**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Попов Сергей Юрьевич

МАРТИНГАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ СЧЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА И МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

(01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор
физико-математических
наук, профессор
М.В. Меньшиков

МОСКВА, 1997

Оглавление

Введение

Теория счетных цепей Маркова в настоящее время развивается в различных направлениях. Одно из них — это качественный анализ цепей Маркова на счетном пространстве состояний со сложной структурой. Мы упомянем несколько таких моделей. Многомерные цепи Маркова с частичными линейными неоднородностями рассматривались в [12, 18]. Цепи Маркова на пространстве состояний, равном множеству всех конечных последовательностей букв некоторого алфавита (так называемые *струны*) изучаются в [1, 19]. Предмет статей [22, 23, 28] — так называемое *случайное блуждание с ветвлением*, которое также является цепью Маркова в некотором усложненном пространстве состояний. Для этих проблем был разработан мартингальный метод (метод функций Ляпунова).

В Главе 1 исследуется поведение стационарной меры для различных классов счетных цепей Маркова. Мы получаем точную асимптотику для различных проблем больших отклонений для этих классов. В работах [10] и [12] были установлены условия конечности или бесконечности математического ожидания от p-й степени момента времени достижения некоторой конечной области. В этой работе мы доказываем, что в рассматриваемых задачах стационарная мера убывает полиномиально с увеличением координаты. Кроме того, показано, что скорость сходимости к стационарности полиномиальна по времени, и мы определим точную асимптотику.

Техника анализа этой проблемы базируется на так называемом методе функций Ляпунова (или пробных функций). Этот мартингальный метод совершенно естественен для таких задач.

В Разделе 1.1.1 мы рассматриваем одномерную версию задачи Ламперти [26]. Задача Ламперти — это случайное блуждание в $\mathbf{Z}_+$, вектор сноса которого $m(x)$ связан следующим соотношением со вторым моментом $b(x)$ скачка из точки x:

$$m(x) \simeq \frac{\theta b(x)}{2x}.$$

Для этой задачи мы находим точные асимптотические оценки для стационарных вероятностей (Теоремы 1.1 и 1.2). А именно, при некоторых естественных дополнительных предположениях относительно переходных вероятностей, доказано, что для любого $\varepsilon > 0$

существует константа $C > 0$, такая, что стационарные вероятности π_n удовлетворяют следующему соотношению:

$$Cn^{-\theta-\varepsilon} \leq \pi_n \leq Cn^{-\theta+\varepsilon}.$$

В Разделе 1.1.2 мы снова изучаем асимптотическое поведение стационарных вероятностей для одномерного случайного блуждания с асимптотически нулевым сносом. Отличие от предыдущего раздела, состоит в том, что снос имеет порядок $x^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$ (в задаче Ламперти $\alpha = 1$). В этом случае мы докажем, что стационарная мера имеет форму $\pi_n \simeq \exp\{-\gamma n^{\beta}\}$, где $\gamma > 0$, $0 < \beta < 1$.

В Разделе 1.2 доказывается, что скорость сходимости к стационарности в задаче Ламперти — полиномиальная. Более точно, мы получим, что отклонение n-шаговых переходных вероятностей P^n_{00} от стационарной вероятности π_0 имеет порядок $n^{-(\theta-1)/2}$, и мы получим соответствующие верхние и нижние оценки. С этой целью мы используем результаты Б. Рогозина. В [7] он показал, что в общем случае скорость сходимости зависит от хвостов распределения моментов первого достижения некоторых конечных множеств. Анализ хвостов распределения моментов достижения конечного множества может быть найден в работах [10] и [12]. Заметим, что тесно связанные с [7] результаты могут быть обнаружены в [29], но для наших целей было более удобно применять [7].

Раздел 1.3 обобщает результаты Разделов 1.1, 1.2 для произвольных счетных цепей Маркова ξ_t посредством функций Ляпунова. Мы докажем, что если существует функция $f(x)$ такая, что одномерный процесс $f(\xi_t)$ по своим характеристикам схож с задачей Ламперти, то тогда результаты относительно задачи Ламперти, касающиеся стационарной меры и скорости сходимости к ней, переносятся (при некоторых дополнительных предположениях) и на случай этой цепи Маркова ξ_t.

В Разделе 1.4 мы применяем эти результаты к случайному блужданию с отражением в $\mathbf{Z}^2_+$ с нулевым сносом внутри, и мы получаем точную полиномиальную асимптотику стационарной меры, а также доказываем, что скорость сходимости к этой мере тоже полиномиальна. Заметим, что в работе [11] найдена верхняя оценка для скорости сходимости для той же задачи.

Другая важная ветвь теории Марковских процессов — это теория счетных цепей Маркова в случайной среде. В Главе 2 мы изучим различные примеры, используя при этом функции Ляпунова. Давайте кратко опишем, что мы понимаем под "случайной средой". Данная счетная, однородная по времени цепь Маркова $\mathcal{L} = \{\eta_n; n \geq 0\}$ может быть определена своим пространством состояний $X = \{x_i\}$ и набором вероятностей перехода $P_{ij} = \mathrm{P}\{\eta_{n+1} = x_j \mid \eta_n = x_i\}$. Допустим, что в некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ мы имеем набор случайных величин $P_{ij}(\omega)$, $i, j \in \mathbf{N}$, $\omega \in \Omega$, таких, что для любого фиксированного ω (которое мы называем *реализацией* случайной среды) числа $P_{ij}(\omega)$ являются вероятностями перехода. Вместе с пространством состояний X, эти вероятности перехода определяют цепь Маркова $\mathcal{L}(\omega)$. Можно считать цепь Маркова перемещением частицы в пространственно неоднородной среде $(P_{i,\cdot}(\omega))_i$. Интересующий нас конкретный случай — когда поле $(P_{i,\cdot}(\omega))_i$, рассматриваемое как случайное поле, будет однородно по пространству; тогда среда обладает свойством однородности по пространству на статистическом уровне.

Некоторые естественные вопросы возникают для такой модели с *замороженным* беспорядком: какова вероятность (по отношению к вероятностной мере $\mathbf{P}$) для цепи Маркова $\mathcal{L}(\omega)$ быть возвратной (транзиентной, эргодической, или обладающей некоторым другим свойством)? Однако, в этой общей формулировке эта проблема едва ли может быть решена.

В недавних статьях [12, 18, 23, 28] было показано, что метод функций Ляпунова очень полезен (и иногда единственен) для исследования счетных цепей Маркова и случайных блужданий с ветвлением. Этот метод сводится к анализу цепи через некоторые хорошо подобранные одномерные проекции. В Главе 2 мы применим этот метод к трем моделям: случайному блужданию в случайной среде, случайным струнам в случайной среде, и случайному блужданию с ветвлением в случайной среде. Основная идея нашего метода следующая: для данного $\omega \in \Omega$ рассмотрим цепь Маркова $\mathcal{L}(\omega)$. Для этой цепи Маркова мы строим функцию Ляпунова $f(x) = f(x; \omega)$. Оказывается, что для рассматриваемых моделей эта функция является *пространственно однородным* случайным полем, так что мы можем исследовать его асимптотическое поведение. Построение функции Ляпунова не является стандартной задачей. Значительно легче проанализировать ее асимптотическое поведение, когда первый шаг уже выполнен. Далее, зная свойства функции Ляпунова для фиксированного ω, и используя критерии для счетных цепей Маркова, мы таким образом получаем качественную классификацию для цепи Маркова $\mathcal{L}(\omega)$.

Модели, которые мы рассматриваем, имеют следующее общее свойство:

$$\mathbf{P}\{\omega : \mathcal{L}(\omega) \text{ возвратна}\} = 0 \text{ или } 1.$$

Закон нуля или единицы выполняется также для транзиентности, эргодичности, и некоторых других характеристик цепи Маркова.

Глава 2 организована следующим образом.

В Разделе 2.1 мы приводим некоторые мартингальные критерии для классификации счетных цепей Маркова.

Раздел 2.2 посвящен случайному блужданию в случайной среде; эта модель, введенная в [30], к настоящему моменту уже довольно хорошо исследована. Все наши доказательства чрезвычайно коротки, так что легко понять основные идеи нашего метода. Кроме классификации блуждания мы получаем в Теореме 2.2 результат, подобный результату Я.Г. Синая [8].

В Разделе 2.3 модель случайных струн, которая была рассмотрена в работах [1, 19], обобщается на случай случайной среды. Подчеркнем, что модель струн в случайной среде является обобщением случайного блуждания в случайной среде. Тем не менее, это обобщение сильно меняет суть дела. Для этой модели необходимо иметь дело с произведениями н.о.р. случайных матриц, так что результаты естественно выражаются в терминах показателей Ляпунова. Эти показатели Ляпунова невозможно вычислить в явном виде, за исключением некоторых тривиальных случаев, так что результаты относительно этой задачи неконструктивны по своей природе.

В Разделе 2.4 мы рассматриваем модель, названную *случайным блужданием с ветвлением*. Оно представляет из себя некоторую композицию ветвящегося процесса и случайного блуждания, т.е. блуждающая частица может еще порождать потомков. Мы вводим естественную классификацию для этой модели и даем некоторые мартингальные критерии в Разделе 2.4.2. Поведение блуждания в случайной среде оказывается отчасти отличным от поведения блуждания в неслучайной среде (в однородном, или в слабо неоднородном случае).

По сравнению с Разделом 2.3, эти результаты являются конструктивными. Также мы советуем читателю обратить специальное внимание на Пример в Разделе 2.4.4, поскольку он показывает, что наши результаты носят не очень интуитивный характер.

Предмет Раздела 2.5 — это многомерное случайное блуждание в случайной среде. Рассматривается простое случайное блуждание в $\mathbf{Z}^d$. Перед началом процесса мы разбрасываем по пространству "особые" точки, в которых частицы могут порождать потомков. Точка x становится особой с вероятностью $p(x)$. Мы исследуем вопрос о транзиентности или возвратности такого блуждания в зависимости от вида функции $p(x)$, и от среднего количества потомков, порождаемых частицей в особых точках.

Разделы 2.4, 2.5 могут быть прочитаны независимо от Разделов 2.1, 2.2, и 2.3. Раздел 2.1 содержит критерии необходимые, чтобы понять Разделы 2.2 и 2.3, но последние два могут также быть прочитаны независимо.

Результаты в Разделе 2.2 — хорошо известны, но результаты следующих разделов — новые. Кроме исследования этих трех моделей, наша цель в Главе 2 — проиллюстрировать технику функций Ляпунова, и показать ее пользу в случае случайной среды.

1. Степенные оценки для цепей Маркова

1.1. Одномерное случайное блуждание с асимптотически нулевым сносом

1.1.1. Задача Ламперти

Рассмотрим однородную по времени, неприводимую, апериодическую цепь Маркова $\{\xi_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ с дискретным временем; $\xi_t \in \mathbf{Z}_+$, где $\mathbf{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел. Обозначим через $P_{ij} = \mathrm{P}\{\xi_n = j \,|\, \xi_{n-1} = i\}$ вероятности перехода цепи Маркова $\{\xi_t\}$. Мы предполагаем, что следующее условие выполнено.

Условие D. Существует $d \in \mathbf{Z}_+$ такое, что $P_{ij} = 0$ если $|i - j| > d$.

Обозначим

$$m(x) = \mathrm{E}(\xi_{n+1} - \xi_n \,|\, \xi_n = x)\ ,\ x \in \mathbf{Z}_+ \tag{1}$$

и

$$b(x) = \mathrm{E}((\xi_{n+1} - \xi_n)^2 \,|\, \xi_n = x)\ ,\ x \in \mathbf{Z}_+. \tag{2}$$

Допустим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $b(x) > \varepsilon_0$ для любого x. Предположим, что следующее неравенство выполняется для некоторых $\theta_1 > \theta_2 > 1$ и для всех достаточно больших x:

$$-\frac{\theta_1 b(x)}{2x} \le m(x) \le -\frac{\theta_2 b(x)}{2x}. \tag{3}$$

Эргодичность цепи Маркова ξ_n следует из (3) и Условия D (доказательство см. в [26], и также в [5]). Запишем

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P^n_{0j}.$$

Основная цель этого раздела — получить асимптотику π_j, при $j \to \infty$. Далее мы формулируем два основных результата этого раздела.

Теорема 1.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C = C(\varepsilon) \in \mathbf{R}_+$ такое, что для всех n*

$$\pi_n \le C n^{-\theta_2+\varepsilon}. \tag{4}$$

Для того, чтобы доказать обратное неравенство, нам нужно дополнительное условие.

Условие A(локальная апериодичность). Существует $\delta > 0$ такое, что для всех i, j, где $|i - j| < d$, существует $n = n(i, j)$ такое, что $P^n_{ij} > \delta$.

Теорема 1.2. *Примем Условие A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C \in \mathbf{R}_+$, такое, что для всех n*

$$\pi_n \ge C n^{-\theta_1-\varepsilon}. \tag{5}$$

Для начала мы сформулируем и докажем две полезных леммы. Метод доказательства базируется на мартингальной технике, которая была разработана Г. Файоллем, В.А. Малышевым и М.В. Меньшиковым в [18].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство, снабженное фильтрацией $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. Пусть $\{S_i, i \geq 0\}$ — последовательность, согласованная с потоком $\{\mathcal{F}_n\}$, действительных неотрицательных случайных величин; $S_0 \equiv \mathrm{const}$. Обозначим через τ момент первого попадания в $[0, C]$, т.е.

$$\tau(\omega) = \min\{n \geq 1 : S_n \leq C\} \ .$$

Введем соответствующую остановленную последовательность $\tilde{S}_n = S_{n\wedge\tau}$, где

$$n \wedge \tau = \begin{cases} n, & \text{если } n \leq \tau, \\ \tau, & \text{если } n > \tau. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *Допустим, что $S_0 > C$ и что для некоторого $\delta > 0$ и всех $n \geq 0$*

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n \,|\, \mathcal{F}_n) \leq -\delta \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \quad \text{п.н.} \tag{6}$$

Тогда

$$\mathrm{E}\tau \leq \frac{S_0}{\delta} < \infty. \tag{7}$$

Доказательство см. в [18] □

Нам будет также нужно обратное к (7) неравенство.

Лемма 1.2. *Пусть $\{\eta_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ — произвольная цепь Маркова с конечным пространством состояний $M = \mathbf{Z} \cap [-l, m]$, где l, m — положительные целые числа. Для $x \in M$, $x > 0$, положим*

$$\tau_x = \min\{n \geq 1 : \eta_n \leq 0 \,|\, \eta_0 = x\} \, .$$

Пусть $f(n)$ — такая функция, что $f(n) > 0$ для всех $n > 0$, $f(n) \leq 0$ для $n \leq 0$, и она удовлетворяет следующему неравенству:

$$\mathrm{E}(f(\eta_{n+1}) - f(\eta_n) \,|\, \eta_n = x) \geq -\delta \tag{8}$$

для $x = 1, 2, \dots m$. Тогда

$$\mathrm{E}\tau_x \geq \frac{f(x)}{\delta}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\eta}_n = \eta_{n\wedge\tau}$ и $\tilde{S}_n = f(\tilde{\eta}_n)$. Ради краткости мы не учитываем зависимость от x в наших обозначениях, и, следовательно, можно записать $\tau = \tau_x$. Имеем

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n \mid \tilde{S}_n) \geq -\delta \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \quad \text{п.н.} \tag{10}$$

Беря математическое ожидание от (10), имеем

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n) \geq -\delta \mathrm{P}\{\tau > n\}$$

и, итерируя это неравенство, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\tilde{S}_{n+1} &= \mathrm{E}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n + \tilde{S}_n - \cdots - \tilde{S}_0 + \tilde{S}_0) \\ &\geq -\delta \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}\{\tau > i\} + \tilde{S}_0 \,. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}\{\tau > i\} \geq \frac{S_0}{\delta} - \frac{\mathrm{E}\tilde{S}_{n+1}}{\delta}\,.$$

Поскольку цепь Маркова конечна и $\tau < \infty$ п.н. (если бы последнее не было истинно, то мы бы имели $\mathrm{E}\tau = \infty$ и (9)), получаем, что

$$\tilde{S}_n \xrightarrow{L_1} S_\tau, \quad \text{при } n \to \infty$$

и, поскольку $\mathrm{E}S_\tau \leq 0$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}\{\tau > i\} = \mathrm{E}\tau_x \geq \frac{S_0}{\delta}.$$

Этим завершается доказательство Леммы 1.2 □

Далее мы изучим время среднего достижения конечных множеств. Для получения некоторых полезных оценок, мы будем использовать две леммы, доказанные выше. Введем некоторые обозначения. Для $x \in \mathbf{Z}_+$, $B \subset \mathbf{Z}_+$ положим

$$\tau_{x,B} = \min\{n \geq 1 : \xi_n \in B \mid \xi_0 = x\} \ , \tag{11}$$

$$\overline{\tau}_{x,B} = \min\{n \geq 0 : \xi_n \in B \mid \xi_0 = x\} \ , \tag{12}$$

и

$$\mathrm{E}\tau_{x,B} = m_{x,B}, \qquad \mathrm{E}\overline{\tau}_{x,B} = \overline{m}_{x,B}. \tag{13}$$

Обозначим через $B_n = \{n, \ldots n + d - 1\}$. Теперь мы сформулируем и докажем следующую важную лемму.

Лемма 1.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют C_1, C_2, $C_3 \in \mathbf{R}_+$ такие, что для всех n и для всех x, таких, что $n - d < x < n$, мы имеем*

$$m_{x,B_n} \geq C_1 n^{\theta_2 - \varepsilon}, \tag{14}$$

$$m_{x,B_n} \leq C_2 n^{\theta_1 + \varepsilon}, \tag{15}$$

и для всех x таких, что $n + d - 1 < x \leq n + 2d - 1$, мы имеем

$$m_{x,B_n} \leq C_3 n. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (16). Рассмотрим функцию $f(n) = n^2$. Поскольку $b(x)$ отделено от нуля, и из (3), мы имеем для достаточно больших x, что

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n) \,|\, \xi_n = x) &= \mathrm{E}(\xi_{n+1}^2 - \xi_n^2 \,|\, \xi_n = x) \\ &= \mathrm{E}(\xi_{n+1}^2 - 2\xi_{n+1}\xi_n + \xi_n^2 \\ &\quad + 2\xi_n(\xi_{n+1} - \xi_n) \,|\, \xi_n = x) \\ &= b(x) + 2xm(x) \leq b(x)(1 - \theta_1) < -\delta_0, \end{aligned}$$

где δ_0 — положительно и не зависит от x. Далее, рассмотрим x такое, что $n + d \leq x \leq n + 2d - 1$, т.е. $x = n + d + l$ для некоторого l, обладающего свойством $0 \leq l \leq d - 1$. Пусть $f_1(y) = f(y) - n^2$. Допустим, что $\xi_0 = x$. Пусть $\tau = \tau_x$ — момент первого попадания в B_n. Применяя Лемму 1.1 к последовательности $S_n = f_1(\xi_n)$, мы получаем, что

$$\mathrm{E}\tau < \frac{S_0}{\delta} < C_3 n,$$

поскольку

$$S_0 = f_1(\xi_0) = f_1(x) = (n + d + l)^2 - n^2 < Cn$$

для некоторого $C > 0$. Этим доказывается (16).

Докажем (14). Пусть $\xi_0 = x_1$ для $n - d < x_1 \leq n - 1$, и пусть τ — момент первого попадания в B_n. Рассмотрим функцию $f(l) = n^{\theta_2+1-\varepsilon} - l^{\theta_2+1-\varepsilon}$ на множестве $\{0, \ldots n+d-1\}$ и множество $S_k = f(\xi_k)$. Для достаточно малого ε проверим выполнение условий Леммы 1.2.

Пусть $x \in \mathbf{Z}_+$ и $0 < x \le n-1$. Принимая во внимание ограниченность переходов и используя формулу Тейлора, мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) \,|\, \xi_k = x) \\
&= \mathrm{E}(\xi_k^{\theta_2+1-\varepsilon} - \xi_{k+1}^{\theta_2+1-\varepsilon} \,|\, \xi_k = x) \\
&= \mathrm{E}(x^{\theta_2+1-\varepsilon}(1 - (\xi_{k+1}/x)^{\theta_2+1-\varepsilon}) \,|\, \xi_k = x) \\
&= x^{\theta_2+1-\varepsilon}\mathrm{E}(1 - (1 + (\xi_{k+1} - \xi_k)/x)^{\theta_2+1-\varepsilon} \,|\, \xi_k = x) \\
&= x^{\theta_2+1-\varepsilon}\mathrm{E}(1 - (1 + (\theta_2 + 1 - \varepsilon)\frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{x} + \\
&\quad +o(x^{-2})) \,|\, \xi_k = x) \\
&= -x^{\theta_2+1-\varepsilon}(\frac{(\theta_2 + 1 - \varepsilon)m(x)}{x} + \frac{(\theta_2 - \varepsilon)(\theta_2 + 1 - \varepsilon)b(x)}{2x^2} + o(x^{-2})) \\
&\ge -(\theta_2 + 1 - \varepsilon)x^{\theta_2-1-\varepsilon}(-\theta_2 b(x) + (\theta_2 - \varepsilon)b(x)) + o(x^{-\theta_2-1-\varepsilon}) \\
&= (\theta_2 + 1 - \varepsilon)x^{\theta_2-1-\varepsilon}\varepsilon b(x) + o(x^{-\theta_2-1-\varepsilon}).
\end{aligned}
$$

Следовательно, существует x_0 (не зависящее от n) такое, что для $x_0 \le x \le n-1$

$$\mathrm{E}(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) \,|\, \xi_k = x) \ge 0.$$

Далее, выбирая

$$\delta_1 = \max_{x \le x_0} \mathrm{E}(\,|f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)|\,|\, \xi_k = x)$$

мы получаем

$$\mathrm{E}(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) \,|\, \xi_k = x) \ge -\delta_1$$

и значит, условия Леммы 1.2 выполняются. Следовательно, для $n - d < x_1 \le n-1$

$$m_{x_1,B_n} = \mathrm{E}\tau_{x_1,B_n} \ge C(n^{\theta_2+1-\varepsilon} - {x_1}^{\theta_2+1-\varepsilon}) \ge C_1 n^{\theta_2-\varepsilon}$$

для некоторого $C_1 > 0$, доказывая таким образом (14).

