Estabilidade de Equações Diferenciais gH-Fuzzy com retardamento

Felipe Longo

longo@ime.unicamp.br

Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada - DMA - IMECC - UNICAMP

XVII Encontro Científico de Pós-Graduandos do IMECC – 11 - 14 de abril de 2023

Introdução

As equações diferenciais fuzzy fornecem uma alternativa aos modelos determinísticos tendo em vista a imprecisão dos dados obtidos de determinado fenômeno, como o número diário de infectados pela COVID-19 por exemplo. Este trabalho envolve a derivada de Hukuhara generalizada (derivada gH).

Conceitos preliminares

Considere o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t), \ \ t \geq t_0 \\ x(t) = \varphi(t - t_0), \ t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $F : [0, \infty) \times \mathcal{C}_\tau \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$, $\varphi \in \mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}_\mathcal{F}$, $t_0 \geq 0$ e $\tau > 0$. Dizemos que uma solução é gH-1 (gH-2) quando é solução de (1) e é (i)-gH-diferenciável ((ii)-gH-diferenciável) em $t \geq t_0$.

$$[x'(t)]_\alpha = [(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t)] \text{ (solução gH-1)}$$
$$[x'(t)]_\alpha = [(x_\alpha^+)'(t), (x_\alpha^-)'(t)] \text{ (solução gH-2)}$$

- métrica para números fuzzy:
$$d_\infty(A, B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (|a_\alpha^- - b_\alpha^-|, |a_\alpha^+ - b_\alpha^+|)$$
- métrica em $\mathcal{C}_\tau$:
$$D_\tau(\phi, \psi) = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} d_\infty(\phi(\theta), \psi(\theta))$$
- dados $B > 0$ e um funcional $V : [0, \infty) \times S(B) \to \mathbb{R}^+$, onde $S(B)$ é o conjunto das funções contínuas $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ tais que $D_\tau(\phi, 0) < B$, definimos
$$D^+V(t, \phi) := \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\Big[V(t + h, x_{t+h}) - V(t, x_t)\Big]$$
como a derivada superior à direita de $V(t, \phi)$ sobre a solução $x(\cdot; t, \phi)$
- uma função $a(w)$ é de classe $\mathcal{K}$ se $a \in \mathcal{C}([0, B), \mathbb{R}^+)$, $a(0) = 0$ e $a(w)$ é estritamente crescente em w.

Teorema (estabilidade)

Suponha que $D^+V(t, \phi) \leq 0$ e que exista $b \in \mathcal{K}$ tal que $b(d_\infty(\phi(0), 0)) \leq V(t, \phi)$ para quaisquer $t \geq 0$ e $\phi \in S(B)$. Então a solução trivial $x \equiv 0$ de (1) é estável.

Teorema (estabilidade uniforme)

Assuma que $D^+V(t, \phi) \leq 0$ e que existam $a, b \in \mathcal{K}$ tal que $b(d_\infty(\phi(0), 0)) \leq V(t, \phi) \leq a(D_\tau(\phi, 0))$ para quaisquer $t \geq 0$ e $\phi \in S(B)$. Então a solução trivial $x \equiv 0$ de (1) é uniformemente estável.

Teorema (estabilidade assintótica uniforme)

Suponha que existam $a, b, c \in \mathcal{K}$ tais que $b(d_\infty(\phi(0), 0)) \leq V(t, \phi) \leq a(D_\tau(\phi, 0))$ e $D^+V(t, \phi) \leq -c(d_\infty(\phi(0), 0))$ para quaisquer $t \geq 0$ e $\phi \in S(B)$. Então a solução $x \equiv 0$ de (1) é uniformemente assintoticamente estável.

Teorema (estabilidade assintótica uniforme global)

Seja $B = \infty$ ($S(B) = \mathcal{C}_\tau$). Se existem $a, b, d \in \mathcal{K}$ tais que

$$b(D_0(\phi(0), 0)) \leq V(t, \phi) \leq a(D_\tau(\phi, 0))$$

e

$$D^+V(t, \phi) \leq -d(D_0(\phi(0), 0))$$

para quaisquer $t \geq 0$ e $\phi \in \mathcal{C}_\tau$. Se $\lim_{r \to \infty} b(r) = \infty$, então a solução $x \equiv 0$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Modelo Malthusiano

$$x'(t) = -\lambda x(t - \tau), \qquad \lambda > 0 \tag{2}$$

- se $\tau < (\lambda e)^{-1}$, o modelo malthusiano *crisp* (escalar) com delay possui solução positiva, garantindo, assim, a existência de solução gH-2 do problema fuzzy (2)
- apesar de ser um modelo bastante simples, é difícil analisar a estabilidade sem olhar para os α-níveis
- as soluções gH-1 satisfazem
$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = -\lambda x_\alpha^+(t - \tau), \\ (x_\alpha^+)'(t) = -\lambda x_\alpha^-(t - \tau), \ t \geq t_0 \end{cases}$$
  - da teoria de estabilidade de EDRs, temos que o sistema acima é instável
- as soluções gH-2 satisfazem
$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = -\lambda x_\alpha^-(t - \tau), \\ (x_\alpha^+)'(t) = -\lambda x_\alpha^+(t - \tau), \ t \geq t_0 \end{cases}$$
  - da teoria de estabilidade de EDRs, temos que o sistema acima é (globalmente) uniformemente assintoticamente estável

