Checklist - MA311

ou "*Como eu vou saber se estou preparado para a prova?*"
ou "*O que eu deveria aprender/ter aprendido neste curso?*"
ou "*Socorro! Faltam 2 dias para a prova, o que eu estudo?*"

Primeira parte do curso

Princípios básicos

- ☐ Saber o que é uma equação diferencial, o que é um PVI, e qual a diferença entre os dois.
- ☐ Saber verificar se uma função $x(t)$ é solução de uma equação diferencial ou de um PVI dado.
- ☐ Saber classificar equações diferenciais com respeito à ordem, linearidade e se é ordinária ou parcial.
- ☐ Saber as condições sobre f para que o PVI $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ tenha solução única.
- ☐ Saber representar geometricamente uma equação diferencial $y' = f(x,y)$ em termos do campo de direções[1], incluindo o método das isóclinas (incluindo representações computacionais).
- ☐ Saber usar o Mathematica, em especial os comandos `DSolve` e `NDSolve`, para resolver equações diferenciais e PVIs.

Equações de primeira ordem

- ☐ Saber resolver equações do tipo $y' + ay = b$ usando o método dos fatores integrantes.
- ☐ Saber resolver equações do tipo $y' + a(x)y = b(x)$ usando o método dos fatores integrantes.
- ☐ Saber resolver equações de Bernoulli $y' + a(x)y = b(x)y^n$ convertendo-a em uma equação linear por meio da substituição $u = y^{1-n}$.
- ☐ Saber resolver equações separáveis $M(x) + N(y)y' = 0$ por meio da determinação de um potencial V tal que $\nabla V = (M, N)$.
- ☐ Saber resolver equações exatas $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ por meio da determinação de um potencial V tal que $\nabla V = (M, N)$.
- ☐ Saber transformar equações do tipo $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ em equações exatas por meio da multiplicação por um fator integrante $\mu(x,y)$ que depende só de x ou só de y, e a seguir resolvê-las determinando um potencial V.
- ☐ Saber resolver equações do tipo $y'' = f(x, y')$ por meio de "redução de ordem", ou seja, efetuando a mudança de coordenadas $v = y'$, que transforma a equação em uma equação de primeira ordem.
- ☐ Saber resolver equações do tipo $y'' = f(y, y')$ por[2] meio de "redução de ordem" $v = y'$.

Equações de segunda ordem

- ☐ Conhecer a noção de funções linearmente dependentes e funções linearmente independentes.
- ☐ Saber usar o critério do Wronskiano para determinar a independência linear de funções.
- ☐ Saber usar o critério do Wronskiano para determinar se soluções de uma EDO são linearmente independentes.
- ☐ Conhecer a fórmula de Abel-Liouville para o Wronskiano.

[1] Não será cobrado.
[2] Este caso é bem difícil.

- ☐ Saber resolver equações de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes $x'' + px' + qx = 0$ usando o método da equação característica, considerando os casos em que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$ (neste caso, saber usar a Fórmula de Euler para obter soluções reais).
- ☐ Saber resolver equações de segunda ordem não-homogêneas com coeficientes constantes $x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t)$ usando o método dos coeficientes a determinar, considerando as várias possibilidades para $f(t)$, inclusive no caso em que $f(t)$ seja l.d. com as soluções da equação homogênea associada (redução de ordem).
- ☐ Saber resolver equações de segunda ordem não-homogêneas com coeficientes constantes $x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t)$ usando o método da variação de parâmetros.
- ☐ Saber resolver algumas equações de segunda ordem não-homogêneas e sem coeficientes constantes $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t)$ usando o método da redução de ordem (encontrar uma segunda solução, dada uma primeira solução - exemplo: Equação de Legendre).
- ☐ Repetir todos estes itens com equações de ordens superiores.