Обратимся далее к неравенству (15). Аналогично, если мы рассмотрим функцию $f(k) = (n+d-1)^{\theta_1+1+\varepsilon} - k^{\theta_1+1+\varepsilon}$ на множестве $\{0, \dots n+d-1\}$, нетрудно доказать, что существует x_0 (не зависящее от n), такое, что $f(\xi_k)$ — строгий супермартингал на $\{x_0 < \xi_k < n\}$, то есть для некоторого $\delta_2 > 0$

$$\mathrm{E}(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) \,|\, \xi_k = x) \le -\delta_2$$

для всех $n > x > x_0$ (предполагая, что n — достаточно велико). Поскольку цепь Маркова ξ_t — неприводимая и апериодическая, существует некоторое положительное целое число q_0 такое, что для некоторого $\delta_3 > 0$

$$\mathrm{P}\{\xi_{q_0} > x_0 \,|\, \xi_0 = x\} > \delta_3$$

для всех $x \le x_0$. Положим $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$.

Рассмотрим следующую последовательность моментов остановки N_i:

1) $N_0 = 0$.

2) Если $\xi_{N_k} > x_0$, то $N_{k+1} = N_k + 1$.

3) Если $\xi_{N_k} \le x_0$, то $N_{k+1} = N_k + q_0$.

Рассмотрим функцию $f_1(k) = f(k) \wedge f(x_0)$ и введем последовательность случайных величин $\{S_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определенных следующим образом:

$$S_k = f_1(\xi_{N_k}),$$

где $\xi_0 = \mathrm{const}$ и $n - d \le \xi_0 < n$.

Пусть для фиксированного n

$$\tau^* = \min\{k > 0 : \xi_{N_k} \in B_n\}$$

и $\tilde{S}_k = S_{k \wedge \tau^*}$. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_{k+1} - \tilde{S}_k \,|\, \tilde{S}_k) \le -\delta \mathbf{1}_{\{\tau^* > k\}} \quad \text{п.н.},$$

так что последовательность $\{\tilde{S}_k\}$ удовлетворяет условиям Леммы 1.1. Следовательно, существует константа $C_4 > 0$ такая, что

$$\mathrm{E}\tau^* \le \frac{S_0}{\delta} \le C_4 n^{\theta_1 + \varepsilon}.$$

Поскольку последовательность моментов остановки N_i такова, что для всех i

$$N_{i+1} - N_i \le q_0 \;\; \text{п.н.},$$

мы получаем (15). Этим завершается доказательство Леммы 1.3. □

Теперь мы можем завершить доказательство основных результатов этой секции.

Доказательство Теорем 1.1 *и* 1.2. Прежде всего, сформулируем следующий простой, но полезный результат.

Лемма 1.4. *Если Условие* A *выполнено, то тогда существует* $C \in \mathbf{R}_+$ *такое, что для всех* i, j: $|i-j| \le d$

$$\pi_i \le C\pi_j. \tag{17}$$

Доказательство. Это почти очевидно. Легко получить, что $P_{ji}^k > \delta$ для некоторого k означает, что $\pi_i \ge \delta\pi_j$. Неравенство (17) следует отсюда немедленно.□

Продолжим доказательство Теорем 1.1 и 1.2. Запишем

$$D_n^1 = \{n-d, \dots n-1\}$$

и

$$D_n^2 = \{n+d, \dots n+2d-1\}\,.$$

Мы используем обозначения, введенные ранее в этом разделе, чтобы выписать две следующие формулы (см. Предложение 6.24 [3]):

$$\sum_{i\in B} \pi_i m_{i,B} = 1 \tag{18}$$

и

$$m_{i,B} = \sum_j P_{ij}\overline{m}_{j,B} + 1, \tag{19}$$

где $B \subset \mathbf{Z}_+$. Подставляя (19) в (18), и принимая во внимание ограниченность скачков, мы получаем

$$\sum_{i\in B_n} \pi_i (\sum_{j\in D_n^1} P_{ij} m_{j,B_n} + \sum_{j\in D_n^2} P_{ij} m_{j,B_n} + 1) = 1\,, \tag{20}$$

где мы использовали тот факт, что $\overline{m}_{i,B} = m_{i,B}$ для $i \notin B$.

Далее мы докажем Теорему 1.1. Используя (20), имеем

$$\pi_n \sum_{j\in D_n^1} P_{nj} m_{j,B} \le 1$$

и

$$\pi_n \sum_{j\in D_n^1} P_{nj} \min_{j\in D_n^1} m_{j,B} \le 1.$$

Поскольку $b(x)$ отделено от нуля, и так как $m(x)$ стремится к нулю, существует $v > 0$ такое, что

$$\sum_{j\in D_n^1} P_{nj} \geq v$$

для всех достаточно больших n. Следовательно,

$$v\pi_n \min_{j\in D_n^1} m_{j,B} \leq 1.$$

Используя (14) (см. Лемму 1.3), мы получаем (4), завершая таким образом доказательство Теоремы 1.1. □

Давайте теперь докажем Теорему 1.2. Используя Лемму 1.4 и уравнение (20), мы получаем, что существует $F_1 > 0$, такое, что для всех n

$$F_1\pi_n \sum_{i\in B_n} (\sum_{j\in D_n^1} P_{ij}m_{j,B} + \sum_{j\in D_n^2} P_{ij}m_{j,B} + 1) \geq 1$$

и

$$F_1\pi_n d\,(\sum_{j\in D_n^1} m_{j,B} + \sum_{j\in D_n^2} m_{j,B} + 1) \geq 1.$$

Используя оценки (15) и (16), мы получаем (5). Этим заканчивается доказательство Теоремы 1.2. □

Замечание 1.1. *Вообще говоря, Условие* A *существенно. Если Условие* A *не выполнено, то возможно привести пример цепи Маркова* ξ_t*, для которой*

$$m(x) = -\frac{b(x)}{x},$$

(т.е. $\theta = 2$*), и*

$$\pi_{2n} > Cn^{-2}\ ,\ \pi_{2n+1} < Cn^{-4}.$$

1.1.2. Медленно убывающий снос

Этот раздел будет очень кратким и схематическим. Цель нашей работы — это критический случай, в котором стационарная мера убывает полиномиально; однако здесь мы коснемся некритического случая. Поскольку здесь прослеживается тесное сходство с критическим случаем, мы дадим только формулировку результатов и основных идей.

В этом разделе мы изучим одномерное случайное блуждание, удовлетворяющее Условию D, но условие (3) будет заменено на другое. Снова нас интересует асимптотика стационарной меры π_n при $n \to \infty$, и мы покажем, что наши методы также применимы и в этом случае.

Вместо условия (3) предположим, что следующее неравенство выполнено

$$-\frac{\theta_1 b(x)}{x^\alpha} \le m(x) \le -\frac{\theta_2 b(x)}{x^\alpha} \tag{21}$$

для некоторого $\alpha < 1$, некоторых $\theta_1 > \theta_2 > 0$ и для всех достаточно больших x, где $m(x)$ и $b(x)$ были введены в (1) и (2). Иногда условие (21) оказывается слишком сильным, так что вместо (21) мы рассматриваем его обобщенную версию. Пусть следующее неравенство

$$-\frac{\theta_1 b(x)}{x^\alpha} \le m(x) \le -\frac{\theta_2 b(x)}{x^\beta} \tag{22}$$

верно для некоторых $\alpha \le \beta < 1$, некоторых $\theta_1, \theta_2 > 0$, и для всех достаточно больших x. Также мы предполагаем, что функция $b(x)$ отделена от нуля (как и в предшествующей секции).

Основной результат этого раздела — это следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть выполнено условие* (22). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует достаточно большое* N, *такое, что для всех* $n \ge N$ *следующее неравенство выполнено:*

$$\exp\{-\left(\frac{2\theta_1}{1-\alpha}+\varepsilon\right)n^{1-\alpha}\} \le \pi_n \le \exp\{-\left(\frac{2\theta_2}{1-\beta}-\varepsilon\right)n^{1-\beta}\}. \tag{23}$$

Доказательство. Доказательство этих двух неравенств похоже на доказательство Теорем 1.1 и 1.2, за исключением одной детали: функции Ляпунова в этом случае отличаются от тех, которые мы использовали в предшествующем разделе. Вместо функций вида $f(n) = n^\gamma$ которые использовались, чтобы построить соответствующие функции Ляпунова в Лемме 1.3, мы должны использовать функции вида $f(n) = \exp\{Cn^{1-\beta}\}$ и $g(n) = \{\tilde{C}n^{1-\alpha}\}$ для других C и $\tilde{C}$. Для примера, покажем, что в зависимости от величины C, $f(\xi_n)$ становится супермартингалом на $\{\xi_n > x_0\}$ для достаточно большого x_0.

Пусть
$$f(n) = \exp\{\left(\frac{2\theta_2}{1-\beta} - \varepsilon\right) n^{1-\beta}\}$$
и допустим, что (21) выполняется. Давайте докажем, что для достаточно большого x
$$\mathrm{E}(f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n) \,|\, \xi_n = x) \le -\delta f(x) x^{-2\beta} \tag{24}$$
для некоторого $\delta > 0$.

В самом деле, записывая $K = (2\theta_2)/(1-\beta) - \varepsilon$, мы получаем
$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n) \,|\, \xi_n = x) \\
&= f(x)\mathrm{E}(\exp\{K(\xi_{n+1}^{1-\beta} - \xi_n^{1-\beta})\} - 1 \,|\, \xi_n = x) \\
&= f(x)\mathrm{E}(\exp\{Kx^{1-\beta}\left((1 + (\xi_{n+1} - \xi_n)/x)^{1-\beta} - 1\right)\} - 1 \,|\, \xi_n = x) \\
&= f(x)\mathrm{E}(\exp\{(1-\beta)Kx^{-\beta}(\xi_{n+1} - \xi_n) + O(x^{-(\beta+1)})\} - 1 \,|\, \xi_n = x) \\
&= f(x)\mathrm{E}((1-\beta)Kx^{-\beta}(\xi_{n+1} - \xi_n) + \\
&\quad + \frac{((1-\beta)K)^2}{2} x^{-2\beta}(\xi_{n+1} - \xi_n)^2 + o(x^{-2\beta}) \,|\, \xi_n = x) \\
&= f(x)x^{-\beta}K(1-\beta)(m(x) + \frac{(1-\beta)K}{2} b(x)x^{-\beta} + o(x^{-\beta})) \\
&\le f(x)x^{-2\beta}K(1-\beta)(-\theta_2 b(x) + \frac{(1-\beta)K}{2} b(x) + o(1)) \\
&\le -\delta x^{-2\beta} f(x)
\end{aligned}$$
для некоторого $\delta > 0$, так что (24) выполнено.

Как было упомянуто выше, остаток доказательства имеет сходство с Теоремами 1.1 и 1.2, так что мы опустим дальнейшие детали. $\square$

1.2. Скорость сходимости

В предшествующем разделе мы получили оценки на стационарную меру π_n при $n \to \infty$. Но мы все еще не имеем никакой информации о скорости, с которой n-шаговые вероятности P_{ii}^n сходятся к π_i. Существует большое количество примеров цепей Маркова с экспоненциальной скоростью сходимости к стационарности. Но мы покажем, что в нашем случае скорость сходимости не экспоненциальная, а полиномиальная.

Давайте введем некоторые обозначения. Обозначим через $R_n = P_{00}^n - \pi_0$ величину, которую нужно оценивать. Запишем $\tau = \tau_{0,\{0\}}$ и $m = m_{0,\{0\}}$, где $\tau_{0,\{0\}}$ и $m_{0,\{0\}}$ были определены в (11) и (13). Тогда $\pi_0 = m^{-1}$ (см. [15]). Докажем следующую теорему.

Теорема 1.4. *Если* (3) *выполняется, то тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют положительные числа* C_1, C_2 *такие, что для всех достаточно больших* n *следующее неравенство выполнено:*

$$C_1 n^{-(\theta_1 - 1 + \varepsilon)/2} \leq |R_n| \leq C_2 n^{-(\theta_2 - 1 - \varepsilon)/2} . \tag{25}$$

Доказательство. Пусть

$$H_n = m^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{P}\{\tau \geq k+1\} .$$

Теорема 1 [7] означает (в наших обозначениях), что R_n может быть представлено следующим образом:

$$R_n = H_n + G_n,$$

где G_n имеет порядок меньше, чем H_n, при условии, что $\beta > \alpha > 1$, $\mathrm{E}\tau^\alpha < \infty$ и $\mathrm{E}\tau^\beta = \infty$. Единственное, что осталось — это получить верхние и нижние границы для $\mathrm{P}\{\tau > k\}$.

Из доказательства Леммы 1.3 следует, что (3) влечет для любого $\varepsilon > 0$ существование достаточно большого x_0, такого, что $\xi_t^{\theta_2+1-\varepsilon}$ — супермартингал на $\{\xi_t > x_0\}$, т.е. для $x > x_0$

$$\mathrm{E}(\xi_{t+1}^{\theta_2+1-\varepsilon} - \xi_t^{\theta_2+1-\varepsilon} \,|\, \xi_t = x) \leq 0,$$

и $\xi_t^{\theta_1+1+\varepsilon}$ — сабмартингал на $\{\xi_t > x_0\}$. Мы используем этот факт, чтобы сформулировать и доказать следующую лемму.

Лемма 1.5. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $C_1 > 0$ *такая, что для всех достаточно больших* k

$$\mathrm{P}\{\tau > k\} \geq C_1 k^{-(\theta_1+1+\varepsilon)/2}. \tag{26}$$

Доказательство. Мы должны ввести некоторые дополнительнеы обозначения. Для состояний i, j и для множества B определим n-шаговые переходные табу-вероятности

$$ {}_BP^n_{ij} = \mathrm{P}\{\xi_n = j, \xi_k \notin B \text{ для } k = 1, \dots n-1 \,|\, \xi_0 = i\} \tag{27} $$

с запретным множеством B. Для $B = \{k\}$ мы, естественно, запишем ${}_{\{k\}}P^n_{ij} \equiv {}_kP^n_{ij}$.

Пусть в дальнейшем

$$ f(k) = k^{-(\theta_1+1+\varepsilon)/2}. $$

Используя Следствие 1 [10] мы получаем в нашем случае для некоторого множества

$$ A = \{0, 1, 2, \dots a_0\} $$

и для некоторого $x_0 > a_0$, существование константы $C_2 > 0$ такой, что

$$ \mathrm{P}\{\tau_{x_0,A} > k\} \geq C_2 f(k). $$

Поскольку наша цепь Маркова — неприводимая и апериодическая, то существует $\delta > 0$ и n_0 такие, что

$$ {}_0P^{n_0}_{0x_0} > \delta. $$

Так как $0 \in A$,

$$ \begin{aligned} \mathrm{P}\{\tau_{0,\{0\}} > s\} &\geq \delta \mathrm{P}\{\tau_{x_0,\{0\}} > s - n_0\} \\ &\geq \delta \mathrm{P}\{\tau_{x_0,A} > s - n_0\} \geq \delta C_2 f(s - n_0) \geq C_1 f(s) \end{aligned} $$

для некоторых $C_1 > 0$ и $s > n_0$. Это доказывает Лемму 1.5. □

Суммируя (26) по всем $k > n$, мы получаем первое неравенство в (25).

Как показывает Теорема 1 [12], в нашем случае для некоторого x_0, некоторого множества

$$ A = \{0, 1, 2, \dots a_0\}, $$

и для любого $x > x_0 > a_0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует математическое ожидание $\mathrm{E}\tau_{x,A}^{(\theta_2+1-\varepsilon)/2}$. Но мы интересуемся конечностью моментов случайной величины $\tau \equiv \tau_{0,\{0\}}$. Следовательно, чтобы наконец завершить доказательство теоремы, нам будет нужна еще одна лемма.

Лемма 1.6. *Пусть $\{\xi_t\}$ — неприводимая, апериодическая цепь Маркова на счетном пространстве состояний X, со следующими свойствами.*

1) *Для всех i верно, что $P_{ij} \neq 0$ только для конечного числа состояний j.*

2) *Для некоторого $\alpha > 1$, некоторого множества I и некоторого конечного множества B*

$$\mathrm{E}\tau_{i,B}^{\alpha} < \infty \tag{28}$$

   для всех $i \in I$.

3) *Множество $X \setminus I$ конечно.*

Тогда для любого множества C и любого состояния $l \in X$

$$\mathrm{E}\tau_{l,C}^{\alpha} < \infty. \tag{29}$$

Доказательство. Это — прямое следствие Теоремы 1.9, которая будет доказана в Разделе 1.5. □

Применяя эту лемму к нашей ситуации, мы немедленно получаем конечность математического ожидания $\mathrm{E}\tau^{(\theta_2+1-\varepsilon)/2}$. Докажем следующее простое предложение, чтобы извлечь пользу из этого факта.

Лемма 1.7. *Пусть τ — некоторая положительная целочисленная случайная величина. Пусть $\mathrm{E}\tau^{\alpha} < \infty$ для некоторого $\alpha > 1$. Тогда существует положительная константа L такая, что для всех $k > 0$*

$$\mathrm{P}\{\tau > k\} \leq Lk^{-\alpha}. \tag{30}$$

Доказательство. В самом деле, используя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\mathrm{P}\{\tau > k\} = \mathrm{P}\{\tau^{\alpha} > k^{\alpha}\} \leq \frac{\mathrm{E}\tau^{\alpha}}{k^{\alpha}},$$

доказывая тем самым Лемму 1.7. □

Суммируя (30) по всем $k > n$, мы в конце концов получаем второе неравенство в (25), и поэтому доказательство Теоремы 1.4 завершено. □

1.3. Изучение поведения стационарных мер счетных цепей Маркова через функции Ляпунова

В предшествующем разделе мы рассмотрели одномерные цепи Маркова. Основная цель настоящего раздела — показать, что наши идеи применимы в более общей ситуации.

Сначала мы докажем один общий результат. Пусть $\{\xi_n\}$ — неприводимая, апериодическая цепь Маркова с дискретным временем и на счетном пространстве состояний X. Допустим, что эта цепь Маркова эргодична, и обозначим через $\{\pi_k\}$ ее стационарную меру. Пусть $f : X \to \mathbf{R}_+$ — некоторая функция. Рассмотрим три следующих условия:

Условие L. Существует константа $L > 0$, такая, что

$$|f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n)| < L \quad \text{п.н.}$$

Условие V. Существуют действительные числа $p_0 > 0$ и $v > 0$, такие, что

$$\mathrm{P}\{f(\xi_{n+1}) \le f(\xi_n) - v \,|\, \xi_n = x\} \ge p_0$$

для всех $x \in X$, кроме, быть может, конечного их количества.

Условие F. Если $A \in \mathbf{R}_+$ — ограниченное множество, то множество $f^{-1}(A)$ конечно.

Замечание 1.2. *Легко видеть, что Условия L и F означают, что для всех $x \in X$ существует только конечное число состояний $y \in X$ таких, что $P_{xy} \neq 0$.*

Перед тем, как сформулировать общий результат, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$B_n = f^{-1}([n, n+L])\,,$$

$$D_n = f^{-1}([n, n+v])\,,$$

где величины L и v взяты из Условий L и V. Для любого $B \subset X$ пусть

$$\pi_B = \sum_{i \in B} \pi_i.$$

Будем писать в дальнейшем $Z_n = f(\xi_n)$.

