MA 311 – Cálculo III
Lista de Exercícios - SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Parte I: Seqüências Infinitas

A) Nos seguintes problemas, determine se as seqüências convergem ou divergem.Se convergirem, determine o limite.

1) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ 2) $\left\{\frac{2n-1}{n+3}\right\}$ 3) $\left\{\frac{n-4}{n^2+2}\right\}$ 4) $\left\{\frac{n^2+1}{3n(n+2)}\right\}$

5) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}$ 6) $\left\{\frac{1}{e^n}\right\}$ 7) $\left\{\sqrt{5}\right\}$ 8) $\left\{\frac{(n-1)(n+1)}{2n^2+2n+2}\right\}$

9) $\left\{\frac{20n}{1+\sqrt{n}}\right\}$ 10) $\left\{\frac{6-n^{3/2}}{(\sqrt{n}+1)^2}\right\}$ 11) $\left\{\frac{3+(-1)^n\sqrt{n}}{n+2}\right\}$ 12) $\left\{(-1)^n sen(n)\right\}$

13) $\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right\}$ 14) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}$ 15) $\left\{\cos\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right\}$ 16) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$

17) $\left\{\frac{n^{3/2}+2}{2n^{3/2}}\right\}$ 18) $\left\{\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right\}$ 19) $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$ 20) $\left\{\frac{2^n}{5^{n+2}}\right\}$

21) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$ 22) $\left\{\frac{\cos^2 n}{n}\right\}$ 23) $\left\{\frac{\sqrt{2^n+1}}{n}\right\}$ 24) $\left\{\text{arctg}\left(\frac{n+2}{2}\right)\right\}$

25) $\left\{n\,sen\frac{\pi}{2n}\right\}$ 26) $\left\{\ln\frac{n^2+1}{(n+2)(n+3)}\right\}$ 27) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 28) $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

B) Use a definição de limite para provar que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ nos casos abaixo:

1) $a_n = \frac{3}{n}$; $L=0$ 2) $a_n = \frac{1}{2n+1}$; $L=0$

3) $a_n = \frac{n}{3n+1}$; $L=\frac{1}{3}$ 4) $a_n = \frac{3n-1}{n+1}$; $L=3$

C) Determine os limites das seguintes seqüências:

1) $\lim_{n\to\infty} n\,sen\left(\frac{2}{n}\right)$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{sen^3 n}{n}$ 3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n}$ 4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

5) $\lim_{n\to\infty}(n+1)e^{-n}$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$

8) $\lim_{n\to\infty} n^{3/n}$

9) $\lim_{n\to\infty}(n+\pi)^{1/n}$

10) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

11) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(n+3)!}$

12) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{n}\ln\frac{e}{n}\right)$

13) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln(n)}{2^n}$

14) $\lim_{n\to\infty} n^{sen(\pi/n)}$

15) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$

16) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

17) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}$

18) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-senn}{n+\cos n}$

Parte II: Séries Infinitas

D) Escreva os quatro primeiros termos das seguintes séries:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{2^k}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}\cos(k\pi)}{k+1}$

3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+1}{3^k+2}$

4) $\sum_{k=0}^{\infty}\tan\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

5) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

6) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k$

E) Determine a convergência das seguintes séries.Se convergirem, determine a sua soma.

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{7^k}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$

3) $\sum_{k=0}^{\infty}4^k$

4) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7^k+3^k}{5^k}$

5) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}}{3^{3k}}$

6) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{-1}{3^k}$

7) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$

8) $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right]$

9) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+1}+2.7^k}{9^k}$

10) $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)$

11) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

12) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+5k+6}$

13) $\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k^2-9}$

14) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

15) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-2}+3^{k+1}}{5^k}$

16) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k/2}}{3^k}$

17) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{3^{k/2}}$

F) Escreva a fração decimal abaixo como: (a) Uma série infinita; (b) O quociente de dois inteiros:

1) $0,333\overline{3}\ldots$ 2) $0,777\overline{7}\ldots$ 3) $0,9292\overline{92}\ldots$
4) $0,321515\overline{15}\ldots$ 5) $0,412412\overline{412}\ldots$ 6) $0,213434\overline{34}\ldots$

G) Use o teste da integral para determinar a convergência ou não das seguintes séries:

1) $\sum \frac{1}{2k+1}$ **2)** $\sum \frac{1}{(3k+1)^2}$ 3) $\sum \frac{1}{k \ln k}$

4) $\sum \frac{1}{k(\ln k)^2}$ 5) $\sum \frac{1}{1+k^2}$ **6)** $\sum k^2 e^{-k^3}$

H) Utilize o teste da comparação para estabelecer a convergência ou não das seguintes séries:

1) $\sum \frac{1}{1+k^2}$ **2)** $\sum \frac{1}{k^{1/2} + k^{3/2}}$ 3) $\sum \frac{\sqrt{k}}{1+k^3}$

4) $\sum \frac{\sqrt{k}}{1+k}$ 5) $\sum \frac{3}{\sqrt{k}+2}$ **6)** $\sum (k-1)e^{-k}$

