DM–IMECC–UNICAMP – Álgebra Linear - MA327 - T. #
Prof. Marcelo M. Santos – **3a. prova, 02/07/2010**

**Aluno:** ______________________ RA: __________

**Assinatura (idêntica à do RG):** ______________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações.* (RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS!). Ponha suas resoluções nas folhas em branco em ordem crescente. NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular! Cada questão vale 2,0 pontos.

**Questão 1.** Calcule os autovalores e autovetores ($AX = \lambda X$) da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para cada auto-espaço $V_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3\,;\, AX = \lambda X\}$ ($\lambda$ autovalor).

**2.** Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão três e $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $V$. Se $T : V \to V$ é o operador linear definido por $T(xu_1 + yu_2 + zu_3) = (3x + 2y + z)u_1 + (y - z)u_2 + 2zu_3$, calcule o polinômio característico de $T$ e decida se $T$ se é um operador linear diagonalizável.

**3.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**a) (1,0 ponto)** Sem fazer contas, justifique que existe uma matriz $P$ ortogonal ($P^tP = I_3$) tal que $P^tAP$ seja uma matriz diagonal.

**b) (1,0 ponto)** Calcule uma matriz $P$ ortogonal ($P^tP = I_3$) tal que $P^tAP$ seja uma matriz diagonal.

**4.** Calcule o polinômio característico $p(t)$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ (qualquer), sabemos que existem polinômios $q(t)$, $r(t)$ tais que $t^k = p(t)q(t) + r(t)$, sendo o grau de $r(t)$ menor do que 2, ou seja, $r(t) = c_0 + c_1 t$. Substitua os autovalores (as raízes de $p(t)$) na equação $t^k = p(t)q(t) + r(t)$ e determine $c_0$ e $c_1$. Daí, use o Teorema de Caley-Hamilton ($P(T) = 0$) para determinar $A^k$ (qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$).

**5.** Sejam $A$ e $B$ matrizes invertíveis de mesma ordem. Mostre que as matrizes $AB^{-1}$ e $B^{-1}A$ possuem os mesmos autovalores.

Boa prova!

# Gabarito

**Questão 1** *Calcule os autovalores e autovetores* ($AX = \lambda X$) *da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Determine uma base para cada auto-espaço* $V_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3\,;\, AX = \lambda X\}$ ($\lambda$ *autovalor*).

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

**0,5 pontos até aqui**.

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0;$

$\lambda = 1,\ 2.$

**+ 0,5 pontos**.

Autovetores, auto-espaços e bases:

$\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x = 0 \\ z = 0 \end{cases};$$

$x = z = 0;$

$V_1 = \{(0, y, 0)\,;\, y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0)\,;\, y \in \mathbb{R}\};$

base: $\{(0,1,0)\}$.

**+ 0,5**

$\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x - y = 0$;

$y = 3x$;

$V_2 = \{(x, 3x, z)\,;\, x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,3,0) + z(0,0,1)\,;\, x, z \in \mathbb{R}\}$;

base: $\{(1,3,0),\ (0,0,1)\}$.

**+ 0,5**

**Questão 2.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão três e $\beta = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ uma base de $V$. Se $T : V \to V$ é o operador linear definido por $T(xu_1 + yu_2 + zu_3) = (3x + 2y + z)u_1 + (y - z)u_2 + 2zu_3$, calcule o polinômio característico de $T$ e decida se $T$ se é um operador linear diagonalizável.*

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3) = 3u_1 \\ T(u_2) &= T(0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3) = 2u_1 + u_2 \\ T(u_3) &= T(0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3) = u_1 - u_2 + 2u_3 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad [T]_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**0,5**

<u>Polinômio característico</u>:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det([T]_\beta - \lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3). \end{aligned}$$