Теорема 1.5. *Примем Условия* L, V *и* F. *Допустим, что для некоторых* $a_0 > 0$, $2 < \beta_1 < \beta_2$ *существуют* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *такие, что*

$$\mathrm{E}(Z_{n+1}^{\beta_1} - Z_n^{\beta_1} \mid Z_n = x) \leq -\delta_1 x^{\beta_1 - 2} \quad (31)$$

$$\mathrm{E}(Z_{n+1}^{\beta_2} - Z_n^{\beta_2} \mid Z_n = x) \geq \delta_2 x^{\beta_2 - 2} \quad (32)$$

для всех $x \in f(X)$ *таких, что* $x \geq a_0$. *Тогда существуют положительные константы* C_1, C_2 *такие, что для всех достаточно больших* n

$$\pi_{B_n} \geq \frac{C_1}{n^{\beta_2 - 1}}, \quad (33)$$

$$\pi_{D_n} \leq \frac{C_2}{n^{\beta_1 - 1}}. \quad (34)$$

Следствие 1.1. *Пусть* $E_n = f^{-1}([n, +\infty))$. *Тогда существуют положительные константы* C_3 *и* C_4, *такие, что*

$$\frac{C_3}{n^{\beta_2 - 2}} \leq \pi_{E_n} \leq \frac{C_4}{n^{\beta_1 - 2}}.$$

Доказательство Теоремы 1.5. Введем некоторые дополнительные обозначения. Для любого множества C пусть

$$\bar{C} = \{j \in X \mid \exists i \in C : P_{ij} \neq 0\} \cup C$$

и

$$\tilde{C} = \bar{C} \setminus C.$$

Кроме того, положим

$$B_n^- = \{j \in \tilde{B}_n \mid f(j) < n\}$$

$$B_n^+ = \{j \in \tilde{B}_n \mid f(j) > n + L\}.$$

Как и в доказательстве Леммы 1.3, и используя Леммы 1.1 и 1.2, мы можем доказать три следующих неравенства (для всех достаточно больших n):
для $j \in B_n^-$ существуют $K_1, K_2 > 0$ такие, что

$$m_{j,B_n} \geq K_1 n^{\beta_1 - 1}, \quad (35)$$

$$m_{j,B_n} \leq K_2 n^{\beta_2 - 1}, \quad (36)$$

и для $j \in B_n^+$ существует $K_3 > 0$ такое, что

$$m_{j,B_n} \le K_3 n. \tag{37}$$

Благодаря Условиям L и V, достаточно рассмотреть только состояния j, такие, что $f(j) \in [n-L, n-v]$, или $f(j) \in [n+L+v, n+2L]$.

Перепишем формулу (20) следующим образом:

$$\sum_{i\in B_n} \pi_i \Big(\sum_{j\in \tilde{B}_n} P_{ij} m_{j,B_n} + 1 \Big) = 1. \tag{38}$$

Мы доказываем неравенство (33). В самом деле, используя (36) и (37), мы получаем, что

$$\sum_{j\in \tilde{B}_n} P_{ij} m_{j,B_n} \le \sum_{j\in \tilde{B}_n} P_{ij} K_4 n^{\beta_2 - 1} \le K_4 n^{\beta_2 - 1}$$

и, подставляя это в (38), мы получаем, что

$$\pi_{B_n} = \sum_{i\in B_n} \pi_i \ge \frac{1}{K_4 n^{\beta_2-1} + 1} \ge \frac{C_1}{n^{\beta_2-1}}$$

для некоторого $C_1 > 0$, и, следовательно, (33) доказано.

Обратимся теперь к неравенству (34). Используя (35) и Условие V, мы можем записать

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{i\in B_n} \pi_i \Big(\sum_{j\in \tilde{B}_n} P_{ij} m_{j,B_n} + 1 \Big) \ &\ge \ \sum_{i\in D_n} \pi_i \sum_{j\in \tilde{B}_n} P_{ij} m_{j,B_n} \\ &\ge \ p_0 K_1 n^{\beta_1 - 1} \sum_{i\in D_n} \pi_i = p_0 K_1 n^{\beta_1 - 1} \pi_{D_n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\pi_{D_n} \le \frac{C_2}{n^{\beta_1 - 1}}$$

для некоторого $C_2 > 0$, и поэтому (34) доказано. Этим заканчивается доказательство Теоремы 1.5. □

Доказательство Следствия 1.1 очевидно, и мы его опустим. □

Далее мы получаем результат о скорости сходимости в этом случае.

Теорема 1.6. *Пусть $i \in X$ — произвольное состояние. Допустим, что выполнены все условия Теоремы 1.5. Тогда существуют два* *положительных числа* $C_1 = C_1(i)$ *и* $C_2 = C_2(i)$, *не зависящих от* n, *такие, что*

$$C_1 n^{-(\beta_2-1)/2} \leq |\pi_i - P_{ii}^n| \leq C_2 n^{-(\beta_1-1)/2}$$

для всех достаточно больших n.

Доказательство. Заметим, что результаты из [10] и [12], которые использовались при доказательстве Теоремы 1.4, базировались на неравенствах, подобных (31) и (32). Следовательно, результаты из [10] и [12] верны в данной ситуации. Так что доказательство данной теоремы подобно доказательству Теоремы 1.4. Детали мы опускаем.□

1.4. Приложения: случайное блуждание в $\mathbf{Z}_+^2$ с отражением, и с нулевым сносом внутри

Мы применим общие результаты предшествующего раздела к случайному блужданию в квадранте с нулевым сносом внутри. Давайте опишем это случайное блуждание (мы следуем здесь работам [5, 12]).

Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем $\mathcal{L} = \{\xi_n,\ n \geq 0\}$ на решетке в четверти плоскости

$$\mathbf{Z}_+^2 = \{(x, y) : x, y \geq 0 \text{ - целые }\}.$$

Мы предполагаем, что она неприводимая и апериодическия. Допустим, что вероятности перехода зависят от положения ξ_n следующим образом. Для внутренних точек $(x, y \geq 1)$

$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = (x+k, y+m) \mid \xi_n = (x, y)\} = r_{k,m},$$

для точек на осях $(x = 0,\ y \geq 1$ или $y = 0,\ x \geq 1)$

$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = (x+k, m) \mid \xi_n = (x, 0)\} = q_{k,m},$$

$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = (k, y+m) \mid \xi_n = (0, y)\} = p_{k,m}$$

и

$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = (k, m) \mid \xi_n = (0, 0)\} = r_{k,m}^0.$$

Кроме того, потребуем выполнения следующих условий:

1) (Ограниченность снизу)

$$\begin{array}{rcl} r_{k,m} & = & 0, \quad \text{если } k < -1 \text{ или } m < -1; \\ q_{k,m} & = & 0, \quad \text{если } k < -1 \text{ или } m < 0; \\ p_{k,m} & = & 0, \quad \text{если } k < 0 \text{ или } m < -1; \\ r^0_{k,m} & = & 0, \quad \text{если } k, m < 0. \end{array}$$

2) (Ограниченность сверху)

$$r^0_{k,m} = r_{k,m} = q_{k,m} = p_{k,m} = 0\,, \quad \text{если } \max\{k, m\} > N_0$$

для фиксированного $N_0 \in \mathbf{Z}_+$.

Мы предполагаем, что

$$\sum_{i,j} i r_{i,j} = \sum_{i,j} j r_{i,j} = 0.$$

Давайте определим величины λ_x, λ_y и R следующим образом:

$$\lambda_x = \sum_{i,j} i^2 r_{i,j}\ ,\ \lambda_y = \sum_{i,j} j^2 r_{i,j}\ ,\ R = \sum_{i,j} ij r_{i,j}.$$

Допустим, что матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_x & R \\ R & \lambda_y \end{pmatrix}$$

невырождена. Кроме того, запишем

$$u_1 = \sum_{i,j} i q_{i,j}\ ,\ u_2 = \sum_{i,j} j q_{i,j}$$

и

$$w_1 = \sum_{i,j} i p_{i,j}\ ,\ u_2 = \sum_{i,j} j p_{i,j};$$

пусть

$$b = \sqrt{\frac{\lambda_y}{\lambda_x}},\ \ r = \frac{R}{\sqrt{\lambda_x \lambda_y}},\ \ = \frac{1}{\sqrt{\lambda_y (1 - r^2)}}$$

и

$$\gamma = \arccos(-r), \quad \gamma \in (0, \pi)\ .$$

Введем два угла $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ (см. в [12] их геометрическую интерпретацию):

$$\alpha_1 = \arctan\left\{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(r - b\frac{u_1}{u_2}\right)\right\},$$

$$\alpha_2 = \arctan\left\{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(r - \frac{w_2}{bw_1}\right)\right\}.$$

Далее мы определим характеристику нашей цепи Маркова, которая играет важную роль в исследовании ее свойств. Это

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\gamma}.$$

В работе [12] показано, что цепь Маркова ξ_n эргодична, если $\alpha > 2$. Обозначим также через

$$W_n = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \,:\, \sqrt{i^2 + j^2} > n\}.$$

Мы можем теперь сформулировать основной результат этого раздела.

Теорема 1.7. *Пусть ξ_n будет определенная выше цепь Маркова, и пусть $\alpha > 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что*

$$\frac{C_1}{n^{\alpha-2+\varepsilon}} \le \pi_{W_n} \le \frac{C_2}{n^{\alpha-2-\varepsilon}} \tag{39}$$

для всех n.

Доказательство. Обозначим $\beta_1 = \alpha - \varepsilon$, $\beta_2 = \alpha + \varepsilon$. В работе [12] были явно построены функции $\psi_{1,2} : \mathbf{Z}_+^2 \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющие (31) и (32) соответственно. Используя простые геометрические рассуждения, нетрудно показать, что эти функции также удовлетворяют Условиям L, V и F. Используя технику доказательства Теоремы 1.5, мы видим, что Следствие 1.1 применимо к нашей ситуации. Так что, применяя Следствие 1.1 и замечая, что для некоторых не зависящих от n чисел t_1, t_2

$$E_{t_1 n} \subset W_n \subset E_{t_2 n}$$

(в самом деле, это легко следует из геометрических рассуждений) мы немедленно получаем (39). Этим завершается доказательство Теоремы 1.7.□

В завершение, мы кратко коснемся вопроса о скорости сходимости в этом случае. Давайте сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.8. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого состояния $\tilde{s} = (i, j)$ существуют два положительных числа $C_1 = C_1(\tilde{s})$ и $C_2 = C_2(\tilde{s})$ такие, что*

$$C_1 n^{-\alpha+1-\varepsilon} \leq |\pi_{\tilde{s}} - P^n_{\tilde{s}\tilde{s}}| \leq C_2 n^{-\alpha+1+\varepsilon}$$

для всех n.

Доказательство. Это — прямое следствие Теоремы 1.6. □

1.5. Теорема о моментах времен достижения конечных множеств

Мы сформулируем и докажем технический результат, необходимый в Разделе 1.2.

Теорема 1.9. *Пусть $\{\xi_t\}$ — неприводимая цепь Маркова на счетном пространстве состояний X со следующими свойствами.*

1) *Для всех i верно, что $P_{ij} \neq 0$ только лишь для конечного числа состояний j.*

2) *Для некоторого $\alpha > 0$, некоторого множества I, и некоторого конечного множества B*

$$\mathrm{E}\tau^{\alpha}_{i,B} < \infty \tag{40}$$

   для всех $i \in I$.

3) *Существует конечное множество D такое, что или множество $X \setminus (B \cup D \cup I)$ пусто, или для всех $j \in X \setminus (B \cup D \cup I)$ существуют $i \in I$ и n_0 такие, что ${}_BP^{n_0}_{ij} > 0$.*

Тогда для любого множества C и любого состояния $l \in X$

$$\mathrm{E}\tau^{\alpha}_{l,C} < \infty. \tag{41}$$

Доказательство. Очевидно, без потери общности мы можем допустить, что $B \cap D = \emptyset$. Сначала мы докажем, что $\mathrm{E}\tau_{j,B}^{\alpha} < \infty$ для всех j. Если $j \in I$, то тогда это — прямое следствие условий теоремы, так что остается только два возможных случая: $j \in X \setminus (B \cup D \cup I)$ и $j \in D$ (случай $j \in B$ легко следует из этих двух).

Случай 1: $j \in X \setminus (B \cup D \cup I)$. Допустим, что $\mathrm{E}\tau_{j,B}^{\alpha} = \infty$. Тогда существуют $i \in I$ и n_0 такие, что ${}_BP_{ij}^{n_0} > 0$. Тогда

$$\mathrm{E}\tau_{i,B}^{\alpha} \geq {}_BP_{ij}^{n_0}\mathrm{E}(n_0 + \tau_{j,B})^{\alpha}. \tag{42}$$

Но правая часть (42) равна ∞, а значит $\mathrm{E}\tau_{i,B}^{\alpha} = \infty$. Но это противоречит (40).

Случай 2: $j \in D$. Пусть $\sigma \equiv \tau_{j,X\setminus D}$ — это первый момент времени, когда ξ_t покидает множество D. Поскольку D конечно и $\mathrm{P}\{\sigma < \infty\} = 1$, существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\mathrm{P}\{\sigma = k\} \leq e^{-\gamma k}.$$

Полагая

$$s = \max_{k \in \tilde{D}} \mathrm{E}\overline{\tau}_{k,B}^{\alpha},$$

получаем, что

$$\mathrm{E}\tau_{j,B}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\sigma = k\}\mathrm{E}(\tau_{j,B}^{\alpha} \,|\, \sigma = k).$$

Но, так как $\xi_\sigma \in \tilde{D}$ (мы здесь используем обозначения, введенные в начале доказательства Теоремы 1.5), имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\tau_{j,B}^{\alpha} \,|\, \sigma = k) &= \mathrm{E}((\overline{\tau}_{\xi_\sigma,B} + k)^{\alpha} \,|\, \sigma = k) \\
&\leq 2^{\alpha}(\mathrm{E}(\overline{\tau}_{\xi_\sigma,B}^{\alpha} \,|\, \sigma = k) + k^{\alpha}) \leq 2^{\alpha}(s + k^{\alpha})
\end{aligned}$$

(здесь использовано простое неравенство

$$(a_1 + \cdots + a_n)^{\alpha} \leq n^{\alpha}(a_1^{\alpha} + \cdots + a_n^{\alpha}) \tag{43}$$

для $\alpha > 0$ и $a_i \geq 0$.)

Мы заключаем, что

$$\mathrm{E}\tau_{j,B}^{\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma k} 2^{\alpha}(s + k^{\alpha}) < \infty$$

и, таким образом, доказано, что для любого $j \in X$

$$\mathrm{E}\tau_{j,B}^{\alpha} < \infty. \tag{44}$$

Продолжим доказательство Теоремы 1.9. Мы хотим доказать, что для любых $l, q \in X$

$$\mathrm{E}\tau_{l,\{q\}}^{\alpha} < \infty.$$

Очевидно, без потери общности мы можем допустить, что $q \in B$. В самом деле, если это не так, то тогда мы рассмотрим множество $B' = B \cup \{q\}$, и нетрудно видеть, что $\tau_{j,B'} \le \tau_{j,B}$ для всех j.

Пусть $\sigma_1 \equiv \tau_{l,B}$, и

$$\sigma_{k+1} = \min\{n : n > \sigma_k\,, \xi_n \in B\}, \;\; k \ge 1,$$

где σ_k — момент k-го захода в множество B. Очевидно, из (44) следует, что наша цепь Маркова возвратна. Следовательно, $\sigma_k < \infty$ п.н., для всех k. Рассматриваем новую цепь Маркова $\{\eta_k\}$ на пространстве состояний B, которая получается из $\{\xi_k\}$ следующим образом: $\eta_k = \xi_{\sigma_k}$. Обозначим через

$$w = \min\{k > 0 : \eta_k = q \,|\, \xi_0 = l\}.$$

Ясно, что $\mathrm{E}\tau_{l,\{q\}}^{\alpha} = \mathrm{E}\sigma_w^{\alpha}$ и мы имеем

$$\mathrm{E}\sigma_w^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{w = k\}\mathrm{E}(\sigma_k^{\alpha} \,|\, w = k). \tag{45}$$

Поскольку цепь Маркова $\{\xi_k\}$ возвратна, то $\{\eta_k\}$ тоже возвратна, и так как пространство состояний $\{\eta_k\}$ конечно, то существуют константы $K_1 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\mathrm{P}\{w = k\} \le K_1 e^{-\delta k}. \tag{46}$$

Давайте оценим $\mathrm{E}(\sigma_k^{\alpha} \,|\, w = k)$. Для $m, n \in B$ обозначим через Q_{mn} вероятности перехода цепи Маркова $\{\eta_k\}$. Пусть

$$r_1 = \min_{\substack{m,n \in B: \\ Q_{mn} \ne 0}} Q_{mn}.$$

Обозначим $u_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$. Из (44) следует, что для всех $m \in B$

$$\mathrm{E}(u_k^{\alpha} \,|\, \eta_k = m) < \infty. \tag{47}$$

Давайте докажем, что для всех $m, n \in B$ таких, что $Q_{mn} \neq 0$

$$\mathrm{E}(u_k^\alpha \,|\, \eta_k = m, \eta_{k+1} = n) < \infty.$$

В самом деле,

$$\mathrm{E}(u_k^\alpha \,|\, \eta_k = m) \geq Q_{mn} \mathrm{E}(u_k^\alpha \,|\, \eta_k = m, \eta_{k+1} = n),$$

и поэтому

$$\mathrm{E}(u_k^\alpha \,|\, \eta_k = m, \eta_{k+1} = n) \leq \frac{1}{r_1} \mathrm{E}(u_k^\alpha \,|\, \eta_k = m) < \infty.$$

Следовательно, так как B конечно, существует $r_2 > 0$ такое, что

$$\mathrm{E}(u_k^\alpha \,|\, \eta_k, \eta_{k+1}) \leq r_2 \ \text{ п.н.}$$

Применяя (43), имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\sigma_k^\alpha \,|\, w = k) \\
&\quad = \ \mathrm{E}((\sigma_1 + u_1 + \cdots + u_{k-1})^\alpha \,|\, w = k) \\
&\quad \leq \ k^\alpha \mathrm{E}\sigma_1 + k^\alpha \mathrm{E}(u_1^\alpha + \cdots + u_{k-1}^\alpha \,|\, \eta_1 \neq q, \dots \eta_{k-1} \neq q, \eta_k = q) \\
&\quad \leq \ k^\alpha \mathrm{E}\sigma_1 + k^\alpha r_2 (k-1) \leq r_3 k^{\alpha+1},
\end{aligned}$$

для всех k и некоторого $r_3 > 0$.

Так что, используя (45) и (46), мы имеем

$$\mathrm{E}\tau_{l,\{q\}}^\alpha \leq \sum_{k=1}^{\infty} K_1 e^{-\delta k} r_3 k^{\alpha+1} < \infty.$$

Чтобы завершить доказательство Теоремы 1.9, осталось заметить, что $\tau_{l,\{q\}} \geq \tau_{l,C}$ для $q \in C$, и поэтому

$$\mathrm{E}\tau_{l,C}^\alpha \leq \mathrm{E}\tau_{l,\{q\}}^\alpha < \infty.$$

Таким образом, мы доказали Теорему 1.9. □

2. Марковские процессы в случайных средах

2.1. Критерии для счетных цепей Маркова

В этом разделе мы формулируем три мартингальных критерия для счетных неприводимых цепей Маркова. Они приведены в довольно упрощенной форме, которая тем не менее достаточна для наших нужд. Более общие критерии могут быть найдены в [18], а также в [12].

Предложение 2.1. *Пусть η_t — счетная, однородная по времени цепь Маркова со счетным пространством состояний X, и точка $0 \in X$. Допустим, что существует функция $f : X \mapsto \mathbf{R}$ со следующими свойствами:*

- $f(x) \neq \mathrm{const}$;
- *существует некоторое M_0 такое, что $|f(x)| < M_0$ для всех $x \in X$;*
- *для всех $x \neq 0$*

$$\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = x) = 0. \qquad (48)$$

Тогда цепь Маркова η_t транзиентна (т.е. невозвратна).

Это — следствие Теоремы 2.2.2 [18]. Детали опущены. Следующие предложения есть просто упрощенные формы Теорем 2.2.1 и 2.2.3 [18] соответственно.

Предложение 2.2. *Пусть η_t — однородная по времени цепь Маркова с дискретным временем и со счетным пространством состояний X, $0 \in X$. Допустим, что существует функция $f : X \mapsto \mathbf{R}$ такая, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, и для всех $x \neq 0$*

$$\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = x) \leq 0. \qquad (49)$$

Тогда цепь Маркова η_t возвратна.

Предложение 2.3. (Foster) *Пусть η_t — однородная по времени цепь Маркова с дискретным временем и со счетным пространством состояний X, $0 \in X$. Допустим, что существуют функция $f : X \mapsto \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$, и $\delta > 0$ такие, что для всех $x \neq 0$*

$$\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = x) \leq -\delta; \qquad (50)$$

и $\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) \mid \eta_t = 0) < \infty$. Тогда цепь Маркова η_t эргодична.

2.2. Случайное блуждание в $\mathbf{Z}_+$ в случайной среде

2.2.1. Описание процесса

Здесь мы опишем модель, которая впервые была рассмотрена М.В. Козловым [4] и Ф. Соломоном [30].

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1,2,\dots}$ — последовательность н.о.р. случайных величин на Ω со значениями в $[0,1]$. Допустим также, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = 1\} = 0.$$

Далее, для фиксированной среды, т.е. для данной реализации последовательности н.о.р. случайных величин $\{\xi_i\}$, рассмотрим цепь Маркова η_t на $\mathbf{Z}_+$, определенную следующим образом: $\eta_0 = 0$,

$$\begin{aligned} p_n &= \mathrm{P}\{\eta_{t+1} = n-1 \mid \eta_t = n\} = \xi_n, \\ q_n &= \mathrm{P}\{\eta_{t+1} = n+1 \mid \eta_t = n\} = 1 - \xi_n,\ n = 1, 2\dots, \end{aligned}$$

и $\mathrm{P}\{\eta_{t+1} = 1 \mid \eta_t = 0\} = 1$. Фактически, η_t может быть описано как процесс рождения и гибели с параметрами рождения, соответственно гибели равными p_n и $q_n = 1 - p_n$.

Эта модель интенсивно исследовалась и многие ее свойства известны, см. например [24], или в [25] возможные обобщения. В этой части работы (т.е. в Разделе 2.2) нашей целью не является получить некоторые новые результаты, но проиллюстрировать, как работает метод функций Ляпунова, а также показать, что доказательства могут быть весьма коротки при использовании этого метода. Мы будем использовать обозначения $\mathbf{P}, \mathbf{E}$, чтобы обозначить вероятность и математическое ожидание для случайной среды ω, сохраняя обозначения P, E непосредственно для цепи Маркова η_t.

2.2.2. Возвратность, транзиентность, и асимптотическое поведение процесса

Пусть η_t — случайное блуждание в случайной среде, введенное в Разделе 2.2.1. Обозначим $\zeta_n = \log(p_n/q_n)$. Следующая теорема принадлежит Соломону [30]. Но мы докажем эту теорему, используя метод функций Ляпунова.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{E}|\zeta_1| < \infty$.

- *Если* $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$*, то случайное блуждание транзиентно для почти всех* ω *(для почти всех сред).*

- *Если* $\mathbf{E}\zeta_1 \geq 0$*, то случайное блуждание возвратно для почти всех* ω*.*

- *Кроме того, если* $\mathbf{E}\zeta_1 > 0$*, то тогда случайное блуждание эргодично для почти всех* ω*.*

Схема доказательства. Сначала мы докажем возвратность и транзиентность. Давайте попытаемся построить функцию $f(x)$, удовлетворяющую (48) для фиксированного ω. Обозначим $\Delta_i = f(i) - f(i-1)$ и пусть $\Delta_0 = 1$. Далее, мы имеем

$$\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = x) = -p_x\Delta_x + q_x\Delta_{x+1}, \tag{51}$$

поэтому

$$\Delta_{x+1} = \frac{p_x}{q_x}\Delta_x, \tag{52}$$

и, следовательно,

$$\Delta_{x+1} = \exp\{\sum_{i=1}^{x}\zeta_i\}.$$

Положим $f(0) = 0$. Далее, поскольку

$$f(x) = \sum_{i=1}^{x}\Delta_i,$$

ясно, что функция $f(x)$ положительна, и что если $\mathbf{E}\zeta_1 \geq 0$, то для почти всех ω мы имеем $f(x) \to +\infty$, и если $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$, то $f(x)$ ограничена. Применяя Предложения 2.1 и 2.2, мы завершаем доказательство первых двух утверждений Теоремы 2.1.

Для того, чтобы доказать эргодичность, мы строим функцию Ляпунова $f(s)$ другим способом. Пусть $f(x) = \sum_{i=1}^{x}\Delta_i$, где

$$\Delta_i = \frac{1}{p_i} + \frac{q_i}{p_ip_{i+1}} + \frac{q_iq_{i+1}}{p_ip_{i+1}p_{i+2}} + \frac{q_iq_{i+1}q_{i+2}}{p_ip_{i+1}p_{i+2}p_{i+3}} + \cdots \tag{53}$$

Далее, можно проверить, что если $\mathbf{E}\zeta_1 > 0$, то

i) ряд в правой части (53) сходится, так что функция $f(x)$ корректно определена;

ii) $f(x)$ удовлетворяет (50) с $\delta = 1$.

Мы опускаем детали здесь, ссылаясь на Раздел 2.3.5, где дано полное доказательство в более общей ситуации. Применяя теперь Предложение 2.3, мы завершаем доказательство последнего утверждения Теоремы 2.1. $\Box$

Теперь мы рассмотрим случай $\mathbf{E}\zeta_1 = 0$ более подробным образом. Может легко быть доказано, что случайное блуждание нуль-возвратно (для почти всех сред). Возможное доказательство базируется на явном выписывании стационарной меры для этой цепи Маркова. Мы теперь сфокусируем внимание на асимптотическом поведении процесса при $t \to \infty$. Мы получим один результат, который немного слабее, чем результат [8], но его доказательство просто и коротко.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{E}\zeta_1 = 0$ *и* $0 < \mathbf{E}\zeta_1^2 < \infty$. *Тогда для любого целого* $k \geq 1$ *и для любого* $\varepsilon > 0$, *мы имеем*

$$\frac{\eta_t}{(\log t \log_2 t \ldots \log_k^{1+\varepsilon} t)^2} \longrightarrow 0 \tag{54}$$

почти наверное при $t \to \infty$, *где* $\log_1 t := \log t$, $\log_{m+1} t = \log(\log_m t)$, $m \geq 1$. *Также, для любого* $\varepsilon > 0$ *и для любого* $p > 0$, *мы имеем*

$$\frac{\eta_t}{\log^{2+\varepsilon} t} \longrightarrow 0 \tag{55}$$

в L^p, *при* $t \to \infty$.

В вышеприведенных утверждениях, "почти наверное" означает "для $\mathbf{P}$-почти каждой среды это выполнено P-п.н." и "сходимость в L^p" означает "сходимость в $L^p(\mathrm{P})$ для $\mathbf{P}$-п.в. ω". P. Deheuvels и P. Revész доказали (54) в [17], Теорема 4, полностью другим методом, но наше доказательство значительно короче. После завершения этой работы мы узнали, что Y. Hu и Z. Shi [21] нашли точный верхний предел

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\eta_t}{\log^2 t \ \log_3 t} = \frac{8}{\pi^2\sigma^2} \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, мы снова используем функцию, построенную при доказательстве Теоремы 2.1. Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{x} \exp\{ \sum_{j=1}^{i-1} \zeta_j \}.$$

Как было показано в доказательстве Теоремы 2.1, процесс $f(\eta_t)$ является мартингалом везде, кроме точки 0 (это означает, что (48) выполняется для всех $x \neq 0$). Таким образом, имеем, что для некоторой константы C' (зависящей от среды)

$$\mathrm{E}(f(\eta_t) - f(\eta_{t-1})) \leq C'$$

для всех $t \geq 1$. (Можно взять $C' = p_1(\omega)/q_1(\omega)$.) Следовательно, для всех $t \geq 1$ мы имеем

$$\mathrm{E}f(\eta_t) \leq C't. \tag{56}$$

Для того, чтобы продолжить доказательство, необходимо найти нижнюю оценку для функции $f(x)$. С этой целью мы используем так называемый "инверсный закон повторного логарифма", и мы приведем результат E. Csáki:

Лемма 2.1. ([16], Теорема 3.1). *Пусть $\{\zeta_i\}_{i=1,2,\dots}$ — последовательность н.о.р. случайных величин, и пусть $\mathbf{E}\zeta_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}\zeta_1^2 < \infty$. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i$ для $n \geq 1$. Пусть $a : [y_0, \infty) \to (0, \infty)$ убывающая функция, и такая, что $a(y)y^{1/2}$ возрастает, и также*

$$\int_1^\infty \frac{a(y)}{y} dy < \infty$$

Тогда

$$\lim_n \frac{\max_{i \leq n} S_i}{(n)\sqrt{n}} = +\infty \quad \text{п.н.} \tag{57}$$

Из этого следует, что для любой такой функции a существует положительная константа $C = C(a, \omega)$ (здесь ω означает среду) такая, что

$$f(x) \geq g(x) := C \exp\{x^{\frac{1}{2}} a(x)\} \tag{58}$$

для всех x. Возьмем для начала $a(x) = (x+K)^{1/2-\varepsilon_1} x^{-1/2}$ и, для $p > 0$ мы обозначим также

$$g_p(x) = C \exp\{(x+K)^{\frac{1}{p}(\frac{1}{2}-\varepsilon_1)}\},$$

где K выбрано таким образом, чтобы функция $g_p(x)$ была выпукла вниз на $[0, \infty)$. Используя (56), (58), и неравенство Йенсена, имеем

$$C't \geq \mathrm{E}f(\eta_t) \geq \mathrm{E}g(\eta_t) = \mathrm{E}g_p(\eta_t^p) \geq g_p(\mathrm{E}\eta_t^p),$$

так что
$$(\mathrm{E}\eta_t^p)^{1/p} \le (g_p^{-1}(C't))^{1/p} \le C_3 \log^{2+\varepsilon_2} t,$$
для некоторых C_3 и $\varepsilon_2 = (4\varepsilon_1)/(1-2\varepsilon_1)$, таким образом доказывая сходимость в L^p.

Давайте докажем сходимость п.н. Используя неравенство Чебышева и (56), мы имеем
$$\mathrm{P}\{f(\eta_t) > t^3\} \le \frac{\mathrm{E}f(\eta_t)}{t^3} \le C'\frac{1}{t^2}.$$
Подставляя теперь $a(y) = (\log y \log_2 y \ldots \log_{k-1}^{1+\varepsilon} y)^{-1}$ в (58), мы получаем
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{f(\eta_t) > t^3\} &\ge \mathrm{P}\{g(\eta_t) > t^3\} = \mathrm{P}\{\eta_t > g^{-1}(t^3)\}\\ &\ge \mathrm{P}\{\eta_t > C_4(\log t \log_2 t \ldots \log_k^{1+\varepsilon} t)^2\}\end{aligned}$$
для некоторого $C_4 > 0$. Используя лемму Бореля-Кантелли, мы доказываем сходимость п.н., завершая таким образом доказательство Теоремы 2.2. □

2.3. Струны в случайной среде

2.3.1. Динамика струны

Рассмотрим конечный алфавит $\mathcal{S} = \{1, \ldots, k\}$. Струна — это просто конечная последовательность символов из $\mathcal{S}$. Мы обозначаем через $|s|$ длину струны s, т.е. если $s = s_1 \ldots s_n$, $s_i \in \mathcal{S}$, то $|s| = n$.

Рассмотрим однородную по времени цепь Маркова с пространством состояний, равным множеству всех конечных струн. Мы описываем матрицу перехода этой цепи Маркова следующим образом: пусть $s = s_1 \ldots s_n$, и $s_n = i \in \mathcal{S}$. Далее,

- мы стираем самый правый символ i струны s с вероятностью $r_i^{(n)}$;
- мы заменяем самый правый символ i на j с вероятностью $q_{ij}^{(n)}$;
- и мы добавляем символ j к правому концу струны с вероятностью $p_{ij}^{(n)}$.

Разумеется, мы предполагаем, что для всех i и для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$r_i^{(n)} + \sum_j q_{ij}^{(n)} + \sum_j p_{ij}^{(n)} = 1. \qquad (59)$$

Эти параметры не определяют эволюцию, когда струна пуста (ее длина равна 0), но мы просто допускаем, что переходы из пустой струны как-нибудь определены и могут случиться только в струны длины 1. Очевидно, эти "граничные условия" не воздействуют на асимптотическое поведение струны. Таким образом, мы видим, что процесс полностью определен набором чисел $\{r_i^{(n)}, q_{ij}^{(n)}, p_{ij}^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, k$, и $j = 1, \ldots, k$.

Для случая, когда величины $r_i^{(n)}$, $q_{ij}^{(n)}$ и $p_{ij}^{(n)}$ не зависят от n, эта модель исследовалась А.С. Гайратом, В.А. Малышевым, М.В. Меньшиковым и К.Д. Пелихом в [1]. Фактически, они исследовали даже более общую модель, когда максимальная величина перехода может быть больше единицы. Все это — модели для LIFO-систем массового обслуживания [1], и они же — случайные блуждания на деревьях. В случае $k = 1$ мы снова получаем случайное блуждание из Раздела 2.2.

Мы рассматриваем здесь только *одностороннюю* (правостороннюю) эволюцию струны. Двусторонние *однородные* струны были изучены А.С. Гайратом, В.А. Малышевым и А.А. Замятиным в [19].

Давайте теперь опишем случайную среду. Мы будем описывать векторы $x \in \mathbf{R}^{k+2k^2}$ как $x = (x^R, x^Q, x^P)$, где $x^R = (x_1^R, \ldots, x_k^R)$, $x^Q = (x_{ij}^Q)_{1 \le i,j \le k}$, $x^P = (x_{ij}^P)_{1 \le i,j \le k}$. Для $x = (x^R, x^Q, x^P)$ будем говорить, что $x \ge 0$, если все его компоненты неотрицательны. Рассмотрим $2k^2$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^{k+2k^2}$:

$$M = \{x \in \mathbf{R}^{k+2k^2} : x \ge 0,\ x_i^R + \sum_{j=1}^{k} (x_{ij}^Q + x_{ij}^P) = 1 \text{ для всех } i = 1, \ldots, k\}.$$

и пусть $\widetilde{Q}$ — некоторая вероятностная мера на M. Пусть ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность н.о.р. случайных величин со значениями в $\mathbf{R}^{k+2k^2}$, и с распределением $\widetilde{Q}$ (это означает, что для $K \subset M$ мы имеем $\mathbf{P}\{\xi_n \in K\} = \widetilde{Q}(K)$). Определим вероятности $r_i^{(n)}$, $q_{ij}^{(n)}$ и $p_{ij}^{(n)}$ через последовательность величин ξ_n следующим образом: обозначая $x = \xi_n$, мы полагаем

$$r_i^{(n)} = x_i^R,\ q_{ij}^{(n)} = x_{ij}^Q,\ p_{ij}^{(n)} = x_{ij}^P.$$

Поскольку $\xi_n = x \in M$, условие (59) выполняется. Таким образом, для каждого фиксированного $\omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ (для фиксированной среды) мы определили цепь Маркова, описывающую эволюцию струны. Мы интересуемся свойствами этого процесса, которые верны для почти всех ω, в частности, транзиентностью, возвратностью, или эргодичностью процесса.

2.3.2. Показатели Ляпунова и произведения случайных матриц

В этой разделе мы приводим некоторые свойства произведений случайных матриц, необходимые, чтобы иметь дело с струнами в случайной среде.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^k$. Для $x \in \mathbf{R}^k$ определим его норму как $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Матрица, транспонированная к матрице A, обозначена через A^*. Евклидова (операторная) норма действительной матрицы A размера $k \times k$ может быть определена любым из следующих способов (нетрудно проверить, что они эквивалентны):

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Ax, y \rangle \\ &= [\text{наибольшее собственное значение } A^*A]^{1/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность н.о.р. случайных матриц A_n. Допустим, что матрицы A_n удовлетворяют следующему условию:

Условие G. $\mathbf{E} \log^+ \|A\| < \infty$, где $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$.

Пусть $(A_1(\omega), A_2(\omega), \ldots)$ — это реализация последовательности н.о.р. случайных матриц. Пусть $a_1(n) \geq a_2(n) \geq \cdots \geq a_k(n) \geq 0$ — квадратные корни (случайных) собственных значений матрицы $(A_n \ldots A_1)^*(A_n \ldots A_1)$. Тогда следующий предел существует для почти всех ω (и он один и тот же для почти всех ω):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a_j(n) = \gamma_j(A) \tag{60}$$

для $j = 1, \ldots, k$ (см. Предложение 5.6 [14], матрица A не обязана быть обратимой). Числа $\gamma_j, -\infty \leq \gamma_k \leq \cdots \leq \gamma_1 < \infty$ называются *пока-*

зателями Ляпунова последовательности случайных матриц $\{A_n\}$. В частности,

$$\gamma_1(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a_1(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|A_n \dots A_1\| \qquad \text{п.н.} \tag{61}$$

— это *верхний показатель Ляпунова.*

Следующая простая лемма устанавливает отношения между показателями Ляпунова матриц A и A^{-1}.

Лемма 2.2. *Допустим, что матрица A обратима п.н., и что как A, так и A^{-1} удовлетворяют Условию G. Тогда для $j = 1, \dots, k$*

$$\gamma_j(A^{-1}) = -\gamma_{k-j+1}(A). \tag{62}$$

Доказательство. Пусть $a_1(n, A^{-1}), \dots, a_k(n, A^{-1})$ — это квадратные корни собственных значений матрицы

$$(A_n^{-1} \dots A_1^{-1})^*(A_n^{-1} \dots A_1^{-1}) = [(A_1 \dots A_n)(A_1 \dots A_n)^*]^{-1}.$$

Поскольку произведение двух матриц UV имеет те же собственные значения, что и VU, то $(a_1(n, A^{-1}))^{-1}, \dots, (a_k(n, A^{-1}))^{-1}$ — это квадратные корни собственных значений $(A_1 \dots A_n)(A_1 \dots A_n)^*$. Но $A_1 \dots A_n$ имеет тот же закон распределения, что и $A_n \dots A_1$. Значит, для всех $j = 1, \dots, k$ мы имеем $(a_j(n, A^{-1}))^{-1} = a_{k-j+1}(n, A)$ и, следовательно, $\gamma_j(A^{-1}) = -\gamma_{k-j+1}(A)$. □

Нам также понадобится следующая теорема

Теорема 2.3. (Эргодическая теорема Оселедца) *Пусть A_n, $n = 1, 2, \dots$ — стационарная эргодическая последовательность действительных матриц размера $k \times k$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, m)$, и допустим, что $\mathrm{E} \log^+ \|A_1\| < \infty$. Пусть $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_k$ — это показатели Ляпунова последовательности A_n. Возьмем строго возрастающую неслучайную последовательность целых чисел*

$$1 = i_1 < i_2 < \dots < i_p < i_{p+1} = k + 1$$

такую, что $\gamma_{i_{q-1}} > \gamma_{i_q}$, если $q = 2, 3, \dots, p$, и $\gamma_i = \gamma_j$, если $i_q \leq i$, $j < i_{q+1}$ (i_q маркируют точки убывания последовательности γ_i). Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$:

- *для каждого* $v \in \mathbf{R}^k$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \dots A_1 v\|$$

существует или равен $-\infty$*;*

- *для* $q \le p$

$$V(q,\omega) = \{v \in \mathbf{R}^k : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \dots A_1 v\| \le \gamma_{i_q}\}$$

есть случайное векторное подпространство $\mathbf{R}^k$*, имеющее размерность* $k - i_q$*;*

- *если* $V(0,\omega)$ *обозначает* $\mathbf{R}^k$*, то* $v \in V(q-1,\omega) \ominus V(q,\omega)$ *влечет за собой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \dots A_1 v\| = \gamma_q.$$

2.3.3. Основные результаты

Введем две последовательности случайных $k \times k$-матриц $\{B_n\}$ и $\{D_n\}$ следующим образом: $B_n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\dots,k}$ и $D_n = (d_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\dots,k}$, где $d_{ij}^{(n)} = -q_{ij}^{(n)}$ для $i \ne j$ и

$$d_{ii}^{(n)} = r_i^{(n)} + \sum_{j:j\ne i} q_{ij}^{(n)},$$

где $p_{ij}^{(n)}$, $q_{ij}^{(n)}$ и $r_i^{(n)}$ были определены в Разделе 2.3.1. Важную роль в нашем исследовании играет следующая последовательность н.о.р. случайных матриц A_n:

$$A_n = D_n^{-1} B_n$$

и ее показатели Ляпунова $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Кроме Условия G, мы рассмотрим

Условие D. $\mathbf{E} \log(1/r_i^1) < \infty$, $i = 1, \dots, k$.

Полезность этого условия иллюстрирует следующее утверждение:

Предложение 2.4. *Если Условие D выполнено, то тогда матрица* D *п.н. обратима, выполнено Условие* G*, и* $\mathbf{E} \log^+ \|D^{-1}\| < \infty$

Доказательство. С вероятностью единица $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, и значит, любой не равный нулю вектор v имеет не равный нулю образ Dv: если $|v_i| = \max(|v_j|; j = 1, \ldots, k)$, мы можем принять $v_i > 0$ без потери общности, и мы имеем $(Dv)_i = r_i v_i + \sum_{j \neq i} q_{ij}(v_i - v_j) \geq r_i v_i > 0$. Кроме того,

$$\|Dv\| \geq (Dv)_i \geq r_i v_i \geq k^{-1/2} r_i \|v\|$$

что влечет за собой $\|D^{-1}\| \leq k^{1/2} \max_i (1/r_i)$.

Следовательно, $\mathbf{E} \log^+ \|D^{-1}\| \leq \sum_i \mathbf{E} \log(1/r_i) < \infty$. Последнее утверждение легко следует из этого, а также из того, что $\|A\| = \|D^{-1}B\| \leq \|D^{-1}\| \|B\|$, и из ограниченности B. □

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать основные результаты. В следующем утверждении мы используем два различных набора предположений, каждое из которых представляет интерес для приложений.

Теорема 2.4. *Допустим, что Условие G выполнено для матрицы A_n, и что*

- *или B_n п.н. обратима, и Условие G выполняется для A_n^{-1}*
- *или $\mathbf{E} \log(1/p_{ii}) < \infty$, $i = 1, \ldots, k$*

Если $\gamma_1 > 0$, то цепь Маркова, описывающая эволюцию струны транзиентна (для почти всех ω).

Теорема 2.5. *Пусть Условие D выполнено для A_n. Если $\gamma_1 < 0$, то тогда процесс эргодичен п.н.*

Теорема 2.6. *Пусть $\gamma_1 = 0$. Кроме того, в дополнение к Условию D допустим, что A_1 п.н. обратима, и что никакое конечное объединение собственных подпространств $\mathbf{R}^k$ не п.н. стабильно относительно A_1.*

Тогда процесс является возвратным п.н.

2.3.4. Доказательство Теоремы 2.4

В этом разделе мы вновь используем Предложение 2.1.

Доказательство Теоремы 2.4. Мы начинаем со случая, когда B (и, следовательно, A) — обратима п.н., и когда $\mathbf{E} \log^+ \|A^{-1}\| < \infty$.

Все, что нам нужно — это построить функцию $f(s)$ такую, как в Предложении 2.1. Покажем, что существует последовательность векторов-столбцов $v_n = (v_n^i)_{i=1,\dots,k}$ таких, что функция $f(s)$ может быть определена как

$$f(s) = \sum_{j=1}^{|s|} v_j^{s_j}. \tag{63}$$

В самом деле, для $f(s)$, определяемой посредством (63), мы имеем

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = s, |s| = n, s_n = i) \\ &\quad = \; -r_i^{(n)} v_n^i + \sum_{j=1}^{k} q_{ij}^{(n)}(-v_n^i + v_n^j) + \sum_{j=1}^{k} p_{ij}^{(n)} v_{n+1}^j, \end{aligned}$$

так что

$$\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = s, |s| = n, s_n = \cdot) = -D_n v_n + B_n v_{n+1}. \tag{64}$$

Таким образом, поскольку $f(s)$ должна удовлетворять (48), у нас есть следующее отношение между v_n и v_{n+1} (сравните это с (51) и (52); A_n^{-1} — это аналог p_n/q_n):

$$v_{n+1} = A_n^{-1} v_n, \tag{65}$$

где матрицы A_n, B_n, и D_n были введены в Разделе 2.3.3. Из (65) следует, что

$$v_{n+1} = A_n^{-1} \dots A_1^{-1} v_0$$

для некоторого вектора v_0. Согласно Теореме 2.3, для среды ω существует случайный вектор $v_0 = v_0(\omega) \neq 0$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n^{-1} \dots A_1^{-1} v_0\| = \gamma_k(A^{-1}) = -\gamma_1. \tag{66}$$

Из последнего отношения следует, что существуют две константы $C_{1,2} = C_{1,2}(\omega) > 0$ такие, что $\|v_n\| \le C_1 \exp\{-C_2 n\}$ для всех $n \ge 0$. Учитывая (63), мы получаем

$$|f(s)| \le \frac{C_1 \exp\{-C_2\}}{1 - \exp\{-C_2\}}.$$

Так что эта функция удовлетворяет всем условиям Предложения 2.1, и Теорема 2.4 доказана для первого набора предположений.

Для второго предположения мы сравниваем интересующую нас случайную струну, скажем, $(\eta_t)_{t=0,1,\dots}$, с семейством новых случайных струн, $(\eta_t^\varepsilon)_{t=0,1,\dots}$ индексированных переменной $\varepsilon \in (0,1)$, с вероятностями перехода

$$r_i^{(n,\varepsilon)} = r_i^n,\ q_{ij}^{(n,\varepsilon)} = q_{ij}^{(n)},\ \ p_{ij}^{(n,\varepsilon)} = p_{ij}^{(n)} - \delta_{ij}\varepsilon \min_i p_{ii}^{(n)} \in (0, p_{ij}^{(n)}],$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, и новая струна остается в том же состоянии с вероятностью $\sum_j (p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(n,\varepsilon)}) = \varepsilon \min_i p_{ii}^{(n)}$.

Очевидно, новая струна $\eta_\cdot^\varepsilon$ — "более возвратна", чем $\eta_\cdot$ для $\varepsilon > 0$, и мы просто должны доказать, что $\eta_\cdot^\varepsilon$ — транзиентна для некоторого ε. Пусть $\varphi(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ — характеристический полином матрицы B. Вспоминая, что $\|(B-\lambda I)^{-1}\|^2$ — это наибольшое собственное значение $(B^* - \lambda I)^{-1}(B - \lambda I)^{-1}$, мы видим, что

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= [\det(B-\lambda I)(B^*-\lambda I)]^{1/2} \\ &\le \|(B-\lambda I)^{-1}\|^{-1} \|(B-\lambda I)\|^{k-1} \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку φ — полином с гладкими коэффициентами по B

$$\int_0^1 \log^+(1/\varphi(\lambda))d\lambda \le C(\|B\|) < \infty.$$

Соответственно новой струне мы определяем $B^\varepsilon = B - \varepsilon \min_i(p_{ii})I$. Из последних двух оценок мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\int_0^1 \log^+ \|B^\varepsilon\|^{-1} d\varepsilon &\le C' + \mathbf{E}\int_0^1 \log^+ \left(1/\varphi(\varepsilon \min_i p_{ii})\right) d\varepsilon \\ &\le C' + \mathbf{E}(\min_i p_{ii})^{-1} \int_0^1 \log^+ \left(1/\varphi(\lambda)\right) d\lambda \\ &\le C' + C(1)\sum_i \mathbf{E}(p_{ii}^{-1}) < \infty \end{aligned}$$

Следовательно, для п.в. (относительно меры Лебега) ε, матрица A_n^ε - $\tilde{Q}$ обратима п.н., и $\mathbf{E}\log^+\|B_n^\varepsilon\|^{-1}$, $\mathbf{E}\log^+\|A_n^\varepsilon\|^{-1}$ — конечны.

Также, из непрерывности верхнего показателя Ляпунова в подходящей слабой топологии, $\gamma_1(A^\varepsilon) \to \gamma_1(A) > 0$ при $\varepsilon \to 0$ (читатель отсылается к Следствию III.1.2 в [27]; нетрудно проверить, что содержащееся там доказательство адаптируется на наш случай, используя следующее замечание: формула Фюрстенберга III.1.1 для γ_1

верна для положительных матриц с любой инвариантной вероятностной мерой, сконцентрированной на $P_{+}^{d-1} = \{\dot{t} \in P^{d-1} : \exists t \in \mathbf{R}^d, \dot{t} = t/\|t\|, t_i > 0,\ i = 1, \dots, k\}$).

Выбирая ε достаточно малым, мы видим, что первый набор предположений выполнен, и мы выводим из предшествующего доказательства, что струна $\eta^{\varepsilon}_{\cdot}$ транзиентна, и, следовательно, $\eta_{\cdot}$ имеет то же самое свойство. □

2.3.5. Доказательство Теоремы 2.5

Мы будем использовать Предложение 2.3, для доказательства эргодичности. Также нам нужен один вспомогательный факт.

Лемма 2.3. *Матрица D_1^{-1} почти наверное неотрицательна.*

Доказательство. Мы должны доказать, что любой вектор w с по крайней мере одной отрицательной компонентой имеет образ Dw с отрицательной компонентой. Пусть сначала

$$d_{ii} > -\sum_{j:j\neq i} d_{ij},\ i = 1, \dots, k \tag{67}$$

В этом случае утверждение легко проверяется: $(Dw)_i < 0$ если $w_i = \min_{j\neq i} w_j < 0$. В общем случае, D является пределом матриц, удовлетворяющих (67); их обращения неотрицательны, и значит, D^{-1} — тоже неотрицательна по непрерывности. □

Доказательство Теоремы 2.5. В отличие от предшествующего раздела, здесь мы явно строим функцию $f(s)$. Обозначим через I единичную матрицу порядка k, и через $\mathbf{1}$ — вектор-столбец с всеми координатами, равными 1. Далее, мы снова определим $f(s)$ формулой (63), где

$$\begin{aligned} v_n &= D_n^{-1}\mathbf{1} + \sum_{m:m\geq n} A_n \dots A_m D_{m+1}^{-1}\mathbf{1} \\ &= (D_n^{-1} + A_n D_{n+1}^{-1} + A_n A_{n+1} D_{n+2}^{-1} + \cdots)\mathbf{1} \end{aligned}$$

(сравните эту формулу с (53)). Чтобы доказать, что v_n — конечно, мы сначала заметим, что свойство

$$\mathbf{E}\log^{+}\|D^{-1}\| = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\left(\log(\|D^{-1}\| > u\right) du < \infty$$

влечет, что для каждого $C > 0$

$$\sum_{m>0} \mathbf{P}\left(C^{-1}\log(\|D^{-1}\| > m\right) < \infty$$

и из леммы Бореля-Кантелли мы получаем, что

$$\|D^{-1}\| < \exp mC$$

для достаточно большого m. Также, поскольку $\gamma_1 < 0$, можно легко получить, используя (61) и выбирая $C < -\gamma_1$, что

$$\|v_n\| \leq (\|D_n^{-1}\| + \|A_n\|\,\|D_{n+1}^{-1}\| + \|A_nA_{n+1}\|\,\|D_{n+2}^{-1}\| + \cdots)\|\mathbf{1}\| < \infty \qquad \text{п.н.}$$

для всех n. С другой стороны, мы имеем $v_n \geq 0, v_n \neq 0$ согласно Лемме 2.3. Согласно (64), и имея в виду, что $A_n = D_n^{-1}B_n$, мы имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = s, |s| = n, s_n = \cdot) \\
&\quad = (-I - D_nA_nD_{n+1}^{-1} - D_nA_nA_{n+1}D_{n+2}^{-1} - \cdots)\mathbf{1} \\
&\qquad + (B_nD_{n+1}^{-1} + B_nA_{n+1}D_{n+2}^{-1} + B_nA_{n+1}A_{n+2}D_{n+3}^{-1} + \cdots)\mathbf{1} \\
&\quad = -I\mathbf{1} - D_n(A_nD_{n+1}^{-1} - A_nA_{n+1}D_{n+2}^{-1} - \cdots)\mathbf{1} \\
&\qquad + D_n(A_nD_{n+1}^{-1} + A_nA_{n+1}D_{n+2}^{-1} + \cdots)\mathbf{1} \\
&\quad = -\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Поэтому функция $f(s)$ удовлетворяет всем условиям Предложения 2.3, и Теорема 2.5 доказана. □

2.3.6. Доказательство Теоремы 2.6

Из теоремы, содержащейся в [13], следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \|A_1 \dots A_n\| = 0 \quad \text{п.н.}$$

и, следовательно,

$$B_1A_2 \dots A_n\mathbf{1} \leq D_1\mathbf{1} \quad \text{для некоторого конечного } n. \tag{68}$$

Определим рекурсивно случайные времена $\tau_0 = 1$, и

$$\tau_{k+1} = \min\{n > \tau_k : \ -D_{\tau_k}\mathbf{1} + B_{\tau_k}A_{\tau_k+1} \dots A_n\mathbf{1} \leq 0\}$$

для $k = 0, 1, \ldots$ Из (68) следует, что времена τ_k - п.н. конечны. Мы определяем $f(s)$ посредством (63), где $v_{\tau_k} = \mathbf{1}$, и

$$v_n = A_n A_{n+1} \ldots A_{\tau_{k+1}} \mathbf{1} \ , \ \ \tau_k < n \leq \tau_{k+1}. \qquad (69)$$

Следовательно, мы имеем $v_n = A_n v_{n+1}$, когда $\tau_k < n < \tau_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, и

$$-D_{\tau_k} v_{\tau_k} + B_{\tau_k} v_{\tau_{k+1}} = -D_{\tau_k} \mathbf{1} + B_{\tau_k} A_{\tau_k+1} \ldots A_{\tau_{k+1}} \mathbf{1} \leq 0$$

по определению τ_{k+1}. Из (64) следует, что это означает, что $f(\eta_t)$ — супермартингал везде, кроме $x = 0$, см. (49). Из Леммы 2.3 и из определения (69) следует, что вектор v_n неотрицателен, и значит, $f(\cdot) \geq 0$. Наконец, поскольку времена τ_k п.н. конечны и $v_{\tau_k} = \mathbf{1}$, $f(x) \to \infty$ при (длина) $x \to \infty$. Применяя Предложение 2.2, мы видим, что случайная струна возвратна. □

2.4. Случайные блуждания с ветвлением

2.4.1. Описание процесса

Пусть $\mathcal{L}$ — цепь Маркова с дискретным временем и со счетным пространством состояний X. Предположим также, что эта цепь Маркова однородна по времени и неприводима. Через P_{ij} мы обозначим набор переходных вероятностей цепи $\mathcal{L}$. Пусть для произвольного $x \in X$ у нас есть набор неотрицательных чисел $r_{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{(i)}(x) = 1, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i r_{(i)}(x) < \infty$$

для всех $x \in X$. Легко видеть, что набор неотрицательных чисел

$$\{r_{(1)}(x), r_{(2)}(x), \ldots\}$$

определяет некоторую целочисленную случайную величину с конечным математическим ожиданием.

Мы опишем процесс следующим образом. Пусть в момент 0 есть только одна частица, и она находится в точке x_0; когда частица находится в точке x, она порождает $i - 1$ потомков в этой же точке с вероятностью $r_{(i)}(x)$. Все эти потомки (а также породившая их частица) после этого совершают случайное блуждание согласно цепи Маркова $\mathcal{L}$, и тоже порождают своих потомков. Легко видеть, что этот процесс также является цепью Маркова на счетном пространстве состояний

$$X' = X \cup X^2 \cup X^3 \cup \ldots$$

Состояние процесса в момент времени t есть набор координат $\tilde{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N(t)}(t)\}$, где $x_i(t)$ обозначает положение i-й частицы, при условии, что всего у нас есть $N(t)$ частиц в момент времени t.

Мы будем называть эту модель *случайным блужданием с ветвлением* (с.б.в.) на X.

2.4.2. Классификация

Нетрудно доказать, что этот процесс, рассматриемый как цепь Маркова на X', всегда является транзиентным (т.е. невозвратным). Чтобы это объяснить, достаточно заметить, что в нетривиальных случаях количество частиц $N(t)$ почти наверное стремится к бесконечности при $t \to \infty$. Поэтому мы используем другой подход к классификации таких процессов. Предположим, что $0 \in X$ является поглощающим состоянием, т.е. $r_{(1)}(0) = 1$ и $P_{00} = 1$. Определим случайную величину $n_t(x)$ как количество частиц в точке x в момент времени t. Поскольку $n_t(0)$ не убывает при $t \to \infty$ для всех реализаций процесса, мы видим, что существует (необязательно конечная) случайная величина

$$m = \lim_{t \to \infty} n_t(0).$$

Обозначим через $\mathrm{E}m$ математическое ожидание случайной величины m. Определим марковский момент τ как момент, когда *все* частицы находятся в поглощающем состоянии 0, т.е. τ — это момент, когда с.б.в. полностью останавливается. Легко видеть, что $\mathrm{P}\{\tau < \infty\} > 0$, при условии что $\mathcal{L}$ является неприводимой.

Определение 2.1. *Будем говорить, что с.б.в. является*

- *возвратным, если* $\mathrm{P}\{m > 0\} = 1$;
- *сильно возвратным, если оно возвратно,* $\tau < \infty$ *п.н. и* $\mathrm{E}m < \infty$;

- *транзиентным, если* $\mathrm{P}\{m > 0\} < 1$*;*
- *сильно транзиентным, если* $\mathrm{P}\{m > 0\} < 1$ *и* $\mathrm{E}m < \infty$*.*

Нетрудно проверить, что положение x_0 частицы в начальный момент времени несущественно для этого определения. Заметим, что это не единственный способ классифицировать случайные блуждания с ветвлением. Другой подход к этой проблеме может быть найден в [28].

Введем обозначение

$$r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i r_{(i)}(x).$$

Теоремы 2.7 и 2.8 дают нам (не совсем полную) классификацию процесса.

Теорема 2.7. *Для того, чтобы* $\mathrm{E}m$ *было конечным, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная функция* $f(x)$*,* $x \in X$*, такая, что для всех* $x \neq 0$ *выполнялось следующее условие*

$$\sum_y P_{xy} f(y) = \frac{f(x)}{r(x)} . \tag{70}$$

Теорема 2.8. *Для того, чтобы* $\mathrm{E}m$ *было конечным, достаточно, чтобы существовала положительная функция* $f(x)$*,* $x \in X$*, такая, что для всех* $x \neq 0$ *выполнялось следующее условие*

$$\sum_y P_{xy} f(y) \leq \frac{f(x)}{r(x)} . \tag{71}$$

Более того, если $f(x) \to 0$*, то с.б.в. сильно транзиентно. Если* $f(x) \to \infty$*, то с.б.в. сильно возвратно.*

Формула (70) впервые появилась в [22], где она была использована для классификации одномерных случайных блужданий с ветвлением. Теоремы 2.7 и 2.8 в более обобщенной форме могут быть найдены в [28]. Здесь мы даем только основные идеи их доказательства, и мы рекомендуем читателю обратиться к [28], где рассуждения проведены более подробно.

Доказательство Теорем 2.7 и 2.8. Предположим для начала, что $\mathrm{E}m < \infty$. Мы определим $f(x)$ как среднее количество поглощенных в точке 0 частиц, при условии, что в начальный момент у нас была одна частица в точке x. Можно проверить, что эта функция удовлетворяет условию (70). Необходимость в Теореме 2.7 доказана.

Предположим теперь, что существует функция $f(x)$, удовлетворяющая (71). Покажем, что $\mathrm{E}m < \infty$. Рассмотрим процесс $Q(t)$, определенный следующим образом:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} f(x_i(t)),$$

где $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N(t)}(t)\}$ есть состояние процесса, введенного в Разделе 2.4.1.

Можно проверить, что $Q(t)$ является супермартингалом и, поскольку он неотрицательный, $Q(t)$ почти наверное сходится к некоторой случайной величине Q_∞. Применяя лемму Фату, мы получаем, что

$$\mathrm{E}Q_\infty \leq \mathrm{E}Q(0) = f(x_0),$$

где x_0 — это положение начальной частицы. С другой стороны, для всех t

$$Q(t) \geq n_t(0) f(0),$$

где случайная величина $n_t(0)$ была определена в начале этого раздела. Переходя к пределу, имеем $m \leq Q_\infty / f(0)$, так что

$$\mathrm{E}m \leq \frac{\mathrm{E}Q_\infty}{f(0)} \leq \frac{Q(0)}{f(0)} = \frac{f(x_0)}{f(0)} < \infty, \tag{72}$$

тем самым доказывая, что (71) является достаточным для $\mathrm{E}m < \infty$.

Чтобы доказать, что из $f(x) \to 0$ следует, что $\mathrm{P}\{m \geq 1\} < 1$, мы просто выберем x_0 таким образом, что $f(x_0)/f(0) < 1$, и применим (72).

Далее, пусть $f(x) \to \infty$. Предположим, что с положительной вероятностью $\tau = \infty$. Это означает, что по крайней мере одна частица уходит в бесконечность с положительной вероятностью. Однако легко видеть, что это противоречит тому факту, что $\mathrm{E}Q_\infty \leq \mathrm{E}Q(0)$. Также, очевидно, что если $\tau < \infty$ п.н., то с.б.в. возвратно. $\square$

2.4.3. Случайная среда

В этой главе мы рассмотрим случайное блуждание с ветвлением (введенное в Разделе 2.4.1), но в случайной среде. Зафиксируем два целых положительных числа: d и k; они обозначают максимальную длину скачка и максимальное количество потомков соответственно. Рассмотрим $(2d+k-1)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^{2d+k+1}$:

$$M = \{x \in \mathbf{R}^{2d+k+1} : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{2d+1} x_i = 1,\ \sum_{i=2d+2}^{2d+k+1} x_i = 1\}.$$

Пусть $\widetilde{Q}$ — это некоторая вероятностная мера на M. Если $\xi \in M$, то мы будем считать, что

$$\xi = (p^{\xi}_{-d}, \ldots, p^{\xi}_{d}, r^{\xi}_{(1)}, \ldots, r^{\xi}_{(k)}).$$

Предположим, что мера $\widetilde{Q}$ удовлетворяет следующим двум условиям (они необходимы для того, чтобы соответствуещее с.б.в., которое мы определим ниже, было невырожденным).

Условие R. $\widetilde{Q}\{\xi \in M : \sum_{i=1}^{k} i r^{\xi}_{(i)} = 1\} < 1$.

Условие P. $\widetilde{Q}\{\xi \in M : \sum_{i=1}^{d} p^{\xi}_{-i} = 0\} = \widetilde{Q}\{\xi \in M : \sum_{i=1}^{d} p^{\xi}_{i} = 0\} = 0$.