I) Use o teste do limite para determinar a convergência ou divergência das séries:

1) $\sum \frac{k+3}{2k^2+1}$ 2) $\sum \frac{k^2-4}{k^3+k+5}$ **3)** $\sum \frac{k+\sqrt{k}}{k+k^3}$ **4)** $\sum \frac{2k+2}{\sqrt{k^3+2}}$

J) Determine a convergência ou divergência das séries e explicite o teste utilizado:

1) $\sum \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 2) $\sum \frac{\cos(k\pi)}{k^2}$ **3)** $\sum \frac{k+1}{k}$ 4) $\sum \frac{k(k+1)}{(k+2)(k^2+1)}$

5) $\sum k^2 e^{-k^3}$ 6) $\sum \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ **7)** $\sum \frac{2k^2+2k-1}{k^4-6k+10}$ 8) $\sum \frac{sen(k\pi)}{k}$

9) $\sum \frac{2^k}{3^k+1}$ 10) $\sum \frac{\text{arctg}k}{1+k^2}$ **11)** $\sum \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ **12)** $\sum \frac{k^2-2}{k^2+2}$

13) $\sum \frac{1}{\sqrt{4k(k+1)}}$ 14) $\sum \frac{2k+2}{\sqrt{k^3+2}}$ 15) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2k}}$ **16)** $\sum \frac{k+1}{2\ln k}$

17) $\sum \frac{\ln k}{k}$ 18) $\sum \frac{\text{arctg}k}{k^2}$ **19)** $\sum \frac{k+1}{\sqrt{k^{3/2}+1}}$ 20) $\sum \frac{\ln k}{1+\ln k}$

21) $\sum \frac{\ln(k+1)}{k+2}$ 22) $\sum \frac{k}{1+k^2}$ 23) $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$ **24)** $\sum \frac{n^2+3}{2n^4+n-6}$

25) $\sum \frac{\ln n}{n^3}$

26) $\sum \frac{3^k}{k+7}$

27) $\sum \frac{2k^2}{\sqrt{k^3+5}}$

28) $\sum \frac{k+3}{(k+2)2^k}$

29) $\sum \frac{\sqrt{k}}{\cos(2k-6)+k^2}$

30) $\sum \frac{\text{arctg}\sqrt{k}}{\pi+6k^2}$

31) $\sum \frac{2^k}{k+2}$

32) $\sum \frac{k3^k}{(k+1)!}$

33) $\sum k^{10}e^{-k}$

34) $\sum \frac{k!}{2^{k+2}}$

35) $\sum \frac{\ln k}{e^k}$

36) $\sum \frac{(3k)!}{(k!)^3}$

37) $\sum \frac{k+2}{1+k^3}$

38) $\sum \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$

39) $\sum \frac{1}{(\ln k)^k}$

40) $\sum \frac{k!}{k^k}$

41) $\sum \left(1+\frac{2}{k}\right)^k$

42) $\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$

43) $\sum \frac{3^k}{k^3 2^{k+2}}$

44) $\sum \frac{k^3 2^{k+3}}{2^{2k}}$

45) $\sum \frac{(k!)^2}{(3k)!}$

46) $\sum \left(\frac{k}{1+k^3}\right)^k$

47) $\sum \frac{(k+2)!}{4!k!2^k}$

48) $\sum \frac{1}{(1+k)!}$

49) $\sum \frac{k!}{e^{3k}}$

50) $\sum \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

K) Nos exercícios abaixo, verifique se a série: (a) converge absolutamente; (b) converge condicionalmente.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k^2}{(k+2)!}$

4) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k}{\ln k}$

5) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!}$

6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^3}{3^k}$

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$

8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k}$

9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k}$

10) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}}$

11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{2^{k+2}}$

12) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2(-1)^{k+1}}{\ln k}$

14) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(-1)^k}{6k+2}$

15) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k+1}$

16) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k^3 3^{k+2}}$

17) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln^2 k}$

18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k!}{6^k}$

19) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$

20) $\sum_{k=1}^{\infty} sen\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

21) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{\ln\sqrt{k}}$

22) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{(2k+1)(k+3)}$

23) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, senhk}{3e^{2k}}$

24) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \text{arctg}k}{\sqrt{k}}$

25) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k+2}$

26) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{\ln k}}$ 27) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\,sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}{\sqrt{1+e^{\sqrt{k}}}}$ **28)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^{3/2}+3k)}{7-k^2+2k^{5/2}}$ 29) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{senh}k - \cosh k}{k}$

30) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cosh 2k}{ke^k}$

Parte III: Séries de Potências

L) Utilize o teorema sobre a convergência da série geométrica para comprovar as seguintes igualdades:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ se $|x|<1$ **2)** $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}$ se $|x|<1$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{y^k} = \frac{y}{y-x}$ se $|x|<|y|$ **4)** $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ se $|x|<1$

