IMECC - UNICAMP - 24/05/2024

Nome: GABARITO______________________________________ RA:________________

Assinatura:____ Turma:_____________

Segundo Teste de MA311 - Cálculo III - Matutino

ATENÇÃO:

- Este teste consiste em uma única questão 10 pontos.
- A duração do teste será de 40 minutos.
- É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwhatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Escreva suas respostas de forma clara.
- Use o verso das páginas se necessário.
- Não destaque as folhas do teste!
- Não é permitido sair durante o teste.

BOM TESTE!

Questão: Encontre o intervalo e o raio de convergência da seguinte série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$$

Seja $a_n = \dfrac{10^n x^n}{n^3}$.

Então
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{10^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{10^n x^n}\right| = \left|\frac{10\,x \cdot n^3}{(n+1)^3}\right|$$
e com isso
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10\,x \cdot n^3}{(n+1)^3}\right| = \left|\frac{10\,x \cdot n^3}{n^3(1+1/n)^3}\right| = \left|\frac{10\,x \cdot 1}{(1+1/n)^3}\right| = 10|x|.$$

Portanto, se $10|x| < 1$, pelo teste da razão, então a série será convergente. Portanto, a série será convergente no intervalo $(-1/10, 1/10)$. E, assim, o raio de convergência é $R = 1/10$.

Vamos estudar a convergência nos extremos do intervalo.

- $x = -1/10$: Neste caso, a série se torna
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n(-1)^n}{n^3}\frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}.$$
  Observemos que
  (i) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3} = 0$;
  (ii) $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ é decrescente.
  Logo, pelo teste da série alternada, esta é uma série convergente.

- $x = 1/10$:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^3}\frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$
  que é uma série convergente por ser uma série p, com $p = 3$.

Logo, a série converge se $x \in [-1/10, 1/10]$ e divergente caso contrário. Portanto, o intervalo de convergência da série é $[-1/10, 1/10]$.