Пусть пространство состояний $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$, 0 — поглощающее состояние. Пусть есть последовательность $\xi_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots$, независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение $\widetilde{Q}$. Для конкретной реализации последовательности $\{\xi_x\}$ определим с.б.в. следующим образом: положим $r_{(i)}(x) = r^{\xi_x}_{(i)}$ и

- если $x \geq d$, то $P_{x,x+j} = p^{\xi_x}_j$;
- если $0 < x < d$, то для j таких, что $x + j > 0$ мы опять положим $P_{x,x+j} = p^{\xi_x}_j$, и
$$P_{x,0} = \sum_{j : x+j \leq 0} p^{\xi_x}_j.$$

Введем обозначение $p_j(x) = P_{x,x+j}$. Итак, для каждой фиксированной реализации $\omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, нами построено случайное блуждание с ветвлением. Мы интересуемся теми свойствами этого с.б.в., которые выполняются для почти каждого ω.

2.4.4. Основные результаты

В этой главе мы исследуем вопрос о конечности или бесконечности $\mathrm{E}m$. Для фиксированной реализации случайной среды ω, m является случайной величиной, и мы хотим знать, будет ли конечно $\mathrm{E}m$ для почти всех ω.

Замечание. Когда мы пишем $\mathrm{E}m < \infty$, то это означает, что $\mathrm{E}m < \infty$ для почти всех ω. Точно также, если мы пишем $\mathrm{P}\{m > 0\} < 1$, то следует понимать это как $\mathrm{P}\{m > 0\} < 1$ для почти всех ω. Если мы говорим, что с.б.в. является транзиентным (сильно транзиентным, возвратным, сильно возвратным), то это означает, что оно является транзиентным (сильно транзиентным, возвратным, сильно возвратным) для почти всех ω.

Нам потребуются некоторые определения. Определим для вектора $\xi \in M$ его характеристический многочлен, который обычно рассматривается в теории разностных уравнений:

$$h_\xi(\lambda) = \sum_{j=-d}^{d} p_j^\xi \lambda^j - \frac{1}{r^\xi},$$

где $r^\xi = \sum_{i=1}^{k} i r_{(i)}^\xi$. Далее, обозначим

$$K(\xi) = \{\lambda > 0 : h_\xi(\lambda) \le 0\} \subset (0, +\infty)$$

и

$$K_{\widetilde{Q}} = \bigcap_{\xi \in \operatorname{supp} \widetilde{Q}} K(\xi).$$

Основными результатами являются следующие теоремы.

Теорема 2.9. *Предположим, что выполнены Условия R и P. Тогда если $K_{\widetilde{Q}} \ne \emptyset$, то $\mathrm{E}m < \infty$. Более того,*

i) *если $K_{\widetilde{Q}} \subset [1, +\infty)$, то с.б.в. сильно возвратно для почти всех конфигураций $\omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$;*

ii) *если $K_{\widetilde{Q}} \subset (0, 1)$, то $\mathrm{P}\{m > 0\} < 1$, т.е. с.б.в. сильно транзиентно.*

Замечание. Эта теорема дает полную классификацию с.б.в. в случае $K_{\widetilde{Q}} \ne \emptyset$, как мы покажем в Лемме 2.4 ниже: если $K_{\widetilde{Q}} \ne \emptyset$, то мы имеем либо $K_{\widetilde{Q}} \subset (0, 1)$, либо $K_{\widetilde{Q}} \subset (1, \infty)$.

Теорема 2.10. *Предположим, что выполнены Условия R и P, и $d = 1$. Пусть $K_{\widetilde{Q}} = \emptyset$. Тогда* $\mathrm{E}m = \infty$.

Чтобы проиллюстрировать специфический характер с.б.в. в случайной среде, мы даем следующий пример.

Пример. Пусть $k = 3$, $d = 1$, и у нас есть два различных типа состояний

1) $r_{(2)}(x) = 1$ (т.е. $r(x) = 2$) и $p_{\pm 1}(x) = (2 \pm \sqrt{3})/4$;

2) $r_{(3)}(x) = 1$ (т.е. $r(x) = 3$) и $p_{\pm 1}(x) = (3 \pm 2\sqrt{2})/6$.

Другими словами, множество $\operatorname{supp} \widetilde{Q}$ состоит из двух точек:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{2+\sqrt{3}}{4}, 0, 1, 0\right), \\ \xi^{(2)} &= \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}, 0, \frac{3+2\sqrt{2}}{6}, 0, 0, 1\right). \end{aligned}$$

В этом случае элементарные вычисления показывают, что $K(\xi^{(1)}) = \{2-\sqrt{3}\}$, $K(\xi^{(2)}) = \{3-2\sqrt{2}\}$, следовательно $K_{\widetilde{Q}} = K(\xi^{(1)}) \cap K(\xi^{(2)}) = \emptyset$.

Если все точки имеют один и тот же тип (1 или 2), то такое пространственно однородное с.б.в. будет транзиентным (см. [22]). Предположим однако, что мы “смешали” эти два типа точек, т.е. $\widetilde{Q}\{\xi^{(1)}\} = \kappa$, $\widetilde{Q}\{\xi^{(2)}\} = 1 - \kappa$ для некоторого $\kappa \in (0,1)$. В этом случае с.б.в. в такой случайной среде будет возвратно (но не сильно возвратно).

В следующей теореме мы получаем некоторые следствия того, что $\mathrm{E}m = \infty$.

Теорема 2.11. *Пусть для с.б.в. в случайной среде (которое было введено в Разделе 2.4.3)* $\mathrm{E}m = \infty$. *Тогда*

$$\mathrm{P}\{m > 0\} = 1\,, \tag{73}$$

т.е. с.б.в. возвратно.

Замечание. Теорема 2.11 не выполняется для *произвольного* с.б.в., которое было введено в Разделе 2.4.1, т.е. вообще говоря, из $\mathrm{E}m = \infty$ не следует $\mathrm{P}\{m > 0\} = 1$. Мы дадим соответствующий контрпример после доказательства Теоремы 2.11.

2.4.5. Доказательство Теоремы 2.11

Мы решили доказывать сначала Теорему 2.11, поскольку ее доказательство менее техническое, и носит более интуитивный характер, чем доказательства Теорем 2.9 и 2.10.

Доказательство Теоремы 2.11. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы минорировать наше с.б.в. некоторым новым процессом, который мы назовем *замедленное* с.б.в. Другими словами, мы построим новый процесс, который в некотором смысле *менее возвратен*, чем наше с.б.в., а затем докажем, что этот новый процесс является возвратным.

Во-первых, модифицируем исходное с.б.в. следующим образом. Пусть точка 0 не является более поглощающим состоянием; положим, например, $p_1(0) = 1$. Так как цепь Маркова $\mathcal{L}$ неприводима, то чтобы доказать, что с.б.в. обязательно попадет в точку 0, достаточно показать, что существует хотя бы одна точка x, которая посещается бесконечно часто.

Определим теперь замедленное с.б.в. Пусть $s_i^{(k)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, — набор марковских моментов со следующими свойствами.

1) Если $k < l$, то $s_0^{(k)} \le s_0^{(l)}$.

2) Если $i < j$, то $s_i^{(k)} \le s_j^{(k)}$ для всех $k \le 1$. Если также $s_i^{(k)} < \infty$, то $s_i^{(k)} < s_j^{(k)}$.

Перенумеруем все частицы, т.е. мы присвоим номер 1 начальной частице, номера $2, 3, \ldots, j_1 + 1$ частицам, которые были порождены в момент $t = 1$ (при условии, что порождено было j_1 штук) и т.д. Определим $s_0^{(1)} = 0$ и $s_0^{(k)}$ как момент времени, когда k-я частица впервые появляется. Далее, $s_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots$, — это моменты времени, когда k-й частице позволено порождать своих потомков, и двигаться согласно переходным вероятностям P_{ij} марковской цепи $\mathcal{L}$. (Для “обычного” с.б.в., введенного в Разделе 2.4.1, мы имеем $s_i^{(k)} = s_0^{(k)} + i$.) Другими словами, k-я частица “заморожена” в промежутке между моментами $s_i^{(k)}$ и $s_{i+1}^{(k)}$.

Следующее утверждение является очевидным, так что мы даем его без доказательства.

Предложение 2.5. *Если замедленное с.б.в. возвратно, то и исходное с.б.в. возвратно. Если замедленное с.б.в. посещает некоторую точку бесконечно часто, то и исходное с.б.в. посещает ту же точку бесконечно часто. Более того, если все моменты $s_i^{(k)}$ почти наверное конечны, то исходное и замедленное случайные блуждания с ветвлением эквивалентны с точки зрения транзиентности и возвратности.*

Сейчас мы явно построим вышеупомянутое замедленное с.б.в. и покажем, что оно посещает хотя бы одну точку бесконечно часто. Зафиксируем произвольное $\mu > 1$. Возьмем произвольное целое число $l_1 > d$ и обозначим $U_1 = [l_1, l_1 + d - 1]$. Пусть τ_1 — это момент первого попадания в U_1. Обозначим через $\eta_0^{(1)}$ количество частиц, которые находятся в множестве U_1 в момент τ_1. Потом мы позволяем этим частицам один раз породить потомков и двинуться. После этого мы рассмотрим только те частицы, которые перескочили в правую сторону от множества U_1, т.е. которые попали в интервал $[l_1 + d, l_1 + 2d - 1]$. Далее, в моменты $\tau_1 + 2, \ldots, \tau_1 + k_1$, где параметр k_1 будет выбран ниже, множество U_1 становится поглощающим (или задерживающим), т.е. все частицы, которые попадают в U_1, замораживаются до момента времени $\tau_1 + k_1 + 1$. Обозначим через $\eta_1^{(1)}$ количество частиц, порожденных теми, которые перескочили в правую сторону от множества U_1 в момент $\tau_1 + 1$, и которые находятся в множестве U_1 в момент $\tau_1 + k_1$. Поскольку $\mathrm{E}m = \infty$, то можно выбрать k_1 настолько большим, чтобы следующее условие было выполнено:

$$\mathrm{E}\{\eta_1^{(1)} \mid \eta_0^{(1)}\} > \mu\eta_0^{(1)}. \tag{74}$$

Далее мы повторяем эту процедуру снова, и в момент $\tau_1 + 2k_1$ у нас есть $\eta_2^{(1)}$ частиц, находящихся в U_1, и т.д. Итак, мы построили процесс $\eta_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Заметим, что все характеристики процесса $\eta_i^{(1)}$ зависят от значений, принятых случайной средой ξ_n только в точках $n \in V_1 = \{l_1, \ldots, l_1 + d(k_1 + 1)\}$. Поэтому мы возьмем некоторое $l_2 > l_1 + d(k_1 + 1)$ и обозначим $U_2 = [l_2, l_2 + d - 1]$. Далее, подобно тому, что сделано выше, мы строим процесс $\eta_i^{(2)}$ зависящий только лишь от множества $V_2 = \{l_2, \ldots, l_2 + d(k_2 + 1)\}$. Продолжая подобным же образом, мы строим две последовательности множеств U_j и V_j, а также последовательность процессов $\eta^{(j)}_{\cdot}$, $j = 1, 2, \dots$

Все процессы $\eta^{(j)}_{\cdot}$ могут быть проминорированы процессами Гальтона-Ватсона со средним числом прямых потомков $\mu > 1$. Так что для фиксированного j вероятность того, что $\eta^{(j)}_i = 0$ по крайней мере для одного i, строго меньше 1. Обозначим эту вероятность через ν_j. Величина ν_j зависит только от значений, принятых случайной средой на множестве V_j, следовательно ν_j являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Из этого уже легко получить, что хотя бы один из процессов $\eta^{(j)}$ никогда не выродится, так что хотя бы одна точка посещается замедленным с.б.в. бесконечно часто. Применяя Предложение 2.5, мы заканчиваем доказательство Теоремы 2.11. $\square$

А сейчас мы дадим контрпример, который показывает, что, вообще говоря, $\mathrm{E}m = \infty$ не влечет за собой $\mathrm{P}\{m > 0\} = 1$.

Пример. Пусть $r_{(2)}(x) = 1$ (т.е. $r(x) = 2$) для всех x, 0 — поглощающее состояние. Мы определим переходные вероятности следующим образом: $p_{-1}(1) = p_1(1) = 1/8$, $p_0(1) = 3/4$, и $p_{\pm 1}(x) = (2 \pm \sqrt{3})/4$ для $x \geq 2$. Это с.б.в. транзиентно, поскольку пространственно однородное с.б.в. с $r(x) = 2$ и $p_{\pm 1}(x) = (2 \pm \sqrt{3})/4$ транзиентно (см. [23]). Чтобы доказать, что $\mathrm{E}m = \infty$, мы обозначим через η_k количество частиц, находящихся в точке 1 в момент k. Легко проверить, что η_k может быть проминорировано процессом Гальтона-Ватсона со средним числом прямых потомков равным $3/2 > 1$. Поэтому, с положительной вероятностью $\eta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и отсюда мы получаем, что $\mathrm{E}m = \infty$.

2.4.6. Доказательства Теорем 2.9 и 2.10

Доказательство Теоремы 2.9. Первым делом, сформулируем и докажем одну полезную лемму.

Лемма 2.4. *Два нижеперечисленных условия*

$$K_{\tilde{Q}} \cap (0, 1) \neq \emptyset \tag{75}$$

и

$$K_{\tilde{Q}} \cap [1, +\infty) \neq \emptyset, \tag{76}$$

не могут быть верны одновременно.

Доказательство. В самом деле, для $\lambda > 0$ мы имеем $h''_\xi(\lambda) > 0$, так что уравнение $h_\xi(\lambda) = 0$ не может иметь более двух решений, и следовательно, множество $K(\xi)$ является связным. Принимая во внимание Условие R, мы видим, что с положительной вероятностью $h_\xi(1) = 1 - 1/r > 0$, а значит (75) и (76) не могут выполняться одновременно. Лемма 2.4 доказана. $\square$

Докажем теперь Теорему 2.9. Пусть $\lambda_0 \in K_{\widetilde{Q}}$. Возьмем $f(x) = \lambda_0^x$. Нетрудно видеть, что (71) выполнено, и, применяя Теорему 2.8, мы заканчиваем доказательство Теоремы 2.9. $\square$

Доказательство Теоремы 2.10. Согласно Теореме 2.7, нам надо доказать несуществование положительной функции $f(x)$, удовлетворяющей (70). Нам потребуется

Лемма 2.5. *Если $K_{\widetilde{Q}} = \emptyset$, то тогда существуют $\delta > 0$, $\sigma > 0$, конечный набор множеств $G_i \subset M$, $i = 1, \ldots, n_0$, такие, что*

1) *Для всех $i = 1, \ldots, n_0$ мы имеем $\widetilde{Q}(G_i) \geq \sigma$.*

2) *Для любого $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+$ существует i, $1 \geq i \geq n_0$, такое, что для всех $\xi \in G_i$*

$$\frac{1}{p_1^\xi} h_\xi(\lambda_0) \geq \delta. \tag{77}$$

Мы будем обозначать это число i через $i(\lambda_0)$.

Доказательство. Пусть $\rho(\cdot,\cdot)$ — это стандартная Евклидова метрика в $\mathbf{R}^{2d+k+1}$. Для $y \in \mathbf{R}^{2d+k+1}$ обозначим $O_\varepsilon(y) = \{z : \rho(y,z) < \varepsilon\}$. Возьмем произвольные $\xi \in \operatorname{supp} \widetilde{Q}$ и $\delta_1 > 0$. Тогда существует $\lambda_1 > 0$ такое, что

$$\frac{1}{p_1^\xi} h_\xi(\lambda) \geq \delta_1 \tag{78}$$

для всех $\lambda > \lambda_1$.

Далее, очевидно, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{1}{p_1^{\xi'}} h_{\xi'}(\lambda) \geq \delta_1$$

для всех $\xi' \in O_\varepsilon(\xi) \cap M$ и $\lambda > \lambda_1$. Так как $\xi \in \operatorname{supp} \widetilde{Q}$, мы имеем $\widetilde{Q}(O_\varepsilon(\xi) \cap M) > 0$. Так что мы положим $G_1 = O_\varepsilon(\xi) \cap M$ и $\sigma_1 = \widetilde{Q}(G_1)$. Таким же способом можно доказать, что существует $\lambda_2 > 0$ и $G_2 \subset M$ такие, что (78) выполняется для всех $0 < \lambda < \lambda_2$ и для всех $\xi \in G_2$, и мы положим $\sigma_2 = \widetilde{Q}(G_2) > 0$. Пусть теперь $\lambda \in [\lambda_2, \lambda_1]$. Так как $K_{\widetilde{Q}} = \emptyset$, то существуют $\xi \in \operatorname{supp} \widetilde{Q}$ и $\delta_\lambda > 0$ такие, что

$$\frac{1}{p_1^\xi} h_\xi(\lambda) > \delta_\lambda.$$

Нетрудно проверить, что существуют два положительных числа ε и ε' такие, что

$$\frac{1}{p_1^{\xi'}} h_{\xi'}(\lambda') \geq \delta_\lambda$$

выполняется для всех $\lambda' \in I_\lambda = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ и для всех $\xi' \in G_\lambda = O_{\varepsilon'}(\xi) \cap M$. Набор интервалов $\{I_\lambda\}$ есть покрытие отрезка $[\lambda_2, \lambda_1]$; пусть $\{I_{\lambda_3}, \dots, I_{\lambda_{n_0}}\}$ — конечное подпокрытие. Для $i = 3, \dots, n_0$ положим $G_i = G_{\lambda_i}$. Пусть $\sigma_i = \widetilde{Q}(G_i)$. Мы положим $\sigma = \min_i \sigma_i$, $\delta = \min_i \delta_{\lambda_i}$. Лемма доказана. $\square$

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Поскольку (70) может быть теперь переписано в следующем виде:

$$p_{-1}(x) f(x-1) + p_0(x) f(x) + p_1(x) f(x+1) - \frac{f(x)}{r(x)} = 0, \qquad (79)$$

то функция $f(x)$ полностью определяется своими значениями в любых двух соседних точках $f(n)$ и $f(n+1)$.

Мы покажем, что существует такая “конфигурация” $(s_1, \dots, s_N)$, $s_i \in \{1, \dots, n_0\}$, что если $\xi_i \in G_{s_i}$, то для любых начальных условий $f(0)$ и $f(1)$ для решения (79) существует целое число $n_1 \leq N$, такое, что $f(n_1) < 0$. (Число n_0 и множества $G_i \subset M$ были введены в Лемме 2.5.) Заметим, что N не зависит от начальных условий $f(0)$ и $f(1)$, а n_1, разумеется, зависит.

Для того, чтобы продолжить доказательство, нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 2.6. *Пусть есть два решения уравнения (79): $f_1(x)$ и $f_2(x)$, такие, что $f_1(0) = f_2(0) > 0$ и $0 < f_1(1) < f_2(1)$. Положим*

$$\hat{x} = \max\{x : f_1(x') > 0 \text{ для всех } x' \leq x\}.$$

Тогда $f_1(x) < f_2(x)$ для всех $x \le \hat{x}$.

Доказательство. Положим $\lambda_n^{(1)} = f_1(n+1)/f_1(n)$ и $\lambda_n^{(2)} = f_2(n+1)/f_2(n)$ для $n = 0, \ldots, \hat{x}-1$. Для $i = 1, 2$ мы имеем

$$p_{-1}(n)\frac{f_i(n)}{\lambda_{n-1}^{(i)}} + p_0(n)f_i(n) + p_1(n)f_i(n+1) - \frac{f_i(n)}{r(n)} = 0,$$

или

$$h_{\xi_n}(\lambda_{n-1}^{(i)})f_i(n) - \lambda_{n-1}^{(i)}p_1(n)f_i(n) = -p_1(n)f_i(n+1),$$

так что

$$f_i(n+1) = \lambda_{n-1}^{(i)}f_i(n) - \frac{1}{p_1(n)}h_{\xi_n}(\lambda_{n-1}^{(i)})f_i(n).$$

Поскольку $\lambda_n^{(i)} = f_i(n+1)/f_i(n)$, то мы имеем

$$\lambda_n^{(i)} = \lambda_{n-1}^{(i)} - \frac{1}{p_1(n)}h_{\xi_n}(\lambda_{n-1}^{(i)}) \stackrel{\text{def}}{=} g(\lambda_{n-1}^{(i)}).$$

Можно явно проверить, что производная $g'(\lambda) > 0$, так что функция $g(\lambda)$ возрастает. Далее, поскольку $\lambda_0^{(1)} < \lambda_0^{(2)}$, мы получаем по индукции, что $\lambda_n^{(1)} < \lambda_n^{(2)}$ для всех n. Применяя этот факт, мы заканчиваем доказательство Леммы 2.6. $\square$

Продолжим доказывать Теорему 2.10. Во-первых, мы имеем

$$f(2) = \frac{1}{p_1(1)}\Big(-p_{-1}(1)f(0) - p_0(1)f(1) + \frac{f(1)}{r(1)}\Big) \le f(1)\frac{1}{r(1)p_1(1)}.$$

Нетрудно видеть, что существует такое $\lambda' > 0$, что

$$\widetilde{Q}\{\xi : (r^\xi p_1^\xi)^{-1} \le \lambda'\} \ge \sigma, \tag{80}$$

где σ было определено в Лемме 2.5.