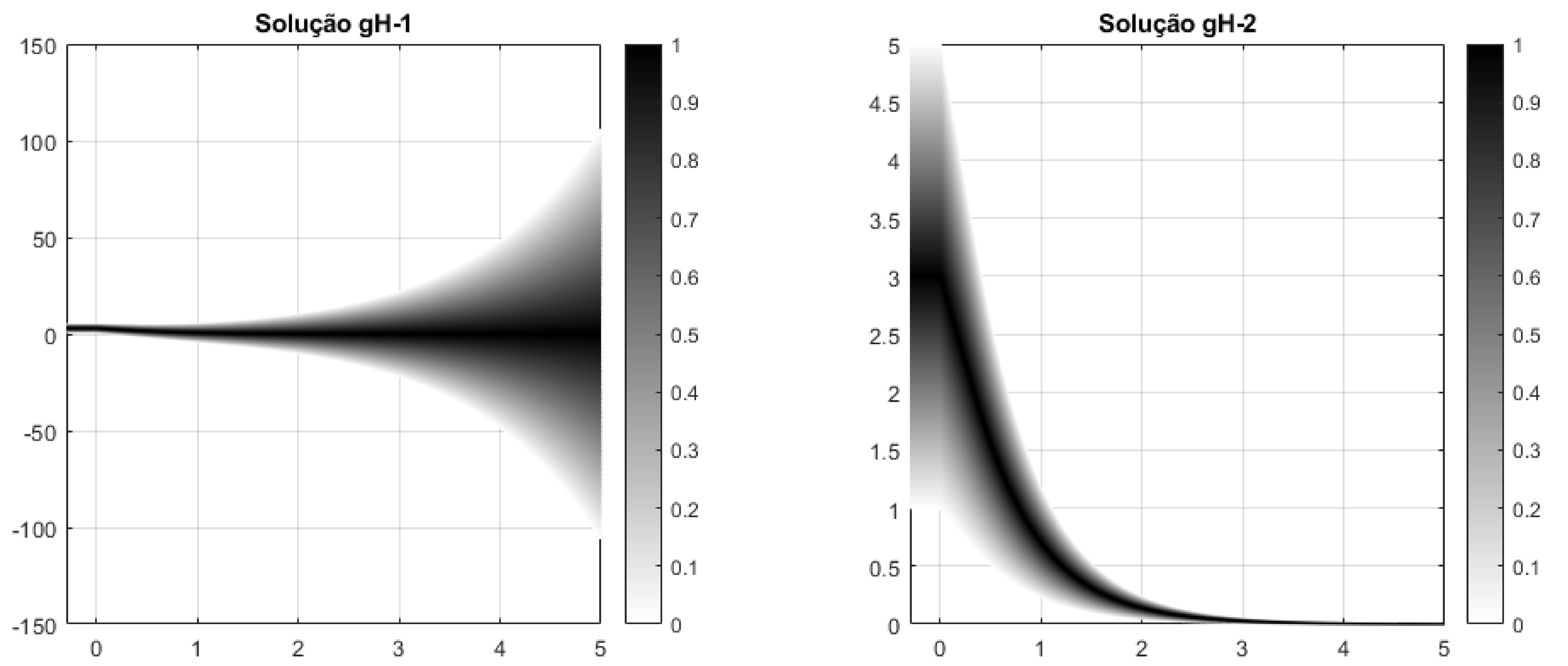

Figura: Soluções gH-1 (esquerda) e gH-2 (direita) da equação (2) com $\lambda = -1$, $\tau = -0,3$ e condição inicial constante triangular $\phi(\theta) = (1; 3; 5)$.

Considerações Finais

Trabalhar com os funcionais de Lyapunov não é tão simples no caso clássico e, como pôde ser observado, é muito menos prático no caso fuzzy. Olhar para os α-níveis, ou seja, trabalhar com os sistemas para metrizados em α, facilita a análise de estabilidade do problema. Este trabalho é parte de um estudo envolvendo cálculo fuzzy e equações diferenciais com retardamento.

Referências

[1] Gomes, L. T.; Barros, L. C.; e Bede, B. Fuzzy differential equation in various approaches. In *SpringerBriefs in Mathematics*. SBMAC- Springer, 2015. ISSN: 2191-8198.

[2] N. ONUCHIC. *Equações Diferenciais com Retardamento*. Escola de Engenharia de São Carlos, 1971.

Agradecimentos

Agradeço à oportunidade de participar do ENCPOS. Agradeço ao meu orientador João Meyer e à minha coorientadora Marta C. Gadotti por toda orientação e conhecimento. Agradeço ao CNPq pela bolsa de pesquisa processo 140692/2020-7.

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico