Equações Diferenciais Parciais I - MM433

2a. prova, 21/11/2014

Questão 1. **(Lista)**

a) (0,5 pontos) Escreva a fórmula explícita para a solução limitada do problema $\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$

b) (2,0) Usando a fórmula do item **a)**, deduza uma fórmula para a solução do problema $\begin{cases} u_t - \Delta u + u = f, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$

2. **(Lista)**

a) (2,0) Seja u uma solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{em } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h, & \text{em } \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$

com g e h tendo suporte compacto. Usando a fórmula de D'Alembert, mostre que $u(\cdot,t)$ também tem suporte compacto, para cada $t > 0$. Mostre que a função energia $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_t^2 + u_x^2)dx$ é constante.

b) (0,5) Mostre que o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f, & \text{em } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h, & \text{em } \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$

tem no máximo uma solução.

3. **(2,5)** Sejam U um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave, $T > 0$, $U_T = \Omega \times (0,T]$, e $u \in C^\infty(U_T)$ uma solução da equação do calor $u_t - \Delta u = 0$ em U_T. Mostre que se ζ é uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\zeta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^{n+1}/U_T$ e $\zeta \equiv 1$ em um aberto $V \subset\subset (U \times (0,T))$, entao vale a fórmula

$$u(x,t) = \int_0^t \int_U K(x,t,y,s)\, u(y,s)\, dyds, \quad \text{para todo } (x,t) \in V,$$

com $K(x,t,y,s) = \Phi(x-y,t-s)\,(\zeta_s(y,s) + \Delta\zeta(y,s)) + 2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\cdot\nabla\zeta(y,s)$, onde Φ é a solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^n$.

4. a) (1,0) Mostre que se $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ satisfaz a equação da onda $\Box u \equiv u_t - \Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ então $w(x,t) = ⨍_{S_r(0)} u(y,t)\, d\sigma_y,\ r = |x|$, também satisfaz a equação da onda $\Box w = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

b) (1,5) Seja $n = 2k+1$ ($n \geq 3$ ímpar). Usando o Lema sobre regra de derivação visto em aula (do livro-texto) mostre que se $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ satisfaz a equação da onda $\Box u \equiv u_t - \Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, a função $\tilde{U}(r,t) := (\frac{1}{r}\frac{d}{dr})^{k-1}\left(r^{2k-1}⨍_{S_r(x)} u(y,t)\, d\sigma_y\right)$ satisfaz a equação da onda $\tilde{U}_{tt} = \tilde{U}_{rr}$ em $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. Além disso, mostre também que $\tilde{U}\big|_{r=0} = 0$.

Observação: *a resolução deste item só no caso* $n = 3$ *valerá* **1,0 ponto**.