Положим $G_0 = \{\xi : (r^\xi p_1^\xi)^{-1} \le \lambda'\}$ и $\lambda_1 = f(2)/f(1)$. Если $\xi_1 \in G_0$, то $\lambda_1 \le \lambda'$. Лемма 2.6 показывает, что достаточно построить такую конфигурацию $(s_1, \ldots, s_N)$, что решение уравнения (79) становится отрицательным не позднее, чем через N шагов, для $f(0)$, $f(1)$ таких, что $f(1)/f(0) = \lambda'$, и после этого взять конфигурацию $(0, s_1, \ldots, s_N)$.

Согласно Лемме 2.5, существует такое $s_1 = i(\lambda')$, что

$$\frac{1}{p_1^\xi}h_\xi(\lambda') \ge \delta$$

для всех $\xi \in G_{s_1}$. Положим $\lambda_1 = f(2)/f(1)$. Предполагая, что $\xi_1 \in G_i$, нетрудно получить (как в доказательстве Леммы 2.6), что

$$\lambda_1 = \lambda' - \frac{1}{p_1(1)} h_{\xi_1}(\lambda') \le \lambda' - \delta.$$

Далее, мы продолжаем этот процесс, выбирая $s_2 = i(\lambda_1)$, $\xi_2 \in G_{s_2}$, и т.д. Мы получим следующий факт: если $\lambda_j > 0$, то $\lambda_{j+1} \le \lambda_j - \delta$. Поэтому очевидно, что функция $f(x) = f(0)\lambda'\lambda_1 \dots \lambda_{x-1}$ станет отрицательной не позднее, чем через N шагов, где $N = [\lambda'/\delta] + 1$. Итак, мы построили конфигурацию $(s_0, s_1, \dots, s_N)$, $s_i \in \{1, \dots, n_0\}$, $s_0 = 0$, такую, что если $\xi_i \in G_{s_i}$, то решение уравнения (79) станет отрицательным не позднее, чем через N шагов. Поскольку все случайные величины ξ_i независимы, и $\widetilde{Q}(G_i) \ge \sigma > 0$, то для почти всех ω существует такое $j = j(\omega)$, что $\xi_{i+j} \in G_{s_i}$ for $i = 0, \dots, N$. Следовательно, положительная функция, удовлетворяющая (70) не может существовать для почти всех ω. Теорема 2.10 доказана. □

Замечание. Конечную последовательность $\{u_i\}_{i=1,\dots,l_0}$, $u_i \in M$ мы назовем *барьером*, если из $\xi_{j+i} = u_i$, $i = 1, \dots, l_0$ для некоторого j, следует, что $\mathrm{E}m = \infty$ (среда во всех других точках может быть любой, при условии, разумеется, что соответствующая цепь Маркова неприводима). Фактически, мы только что доказали, что если $u_i \in s_i$, $i = 0, \dots, n_0$, то $\{u_i\}_{i=0,\dots,n_0}$ — барьер. Можно заметить, что множества V_i из доказательства Теоремы 2.11 тоже являются барьерами в этом смысле.

2.5. Многомерные с.б.в. в случайной среде

2.5.1. Формулировка задачи

Рассматривается случайное блуждание с ветвлением (с.б.в.) в $\mathbf{Z}^d$, $d \ge 3$. (Определение и классификацию см. выше.) Соответствующая цепь Маркова есть простое случайное блуждание (с.б.) в $\mathbf{Z}^d$, и ветвление описывается следующим образом. Пусть у нас есть положительная функция $p(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$ такая, что $0 < p(x) < 1$ для всех x. Первоначально, с вероятностью $p(x)$ точка x становится особой (мы будем называть особые точки “зелеными”), и не изменяет свой статус в будущем. (Это называется *замороженной* задачей.) Частица может генерировать своих потомков только в зеленых точках. Вероятность, с которой частица порождает непосредственно в k потомков, обозначена r_k, она предполагается равной для всех зеленых точек. Обозначим $r = \sum_i ir_i$, и допустим, что $r_0 = 0$ и $1 < r < \infty$.

2.5.2. Классификация и основные результаты

Чтобы классифицировать с.б.в., мы используем метод, разработанный выше. Поскольку исходная цепь Маркова транзиентна, с.б.в. не может быть сильно возвратным. Так что мы главным образом заинтересованы в вопросе, будет ли с.б.в. возвратным, или транзиентным. Также заметим, что в этой статье мы изучим только случай радиально симметричной функции $p(x)$, то есть $p(x) = p(\|x\|)$. Обозначим через $g(x, y)$ функцию Грина для простого случайного блуждания, т.е.

$$g(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi_k = y \mid \xi_0 = x\},$$

где ξ_k — это простое случайное блуждание в $\mathbf{Z}^d$. Наш первый результат — это следующая

Теорема 2.12. *Предположим, что*

$$r > (1 - \frac{1}{g(0,0)})^{-1}. \tag{81}$$

В этом случае с.б.в. возвратно тогда и только тогда, когда оно почти наверное попадает в по крайней мере одну зеленую точку (то есть, зеленые точки — это массивное множество*). Заметим, что зеленые точки — массивное множество тогда и только тогда, когда*

$$\int_1^{\infty} up(u)du = \infty \tag{82}$$

(см. [20]). Другими словами, наша задача сводится к задаче с ловушками, которая была изучена в [20].

Допустим теперь, что

$$r < (1 - \frac{1}{g(0,0)})^{-1}. \tag{83}$$

Мы собираемся показать, что критический случай имеет место, когда $p(x) \simeq \alpha/\|x\|^2$.

Теорема 2.13. *Для любого $r > 1$ существует $\alpha = \alpha(r)$ такое, что если для всех достаточно больших x мы имеем $p(x) \geq \alpha/\|x\|^2$, то с.б.в. возвратно.*

Теорема 2.14. *Пусть $d = 3$ и*

$$r < (1 - \frac{1}{g(0,0)})^{-1}.$$

Тогда существует $\alpha' = \alpha'(r)$ такое, что если для всех достаточно больших x мы имеем $p(x) \leq \alpha'/\|x\|^2$, то с.б.в. транзиентно.

Замечание. Очень интересен тот факт, что (81) и (83) влекут за собой различное критическое поведение функции $p(x)$.

2.5.3. Обобщенные случайные блуждания с ветвлением

Здесь мы рассмотрим модель, которая является естественным обобщением понятия случайного блуждания с ветвлением. Результаты этой главы будут использоваться в доказательстве Теоремы 2.14.

Пусть $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Зафиксируем некоторое целое число $d \geq 1$. Пусть для всех $x \in X \setminus \{0\}$ мы имеем набор чисел $p_l(x)$, где $l = (l_{-d}, \ldots, l_d) \in \mathbf{Z}^{2d+1}$ — мультииндекс длины $2d + 1$, со следующими свойствами:

1) $p_l(x) = 0$ для $l = (0, \ldots, 0)$;

2) $\sum_l p_l(x) = 1$;

3) если $x < d$, то $p_l(x) = 0$ всякий раз, когда по крайней мере один из индексов $l_{-d}, \ldots, l_{-d+x-1}$ не равен 0.

Мы описываем обобщенное с.б.в. следующим образом. Первоначально есть только одна частица, которая расположена в некоторой точке $x_0 \neq 0$. Если в момент времени t есть частица в x, тогда в момент времени $t + 1$ мы заменяем эту частицу на l_{-d} частиц в

$x-d$, l_{-d+1} частиц в $x-d+1$, ..., l_d частиц в $x+d$ с вероятностью $p_l(x)$. Затем мы повторяем эту процедуру с всеми этими независимыми потомками, и т.д. Точка 0 — поглощающее состояние, т.е. $p_l(0) = 1$ для $l_0 = 1$, $l_i = 0$, $i \neq 0$. Это означает, что любая частица, зашедшая в 0, не порождает никаких потомков и остается в 0 навсегда. Несомненно, этот процесс является цепью Маркова со счетным пространством состояний

$$X' = X \cup X^2 \cup X^3 \cup \ldots$$

Состояние процесса в момент времени t — это набор координат $\tilde{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N(t)}(t)\}$, где $x_i(t)$ — позиция i-й частицы, при условии, что мы имеем всего $N(t)$ частиц в момент времени t.

Для того, чтобы классифицировать обобщенные с.б.в., мы используем метод, аналогичный примененному выше, но сначала нам нужно понятие неприводимости для процессов такого типа.

Для $x \in X$ определим множество

$$L(x) = \{y \in X : \exists l \text{ такое, что } p_l(x) > 0 \text{ и } l_{y-x} > 0\}.$$

Для $x, y \in X$ мы пишем, что $x \rightsquigarrow y$, если существует конечная последовательность $x_1, \ldots, x_k$, такая, что $x_1 \in L(x)$, $x_i \in L(x_{i-1})$ для $i = 2, \ldots, k$, и $y \in L(x_k)$.

Определение 2.2. *Мы говорим, что обобщенное с.б.в. является неприводимым, если для всех $x, y \neq 0$ мы имеем $x \rightsquigarrow y$ и $y \rightsquigarrow x$.*

Допустим, что обобщенное с.б.в. неприводимо. Определим случайную величину $\nu_t(x)$ как число частиц в точке x в момент времени t. Поскольку $\nu_t(0)$ увеличивается при $t \to \infty$ для всех реализаций процесса, мы видим, что существует (возможно бесконечная) случайная величина

$$\nu = \lim_{t \to \infty} \nu_t(0).$$

Определение 2.3. *Мы говорим, что обобщенное с.б.в. —*

- *возвратно, если* $\mathrm{P}\{\nu > 0\} = 1$*;*
- *сильно возвратно, если оно возвратно и* $\mathrm{E}\nu < \infty$*;*

- *транзиентно, если* $\mathrm{P}\{\nu > 0\} < 1$*;*

- *сильно транзиентно, если* $\mathrm{P}\{\nu > 0\} < 1$ *и* $\mathrm{E}\nu < \infty$.

Несомненно, положение x_0 начальной частицы несущественно для этого определения.

Пусть для $-d \leq i \leq d$

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{l: l_i = j} p_l(x)$$

— среднее число потомков, сгенерированных из x в точке $x + i$. В пределах этого раздела мы предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие X. Для всех x и i мы имеем $r_i(x) < \infty$.

Основной результат этого раздела — это следующая

Теорема 2.15. *Для того, чтобы* $\mathrm{E}\nu$ *было конечным, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная функция* $f(x)$, $x \in X$*, такая, что для всех* $x \neq 0$

$$\sum_{i=-d}^{d} r_i f(x+i) - f(x) \leq 0. \tag{84}$$

Кроме того, если $f(x) \to 0$*, то тогда обобщенное с.б.в. сильно транзиентно. Если* $f(x) \to \infty$*, то тогда обобщенное с.б.в. сильно возвратно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы представляет собой очевидную адаптацию доказательства Теорем 2.7 и 2.8. Детали опущены. $\square$

Мы также докажем один простой результат, который будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 2.7. *Пусть у нас есть пространственно однородное обобщенное с.б.в. так что* $r_i \neq 0$ *только для* $i = \pm 1$ *(это означает, что все потомки, сгенерированные из* x*, расположены в* $x - 1$ *и в* $x + 1$*). Тогда для любого* $H > 1$ *существует* $h > 0$*, такое, что если* $r_1 \leq H$ *и* $r_2 < h$*, тогда обобщенное с.б.в. сильно транзиентно.*

Доказательство. Возьмем $f(x) = \lambda^x$, где λ — минимальный положительный корень уравнения

$$h - \lambda + H\lambda^2 = 0.$$

Элементарные вычисления показывают, что для любого $H > 1$ существует $h > 0$ такое, что это уравнение имеет действительные корни, и минимальный из них меньше 1. Поэтому лемма следует из Теоремы 2.15. □

Эта модель заслуживает гораздо более подробного рассмотрения, но в этой работе мы доказали только результаты, которые необходимы для доказательства Теоремы 2.14.

2.5.4. Доказательство Теорем 2.12, 2.13, и 2.14

Доказательство Теоремы 2.12. Заметим, что если с положительной вероятностью одна частица не попадает в зеленое множество, то с.б.в. не может быть возвратным. Таким образом, мы должны доказать возвратность при условии, что одна частица почти наверное попадает в зеленое множество, и (81) выполнено.

Для простого случайного блуждания ξ_t в $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 3$,

$$\mathrm{P}\{\xi_t = 0 \text{ для по крайней мере одного } t \geq 1 \mid \xi_0 = 0\} = 1 - \frac{1}{g(0,0)}.$$

Давайте присвоим индекс 0 начальной частице. Пусть x_1 — это первая зеленая точка, где эта частица сгенерировала по крайней мере одного потомка, x_2 — вторая такая точка, при условии $x_2 \neq x_1$, и т.д. Поскольку множество всех зеленых точек массивно, и вероятности r_k одни и те же для всех зеленых точек, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ п.н. бесконечна. Присвоим индекс i всем частицам, который были сгенерированы начальной частицой в точке x_i. Тогда мы позволяем частицам с индексом i генерировать своих потомков *только* в точке x_i, эти потомки также будут иметь индекс i. Несомненно, этот процесс — менее возвратный, чем начальное с.б.в. Давайте докажем, что он возвратен. Частица с индексом i уходит из точки x_i навсегда с вероятностью $g^{-1}(0,0)$, и возвращается в x_i и порождает k потомков с вероятностью $r_k(1 - g^{-1}(0,0))$. Следовательно, у нас есть процесс Гальтона-Ватсона в x_i со средним числом прямых потомков равным

$$r(1 - \frac{1}{g(0,0)}) > 1.$$

Так как все эти процессы независимы, то с вероятностью 1 один из них никогда не остановится. Следовательно, по крайней мере одна точка посещается бесконечно часто, и, пользуясь неприводимостью, мы завершаем доказательство Теоремы 2.12. □

Для того, чтобы доказать Теоремы 2.13 и 2.14, нам нужен один несложный результат о простом случайном блуждании в $\mathbf{Z}^d$. Пусть ξ_t — это с.б. в $\mathbf{Z}^d$, $x \in \mathbf{Z}^d$ и $B \subset \mathbf{Z}^d$. Обозначим

$$p_B(x) = \mathrm{P}\{\xi_t \in B \text{ для по крайней мере одного } t \geq 1 \mid \xi_0 = x\}.$$

Лемма 2.8. *Для любого $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ существует $h = h(\varepsilon) < 1$ и $h_1 = h_1(\varepsilon_1) < 1$ такие, что для всех достаточно больших y два следующих неравенства верны*

$$P_{S(hy)}(x) > 1 - \varepsilon, \tag{85}$$

$$P_{S(h_1 y)}(x) < \varepsilon_1, \tag{86}$$

для всех $x \in S(y)$, где

$$S(y) = \{x \in \mathbf{Z}^d : y < \|x\| \leq y + 1\}.$$

Доказательство. Обозначим $Z_t = \|\xi_t\|$. Легко может быть показано, что

$$\mathrm{E}(Z_{t+1} - Z_t \mid \xi_t = x) = \frac{d-1}{\|x\|} + O(\|x\|^{-2}), \tag{87}$$

и

$$\frac{1}{d} \leq \mathrm{E}((Z_{t+1} - Z_t)^2 \mid \xi_t = x) \leq 1. \tag{88}$$

Давайте покажем, что существуют некоторые y_0 и $s > 0$, такие, что Z_t^{-s} — это супермартингал на $\{y \geq y_0\}$, т.е. для $y \geq y_0$, мы имеем

$$\mathrm{E}(Z_{t+1}^{-s} - Z_t^{-s} \mid Z_t = y) \leq 0. \tag{89}$$

В самом деле, обозначая $\Delta_t = Z_{t+1} - Z_t$ и используя (87), (88) и формулу Тейлора, мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_{t+1}^{-s} - Z_t^{-s} \mid Z_t = y) &= y^{-s}\mathrm{E}((1+\frac{\Delta_t}{Z_t})^{-s} - 1 \mid Z_t = y) \\
&\le y^{-s}\mathrm{E}(1 - \frac{s\Delta_t}{Z_t} + \frac{s(s+1)}{2}\frac{\Delta_t^2}{Z_t^2} \mid Z_t = y) + O(y^{-s-3}) \\
&= -s(d-1)y^{-s-2} + \frac{s(s+1)}{2}y^{-s-2} + O(y^{-s-3}) \le 0
\end{aligned}$$

если $s < 2d - 3$ для всех $y \ge y_0$, для некоторого достаточно большого y_0.

Для $h < 1$ обозначим $\tau_h = \min\{t > 0 : Z_t \le hy \mid Z_0 = y\}$. Очевидно, что если $\|x\| = y$, то тогда $P_{S(hy)}(x) = \mathrm{P}\{\tau_h < \infty\}$. Возьмем некоторое $H > 1$ и обозначим $\tau_H = \min\{t > 0 : Z_t \ge Hy \mid Z_0 = y\}$, $\tau = \min\{\tau_h, \tau_H\}$. Легко видеть, что $\mathrm{E}\tau < \infty$ и что

$$p(H) := \mathrm{P}\{\tau_h < \tau_H\} \to \mathrm{P}\{\tau_h < \infty\} \qquad (90)$$

при $H \to \infty$. Используя (89), имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}Z_\tau^{-s} &= p(H)(hy)^{-s} + (1 - p(H))(Hy)^{-s} \\
&= (Hy)^{-s} + p(H)((hy)^{-s} - (Hy)^{-s}) \\
&\le \mathrm{E}Z_0^{-s} = y^{-s},
\end{aligned}$$

так что

$$p(H) \le \frac{y^{-s} - (Hy)^{-s}}{(hy)^{-s} - (Hy)^{-s}} = \frac{1 - H^{-s}}{h^{-s} - H^{-s}} \to h^s$$

при $H \to \infty$. Следовательно,

$$\mathrm{P}\{\tau_h < \infty\} \le h^s,$$

и мы доказываем (86), выбирая h достаточно малым.

Давайте теперь докажем (85). Как и выше, можно показать, что существуют некоторые y_1 и $s_1 > 0$, такие, что $Z_t^{-s_1}$ — субмартингал на $\{y \ge y_1\}$, то есть для $y \ge y_1$, мы имеем

$$\mathrm{E}(Z_{t+1}^{-s_1} - Z_t^{-s_1} \mid Z_t = y) \ge 0. \qquad (91)$$

Используя те же аргументы, как и выше, можно доказать что

$$\mathrm{P}\{\tau_{h_1} < \infty\} \ge h_1^{s_1},$$

и (85) может быть доказано посредством выбора h_1 достаточно близким к 1. □

Доказательство Теоремы 2.13. Мы докажем эту теорему только для случая $d = 3$. Обобщение на случай $\mathbf{Z}^d$ достаточно просто. Обозначим через G множество всех зеленых точек. Нам нужно следующее

Предложение 2.6. *Пусть существуют $\varepsilon > 0$ и бесконечная последовательность конечных множеств $B_1, B_2, \ldots$, таких, что $B_i \subset G$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $i \neq j$, с следующим свойством:*

$$\text{для всех } x \in B_i \qquad p_{B_i}(x) > \frac{1}{r} + \varepsilon. \tag{92}$$

Допустим также, что множество $\cup_i B_i$ — массивно, то есть одна частица попадает в него с вероятностью 1. *Тогда с.б.в. возвратно.*

Доказательство. Доказательство этого предложения аналогично доказательству Теоремы 2.12. Нетрудно видеть, что если $\cup_i B_i$ — массивно, то тогда с вероятностью 1 *одна* частица попадает бесконечное количество раз в множество B_i. Тогда вместо точки x_1 мы берем некоторые множества B_{i_1}, взамен точки x_2 мы берем B_{i_2} и т.д. Детали опущены. □

Давайте продолжим доказывать Теорему 2.13. Обозначим

$$W_n = \{x \in \mathbf{Z}^3 : 2^n < \|x\| \leq 2^{n+1}\}$$

и пусть $B_n = W_n \cap G$. Мы докажем, что для достаточно большого α только для конечного числа множеств B_n может нарушаться условие (92).

