DM–IMECC–UNICAMP
Equações Diferenciais Parciais I - MM433
2a. prova, 16/10/2017

Todas as questões valem 2,5 pontos.

Questão 1 **(Lista).** Sejam b uma função limitada de classe C^1 em $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, $0 < \tau < T$ tais que $\mathrm{spt}\psi \subset \mathbb{R} \times (\tau, T)$ e v a solução do problema $v_t + bv_x = \psi$, $\psi|_{t=T} = 0$. Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} |v_x(x,t)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |v_x(x,\tau)|dx$ para todo $t \in (0, \tau)$.

2 **(Lista).** Seja $g \in C(S^{n-1})$ (S^{n-1} é a esfera de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^n$). Mostre que

$$\lim_{x \to x_0, |x|<1} \frac{1-|x|^2}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \frac{g(y)}{|x-y|^n} d\sigma_y = g(x_0)$$

para qualquer $x_0 \in S^{n-1}$.

3. Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Prove a estimativa

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} n^2}{\omega_n r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

para quaisquer função harmônica u em Ω, $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$ e $i = 1, \cdots, n$.

4. Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx < \infty$, para algum $p \in [1, \infty)$. Mostre que $u \equiv 0$.