Transformada de Laplace

- ☐ Entender o funcionamento da transformada de Laplace, que converte o problema de resolver uma EDO no problema de resolver uma equação algébrica.
- ☐ Saber a definição da transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ e as condições para sua existência.
- ☐ Saber as fórmulas para $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ em termos de $\mathcal{L}\{f(t)\}$.
- ☐ Saber aplicar $\mathcal{L}$ num PVI com equação $ax'' + bx' + c' = f(t)$ e transformá-lo numa equação algébrica em termos de $\mathcal{L}\{f(t)\}$.
- ☐ Saber calcular $\mathcal{L}^{-1}$ para obter a solução de um PVI $y(t)$ em termos da transformada de Laplace inversa de alguma expressão $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\cdots\}$.
- ☐ Saber calcular transformadas de Laplace de várias funções (ou: saber construir a primeira coluna da tabela de transformadas de Laplace).
- ☐ Saber resolver a equação $ay'' + by' + cy = f(t)$ usando transformadas de Laplace para obter a solução
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{(as+b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{as^2 + bs + c} \right\}.$$
- ☐ Saber usar frações parciais para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$, onde p, q são polinômios.
- ☐ Saber calcular a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$, bem como a transformada inversa
$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\right\},$$
e aplicar na resolução de um PVI, em particular o caso da transformada inversa do tipo $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p(t)e^{at}}{q(t)}\right\}$.
- ☐ Saber calcular a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$, bem como a transformada inversa do tipo $\delta(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-st_0}\right\}$ e aplicar na resolução de um PVI.
- ☐ Entender o que é o produto de convolução e sua relação com a solução de PVIs utilizando a transformada de Laplace.
- ☐ Saber como calcular a convolução de f e g, dada por $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$.

- ☐ Calcular o produto de convolução: se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, então $F(s) \cdot G(s)$ é a transformada de Laplace de
$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,$$
ou seja,
$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = H(s),\ s > a,$$
bem como calcular a transformada inversa
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Segunda parte do curso

Sequências e séries numéricas

- ☐ Saber encontrar os termos de uma sequência a partir do termo geral.
- ☐ Entender a definição de sequência limitada e saber provar que uma sequência é limitada (inferiormente, superiormente).
- ☐ Entender o que significa uma sequência $(a_n)_n$ convergir para um número $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ Saber provar por definição, usando ε, n_0, que $a_n \to a$.
- ☐ Saber provar que uma sequência $(a_n)_n$ não converge para um certo número $b \in \mathbb{R}$.
- ☐ Saber que se $f(x)$ é uma função real com $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, e se $a_n = f(n)$, então $a_n \to L$.
- ☐ Saber que toda sequência convergente é limitada.
- ☐ Saber que toda subsequência de uma sequência convergente é convergente (para o mesmo limite).
- ☐ Conhecer o TCM: se uma sequência é monótona e limitada, então ela converge.
- ☐ Saber que toda sequência tem uma subsequência monótona.
- ☐ Saber o Teorema de Bolzano-Weierstrass: toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.
- ☐ Saber a definição de uma sequência de Cauchy.
- ☐ Saber que, em $\mathbb{R}$, uma sequência é convergente se, e só se, ela é de Cauchy.
- ☐ Saber calcular o limite de sequências definidas de forma recursiva, $x_{n+1} = g(x_n)$.
- ☐ Conhecer a noção de soma parcial de uma série.
- ☐ Saber obter a soma dos termos de uma progressão geométrica, no caso da razão r satisfazer $|r| < 1$.
- ☐ Sabe que se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ converge, então $(s_n)_n$ é limitada.
- ☐ Conhecer o resultado: se $\sum a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$, e saber que a recíproca é falsa.
- ☐ Conhecer o argumento que prova que a série harmônica diverge.
- ☐ Saber obter a soma de séries telescópicas, usando frações parciais.
- ☐ Saber os critérios de convergência das séries-p.
- ☐ Saber o critério de Leibniz, para séries condicionalmente convergentes.
- ☐ Saber usar testes de convergência: teste de comparação, teste da razão, teste da raiz, teste da integral.