M) Nos exercícios abaixo, encontre os valores de x >0 para os quais a série converge:

1) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ $(0!=1)$ **2)** $1+x^2+x^4+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$

3) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\ldots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k}$ **4)** $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k+1}$

N) Nos exercícios abaixo determine o valor de x para os quais a série converge absolutamente:

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ 2) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2k+1}=1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}\ldots$

3) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ 4) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$

O) Encontre o intervalo de convergência das seguintes séries de potência:

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k+2}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2k}$ **3)** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}x^k$ 4) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{(k+1)!}$

5) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k^2+1)}{k!}x^k$ 6) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^k}{2^k}$ **7)** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{\ln k}$ 8) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^k}{k^2}x^k$

9) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{1+k}x^k$ 10) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{2k!}x^{2k}$ **11)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}x^k$ 12) $\sum_{k=1}^{\infty}k^2c^kx^k$

13) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(x-3)^k$

14) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}(x-\pi)^k$

15) $\sum_{k=0}^{\infty}k!(x-1)^k$

16) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^2}(2x-1)^k$

17) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln k}(3x-2)^k$

18) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^k}(x-1)^k$

19) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+2}x^{2k+1}$

20) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{(k+1)3^k}$

21) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k(k+1)}$

22) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{\pi^k}$

23) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(x-2)^k}{e^k}$

24) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^k}{\sqrt{2k+8}}$

25) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(7x+1)^k}{2^k}$

26) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{3^k k^2}$

27) $\sum_{k=3}^{\infty}kx^k$

28) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\ln(k+1)}$

29) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{3^k\sqrt{k+1}}$

30) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^k}{5^k}$

31) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+4)x^k}{(k+1)(k+2)e^k}$

32) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^3(x-2)^k}{3^k}$

33) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2(k+1)!}$

34) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

35) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)}$

P) Utilize a representação da série geométrica para obter uma representação em séries de potências para as seguintes funções.Determine o raio de convergência.

1) $\frac{1}{1-2x}$

2) $\frac{x^2}{1-x}$

3) $\frac{1}{1+4x^2}$

4) $\frac{1}{1-9x^2}$

5) $\frac{x}{1+x^2}$

6) $\frac{x}{1-x^2}$

7) $\frac{x-1}{x+1}$

8) $\frac{x-1}{1-x^2}$

9) $\frac{1}{1-x^4}$

10) $\frac{x}{4-x^2}$

Q) Encontre uma representação por séries de potências das seguintes funções.Determine o raio de convergência.

1) $f(x)=\frac{2}{(1+x)^2}$ $\left(\text{Dica: } f(x)=-2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$

2) $f(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$ $\left(\text{Dica: } f(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$

3) $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$

4) $f(x)=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

5) $f(x)=\frac{1}{(1+4x)^2}$

7) $f(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $\left(\text{Dica: } f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right)$

8) $f(x)=\frac{8x}{(1+4x^2)^2}$

9) $f(x)=\frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}$

10) $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

R) Encontre uma representação por séries de potências das seguintes funções.Utilize o teorema sobre a integração de séries de potências.Determine o raio de convergência.

1) $f(x)=\ln(1+x)$ 2) $f(x)=\ln(1-x)$ 3) $f(x)=x\ln(1+x)$

4) $f(x)=\text{arctg}2x$ 5) $x\text{arctg}x$ 6) $\ln(4+x)$

7) $\int \frac{dx}{1+x^4}$ 8) $\ln(1+x^2)$

S) Utilize os resultados dos itens (1) e (2) do exercício R para mostra que:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right) \qquad |x|<1$$

T) Para a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$, faça o que se pede nos itens abaixo:

1)Use o teste da razão para mostrar que a série converge absolutamente para todo x.

2)Utilize o teorema da diferenciação de séries de potências para mostrar que a função $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ satisfaz $f''(x)=-f(x)$.

3)Mostre que $f(0)=1$

4) Qual a função que já foi vista que satisfaz os itens (2) e (3)?

U) Encontre a série de Taylor ou Maclaurin em torno do ponto ***c*** dado para as seguintes funções.Determine os valores de ***x*** para os quais a série converge.

1) $f(x)=e^{2x}$ $c=0$

2) $f(x)=\text{sen}x$ $c=0$

3) $f(x)=\cos x$ $c=\frac{\pi}{4}$

4) $f(x)=\text{sen}x$ $c=\frac{\pi}{6}$

5) $f(x)=1+x^2$ $c=2$

6) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ $c=0$

7) $f(x)=\ln(3+x)$ $c=0$

8) $f(x)=x\text{sen}2x$ $c=0$

9) $f(x)=2^x$ $c=0$

10) $f(x)=\frac{1}{x}$ $c=2$

11) $f(x)=\frac{\text{sen}x}{x}$ $c=0$

12) $f(x)=x^2e^{-x}$ $c=0$

13) $f(x)=x\text{sen}x$ $c=\frac{\pi}{4}$

14) $f(x)=x^2\ln(1+x)$ $c=0$