DM–IMECC–UNICAMP
Geometria Analítica e Vetores - MA141 - Turma Z
Prof. Marcelo M. Santos
3a. prova, 01/07/2009

Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura: ___________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações; Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco na ordem crescente e da seguinte maneira:*
1a. Folha - Questão 1; 2a. Folha - Questão 2;
3a. Folha - Questão 3; 4a. Folha - Questão 4.
A última folha e o verso da folha de questões podem ser usados para rascunho.
Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.

1. a) (1,5 pontos). Identifique a cônica dada em coordenadas polares, determine a sua equação em coordenadas cartesianas e faça um esboço do seu gráfico:

$$i)\ r = -3\cos\theta; \quad ii)\ r = \frac{5}{2-2\cos\theta}; \quad iii)\ r = \frac{6}{3+\text{sen}\theta}.$$

b) (1,5 pontos). Identifique a cônica dada por equações paramétricas ($t \in \mathbb{R}$) e faça um esboço do seu gráfico:

$i)\ x = -3\cos^2 t,\ y = -3\cos \text{sen}t; \quad ii)\ x = \cosh t,\ y = \text{senh}t;$
$iii)\ x = \cos t,\ y = 2\text{sen}t.$

(*Lembrete:* $\cosh t := (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$, $\text{senh}t := (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$)

2. (3,0 pontos). Identifique a quádrica e faça um esboço do seu gráfico:

$$i)\ x^2 - y^2 + z^2 = 1; \quad ii)\ x^2 + 4z^2 = 4; \quad iii)\ x^2 + z + y^2 = 0$$
$$iv)\ x^2 + 4y^2 = z^2; \quad v)\ 2z = \frac{x^2}{4} - y^2; \quad vi)\ y^2 - x^2 - z^2 = 9.$$

3. a) (1,25 pontos). Calcule a equação da superfície cilíndrica cujos curva diretriz e vetor paralelo à reta geratriz são $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $v = (0, 2, -1)$.

b) (1,25 pontos). Calcule a equação da superfície cônica cuja curva diretriz é $y = x^2$, $z = 2$ e tem v´értice na origem $(0,0,0)$.

4. a) (0,5 pontos) Escreva a quádrica $2xy + z = 0$ na forma matricial

$$X^t AX + KX = 0;$$

b) (0,5 pontos) Determine os autovalores $(\det(A - \lambda) = 0)$ e autovetores $((A - \lambda)X = 0)$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

b) (1,5 pontos) Determine um sistema de coordenadas cartesianas $x'y'z'$ em relação ao qual a quádrica acima se escreve como $(y')^2 - (z')^2 + x' = 0$; mostre como chegar nesta equação.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1. a).

i) Uma esfera com centro em $(-3/2, 0)$ (c.c.) ou $(\pi, 0)$ (c.p.) e raio $3/2$.

(**0,5/3 pontos** até aqui.)

Equação em c.c. ($x = r\cos\theta, y = \text{sen}\theta$):

$$
\begin{aligned}
&r^2 = -3r\cos\theta \\
&x^2 + y^2 = -3x
\end{aligned}
$$

(+ **0,5/3 pontos** até aqui.)

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} + y^2 = \tfrac{9}{4} \\
&(x + \tfrac{3}{2})^2 + y^2 = \tfrac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

Esboço do gráfico: + **0,5/3 pontos**.

ii)

$$r = \frac{5/2}{1 - \cos\theta} = \frac{de}{1 - e\cos\theta}, \quad e = 1, d = 5/2;$$

uma parábola com diretriz $x = -5/2$ (em c.c.) e foco $(0, 0)$.

(**0,5/3 pontos** até aqui.)

Equação em c.c. ($x = r\cos\theta, y = \text{sen}\theta$):

$$
\begin{aligned}
&r(2 - 2\cos\theta) = 5 \\
&2r - 2r\cos\theta = 5 \\
&2r - 2x = 5 \\
&2r = 2x + 5 \\
&4r^2 = (2x + 5)^2 \\
&4(x^2 + y^2) = (2x + 5)^2 \\
&4(x^2 + y^2) = 4(x + 5/2)^2 \\
&(x^2 + y^2) = (x + 5/2)^2
\end{aligned}
$$

(+ **0,5/3 pontos** até aqui.)

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = x^2 + 5x + 25/4 \\
&y^2 = 5x + 25/4 \\
&x = y^2/5 - 5/4
\end{aligned}
$$

Esboço do gráfico: + **0,5/3 pontos**.

iii)

$$r = \frac{2}{1+\frac{1}{3}\text{sen}\theta} = \frac{de}{1+e\cos\theta}, \quad e = 1/3, d = 6;$$

uma elipse com diretriz $y = 6$ (em c.c.) e foco $(0,0)$.

(**0,5/3 pontos** até aqui.)