Séries de potências

- ☐ Saber construir o polinômio de Taylor associado a uma função $f(x)$.
- ☐ Saber calcular o erro quando aproximamos uma função por seu polinômio de Taylor de grau n.
- ☐ Saber analisar a convergência de uma série de potências e obter o raio de convergência.
- ☐ Saber que, quando obtemos o intervalo de convergência com base no raio de convergência, os extremos precisam ser testados de forma independente.
- ☐ Saber quando se pode derivar e integrar séries de potências.
- ☐ Saber construir a série de Taylor de $f(x)$, ou seja, saber quais serão os coeficientes a_n.
- ☐ Saber provar a convergência de séries de potências de certas funções racionais usando como base a fórmula de convergência para progressões geométricas com raio $|r| < 1$.
- ☐ Usar séries de Taylor para determinar a soma de séries, quando for possível.

Soluções em séries para EDOs

- ☐ Dada uma EDO de 2a ordem, saber classificar seus pontos regulares, singulares e singulares-regulares.
- ☐ Saber trabalhar bem com expressões envolvendo somatórios, saber colocar vários somatórios em termos de um único termo geral x^k, ainda que seja necessário alterar o índice inicial do somatório.
- ☐ Saber encontrar uma solução em série em torno de um ponto regular, incluindo encontrar a relação de recorrência para os coeficientes e também calcular os primeiros termos não-nulos.
- ☐ Saber determinar o raio de convergência de uma solução em série para uma EDO, em termos dos raios de convergência das funções envolvidas (nos coeficientes).
- ☐ Saber obter a equação indicial, no caso de pontos singulares
- ☐ Saber resolver equações perto de pontos singulares-regulares, incluindo obter soluções linearmente independentes.

Problemas de valor de contorno

- ☐ Saber identificar um PVC e sua diferença para um PVI.
- ☐ Saber resolver um PVC, bem como saber que nem todo PVC terá solução.

Séries de Fourier

- ☐ Saber o que é uma série de Fourier.
- ☐ Saber quando uma série de Fourier converge.
- ☐ Saber a fórmula de Euler-Fourier para os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$.
- ☐ Saber calcular a série de Fourier de uma função $2l$-periódica.
- ☐ Saber estender para toda a reta funções definidas em intervalos limitados, considerando as várias possibilidade de extensão (par, ímpar, etc), e calcular a série de Fourier da função obtida.
- ☐

Equação do calor, equação da onda, equação de Laplace

- ☐ Entender o significado físico da equação do calor $\alpha^2 u_{xx} = u_t$.
- ☐ Entender o significado físico da equação do onda $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$.
- ☐ Saber propor uma solução por separação de variáveis $u(x,t) = X(x)T(t)$ para a equação do calor e para a equação da onda e obter duas EDOs (que na verdade são PVCs).

- ☐ Resolver as EDOs obtidas ao usarmos separação de variáveis na equação do calor, considerando possibilidades para a constante, e obter autovalores e autofunções.
- ☐ Usar o princípio da superposição para obter as soluções da equação do calor e da equação da onda em termos das autofunções.
- ☐ Usar séries de Fourier para determinar os coeficientes da solução, com base na função de distribuição inicial.
- ☐ Resolver a equação de Laplace usando separação de variáveis.

Sistemas de equações diferenciais

- ☐ Saber calcular a exponencial de uma matriz A, com base nas matrizes em forma de Jordan, após obtida a relação $A = MJM^{-1}$, onde M é uma matriz de mudança de coordenadas e J é a forma de Jordan de A.
- ☐ Resolver sistemas autônomos do tipo $x' = Ax$ usando exponencial matricial e também usando a matriz fundamental.
- ☐ Obter a solução geral de sistemas não-homogêneos do tipo $x' = Ax + b(t)$ usando a solução geral da parte homogênea $x' = Ax$ e a solução particular de $x' = Ax + b(t)$ usando coeficientes indeterminados ou variação de parâmetros.
- ☐ Saber obter a solução geral de $x' = A(t)x + b(t)$, conhecendo soluções da equação homogênea.
- ☐ Saber que para encontrar soluções de $x' = Ax$ sem usar exponenciais matriciais, será preciso uma discussão sobre a existência de autovetores "suficientes", e separar os casos em que os autovalores de A são reais e distintos, reais e iguais, ou complexos.
- ☐ Conhecer a noção de retrato de fase de um sistema do tipo $x' = Ax$ e saber fazer um esboço do retrato de fase, nos vários casos, dependendo dos autovalores e autovetores de A.