DM–IMECC–UNICAMP – Álgebra Linear - MA327 - T. #
Prof. Marcelo M. Santos – **1a. prova, 21/05/2010**

Aluno: ______________________________ RA: ____________

Assinatura (idêntica à do RG): __________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações.* (RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS!). Ponha suas resoluções nas folhas em branco em ordem crescente. NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular! Cada questão vale 2,0 pontos.

Questão 1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (z, x - y, -z).$$

a) Encontre uma base para o núcleo de T.

b) Sem encontrar uma base para a imagem de T, calcule a dimensão da imagem de T.

2. Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$$

é invertível e determine o operador inverso T^{-1} **usando a matriz** $[T]^{\beta}_{\beta}$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

3. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 com um produto interno $< \cdot, \cdot >$, $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de V, S o subespaço vetorial gerado por $\gamma = \{u_1, u_2\}$, e T a transformação de V em S definida por

$$T(u) = < u, u_1 > u_1 + < u, u_2 > u_2, \quad u \in V.$$

a) Calcule a matriz de T em relação às bases β e γ.

b) Mostre que T satisfaz

$$< Tu, v > = < u, Tv >, \quad \forall\, u, v \in V$$

(i.e. T é um '*operador simétrico*').

4. Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau menor do que ou igual a dois, restritos ao intervalo $[0, 1]$, munido do produto interno $< p, q > = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para transformar a base $\{1, t, t^2\}$ em uma base ortonormal de V.

5. Sejam V o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, -1, 1)$, e $P_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$ um ponto (arbitrário) do $\mathbb{R}^4$. Encontre o ponto (vetor) v de V tal que $\|v - P_0\| \leq \|u - P_0\|$ para qualquer $u \in V$, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual (Euclideana) do $\mathbb{R}^4$.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear dada por*

$$T(x, y, z) = (z, x - y, -z).$$

a) *Encontre uma base para o núcleo de* T*.*

b) *Sem encontrar uma base para a imagem de* T*, calcule a dimensão da imagem de* T*.*

a)
Núcleo:

$$T(x, y, z) = 0 \equiv (0, 0, 0)$$
$$(z, x - y, -z) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ -z &= 0 \end{cases}$$
$$z = 0,\ x = y$$

(0,5 pontos até aqui)

Então $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\, z = 0, x = y\} = \{(x, x, 0)\, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 0)\, x \in \mathbb{R}\}$, logo, $N(T)$ é gerado pelo vetor $(1, 1, 0)$, ou seja, $\{(1, 1, 0)\}$ é uma base para o núcleo $N(T)$.

(+ 0,5 pontos)

b) Pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem,
$\dim N(T) + \dim I(T) = \dim \mathrm{Dom(T)} = 3.$ **(0,5 pontos até aqui)**
Pelo item **a)**, $\dim N(T) = 1$, então segue-se que a dimensão da imagem de T é 2. **(+ 0,5 pontos)**

Questão 2. *Mostre que o operador* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definido por*

$$T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$$

é invertível e determine o operador inverso T^{-1} **usando a matriz** $[T]^\beta_\beta$, *onde* β *é a base canônica do* $\mathbb{R}^3$.

Como o domínio e o contra-domínio de T têm a mesma dimensão, por um teorema da matéria, temos que T é invertível se, e somente se, o seu núcleo é o espaço nulo. **(0,5 pontos)**

Calculemos então o seu núcleo:

$$\begin{array}{l} T(x,y,z) = 0 \equiv (0,0,0) \\ (x-y, 2y, y+z) = (0,0,0) \\ \left\{ \begin{array}{rl} x - y & = 0 \\ 2y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{array} \right. \\ y = 0,\ x = y = 0, z = -y = 0\,. \end{array}$$

$N(T) = \{0\}$. Então T é invertível. **(+ 0,5 pontos)**.

