Equações Diferenciais Parciais I - MM433
3a. prova, 17/12/2014

Questão 1. **(Lista)** **(2,5 pontos)** Sejam $s > n/2$ e $k \in \mathbb{N}$. Usando que $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$, com a inclusão contínua (i.e. $\|\cdot\|_{\sup} \leq \text{const.}\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$), mostre que $H^{s+k}(\mathbb{R}^n) \subset C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ com a inclusão contínua, i.e. $\partial^\alpha f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|\partial^\alpha f\|_{\sup} \leq \text{const.}\|f\|_{H^{s+k}(\mathbb{R}^n)}$ para quaisquer $f \in H^{s+k}(\mathbb{R}^n)$ e multiíndice α com $|\alpha| \leq k$.

2. **(Lista)** **a) (0,5)** Escreva o sistema de EDO características para a EDP quaselinear $F(\nabla u, u, x) = \mathbf{b}(x,u) \cdot \nabla u + c(x,u) = 0$.

b) (2,0) Resolva o problema

$$uu_{x_1} + u_{x_2} = 1, \quad u(x_1, x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

3. **a) (1,5)** Calcule a transformada de Fourier da função $\gamma_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|^2}$ $(a > 0)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

b) (1,5) Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(0) = 0$. Mostre a fórmula de inversão $(\hat{\varphi})\check{}(x) = x$ no ponto $x = 0$, i.e. mostre que $(\hat{\varphi})\check{}(0) = 0$, ou seja, mostre que a integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$ vale zero. (*Lembrete*: $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(x)$, $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.)

4. **a) (1,0)** O operador $-\Delta = H_0$ tem autovetores (autofunções) em $L^2(\mathbb{R}^n)$? (*Lembrete*: a função nula (q.t.p.) não é autofunção.)

b) (1,0) O operador $-\Delta$ tem autovetores em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$? (*Sugestão*: calcule $-\Delta\varphi_\xi$, onde $\varphi_\xi(x) = \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.)