Equação em c.c. ($x = r\cos\theta, y = \text{sen}\theta$):

$$\begin{aligned}
&r(3+\text{sen}\theta) = 6\\
&3r + r\text{sen}\theta = 6\\
&3r + y = 6\\
&9r^2 = (6-y)^2\\
&9(x^2+y^2) = (6-y)^2
\end{aligned}$$

(+ **0,5/3 pontos** até aqui.)

$$\begin{aligned}
&9x^2 + 9y^2 = 36 - 12y + y^2\\
&9x^2 + 8y^2 + 12y = 36\\
&9x^2 + 8(y+\tfrac{3}{2})^2 = 18\\
&\frac{x^2}{2} + \frac{(y+\frac{3}{2})^2}{9/4} = 1
\end{aligned}$$

Esboço do gráfico: + **0,5/3 pontos**.

b) i) $x = f(t)\cos t$, $y = f(t)\text{sen}t$, $\quad f(t) = -3\cos t$;

(**0,5/3 pontos**.)

então estas são equações paramétricas da curva descrita pela equação em c.p. $r = f(\theta) = -3\cos\theta$ (conforme visto em aula e exemplo do livro-texto) a qual descreve um círculo com centro em $(-3/2, 0)$ (em c.c.) e raio $3/2$.

(+ **0,5/3 pontos**.)

Esboço do gráfico: + **0,5/3 pontos**.

ii) $x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$; (**0,5/3 pontos**.)

então as equações dadas são equações paramétricas de uma hipérbole.

(+ **0,5/3 pontos**.)

Esboço do gráfico: + **0,5/3 pontos**.

iii) $x^2 + \frac{y^2}{2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$; (**0,5/3 pontos**.)
então as equações dadas são equações paramétricas de uma elipse.
(+ **0,5/3 pontos**.)

Esboço do gráfico: + **0,5/3 pontos**.

Questão 2.

Identificação da quádrica: **0,25 pontos**;
Esboço do gráfico: **0,25 pontos**.

i) Hiperbolóide de uma folha, com 'eixo y';

ii) Cilindro elíptico, com 'eixo y';

iii) Parabolóide elíptico, com 'eixo z e abaixo do plano xy (concavidade para baixo);

iv) Cone elíptico, com 'eixo z';

v) Parabolóide hiperbólico, com 'eixo z';

vi) Hiperbolóide de duas folhas, com 'eixo y'.

Questão 3. **a)** Curva diretriz, no plano xy: $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$.
(**0,25 pontos**.)

Fórmula da equação da superfície cilíndrica: $f(x - az, y - bz) = 0$, se o vetor v paralelo à reta geratriz está na forma $v = (a, b, 1)$. (+ **0,5 pontos**.)

Cálculo da equação:

$$v = (0, -2, 1), \quad f(x - az, y - bz) = f(x - 0z, y + 2z) = x^2 - (y + 2z)^2 - 1;$$

logo, a equação pedida é $x^2 - (y + 2z)^2 = 1$ (*uma forma de apresentá-la*).
(+ **0,5 pontos**.)

b) Curva diretriz, no plano $z = 2$: $f(x, y) = x^2 - y = 0$.
(**0,25 pontos**.)

Fórmula da equação da superfície cônica, com vértice na origem e curva diretriz $f(x, y) = 0$ no plano $z = c$: $f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0$.
(+ **0,5 pontos**.)

Cálculo da equação:

$$f(\frac{cx}{z},\frac{cy}{z}) = f(\frac{2x}{z},\frac{2y}{z}) = (\frac{2x}{z})^2 - \frac{2y}{z} = \frac{4x^2}{z^2} - \frac{2y}{z};$$

logo, a equação pedida é $4x^2 - 2yz = 0$ (*uma forma de apresentá-la*).

(+ **0,5 pontos**.)

Questão 4. a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(**0,25 pontos**.)

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

então

$$X^t A X + K X = 0.$$

(+ **0,25 pontos**.)

b) e **c)** <u>Autovalores</u>:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)^0 = 0,$$

logo os autovalores são $\lambda = 0, \pm 1$. (**0,25 pontos**.)

<u>Autovetores</u>:

$\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$y = x \quad = 0,$$

$U_1 = (0,0,1)$ é um autovetor, unitário, associado ao autovalor $\lambda = 0$;

(+ **0,25 pontos**.)

$\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$x + y = 0, z = 0,$$

$U_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ é um autovetor, unitário, associado ao autovalor $\lambda = 0$;

(+ **0,25 pontos**.)

$\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$x - y = 0, z = 0,$$

$U_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ é um autovetor, unitário, associado ao autovalor $\lambda = 0$;

(+ **0,25 pontos**.)

<u>Novas coordenadas</u>:

$$X = \left[\begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array}\right] X',$$

(+ **0,5 pontos**.)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' + y')) \\ y & = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' - y') \\ z & = x'. \end{array} \right.$$

(+ **0,5 pontos**.)