A matriz $[T]^\beta_\beta$: Sejam e_1, e_2, e_3 os vetores da base canônica. Temos

$$T(e_1) = (1, 0, 0) = e_1,\ T(e_2) = (-1, 2, 1),\ T(e_3) = (0, 0, 1) = e_3\,,$$

então

$$[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(+ 0,25)

$$[T^{-1}]^\beta_\beta = ([T]^\beta_\beta)^{-1}$$

(+ 0,25)

Cálculo de $([T]^\beta_\beta)^{-1}$: Fazendo (poucas) operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada (as contas devem constar na prova)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right],$$

logo

$$([T]_\beta^\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(+ 0,25)

Daí, temos

$$\begin{aligned} [T^{-1}(x,y,z)]_\beta &= [T^{-1}]_\beta^\beta [(x,y,z)]_\beta = ([T]_\beta^\beta)^{-1}[(x,y,z)]_\beta \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y \\ z - \frac{1}{2}y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

logo, $T^{-1}(x,y,z) = (x + \frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}y,\ z - \frac{1}{2}y)$. **(+ 0,25)**

Questão 3. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 com um produto interno $< \cdot, \cdot >$, $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de V, S o subespaço vetorial gerado por $\gamma = \{u_1, u_2\}$, e T a transformação de V em S definida por*

$$T(u) = < u, u_1 > u_1 + < u, u_2 > u_2, \quad u \in V.$$

a) *Calcule a matriz de T em relação às bases β e γ.*

b) *Mostre que T satisfaz*

$$< Tu, v > = < u, Tv >, \quad \forall\, u, v \in V$$

*(i.e. T é um '*operador simétrico*').*

a)

$$\begin{aligned} T(u_1) &= < u_1, u_1 > u_1 + < u_1, u_2 > u_2 \\ T(u_2) &= < u_2, u_1 > u_1 + < u_2, u_2 > u_2 \\ T(u_3) &= < u_3, u_1 > u_1 + < u_3, u_2 > u_2 \end{aligned}.$$

(0,5)

Então a matriz de T em relação as bases dadas é

$$\begin{bmatrix} < u_1, u_1 > & < u_2, u_1 > & < u_3, u_1 > \\ < u_1, u_2 > & < u_2, u_2 > & < u_3, u_2 > \end{bmatrix}.$$

(+ 0,5)

b) Pela definição de T e propriedades de produto interno, temos

$$\begin{aligned} < T(u), v > &= \langle < u, u_1 > u_1 + < u, u_2 > u_2 \, , \; v \rangle \\ &=<< u, u_1 > u_1 \, , v \; > + << u, u_2 > u_2 \, , \; v \; > \\ &=<< u, u_1 > u_1 \, , v \; > + << u, u_2 > u_2 \, , v \; > \\ &=< u, u_1 >< \; u_1 \, , v \; > + < u, u_2 >< \; u_2 \, , v \; > \; . \end{aligned}$$

(0,5)

Daí, como o espaço V é real, segue-se que

$$\begin{aligned} < T(u), v > &=< \; u, < u_1, v > u_1 \; > + < \; u, < u_2, v > u_2 \; > \\ &= \langle u, < u_1, v > u_1 + < u_2, v > u_2 \rangle =< u, T(v) > \; . \end{aligned}$$

(+ 0,5)

Questão 4. *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau menor do que ou igual a dois, restritos ao intervalo $[0,1]$, munido do produto interno $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para transformar a base $\{1, t, t^2\}$ em uma base ortonormal de V.*

Sejam $p_1 = 1$, $p_2 = t$, $p_3 = t^2$, os elementos (vetores) da base a ser normalizada. Pelo processo de Gram-Schmidt, temos os vetores ortogonais:

$$\begin{aligned}
q_1 &= p_1 = 1 \\
q_2 &= p_2 - \tfrac{<p_2,q_1>}{\|q_1\|^2} q_1 = t - \tfrac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 1\,dt} \\
&= t - \frac{(t^2/2)\big|_0^1}{t\big|_0^1} \\
&= t - \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= p_3 - \tfrac{<p_3,q_1>}{\|q_1\|^2} q_1 - \tfrac{<p_3,q_2>}{\|q_2\|^2} q_2 \\
&= t^2 - \tfrac{\int_0^1 t^2\,dt}{\int_0^1 1\,dt} - \tfrac{\int_0^1 t^2(t-1/2)\,dt}{\int_0^1 (t-1/2)^2\,dt}(t-1/2)
\end{aligned}$$