**+ 0,5**

Raízes de $\lambda^2 - 4\lambda + 3$:

$$\frac{1}{2}(4 - \sqrt{16 - 12}) = \frac{1}{2}(4 \pm 2) = 1,\ 3.$$

**+ 0,5**

Logo, as raízes de $p(\lambda)$ (os autovalores de $T$) são distintos $(1, 2, 3)$ e então, por um Teorema da matéria, temos que $T$ é diagonalizável. **+ 0,5**

**Questão 3.** *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**a) (1,0 ponto)** *Sem fazer contas, justifique que existe uma matriz $P$ ortogonal ($P^tP = I_3$) tal que $P^tAP$ seja uma matriz diagonal.*

**b) (1,0 ponto)** *Calcule uma matriz $P$ ortogonal ($P^tP = I_3$) tal que $P^tAP$ seja uma matriz diagonal.*

**a)** A matriz $A$ é simétrica, logo, por um Teorema da matéria, vale o resultado. **1,0 ponto**

**b)** Sabemos que uma tal matriz $P$ é formada por colunas de autovetores ortonormais da matriz $A$. **0,4 pontos até aqui**

Autovalores de $A$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$-\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$-\lambda(\lambda^2 - 4\lambda) = 0$$
$$-\lambda^2(\lambda - 4) = 0;$$
$$\lambda = 0,\ 4.$$

**+ 0,2**

Autovetores:

$\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$2y + 2z = 0$$
$$z = -y$$
$$(x, y, z) = (x, y, -y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1)$$

$(1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ são autovetores ortonormais.

**+ 0,2**

$\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x = 0$$

$$2y - 2z = 0$$

$$x = 0, \ z = y$$

$$(x, y, z) = (0, y, y) = y(0, 1, 1).$$

$(1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ são autovetores ortonormais. + **0,2**

(Um dos autovetores também pode ser obtido fazendo o produto vetorial de outros dois autovetores ortonormais.)

**Questão 4.** *Calcule o polinômio característico $p(t)$ da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Dado $k \in \mathbb{N}$ (qualquer), sabemos que existem polinômios $q(t)$, $r(t)$ tais que $t^k = p(t)q(t) + r(t)$, sendo o grau de $r(t)$ menor do que 2, ou seja, $r(t) = c_0 + c_1 t$. Substitua os autovalores (as raízes de $p(t)$) na equação $t^k = p(t)q(t) + r(t)$ e determine $c_0$ e $c_1$. Daí, use o Teorema de Caley-Hamilton ($P(T) = 0$) para determinar $A^k$ (qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$).*

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t = t(t-4)$$

**0,2**

Raízes: $t = 0, \ 4$

+ **0,2**

Substituindo as raízes em $t^k = p(t)q(t) + r(t)$, obtemos $c_0 = 0$ e $c_1 = 4^{k-1}$.

+ **0,5**

Daí, usando o Teorema de Cayley-Hamilton, obtemos:

$$A^k = P(A)q(A) + r(A) = r(A) = 4^{k-1}A = 4^{k-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

+ **1,1**

**Questão 5.** *Sejam $A$ e $B$ matrizes invertíveis de mesma ordem. Mostre que as matrizes $AB^{-1}$ e $B^{-1}A$ possuem os mesmos autovalores.*

Os autovalores de uma matriz (quadrada) $C$ qualquer são as raízes do seu polinômio característico $p(t) = \det(C - t)$. **0,5**

$$\begin{aligned}
\det(AB^{-1} - t) &= \det\left((A - tB)B^{-1}\right) \\
&= \det\left(B(B^{-1}A - B^{-1}tB)B^{-1}\right) \\
&= \det\left(B(B^{-1}A - t)B^{-1}\right) \\
&= (\det B)\left(\det(B^{-1}A - t)\right)\left(\det B^{-1}\right) \\
&= \det(B^{-1}A - t)
\end{aligned}$$

logo, os polinômios característicos de $AB^{-1}$ e $B^{-1}A$ são iguais. **+ 1,5**