Рассмотрим множество W_n и обозначим для краткости $m = 2^{n+1}$. Для $\beta \in (1/2, 1)$ пусть

$$V_n^\beta = \{x \in \mathbf{Z}^3 : \beta m - 1 \leq x \leq \beta m\}$$

— это "сфера" радиуса βm. Из Леммы 2.8 следует, что для любого $\delta > 0$ мы можем выбрать $\beta \in (1/2, 1)$ такое, что для всех достаточно больших n и для всех $x \in W_n$ мы имеем $p_{V_n^\beta}(x) > 1 - \delta$. Так что достаточно показать, что для любого $\delta > 0$ существует α такое, что для всех достаточно больших n выполнен следующий факт: если $y \in V_n^\beta$, то

$$p_{B_n}(y) > 1 - \delta. \tag{93}$$

Чтобы сделать это, нам нужна одна вспомогательная лемма. Для $x \in \mathbf{Z}^3$ и конечного множества $B \in \mathbf{Z}^3$ обозначим

$$M_B(x) = \sum_{y \in B} g(x, y).$$

Лемма 2.9. *Если $x \in B$, то следующее неравенство выполнено:*

$$p_B(x) \geq (M_B(x) - 1)(\max_{y \in B} M_B(y))^{-1}. \tag{94}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$M_B(x) = \mathrm{E}\{\# t : \xi_t \in B \mid \xi_0 = x\}.$$

Поэтому, обозначая $\tau_B = \min\{t \geq 1 : \xi_t \in B\}$, мы имеем

$$M_B(x) - 1 = \sum_{y \in B} \mathrm{P}\{\tau_B < \infty, \xi_{\tau_B} = y\} M_B(y) \leq p_B(x) \max_{y \in B} M_B(y).$$

Следовательно, (94) выполнено, и Лемма 2.9 доказана. □

Мы продолжаем доказывать Теорему 2.13. Сначала заметим, что если $B' \subset B$, то $p_{B'}(x) \leq p_B(x)$. Обозначим

$$U_n^\beta = \{x \in \mathbf{Z}^3 : \|x - y\| \leq m(1 - \beta)\},$$

и $B_n'(y) = B_n \cap U_n^\beta$. Для некоторого $\gamma > 0$ (которое будет выбрано позже) мы рассмотрим разбиение $\mathbf{Z}^3$ кубами

$$\begin{aligned} K_{ijk} \; = \; & \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3 : (i-1)\gamma m^{2/3} \leq x_1 < i\gamma m^{2/3}, \\ & (j-1)\gamma m^{2/3} \leq x_2 < j\gamma m^{2/3}, (k-1)\gamma m^{2/3} \leq x_3 < k\gamma m^{2/3}\}. \end{aligned} \tag{95}$$

Рассмотрим теперь кубы K_{ijk}, которые полностью лежат в шаре $U_n^\beta(y)$. Число $l(\gamma, \beta)$ их равняется $\frac{4\pi}{3}\frac{1-\beta}{\gamma^3}m + o(m)$. Обозначим эти кубы $K'_1,\dots,K'_{l(\gamma,\beta)}$. Пусть ν_i будет количество зеленых точек, которые лежат внутри куба K'_i. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\nu_i>0\} &= 1-\prod_{x\in K'_i}(1-\frac{\alpha}{\|x\|^2}) \\ &\ge 1-(1-\frac{\alpha}{m^2(1-2\beta)^2})^{\gamma^3m^2} \\ &\simeq 1-\exp\{-\frac{\gamma^3\alpha}{(1-2\beta)^2}\}. \end{aligned}\qquad (96)$$

Мы строим множество $B''_n(y)\subset B'_n(y)$ следующим образом. Если для $1\le i\le l(\gamma,\beta)$ куб K'_i содержит по крайней мере одну зеленую точку x'_i, то тогда мы полагаем $B''_n(y)\cap K'_i=\{x'_i\}$. Таким образом,

$$B''_n(y)=\bigcup_{i:\nu_i>0}\{x'_i\},$$

то есть мы просто удаляем некоторые точки из множества $B'_n(y)$ таким способом, что каждый куб K'_i содержит теперь 0 или 1 зеленую точку. Заметим, что из (96) и леммы Бореля-Кантелли следует, что для любого $\varepsilon>0$ доля кубов, содержащих по крайней мере одну зеленую точку больше чем

$$\theta\stackrel{def}{=}1-\exp\{-\frac{\gamma^3\alpha}{(1-2\beta)^2}\}-\varepsilon \qquad (97)$$

для любого $B'_n(y)$ для всех достаточно больших n.

Известно (см. [2]), что в трехмерном пространстве $g(x,y)\simeq\frac{C_3}{\|x-y\|}$ при $\|x-y\|\to\infty$. Поскольку в множестве $B''_n(y)$ зеленые точки достаточно далеки друг от друга, для краткости мы примем для наших вычислений, что $g(x,y)=\frac{C_3}{\|x-y\|}$.

Легко видеть, что поскольку каждый куб K'_i содержит не более чем одну зеленую точку, для достаточно малого γ и для всех достаточно больших n мы имеем

$$M_{B''_n(y)}(x)\le\frac{1}{\gamma^3m^2}\int\limits_{\|z\|\le m(1-\beta)}\frac{C_3}{\|z-(x-y)\|}dz.$$

Очевидно, эта величина максимальна, когда $x=y$. Поэтому

$$\max_x M_{B''_n(y)}(x)\le\frac{1}{\gamma^3m^2}\int\limits_{\|z\|\le m(1-\beta)}\frac{C_3}{\|z\|}dz=\frac{2\pi C_3(1-\beta)^2}{\gamma^3}. \qquad (98)$$

Давайте получим оценку снизу для $M_{B''_n(y)}(y)$. Самый неблагоприятный случай — когда все кубы K'_i, где нет зеленых точек (то есть $\nu_i = 0$), группируются вокруг точки y. Поскольку доля таких кубов меньше, чем θ, мы можем допустить, что они полностью лежат в шаре с центром в y и радиусом $\theta^{1/3}m(1-\beta)$. Таким образом (для достаточно малого γ)

$$\begin{aligned} M_{B''_n(y)}(y) &\geq \frac{1}{\gamma^3 m^2} \int\limits_{\theta^{1/3}m(1-\beta)\leq\|z\|\leq m(1-\beta)} \frac{C_3}{\|z\|} dz \\ &= \frac{2\pi C_3}{\gamma^3}(1-\beta)^2(1-\theta^{2/3}), \end{aligned}$$

так что, используя Лемму 2.9 и (98), мы получаем

$$P_{B''_n(y)}(y) \geq 1 - \theta^{2/3} - \frac{\gamma^3}{2\pi C_3(1-\beta)^2}.$$

Нетрудно видеть из (97), что для фиксированного β всегда возможно выбрать α и γ так, чтобы $P_{B''_n(y)}(y)$ стало произвольно близко к 1. Поэтому (93) доказано и доказательство Теоремы 2.13 завершено. □

Доказательство Теоремы 2.14. Пусть L — некоторое положительное число (которое будет определено позже), и обозначим

$$W_n = \{x \in \mathbf{Z}^3 : L^n < \|x\| \leq L^{n+1}\},$$

и пусть $B_n = W_n \cap G$, как и в доказательстве Теоремы 2.13. Обозначим также $m = L^{n+1}$. Ключевую роль в нашем доказательстве играет следующая лемма.

Лемма 2.10. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое, что если $p(x) \leq \alpha/\|x\|^2$, то для почти всех n мы имеем:*

1) для всех $x \in B_n$

$$P_{B_n}(x) \leq (1 - \frac{1}{g(0,0)})^{-1} + \varepsilon; \tag{99}$$

2) для любого фиксированного $\delta > 0$, если $x \notin B_n$ и не существует такого $y \in B_n$, что $\|x-y\| \leq m^\delta$

$$P_{B_n}(x) \leq \varepsilon; \tag{100}$$

Доказательство. Чтобы доказать эту лемму, мы используем те же идеи, как и в доказательстве Теоремы 2.13. Пусть K_{ijk} — кубы, определенные посредством (95), и пусть $K'_1, \ldots, K'_{l(\gamma)}$ — кубы, которые имеют непустое пересечение с W_n. Как и выше, обозначим через ν_j количество зеленых точек в кубе K'_j. Можно заметить, что ν_j может быть ограничено сверху пуассоновской случайной величиной, т.е.

$$\mathbf{P}\{\nu_j = i\} < \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

для некоторого λ такого, что $\lambda \to 0$, когда γ фиксировано и $\alpha \to 0$. Пусть

$$\theta_i = \frac{1}{l(\gamma)} \sum_{k=1}^{l(\gamma)} \mathbf{1}_{\{\nu_k = i\}}$$

— это доля кубов, имеющих в точности i зеленых точек внутри. Возьмем некоторое $x \in B_n$ и попытаемся ограничить сверху величину $M_{B_n}(x)$. Имеем

$$M_{B_n}(x) = g(0,0) + \sum_{i=1}^{\infty} D_i,$$

где

$$D_i = \sum_{\substack{y \in K'_j: \\ \nu_j = i}} g(x,y).$$

Во-первых, заметим, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что не существует таких $x, y \in B_n$, что $\|x - y\| < m^{\varepsilon_1}$ (это легко следует из леммы Бореля-Кантелли). Из леммы Бореля-Кантелли следует, что для любого $\varepsilon > 0$ мы имеем $\theta_{m^\varepsilon} = 0$ (для всех достаточно больших m). Используя это, мы видим, что мы можем пренебречь всеми зелеными точками, которые находятся в одном и том же кубе с точкой x.

Давайте оценим D_i. Самый неблагоприятный случай — когда все кубы K'_j с $\nu_j = i$ группируются вокруг точки x. Обозначая

$$\rho = (3/4\pi)^{1/3} \gamma m \theta_i^{1/3},$$

нетрудно видеть, что

$$D_i \le C_1 \frac{i}{\gamma^3 m^2} \int\limits_{\|z\| \le \rho} \frac{dz}{\|z\|} \le C_2 i \theta_i^{2/3}.$$

Таким образом, мы должны оценить величину

$$\psi_m = \sum_{i=1}^{\infty} i\theta_i^{2/3}.$$

Обозначим

$$p_i(v) = \mathbf{P}\{i\theta_i^{2/3} > \frac{v}{i^2}\}.$$

Чтобы получить оценку для $p_i(v)$, нам нужна следующая лемма.

Лемма 2.11. *Пусть ξ_i — н.о.р. случайные величины,* $\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = p$ *и* $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - p$. *Тогда для любого n и для любого $a > p$*

$$\mathbf{P}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq a\} \leq \exp\{-nH(a,p)\}, \tag{101}$$

где

$$H(a,p) = \log\frac{a}{p} + (1-a)\log\frac{1-a}{1-p}.$$

Доказательство. См. [9], Гл.I, §6. □

Оценим $p_i(v)$. Используя Лемму 2.11, мы имеем

$$\begin{aligned} p_i(v) &= \mathbf{P}\{i\theta_i^{2/3} > \frac{v}{i^2}\} = \mathbf{P}\{\theta_i > \frac{v^{3/2}}{i^{9/2}}\} \\ &= \mathbf{P}\{\frac{1}{l(\gamma)}\sum_{k=1}^{l(\gamma)}\mathbf{1}_{\{\nu_k=i\}} > \frac{v^{3/2}}{i^{9/2}}\} \\ &\leq \exp\{-l(\gamma)H(\frac{v^{3/2}}{i^{9/2}}, \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!})\}. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что:

1) $l(\gamma) = C_4 m$ для некоторого C_4;

2) так как $\lambda \to 0$ при $\alpha \to 0$, для любого v мы можем выбрать α достаточно малым так, чтобы неравенство $\frac{v^{3/2}}{i^{9/2}} > \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ выполнялось для всех i;

3) элементарные вычисления показывают, что $H(\frac{v^{3/2}}{i^{9/2}}, \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}) \simeq C_5 i^{-7/2}$.

Вспоминая теперь, что мы можем принять $i \le m^{\varepsilon}$, имеем

$$p_i(v) \le \exp\{-m^{1-\varepsilon_1}\}, \tag{102}$$

для некоторого $0 < \varepsilon_1 < 1$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{i\theta_i^{2/3} > \frac{v}{i^2} \text{ для хотя бы одного } i \in [0, m^{\varepsilon}]\} < m^{\varepsilon} \exp\{-m^{1-\varepsilon_1}\}.$$

Используя лемму Бореля-Кантелли, нетрудно видеть, что почти наверное для всех достаточно больших m мы имеем $i\theta_i^{2/3} \le \frac{v}{i^2}$, так что

$$\psi_m \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v}{i^2} = \frac{\pi^2 v}{6}$$

для всех достаточно больших m. Выбирая v достаточно малым, мы завершаем доказательство Леммы 2.10 $\square$

Продолжим доказательство Теоремы 2.14. Обозначим $V_n = \{x \in \mathbf{Z}^3 : L^n \le x < L^n + 1\}$. Возьмем некоторое $x \in V_n$. Пусть в момент времени 0 у нас есть одна частица в x и нет никаких других частиц в других точках. Введем *задержанное* с.б.в. следующим образом. В моменты $1, 2, \ldots, \tau$ (где момент остановки τ будет определен позже) множество $V_{n-1} \cup V_{n+1}$ становится *поглощающим* (или *задерживающим*), т.е. все частицы, входящие в множество $V_{n-1} \cup V_{n+1}$ становятся "замороженными" вплоть до момента τ. Мы определим τ как первый момент, когда нет ни одной частицы в множестве $W_n \cup W_{n-1} \setminus V_{n-1}$. Позже мы докажем, что для любого L существует достаточно малое α такое, что $\tau < \infty$ п.н. Далее, мы независимо повторяем эту процедуру с всеми потомками начальной частицы. Легко видеть, что если $\tau < \infty$ п.н., то задержанное с.б.в. эквивалентно начальному с.б.в. с точки зрения транзиентности и возвратности.

Докажем, что $\tau < \infty$ п.н. Обозначим $B'_n = B_{n-1} \cup B_n$. Используя Лемму 2.10, мы видим, что можно выбрать α' достаточно малым, так, что для всех достаточно больших n мы имеем $r < 1/P_{B'_n}(x)$ для любого $x \in B'_n$. На множестве $\{\tau = \infty\}$ частица не возвращается в множество $W_{n-1} \cup W_n \setminus V_n$ после захода на "границу" $V_{n-1} \cup V_n$. Но вероятность события $\{\tau < \infty\}$ больше или равна вероятности вырождения процесса Гальтона-Ватсона со средним числом прямых потомков равным

$$\max_{x \in B'_n} r P_{B'_n}(x).$$

Но поскольку $rP_{B'_n}(x) < 1$ для всех $x \in B'_n$, мы имеем $\tau < \infty$ п.н.

Обозначим через $\eta_0^{(n)}(x)$ число частиц, которые были порождены в шаре с центром в x и радиусом m^δ, и через $\eta_1^{(n)}(x)$ число частиц, которые были порождены за пределами этого шара. Обозначим

$$h_n^0(k) = \max_{x \in V_n} \mathrm{P}\{\eta_0^{(n)}(x) \geq k\} \tag{103}$$

и

$$h_n^+(k) = \max_{x \in V_n} \mathrm{P}\{\eta_+^{(n)}(x) \geq k\}. \tag{104}$$

Обозначим также $v = \max_{x \in V_n} P_{V_{n-1}}(x)$. Тогда задержанное с.б.в. может быть стохастически минорировано одномерным обобщенным с.б.в., описанным следующим образом. Если была одна частица в n, то мы сначала генерируем ζ_0^n частиц в точке n, где случайная величина ζ_0^n распределена в соответствии с (103). Потом эти потомки независимо перескакивают в точку $n-1$ с вероятностью v, и в точку $n+1$ с вероятностью $1-v$. Потом мы добавляем ζ_1^n частиц в точку $n-1$, где случайная величина ζ_1^n распределена в соответствии с (104). Из Леммы 2.8 следует, что соответствующим выбором L мы можем сделать v сколь угодно малым. Лемма 2.10 влечет, что для этого L и для любого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать α' достаточно малым так, чтобы $\mathrm{E}\zeta_1^n < \varepsilon$ для всех n. Следовательно, если мы рассматриваем величины $r_{\pm 1}$ для обобщенного с.б.в., выбирая L и α' соответствующим образом, мы обеспечиваем, что r_{-1} достаточно мало, в то время, как r_1 зафиксировано. Применяя Лемму 2.7, мы завершаем доказательство Теоремы 2.14. $\square$

Литература

[1] А.С. Гайрат, В.А. Малышев, М.В. Меньшиков и К.Д. Пелих. Классификация Марковских цепей, описывающих эволюцию случайных струн. // *Успехи Мат. Наук* **50** N. 2 (302), 5–24 (1995).

[2] Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич *Теоремы и Задачи о Цепях Маркова.* // М., Наука, (1967).

[3] Дж. Кемени, Дж. Снелл и А. Кнепп. *Счетные Цепи Маркова.* // М., Наука (1987).

[4] М.В. Козлов. Блуждание в одномерной случайной среде. // *Теория Вероятн. и Примен.* **18**, 406–407 (1973).

[5] М.В. Меньшиков, И.М. Эйсымонт и Р. Ясногородский. Марковские процессы с почти нулевым сносом. // *Проблемы Передачи Инф.* **31**, 60–75 (1995).

[6] И.В. Оселедец. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем. // *Труды ММО* **19**, 113–178 (1968).

[7] Б. Рогозин. Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления. // *Теория Вероятн. и Примен.* **18**, (4), 703–717 (1973).

[8] Я.Г. Синай. Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде. // *Теория Вероятн. и Примен.* **27**, 247–258 (1982).

[9] А.Н. Ширяев. *Вероятность.* // М., Наука, (1989).

[10] S. Aspandiiarov and R. Iasnogorodski. Tails of passage-times and an application to stochastic processes with boundary reflection in wedges. // Prépublication 251, Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris (1994).

[11] S. Aspandiiarov and R. Iasnogorodski. General criteria of integrability of functions of passage-times for non-negative stochastic processes and their applications. // Prépublication 258, Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris (1994).

[12] S. Aspandiiarov, R. Iasnogorodski and M.V. Menshikov. Passage-time moments for non-negative stochastic processes and an application to reflected random walk in a quadrant. // *Ann. Prob.* **24** (2), 932–960 (1996).

[13] P. Bougerol. Oscillation de produits de matrices aléatoires dont l'exposant de Lyapunov est nul. // В сборнике: *Lyapunov exponents* (L. Arnold and V. Wihstutz, eds.) *Lect. Notes Math.* **1186**, 27–36, Springer-Verlag, Berlin (1986).

[14] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of Random Matrices with Application to Schrödinger Operators.* // Birkhäuser Boston (1985).

[15] K.-L. Chung. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities.* // Springer-Verlag (1967).

[16] E. Csáki. On the lower limits of maxima and minima of Wiener process and partial sums. // *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **43**, 205–221 (1978).

[17] P. Deheuvels and P. Revész. Simple random walk on the line in random environment. // *Probab. Th. Relat. Fields* **72**, 215–230 (1986).

[18] G. Fayolle, V.A. Malyshev and M.V. Menshikov. *Constructive Theory of countable Markov Chains.* // Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[19] A.S. Gajrat, V.A. Malyshev and A.A. Zamyatin. Two-sided evolution of a random chain. // *Markov Processes Relat. Fields* **1**, 281–316 (1995).

[20] F. den Hollander, M.V. Menshikov, S.E. Volkov. Two problems about Markov chains in a random field of traps. // *Markov Processes Relat. Fields* **1**, 185–202 (1995)

[21] Y. Hu, Z. Shi. The limits of Sinai's simple random walk in random environment. // Preprint Univ. Paris VI (1997).

[22] F.I. Karpelevich, M.Ya. Kelbert and Yu.M. Suhov. The boundedness of branching Markov processes. // В сборнике: *The Dynkin Festschrift. Markov Processes and their Applications* (M. Freidlin, ed.). *Progress in Probability* **34**, 143–153. Boston, Birkhauser (1994).

[23] F.I. Karpelevich and Y.M. Suhov. A criterion of boundedness of discrete branching random walk. // *Classical and Modern Branching Processes* (eds. K. Athreya and P. Jagers). IMA volumes in mathematics and its applications **84**, 141–156. N.Y., Springer-Verlag (1996).

[24] H. Kesten, M.V. Kozlov and F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. // *Compositio Mathematica* **30**, Fasc. 2, 145–168 (1975).

[25] E.S. Key. Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment. // *Ann. Prob.* **12**, No. 2, 529–560 (1984).

[26] J. Lamperti. Criteria for stochastic processes II. // *J. Math. Anal. Appl.* **7**, 127–145 (1963).

[27] F. Ledrappier. Quelques propriétés des exposants caractéristiques. // *Lect. Notes Math.* **1097**, Springer, Berlin (1984).

[28] M.V. Menshikov and S.E. Volkov. Recurrence and transience criteria for branching random walks. // *Markov Processes Relat. Fields* **3**, 225–241 (1997).

[29] E. Nummelin and P. Tuominen. The rate of convergence in Orey's theorem for Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory. // *Stoch. Proc. Appl.* **15**, 295–311 (1983).

[30] F. Solomon. Random walks in a random environment. // Ph.D. Thesis, Cornell University (1972). См. также *Ann. Prob.* **3**, 1–31 (1975).

Работы автора по теме диссертации

1) *M.V. Menshikov, S.Yu. Popov.* Exact power estimates for countable Markov chains // *Markov Processes and Related Fields,* Volume 1, Number 1, 1995 (22 стр.).

   В этой работе С.Ю. Попову принадлежат доказательства следующих утверждений: Теорем 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.2, 4.2, Лемм 1.1, 1.3, 1.4, 2.2; остальные результаты принадлежат М.В. Меньшикову.

2) *С.Ю. Попов.* Случайные блуждания с ветвлением в случайной среде // *Деп. ВИНИТИ РАН,* N2099–B97, 28 стр., от 26.06.97.