(1,5 pontos até aqui)

$$\begin{aligned}
q_3 &= t^2 - (t^3/3)\big|_0^1 - \frac{\int_0^1 (t^3 - \frac{1}{2}t^2)\,dt}{((t-1/2)^3/3)\big|_0^1}(t-1/2) \\
&= t^2 - \tfrac{1}{3} - \frac{(t^4/4 - t^3/6)\big|_0^1}{((1/2)^3 - (-1/2)^3)/3)}(t-1/2) \\
&= t^2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{(1/4)/3}(t-1/2) \\
&= t^2 - \tfrac{1}{3} - (t - \tfrac{1}{2}) \\
&= t^2 - t + \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Para finalizar, basta dividirmos estes vetores pelas suas respectivas normas. Já calculamos acima, $\|q_1\|^2 = 1 \therefore \|q_1\| = 1$ e $\|q_2\|^2 = 1/12 \therefore \|q_2\| = 1/\sqrt{12}$.

(+ 0,5 pontos até aqui)

$$\begin{aligned}
\|q_3\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})^2\,dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2 + \tfrac{1}{3}t^2 - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{36})\,dt \\
&= \left(\tfrac{t^5}{5} - \tfrac{t^4}{2} + 4\tfrac{t^3}{9} - \tfrac{t^2}{6} + \tfrac{t}{36}\right)\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{36} = 1/180
\end{aligned}$$

$\therefore\ \|q_3\| = 1/(6\sqrt{5})$. **(+ 0,3 pontos)**

Questão 5. *Sejam V o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0,0)$, $u_3 = (0,0,-1,1)$, e $P_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$ um ponto (arbitrário) do $\mathbb{R}^4$. Encontre o ponto (vetor) v de V tal que $\|v - P_0\| \leq \|u - P_0\|$ para qualquer $u \in V$, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual (Euclideana) do $\mathbb{R}^4$.*

O vetor v é a projeção ortogonal do ponto P_0 no subespaço V:

$$P_0 = v + Q, \quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ Q \perp V \ \ (Q \perp u_j), \ \ j = 1,2,3.$$

(1,0 ponto até aqui)

Como os vetores u_j, $j = 1,2,3$, são (dois a dois) ortogonais (o aluno deve ter verificado isto na prova), temos que os escalares α_j são dados por (verificar)

$$\alpha_j = \frac{< P_0, u_j >}{\|u_j\|^2}, \quad j = 1,2,3\,,$$

onde $< \cdot\,, \cdot >$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^4$. **(+ 0,5 pontos)**

$$\begin{aligned} \tfrac{<P_0,u_1>}{\|u_1\|^2} &= \tfrac{x_0+y_0+z_0+w_0}{4} \\ \tfrac{<P_0,u_2>}{\|u_2\|^2} &= \tfrac{y_0-x_0}{2} \\ \tfrac{<P_0,u_3>}{\|u_3\|^2} &= \tfrac{w_0-z_0}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \tfrac{x_0+y_0+z_0+w_0}{4}u_1 + \tfrac{y_0-x_0}{2}u_2 + \tfrac{w_0-z_0}{2}u_3 \\ &= \left(\tfrac{x_0+y_0+z_0+w_0}{4} - \tfrac{y_0-x_0}{2}, \tfrac{x_0+y_0+z_0+w_0}{4} + \tfrac{y_0-x_0}{2}, \tfrac{x_0+y_0+z_0+w_0}{4} - \tfrac{w_0-z_0}{2}, \tfrac{x_0+y_0+z_0+w_0}{4} + \tfrac{w_0-z_0}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}(3x_0 - y_0 + z_0 + w_0, 3y_0 - x_0 + z_0 + w_0, x_0 + y_0 + 3z_0 - w_0, x_0 + y_0 + 3w_0 - z_0) \end{aligned}$$

(+ 0,5 pontos)