DM–IMECC–UNICAMP
Equações Diferenciais Parciais I - MM433
2a. prova, 29/11/2017*

Questão 1 **(Lista).** **(2,5 pontos)** Dê uma demonstração "direta" (sem usar o TVM) do Princípio do Máximo Fraco para a equação do calor: *Se* Ω *é um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $T > 0$, *é uma solução da equação do calor,* $u_t - \Delta u = 0$ *em* Ω_T *então* $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$, $\Gamma_T = (\partial\Omega \times [0,T)) \cup (\Omega \times \{t = 0\})$. *Sugestão*: Defina $u^\varepsilon = u - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$, e mostre que $\max_{\overline{\Omega_T}} u^\varepsilon$ não pode ser atingido em um ponto em Ω_T.

2 **(Lista).** **a)** **(0,5)** Enuncie a fórmula de D'Alembert.

b) **(2,0)** Deduza formalmente uma fórmula para a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \quad (\mathbb{R}_+ = (0,\infty)) \\ u = g,\ u_t = h & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{em } \{x = 0\} \times (0,\infty), \end{cases}$$

$g(0) = h(0) = 0$.

3. **(2,5)** Seja Φ a solução fundamental da equação do calor no $\mathbb{R}^n$ e f uma função de classe C_1^2 e com suporte compacto em $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Mostre que

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)[(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) f(x-y, t-s)] dyds \\ = &\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y, 0) dy, \end{aligned}$$

qualquer que seja $t > 0$.

4. **(2,5)** Mostre que o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

tem no máximo uma solução $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ satisfazendo $\lim_{|x|\to\infty} |x|^{n-1} |\nabla u(x,t)| u_t(x,t) = 0$, uniformemente em relação a $t > 0$ em qualquer intervalo limitado. *Sugestão*: deduza uma fórmula para a *função energia* $e(t) = \frac{1}{2}\int_{B_r} u_t^2 + |\nabla u|^2 dx$ na bola $B_r = B_r(0)$, para cada $r > 0$ fixado, e depois tome o limite quando $r \to \infty$.

---

*Adiada para 30/11 a pedido.