tem duas soluções reais $r_1 \neq r_2$, então a solução geral da EDO é

$$x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}.$$

Se $(\star)$ tem uma solução real r_1 de multiplicidade 2 então a solução geral da EDO é

$$x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta t e^{r_1 t}.$$

Se $(\star)$ tem duas soluções complexas $r_1 = a + bi$ e $r_2 = \overline{r_1} = a - bi$, então a solução geral "real" da EDO pode ser obtida com ajuda da Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

e é

$$x(t) = \alpha e^{at}\cos(bt) + \beta e^{at}\sin(bt).$$

Faça você mesmo: escolha números p, q de sua preferência (não-nulos) e use o método acima para encontrar uma solução para a EDO

$$x'' + px' + qx = 0.$$

Confira a resposta usando o Mathematica, com o comando
`DSolve[{x''[t]+p*x'[t]+q*x[t]==0}, y, x]`